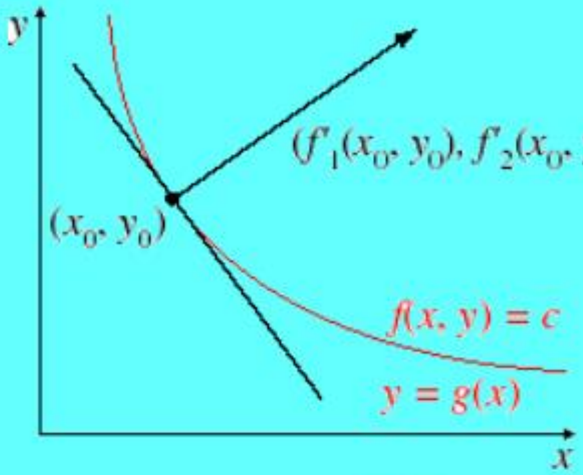
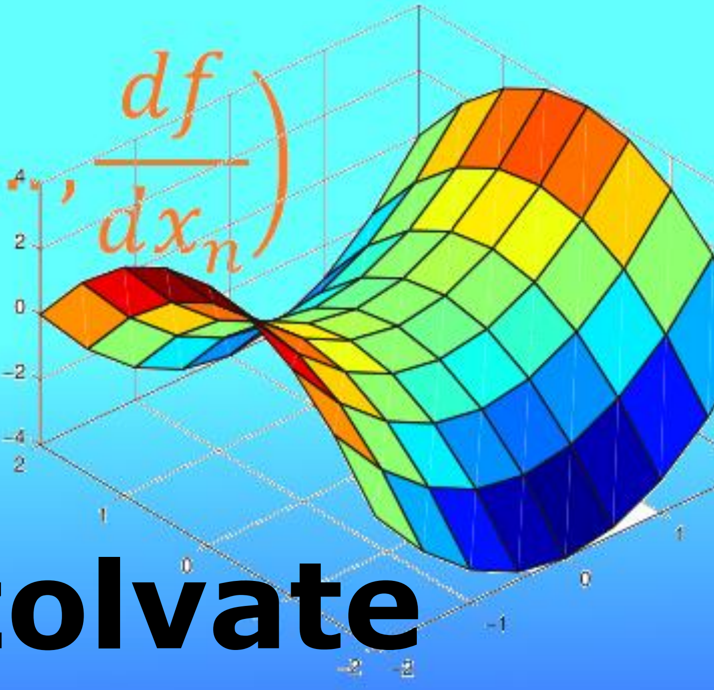
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e\,.$$

Nicolae Coman



$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \ldots, \frac{df}{dx_n}\right)$$



Exerciţii rezolvate de analiză matematică

Vol.1 – Numere reale

Cuprins

Cap. I. Inegalităţi

1. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $a > -1$, atunci:

$$(1+a)^n \geq 1+na,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \text{ (inegalitatea lui BERNOULLI)}$$

Rezolvare. Inegalitatea se demonstrează prin inducţie matematică.
Pentru $n = 1$ inegalitatea se verifică.
Presupunem inegalitatea adevărată pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ şi să arătăm că este valabilă şi pentru $n+1$.
Din $(1+a)^n \geq 1+na$ rezultă:

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)\cdot(1+na) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

Deci pasul de inducţie este verificat.

Cap. II. Şiruri

1. Se numeşte <u>şir de numere reale</u> o funcţie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Dacă $f(n) = a_n,\ n \in \mathbb{N}$, vom nota şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(a_n)_{n\geq 1}$ în cazul $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.
Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este <u>crescător</u> dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $a_n \leq a_{n+1}$ şi descrescător dacă $a_n \geq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se demonstreze că:

(i) dacă $q > 1$ atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = q^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, este crescător;

(ii) dacă $q \in (0,1)$, atunci şirul este descrescător.

Rezolvare. Se va ţine seama că:

$$a_{n+1} - a_n = q\, a_n - a_n = (q-1)a_n,$$

unde $q - 1 > 0$ dacă $q>1$ şi $q - 1 < 0$ dacă $q<1$.

Observaţie: Dacă $q<0$, atunci şirul este <u>alternant.</u>

---

2. Şirul real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte <u>mărginit</u> dacă există un $M \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc $|a_n| \leq M$.
Se numeşte <u>mărginit superior</u> dacă $a_n \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ şi mărginit inferior dacă $a_n \geq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = q^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că:
(i) dacă $q > 1$, atunci şirul este mărginit inferior, dar nemărginit superior;
(ii) dacă $q \in (0,1)$, atunci şirul este mărginit superior, dar nemărginit inferior.

Rezolvare.
(i) Şirul fiind strict crescător, avem $a_n > a_0$, deci este mărginit inferior. Acum să presupunem că există un $M \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a_n < M, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Deoarece $q > 1$, există un $\varepsilon > 0$ cu proprietatea $q = 1 + \varepsilon$. Atunci:

$$q^n = (1+\varepsilon)^n > 1 + n\,\varepsilon.$$

Dar dacă alegem un $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel încât $n > \frac{M-1}{\varepsilon}$, atunci: $1 + n\,\varepsilon > M$, deci $q^n > M$, contradicţie.
(ii) Demonstraţie similară.

---

3. Şirul real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte <u>convergent</u> cu limita $a \in \mathbb{R}$ dacă în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.
Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

Să se demonstreze următoarea teoremă (<u>definiţia cu ε a limitei unui şir</u>):

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cu limita $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă:
Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n_0(\varepsilon)$ (deci care depinde de ε) astfel încât:

$$|a_n - a| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon). \quad (1)$$

Rezolvare.
(i) Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cu limita $a \in \mathbb{R}$.
Conform definiţiei, orice vecinătate a lui a care conţine o infinitate de termeni ai şirului. Fie $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ o astfel de vecinătate, unde $\varepsilon > 0$.
Deoarece numai un număr finit de termeni ai şirului nu aparţin vecinătăţii, fie N_ε cel mai mare rang al termenilor care nu aparţin vecinătăţii. Dacă notăm $n_0(\varepsilon). = N_\varepsilon + 1$, atunci $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ adică relaţia (1).
(ii) Acum presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n_0(\varepsilon)$, astfel încât să aibă loc relaţia (1).
Fie $V \subset \mathbb{R}$ o vecinătate a lui a. Atunci există un $\varepsilon > 0$ astfel încât $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \subseteq V$. Conform celor presupuse, în $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ deci şi V în se află toţi termenii şirului, eventual cu excepţia celor de rang mai mic decât $n_0(\varepsilon)$.

4. Limita unui şir, dacă există, este unică.

Rezolvare. Presupunem că şirul (a_n) converge la L_1şi L_2, cu $L_1 \neq L_2$.
Rezultă că există N_1şi N_2 astfel încât:

$$|a_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} \text{ pentru orice } n > N_1 \text{ şi}$$

$$|a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} \text{ pentru orice } n > N_2$$

De aici rezultă că pentru orice $n > \max\{N_1, N_2\}$ avem:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| < |L_1 - L_2|,$$ ceea ce este absurd.

5. Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iar $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător denumere naturale. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = a_{k_n}$, se numeşte <u>subşir</u> al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Să se demonstreze că dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $a \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subşir al acestuia, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = a_{k_n}$ are limita a.

Rezolvare. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $|a_n - L| < \varepsilon$. De aici rezultă că pentru orice $n_k > N$ avem $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.

6. Orice şir convergent este mărginit.

Rezolvare. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.
Atunci există un $N(1)$ astfel că pentru orice $n > N(1)$ avem: $|a_n - L| < 1$ şi astfel:

$$|a_n| = |a_n - L| + |L| < 1 + |L| \text{ pentru orice } n > N(1).$$

Rezultă că pentru orice n are loc inegalitatea:

$$|a_n| \leq \max\{\, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N(1)}|, 1 + |L|\}.$$

7. <u>"Regula cleştelui".</u> Fie $(a_n), (b_n), (c_n)$ trei şiruri de numere reale care verifică inegalităţile:

$$a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă şirurile (a_n) şi (c_n) sunt convergente la aceeaşi limită L atunci şirul (b_n) converge la L.

Rezolvare. Deoarece $a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ avem : $a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ şi deci:

$|b_n - L| \leq \max\{ |a_n - L|, |c_n - L|\}, \qquad \forall\, n.$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $N_1 = N_1(\varepsilon)$ şi $N_2 = N_2(\varepsilon)$ astfel încât să avem:

$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N_1(\varepsilon)$ şi $|c_n - L| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N_2(\varepsilon)$

Rezultă că avem:

$|b_n - L| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N_3 = N_3(\varepsilon) = \max\{ N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

Deci $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

---

8. Demonstraţi că dacă un şir este crescător şi mărginit superior, atunci acesta este convergent, limita sa fiind marginea superioară a mulţimii termenilor şirului.
În mod similar pentru un şir descrescător şi mărginit inferior, limita în acest caz fiind marginea inferioară a termenilor şirului.
Acest rezultat este cunoscut ca Teorema lui WEIERSTRASS.

Rezolvare. Vom demonstra afirmaţia pentru un şir crescător şi mărginit.
Fie acesta (a_n). Fie $M_0 = \sup\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$.
Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $a_N > M_0 - \varepsilon$.
Dacă $n > N$, atunci $a_n \geq a_N$ şi deci $a_n > M_0 - \varepsilon$.
În plus $a_n \leq M_0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă astfel că:

$|a_n - M| < \varepsilon$ pentru $n > N$.

---

9. Teorema lui WEIERSTRASS-BOLZANO.
Dacă un şir de numere reale este mărginit, atunci acesta conţine un subşir convergent.

Rezolvare. Fie şirul mărginit a_n şi fie:

$S_N = \{ a_n \mid n > N \}$.

Dacă fiecare mulţime S_N are un cel mai mic element, atunci considerăm următorul subşir al şirului (a_n): $b_1 = a_{n_1} = \max S_1$; $b_2 = a_{n_2} = \max S_{n_1}$; $b_3 = a_{n_3} = \max S_{n\_2}$; ...
Şirul (b_n) este un subşir al şirului (a_n) şi este descrescător.
Deoarece (a_n) este mărginit, şirul (b_n) este şi el mărginit.
Rezultă astfel că şirul (b_n) este convergent. Dacă pentru un M, S_M nu are un cel mai mic element atunci pentru orice a_m cu $m > M$ există a_n cu $n > M$ există a_n cu $n > m$ şi $a_n > a_m$.
Fie $c_1 = a_{M+1}$ şi c_2 primul termen al şirului a_n după $c_1 = a_{M+1}$ care are proprietatea $c_2 > c_1$.
În continuare fie c_3 primul termen al şirului (a_n) după c_2 care verifică $c_3 > c_2$ şi aşa mai departe.
Se obţine în acest fel un subşir (c_n) al şirului (a_n) care este monoton crescător.
Deoarece (c_n) este mărginit, conform teoremei lui WEIERSTRASS, este convergent.

---

9. Criteriul CAUCHY *de convergenţă al unui şir de numere reale*.
Un şir (a_n) *de numere reale este convergent dacă şi numai dacă*:
pentru orice $\varepsilon > 0$ *există un* $N = N(\varepsilon)$ *astfel încât să avem*: $|a_p - a_q| < \varepsilon, \ \forall\, p, q > N(\varepsilon)$.

Rezolvare. Presupunem că şirul (a_n) converge la L şi considerăm un număr $\varepsilon > 0$.
un număr $\varepsilon > 0$. Există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

Prin urmare:

$\left|a_p - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $\left|a_q - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, p, q > N(\varepsilon)$.

Presupunem acum că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât:

$$\left|a_p - a_q\right| < 1, \forall\, p, q > N(\varepsilon).$$

Pentru $\varepsilon = 1$ şi $N_1 = N(1)$ ales astfel încât $\left|a_p - a_q\right| < 1$, $\forall\, p, q > N_1$, avem:

$$|a_n| = \left|a_n - a_{N_1+1} + a_{N_1+1}\right| \le \left|a_n - a_{N_1+1}\right| \le a_{N_1+1}, \quad \forall\ n \ge N_1 + 1$$

şi deci:

$$|a_n| \le \max\left\{|a_1|, |a_2|, \dots, \left|a_{N_1}\right|, \left|a_{N_1+1}\right| + 1\right\} = M, \quad \forall\, n.$$

Deci şirul (a_n) este mărginit şi, conform teoremei WEIERSTRASS-BOLZANO, conţine un subşir $\left(a_{n_k}\right)$ convergent.

Fie $L = \lim\limits_{n_k \to \infty} a_{n_k}$ şi ε un număr real pozitiv $\varepsilon > 0$. Există $N_1 = N_1(\varepsilon)$ astfel încât:

$\left|a_{n_k} - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n_k > N_1$ şi există $N_2 = N_2(\varepsilon)$ astfel încât:

$$\left|a_p - a_q\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, p, q > N_2.$$

De aici rezultă că pentru orice $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ avem:

$$|a_n - L| \le \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

unde n_k este ales astfel încât $n_k > N_3$.

---

10. Folosind definiţia limitei unui şir, demonstraţi că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Rezolvare. Considerăm $\varepsilon > 0$ şi punem condiţia:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon.$$

Rezultă că $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ sau $\dfrac{1}{n} < \varepsilon^2$ echivalent cu $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

Punem $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$, unde $\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$ este partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

Este evident că dacă $n > N(\varepsilon)$ atunci $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ şi inegalitatea $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$ este satisfăcută.

---

11. Şirul (a_n) tinde la $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $N(M)$ astfel încât:

$a_n > M$ oricare ar fi $n > N(M)$.

La fel se defineşte limita la $-\infty$.

Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Rezolvare. Pentru orice $M > 0$ putem lua $N(M) = M$.

---

12. Fie şirurile $(a_n), (b_n)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ ("regula sumei")

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ("regula produsului")

c) Dacă în plus $b_n \neq 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$ şi $b \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{("regula sumei")}$$

d) Pentru orice $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot a. \text{ ("înmulţirea cu un scalar").}$$

Rezolvare. a) Fie $\varepsilon > 0$ şi $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, există $N_1 = N_1(\varepsilon')$ astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon', \forall\ n > N_1$ şi există $N_2 = N_2(\varepsilon')$ astfel încât $|b_n - b| < \varepsilon', \forall\ n > N_2$.

Fie $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Pentru orice $n > N_3$ avem :

$$|a_n - b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' = \varepsilon.$$

b) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, există $M > 0$ astfel ca $|b_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Rezultă:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |b_n \cdot (a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| \leq$$
$$\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq M \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\quad \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, există N_1 şi N_2 astfel încât:

$$|a_n - a| < \varepsilon_1, \forall n > N_1 \quad \text{şi} \quad |b_n - b| < \varepsilon_2, \forall n > N_2.$$

Fie $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Pentru orice $n > N_3$ avem: $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon$.

c) Mai întâi arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$. Pentru aceasta evaluăm diferenţa $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right|$ şi găsim:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}.$$

Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ există N_1 astfel încât să avem: $|b_n - b| < \dfrac{1}{2}|b|$ pentru orice $n > N_1$.
Considerăm numărul:

$$M = \max\left\{\frac{2}{|b|}, \frac{1}{|b_1|}, \dots, \frac{1}{|b_{N_1}|}\right\}$$

şi remarcăm că are loc inegalitatea: $\left|\dfrac{1}{b_n}\right| < M$ pentru orice n.

Fie acum $\varepsilon > 0$ şi $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon \cdot |b|}{M}$. Pentru $\varepsilon' > 0$ există $N_2 = N_2(\varepsilon')$ astfel încât $|b_n - b| < \varepsilon'$

pentru orice $n > N_2$. De aici rezultă că $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$ pentru orice $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$.

Cu alte cuvinte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ şi apoi se aplică regula produsului.

d) Caz particular al regulii produsului.

---

13. Demonstraţi că şirurile:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1$$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \geq 1$$

sunt convergente şi au aceeaşi limită.
Această limită este notată cu e, după iniţiala lui LEONHARD EULER şi are valoarea aproximativă:

$$e = 2{,}718281828459\ldots \qquad \text{(numărul lui EULER)}$$

Exerciţiile ulterioare vor demonstra importanţa acestui număr.

Rezolvare. Se va demonstra mai întâi că:

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_n < y_n < \cdots < y_2 < y_1, \ \forall\, n \geq 1. \quad (1)$$

Avem:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n .$$

Dar, conform inegalităţii lui BERNOULLI (ex. I.1):

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} .$$

Rezultă mai departe că:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} > \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1, \qquad \forall\, n \geq 1 .$$

Aşadar, şirul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, format din termeni pozitivi, este strict crescător.

La fel şi pentru şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} > \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)^2 + 1}{n(n+2)^2} > 1,$$

unde din nou s-a utilizat inegalitatea lui Bernoulli.
Având în vedere faptul că $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă (1).
Deci, conform teoremei lui Weierstrass, există limitele $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
În continuare, din inegalităţile:

$$0 < y_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} =$$

$= \frac{e_n}{n} \le \frac{y_n}{n} < \frac{y_1}{n} \to 0$ (pentru $n \to \infty$) rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \mathrm{e}\ .$$

---

14. Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}\ .$$

Rezolvare. Se notează:

$$a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\,, \qquad n \ge 1.$$

Din inegalitatea:

$$k!\ \ge 2^k, \qquad \forall\, k \ge 1$$

(care se demonstrează prin inducţie matematică) rezultă:

$$0 < a_n \le 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3\,, \forall\, n \ge 1.$$

Aşadar, şirul a_n este mărginit şi deoarece este crescător, conform teoremei lui Weierstrass, a_n este convergent şi notăm: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Vom demonstra că $a = \mathrm{e}$. Conform exerciţiului anterior:

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n!} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

De aici rezultă că:

$$e_n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} = a_n\,, \qquad \forall\, n \ge 1.$$

Prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$ rezultă:

$$\mathrm{e}\ \le a. \qquad (1)$$

Dar, pentru un $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ se obţine $e \geq a_k, \forall\, k \geq 2$. Pentru $k \to \infty$ se obţine:

$$e \geq a. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că a este chiar numărul lui EULER.
Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)= e\ .$$

Cap. III. Serii de numere reale

1. O serie infinită de numere reale este un şir de numere reale (s_n)
al cărui termen general s_n are forma:
$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, unde (a_n) este un şir de numere reale dat (termenul general al seriei).
Seria se mai notează şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, iar $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se numeşte "şirul sumelor parţiale" ale seriei.

Dacă şirul sumelor parţiale (s_n) este convergent, se spune că seria este convergentă, iar limita şirului $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ se numeşte suma seriei şi se notează $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Să se verifice că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Rezolvare.

Şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

---

2. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă dacă şirul sumelor parţiale (s_n) este divergent.

Să se verifice că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ este divergentă.

Rezolvare.

Şirul sumelor parţiale al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ este $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

Deoarece şirul (s_n) este divergent, seria este divergentă.

---

3. Să se verifice că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ este convergentă şi să se calculeze suma acesteia.

Rezolvare. Deoarece:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

termenul general al şirului sumelor parţiale este:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

---

4. Să se arate că seria geometrică:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi în acest caz să se calculeze suma acesteia.

Rezolvare. Deoarece:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

rezultă că şirul sumelor parţiale este $s_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, care este convergent dacă şi numai dacă $|q| < 1$, în care caz are limita $\dfrac{1}{1 - q}$, aceasta fiind suma seriei.

---

5. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
(**Convergenţa la zero a termenului general**)

Rezolvare.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale (s_n) converge la o limită *s*.

Rezultă că şirul s_{n-1} converge tot la *s* şi astfel $a_n = s_n - s_{n-1}$ converge la 0.
Prin urmare: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Cap. IV. Limite de funcţii. Continuitate

1. Funcţia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita L în punctul $a \in A$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta = \delta\,(\varepsilon)$ astfel încât $|f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall\, x \in A,\ x \neq a$ şi $|x - a| < \delta$.

În acest caz se notează $\lim_{n \to \infty} f(x) = L$.

Să se arate că:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

b) $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a},\ \forall\, a > 0.$

Rezolvare.

a) Fie $\varepsilon > 0$ şi să considerăm inegalitatea:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \quad \text{sau} \quad 4 - \varepsilon < \frac{x^2-4}{x-2} < 4 + \varepsilon \ \text{ pentru } x \neq -2 \,.$$

Aceasta este echivalentă cu inegalitatea $4-\varepsilon < x+2 < 4+\varepsilon$ sau $2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$, deci putem lua $\delta = \varepsilon$.

b) Într-adevăr, dacă $\varepsilon > 0$, atunci are loc

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \quad \text{sau} \; \sqrt{a} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{a} + \varepsilon.$$

care prin ridicare la pătrat devine:

$$a - 2\sqrt{a} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 < x < a + 2\sqrt{a} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Pentru un a şi ε dat, putem lua $\delta = 2\sqrt{a} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2$.

---

2. Să se arate că limita unei funcţii reale într-un punct (dacă aceasta există) este unică.

Rezolvare. Fie funcţia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite limită în punctul $a \in D$. Să presupunem prin absurd că $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ şi $L_1 \neq L_2$.

Atunci pentru $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ există δ_1 astfel încât $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ pentru $0 < |x-a| < \delta_1$ şi există δ_2 astfel încât $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ pentru $0 < |x-a| < \delta_2$.

De aici, pentru $0 < |x-a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ avem $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < |L_1 - L_2|$, ceea ce este absurd.

---

3. Teorema lui HEINE. Funcţia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limită în a dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n), $x_n \in D$, $x_n \neq a$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, şirul $\big(f(x_n)\big)$ este convergent.

Rezolvare. Presupunem că $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ şi considerăm un şir (x_n) de numere reale cu următoarele proprietăţi: $x_n \in D, x_n \neq a$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta\,(\varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < |x - a| < \delta,\ \forall\, n > N$. De aici rezultă $|f(\mathrm{x_n}) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ pentru $n > N$, deci şirul $(f(\mathrm{x_n}))$ converge la L.

Presupunem acum că pentru orice şir de numere reale $(\mathrm{x_n})$ cu următoarele proprietăţi: $\mathrm{x_n} \in A,\ x_n \neq a$, şi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, şirul converge. Vom arăta la început că $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nu depinde de x_n. Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că există două şiruri de numere reale (x'_n) şi (x''_n)cu următoarele proprietăţi: $x'_n, x''_n \in A,\ \ x'_n \neq a,\ \ x_n'' \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = a$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = L' \neq L'' = \lim_{n\to\infty} f(x''_n)$. Cu şirurile $(\mathrm{x'_n}),\ (\mathrm{x''_n})$ construim şirul $(\mathrm{x_n})$ definit astfel:

$$\mathrm{x_n} = \begin{cases} \mathrm{x'_{k+1}} \ , & \text{pentru n} = 2\mathrm{k} \\ \mathrm{x''_{k+1}} \ , & \text{pentru n} = 2\mathrm{k} + 1 \end{cases}$$

şi remarcăm că acest şir are următoarele proprietăţi: $x_n \in A, x_n \neq a$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Prin urmare şirul $(f(x_n))$ converge la un număr L. Deoarece $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = L'$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = L''$ trebuie să avem $L = L'$ şi $L = L''$ şi astfel avem $L' = L''$ absurd.

Fie L valoarea comună a limitelor şirurilor $(f(x_n))$. Vom arăta că $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$. Pentru aceasta presupunem contrariul. Rezultă că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in A,\ x_n \neq a$ astfel încât $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ şi $|f(\mathrm{x_n}) - \mathrm{L}| \geq 0$. Rezultă de aici că şirul $(f(x_n))$ nu converge la L deşi $x_n \in A,\ x_n \neq a$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Absurd.

4. <u>Criteriul CAUCHY-BOLZANO pentru limita funcţiei</u>. Funcţia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limită în a dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\ \varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < |x' - a| < \delta$ şi $0 < |x'' - a| < \delta$ implică

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Rezolvare. Presupunem că $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ şi considerăm $\varepsilon > 0$. Există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru $0 < |x - a| < \delta$ să avem $|f(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2}$. De aici pentru orice x', x'' cu $0 < |x' - a| < \delta$ şi $0 < |x'' - a| < \delta$ avem $|f(\mathrm{x}') - \mathrm{f}(\mathrm{x}'')| \leq |f(\mathrm{x}') - \mathrm{L}| + |f(\mathrm{x}'') - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

Presupunem acum că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice x', x'' cu $0 < |x' - a| < \delta$ şi $0 < |x'' - a| < \delta$ avem $|f(\mathrm{x}') - \mathrm{f}(\mathrm{x}'')| < \varepsilon$ şi considerăm un şir de numere reale (x_n) cu următoarele proprietăţi: $x_n \in A$, $x_n \neq a$ şi $x_n \to a$.

Pentru $\delta = \delta(\varepsilon)$ există $N = N(\delta)$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$ pentru orice $n > N$. De aici, pentru $n, m > N$ avem $|f(x_n) - \mathrm{f}(\mathrm{x_m})| < \varepsilon$. Aceasta arată că şirul $f(x_n)$ este convergent. Cu teorema lui HEINE rezultă că f are limită în a.

---

5. Reguli privind limita unei funcţii într – un punct.

a) Dacă $\mathrm{f(x) = k =}$ constant, atunci $\lim_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{k}, \quad \forall\, \mathrm{a}$.

b) Dacă $\lim_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}$ şi $\lim_{x\to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{M}$, atunci $\begin{cases} x'_{k+1}, & \text{pentru } n = 2k \\ x''_{k+1}, & \text{pentru } n = 2k+1 \end{cases}$

c) Dacă $\lim_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}$, $\quad \mathrm{g(x)} \neq 0$ şi $\lim_{x\to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{M} \neq 0$ atunci $\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$.

Rezolvare. Vom demonstra doar implicaţia

$$\lim_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L} \text{ şi } \lim_{x\to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{M} \Rightarrow \lim_{x\to a} \left(\mathrm{f(x)} + g(x)\right) = L + M.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ şi $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ astfel încât :

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pentru $0 < |\mathrm{x - a}| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ avem:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon$$

Celelalte demonstraţii se realizează în mod similar.

6. Regula ″cleştelui″.

Dacă pe o mulţime de forma $I = (a - r, \quad a) \cup (a, \quad a + r), \ \ r > 0$,

funcţiile f, g, h verifică inegalităţile:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

şi dacă $\lim_{x\to a} f(x) = L$ şi $\lim_{x\to a} h(x) = L$ atunci $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Rezolvare. Deoarece $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \forall\, x \in I$, avem:

$$f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L.$$

De aici rezultă inegalitatea: $|g(x) - L| \leq \max\ \{\, |\, f(x) - L\, |\,, \quad |\, h(x) - L\,|\ \}, \qquad \forall\, x \in I.$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta_1 = \delta_1\,(\varepsilon) > 0$ şi $\delta_2 = \delta_2\,(\varepsilon) > 0$ astfel încât să avem:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \ \text{ şi } \ 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

De aici rezultă că:

$$|0 < |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\} \Longrightarrow \ |\, g(x) - L\,| \leq \max\{\, |\, f(x) - L\,|\,, \quad |\, h(x) - L\,|\ \} < \varepsilon.$$

7. Limitele laterale.

Limita la dreapta a funcţiei f în punctul a este L

(sau limita lui $f(x)$ atunci când x tinde la a dinspre dreapta este L)

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $a < x < a + \delta$

$\Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Se notează astfel:

$L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ sau $L = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$

Analog se defineşte limita la stânga.

Observaţie: Dacă funcţia f are limită la stânga şi limită la dreapta în a şi aceste limite late

sunt egale cu L:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

atunci funcţia f are limită în a şi această limită este L:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Demonstraţi că funcţia:

$$\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x > 0 \\ -1, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

nu are limită în $a = 0$.

Rezolvare. Limitele laterale există şi :

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = 1.$$

8. Funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este crescătoare (respectiv descrescătoare) dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \leq x_2$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\left(\text{respectiv } f(x_1) \geq f(x_2)\right)$.

O funcţie este monotonă dacă este crescătoare sau descrescătoare.

Să se demonstreze că dacă funcţia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ este monotonă atunci pentru orice $x_0 \in (a, b)$ limitele $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ există.

Rezolvare. Fie $x_0 \in (a, b)$ şi mulţimea:

$$S_{x_0} = \{ f(x) \mid x < x_0 \}.$$

Dacă funcţia f este crescătoare, atunci mulţimea S_{x_0} este mărginită superior de $f(x_0)$ şi dacă f este descrescătoare, atunci mulţimea S_{x_0} este mărginită inferior de $f(x_0)$.

Dacă funcţia f este crescătoare, atunci marginea superioară a mulţimii S_{x_0} este limita la stânga a lui f în x_0:

$$\sup S_{x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Dacă f este descrescătoare, atunci marginea inferioară a mulţimii S_{x_0} este limita la stânga a lui f în x_0 :

$$\inf S_{x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Pentru limita la dreapta se va considera mulţimea:

$$R_{x_0} = \{ f(x) \mid x > x_0 \}.$$

9. Se spune că limita la dreapta a funcţiei f în punctul a este $+\infty$ dacă:

$$\forall\, M > 0, \qquad \exists\, \delta = \delta(M) \text{ astfel încât } f(x) > M, \forall\ x \in (a, a + \delta)$$

şi se notează $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

În mod similar, spunem că limita la dreapta a funcţiei f în punctul a

este $-\infty$ dacă:

$$\forall\, M > 0, \qquad \exists\, \delta = \delta(M) \text{ astfel încât } f(x) < M, \forall\ x \in (a, a + \delta)$$

şi se notează $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

La fel se definesc limitele la stânga:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ şi } \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

şi limitele bilaterale:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \, ; \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \, .$$

Să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \, ; \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = +\infty \, .$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \, ;$

Rezolvare. Pentru primul caz, se va observa că $\frac{1}{x} < M$ este echivalent cu $x < \frac{1}{M}$ (fiind limita la stânga lui zero $x < 0$!).

Deci se va lua $\delta(M) = \frac{1}{M}$.

În mod similar se rezolvă şi celelalte cazuri.

Cap. V. Derivata unei funcţii. Diferenţială

1. Spunem că funcţia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă există $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ şi este finită.

Această limită se notează $f'(x_0)$ şi se numeşte <u>derivata lui *f* în x_0.</u>

Să se arate că:

(i) $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;

(iii) $(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ (a \in \mathbb{R}_+^*)$;

(iv) $(e^x)' = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

(**v**) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

(**vi**) $(x^a)' = a\,x^{a-1}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (a \in \mathbb{R})$

Rezolvare.

(**i**) Fie $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$ cu n fixat. Atunci avem:

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + C_n^1\, x^{n-1}\, h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \cdots + C_n^n\, h^n,$$

deci:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(C_n^1\, x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \cdots + C_n^n\, h^{n-1}) = C_n^1 x^{n-1}$$

şi deci:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(**ii**) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Deoarece $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ şi $\cos t$ este continuă, rezultă:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x,$$

deci:

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(**iii**) Fie $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x\,\frac{a^h - 1}{h}, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^*.$$

Punem $a^h - 1 = t$. Funcţia $exp\ a$ fiind omeomorfă, rezultă $t \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$.

Deoarece $h = \dfrac{\ln(1+t)}{na}$, avem:

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{t \ln a}{\ln(1+t)} = \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}},$$

deci:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{t \to 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}} = a^x \ln a\,.$$

şi deci:

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Type equation here.

Cap. VI. Integrale nedefinite

1. Calculaţi următoarele primitive:

a) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$; **b)** $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,\mathrm{d}x$

Rezolvare. a) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = x - \arctan x + \mathcal{C}$; **b)** $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{ax^2+b}}{a} + \mathcal{C}$

Integrale prin părţi

1. Să se calculeze integralele

a) $\int \ln x\ \mathrm{d}x$; **b)** $\int \ln^2 x\ \mathrm{d}x$; ***c)*** $\int x^n \ln x\ \mathrm{d}x$.

Rezolvare. a) Se alege $f(x) = \ln x$ şi $g'(x) = 1$. Atunci $f'(x) = \frac{1}{x}$ şi luăm $g(x) = x$.

$$\int \ln x\ \mathrm{d}x = \int x' \ln x\ \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + \mathcal{C}.$$

b) Se iau $f(x) = \ln^2 x$ şi $g'(x) = 1$. Atunci $f'(x) = \frac{2}{x}\ln x$ şi se ia $g(x) = x$.

$$\int \ln^2 x\ \mathrm{d}x = \int x' \ln^2 x\ \mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \frac{\ln x}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x$$

Folosind punctul anterior, obţinem:

$$\int \ln^2 x\ \mathrm{d}x = x\,[\,\ln^2 x - 2\ln x + 2] + \mathcal{C}.$$

c) $\int x^n \ln x\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x\ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \mathcal{C}.$

2. Să se calculeze primitiva:

1.

1.

1.

1.

Cap. VII. Integrala Riemann-Darboux

1. Se consideră o funcţie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită şi o partiţie P a segmentului $[a, b]$, adică o mulţime finită de puncte $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cu proprietatea:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \ .$$

Deoarece f este mărginită, putem considera:

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}, \ \ M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Se defineşte suma superioară DARBOUX a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \ (x_i - x_{i-1}) \, .$$

La fel pentru suma superioară DARBOUX a funcţiei f:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \ (x_i - x_{i-1}) \, .$$

Să se demonstreze că oricare ar fi partiţia P a segmentului $[a, b]$:

$$m(b - a) \le L_f(P) \le U_f(P) \le M(b - a),$$

unde $m = \inf \{f(x), x \in [a, b]\}$ şi $M = \sup \{f(x), x \in [a, b]\}$.

Rezolvare.

$$U_f(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} M\,(x_i-x_{i-1})=M\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=M(b-a).$$

$$L_f(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} m\,(x_i-x_{i-1})=m\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=m(b-a).$$

Inegalitatea $L_f(P)\leq U_f(P)$este evidentă.

---

2. Conform exercițiului anterior, mulțimile:

$$L_f=\{L_f(P)|\ P-\text{partiție a segmentului }[a,b]\}$$

$$U_f=\{U_f(P)|\ P-\text{partiție a segmentului }[a,b]\}$$

sunt mărginite. Să notăm $\mathcal{L}_f=\sup L_f\quad \mathcal{U}_f=\inf U_f$.

Să se demonstreze că are loc inegalitatea: $\mathcal{L}_f\leq\ \mathcal{U}_f$.

Rezolvare. Fie P o partiție a segmentului $[a,b]$ și P'partiția $P\cup\{y\}$, unde $x_{i-1}<y<x_I$ pentru un anumit I, $1\leq i\leq n$.

Cu alte cuvinte, P'este obținută prin adăugarea unui punct y la punctele partiției P.

Vom arăta că acum au loc următoarele inegalități:

$$L_f(P)\leq L_f(P')\text{ și }U_f(P')\leq U_f\,(P).$$

Considerăm numerele $M_i'=\sup\{f(x)\ |x\in[x_{i-1},y]\}$ și $M_i''=\sup\{f(x)\ |x\in[\,y,x_i]\}$ și remarcăm inegalitățile: $M_i'\leq M_i$ și $M_i''\leq M_i$.

Din acestea rezultă:

$$U_f(P') = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \left(x_j - x_{j-1}\right) + M_i' \left(y - x_{i-1}\right) + M_i'' \left(x_i - y\right) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \left(x_j - x_{j-1}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left(x_j - x_{j-1}\right) + M_i\left(y - x_{i-1}\right) + M_i\left(x_i - y\right) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j\left(x_j - x_{j-1}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} M_j\left(x_j - x_{j-1}\right) = U_f(P).$$

În mod asemănător se arată că are loc şi inegalitatea $L_f(P) \leq L_f(P')$.

Se poate afirma acum că, dacă $P'' = P \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, unde y_i sunt numere distincte în $[a, b]$,

atunci au loc inegalităţile:

$$L_f(P) \leq L_f(P'') \text{ şi } U_f(P) \leq U_f(P'')$$

Considerăm acum două partiţii P_1 şi P_2 ale segmentului $[a, b]$şi notăm cu P_3 partiţia $P_3 = P_1 \cup P_2$.

Pe baza celor arătate avem: $L_f(P_1) \leq L_f(P_3)$şi $U_f(P_3) \leq U_f(P_2)$
şi ţinând seama de inegalitatea

$L_f(P_3) \leq U_f(P_3)$, deducem inegalitatea:

$$L_f(P_1) \leq U_f(P_2).$$

Deci orice sumă inferioară este mai mică decât orice sumă superioară. De aici rezultă $\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$.

3. Spunem că funcţia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită pe $[a, b]$ este integrabilă

RIEMANN-DARBOUX pe $[a, b]$ dacă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$.

Această valoare comună se notează:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

şi se numeşte <u>integrala RIEMANN-DARBOUX</u> a funcţiei f pe segmentul $[a, b]$.

Să se demonstreze că funcţia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ este integrabilă RIEMANN-DARBOUX pe $[0,1]$ şi:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Rezolvare. Într − adevăr, pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$. Avem:

$$U_f(P_n) = \frac{n+1}{2n} \text{ şi } L_f(P_n) = \frac{n-1}{2n}$$

şi astfel:

$$\frac{n-1}{2n} \leq \mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Pentru $n \rightarrow \infty$ rezultă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \frac{1}{2}$.

Cap. VIII. Aplicaţii ale integralei definite

Calculul lungimilor

1. Dacă se dă o curbă plană definită prin ecuaţia explicită $y = f(x)$, atunci lungimea arcului cuprins între dreptele $x = a$ şi $x = b$ $(b > a)$ este dată de:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,.$$

Rezolvare. Dacă s este lungimea unui arc de curbă, atunci

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

unde semnul plus sau minus este adoptat după cum variabila x creşte sau descreşte când s creşte. Astfel, dacă x creşte când s creşte, avem:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$ şi prin integrare obţinem formula cerută.

---

2. Să se calculeze lungimea curbei dată de ecuaţiile parametrice:

$$x = t^2, \qquad y = t - \frac{1}{3t^3}\,.$$

Rezolvare. Eliminând parametrul t, obținem ecuația implicită $y^2 = x\left(1 - \frac{1}{3}x\right)^2$.

Curba este simetrică în raport cu axa Ox, iar bucla acesteia se întinde de la punctul $(0,0)$ la $(3,0)$.

Dacă luăm $y = 0$ în $y = t - \frac{1}{3t^3}$, obținem $t = 0$ și $t = \pm\sqrt{3}$. Așadar, jumătatea superioară a buclei este cuprinsă între $t = 0$ și $t = \sqrt{3}$.

Deci lungimea întregii curbe este dublul valorii:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, \mathrm{dt} = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\, dt = 2\sqrt{3}\,.$$

Calculul ariilor

Calculul volumelor

Cap. IX. Anexe

Simboluri mai des utilizate

Mulţimi

$\subset \subseteq \not\supseteq \cup \cap \in \notin \ni \emptyset$

Mulţimi de numere

$$\mathbb{N}\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}\ \overline{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$$

Alfabetul grec

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \epsilon\ \theta\ \vartheta\ \nu\ \lambda\ \mu\ \pi\ \rho\ \sigma\ \varsigma\ \tau\ \varphi\ \omega\ \ \mathrm{A}\ \mathrm{B}\ \Gamma\ \Delta \mathrm{E}\ \Theta \mathrm{H}\ \Lambda\ \mathrm{M}\ \mathrm{N}\ \Pi\ \mathrm{P}\ \Sigma\ \mathrm{T}\ \Phi\ \mathrm{X}\ \Psi\ \Omega$$

Semne algebrice: $\sim \mp \cong \ll \gg \neq \equiv \approx \pm \times \leq \geq$

Sumă, produs, integrală

$$\sum\ \sum\ \sum\ \ \sum\ \sum\ \ \prod\ \prod\ \prod\ \ \prod\ \int\ \ \int$$

$$\int\ \ \int\ \ \ \int\ \ \int\ \ \iint\ \oint\ \oiint\ \oiiint\ ⨏$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funcţii trigonometrice

$$\sin\quad \cos\quad \tan\quad \csc\quad \sec\quad \cot\quad \sin^{-1}\quad \cos^{-1}\quad \tan^{-1}$$

$\lim$ $\ln$ ∂

Alte simboluri

$$\Delta\ \nabla \leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow \leftrightarrow \mapsto * \cdot \vdots\ \cdots\ ⋰ ⋱\ \aleph\ \beth\ \blacksquare\ \frac{dy}{dx}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \frac{\partial y}{\partial x}\ \frac{\delta y}{\delta x}\ \sqrt{\ }\ \ \sqrt{\ }$$

℮ @

$\stackrel{\text{def}}{=}$ C_n^kType equation here. $\bar{\mathbb{R}}$

+ < = > | ~ ¬ ± × ÷ ∍ / ℘ ∑ ⅁ ⅂ ⅃ ⅄ ⅋

← ↑ ↓ → ↔ ↚ ↛ ↠

⊗ ⊘ ⊙ ⊚ ⊛ ⊞ ⊠ ⊟ ⊡ ⊢ ⊣ ⊤ ⊥

∂ δ ⇐

⇐ ⇑ ⇒ ⇓ ⇔ → ➡ ➡ ➧ ⟲ ⟳ ⟸ ⟹ ⟺ — – | ⁻

- - 🐀 🐎 🐘 🐟 🐦 🕊 🐬 ☕ 🍎 🍏 🍴 🍷 👓 ☺ ☹ 😀 😌 🐯 🐵 ⚽
🏃 🏆

✈ 🚃 🚆 🚌 🚕 ☀ 🏝 🌷 ✾ ✿ 🍁 ❀ ★ ☆ ✢ ✤ ✦ ✫ ✯

✶ ✸ ✹ ❁ ℤ ℚ ℝ

■ □ ▣ ▪ ▫ ▲ ▸ ◉ ● ◦ ◯

☮ ☯ ☸ ✝ ✠ ✡

∊ ∈ ∋ ∍ ∠ ∡̸ ∢ ∤ ‖a‖ ‖ ∦ ∧ ∨ ∲ ∳ ≃ ≈ ≋ ≝ ≡

≪ ≫ < > ⊆ ⊇ ⋘ ⋙ ⟨ ⟩ ⟨ ⟩ ⨁ ⨂ ⪢

§ • ^{0} $_{0}$ $_{1}$ $_{2}$ $_{3}$ ^{4} ^{5} ^{6} ^{7} ♯

$$x_n = \begin{cases} x'_{k+1} & pentru\ n = 2k \\ x''_{k+1} & pentru\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Diacritice corecte: Ş ş Ţ ţ

<u>Fonturile utilizate</u>:

- text curent: **Verdana 12**
- formule matematice: **Cambria Math 14**,
- nume de persoane: **Copperplate Gothic Light 12**.

Culoarea paginii: 255, 220, 255

http://web.info.uvt.ro/~kaslik/pdf/calcul.pdf

http://vk.com/doc237104635_437154231

http://vignette1.wikia.nocookie.net/math/images/c/c6/A-First-Course-in-Analysis.pdf/revision/latest?cb=20151224183625&path-prefix=ro

Numbers-and-Functions-Shttp://vignette3.wikia.nocookie.net/math/images/2/2d/Numbers-and-Functions-Steps-Into-Analysis.pdf/revision/latest?cb=20151224182334&path-prefix=ro

https://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php

|x-a|+∑

$$\dot{\lambda} \sum a + |a-b| + |a-b| \forall \complement \sqrt[n]{a}$$

$$\prod_{1} \pi \sum_{-i=-1} \langle x \rangle$$

$$X^{x^{x^{x^{x}}}} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{Q_b} \overline{\zeta_{\oiiint} \tilde{A}_d^s \tilde{r} \tilde{n} \widetilde{w}\ 7vvm}$$