Prof. univ. dr. Ion CRĂCIUN

Departamentul de Matematică
Universitatea Tehnică *Gheorghe Asachi* din Iaşi

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CALCUL DIFERENŢIAL

IAŞI – **2011**

Cuprins

Capitolul 1

Noţiuni fundamentale de teoria mulţimilor

1.1 Mulţimi

Noţiunea de *mulţime* este o noţiune fundamentală a matematicii moderne. În cele ce urmează, noţiunile de mulţime şi element al unei mulţimi sunt considerate noţiuni primare.

O mulţime se consideră definită (dată, precizată) dacă avem un criteriu după care putem deosebi elementele mulţimii de celelalte obiecte, care nu fac parte din mulţime. În acest sens, o mulţime poate fi definită fie numind individual elementele sale, fie specificând o proprietate pe care o au toate elementele sale şi pe care nu o au alte obiecte.

Mulţimile se notează cu litere mari ale alfabetului latin: $A, B, ...,$ sau $X, Y, ...,$ iar elementele se notează cu litere mici ale aceluiaşi alfabet sau ale altuia. Dacă se cunosc toate elementele mulţimii $A,$ atunci vom nota $A = \{a, b, ...\}.$

Natura mulţimilor care constituie subiectul cercetărilor matematice este diversă.

În cele ce urmează, examinăm mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi submulţimi ale acesteia, ca de exemplu mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$, intervale etc., mulţimi de puncte din spaţiul Euclidian n-dimensional precum bile deschise şi închise, sfere, intervale n-dimensionale închise şi deschise etc., ca şi mulţimi de funcţii şi, de asemenea, mulţimi ale căror elemente sunt mulţimi.

Partea matematicii care examinează mulţimi arbitrare, fără a se interesa însă de natura elementelor sale, se numeşte *teoria mulţimilor*.

În acest capitol introducem câteva noţiuni de teoria mulţimilor, necesare înţelegerii celorlalte capitole.

Dacă A este o mulţime oarecare, notăm $a \in A$ dacă şi numai dacă a este un element al mulţimii A şi vom citi a *aparţine mulţimii* A; daca b nu este element al lui A atunci această situaţie se scrie matematic în forma $b \notin A$ şi se citeşte b *nu aparţine mulţimii* $A.$ Elementele unei mulţimi sunt numite deseori *puncte*, afirmaţiile *element al mulţimii* A şi *punct al mulţimii* A având acelaşi înţeles.

Definiţia 1.1.1. *Mulţimile A şi B se numesc* **identice** *sau* **egale** *şi scriem $A = B$, dacă şi numai dacă sunt formate din aceleaşi elemente.*

Prin urmare $A = B$ dacă şi numai dacă, pentru fiecare element $x,$ avem

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

Definiţia 1.1.2. *Mulţimea fără nici un element se numeşte* **mulţimea vidă** *şi se notează prin $\emptyset.$*

Definiţia 1.1.3. *Fie A şi B două mulţimi. Mulţimea A se numeşte* **submulţime**, *sau* **parte** *a mulţimii B dacă şi numai dacă $a \in A \Longrightarrow a \in B$. În această situaţie se spune că mulţimea A este* **inclusă** *în mulţimea B, sau că B* **include** *A şi scriem corespunzător $A \subset B$ sau $B \supset A$. Dacă, în plus, mulţimea A nu este identică cu B, atunci A se numeşte* **submulţime strictă** *a lui B.*

Prin convenţie, există o mulţime care este inclusă în toate mulţimile. Aceasta este *mulţimea vidă*şi este privită ca o submulţime a oricărei mulţimi: $\emptyset \subset A$, oricare ar fi mulţimea A.

Introducerea mulţimii vide este necesară deoarece adesea definim mulţimea elementelor care satisfac o condiţie fară să verificăm că există măcar un element care să îndeplinească această condiţie. De exemplu, în teoria polinoamelor, putem introduce noţiunea de mulţime a rădăcinilor reale ale unei ecuaţii, neţinând seama de faptul că nu cunoaştem, în general, dacă există sau nu astfel de rădăcini.

Simbolul $\subset$ este denumit *incluziune*.

Propoziţia 1.1.1. *Incluziunea mulţimilor are următoarele proprietăţi:*

$$A \subset A \quad (\textit{reflexivitate}); \tag{1.1}$$

$$A \subset B \text{ şi } B \subset C \Longrightarrow A \subset C \quad (\textit{tranzitivitate}); \tag{1.2}$$

$$A \subset B \quad \text{şi} \quad B \subset A \Longrightarrow A = B \quad (\textit{antisimetrie}). \tag{1.3}$$

O mulţime nevidă poate avea un număr finit (respectiv infinit) de elemente, caz în care mulţimea se numeşte *finită* (respectiv *infinită*).

Prin definiţie mulţimea vidă este mulţime finită.

O mulţime finită poate fi specificată prin enumerarea elementelor sale; dacă acestea sunt $a_1, a_2, ..., a_n$, atunci vom scrie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. În particular, $\{a\}$ reprezintă mulţimea formată dintr-un singur element a.

Definiţia 1.1.4. *Se numeşte* **familie de mulţimi**, *sau* **clasă de mulţimi**, *o mulţime A ale cărei elemente sunt mulţimi. O familie de mulţimi A se notează $A = (A_i)_{i \in I}$, unde I este o mulţime oarecare care se numeşte* **mulţime de indici**. *Când $I = \mathbb{N}$ familia de mulţimi A se numeşte* **şir de mulţimi**. *Deci, notaţia pentru un şir de mulţimi este $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Definiţia 1.1.5. *Şirul de mulţimi (A_n) se numeşte*

$$\begin{array}{llll} \textit{crescător}, & \textit{dacă } A_n \subset A_{n+1}, & \textit{pentru} & n = 0, 1, 2, ... \\ \textit{descrescător}, & \textit{dacă } A_{n+1} \subset A_n, & \textit{pentru} & n = 0, 1, 2, ... \end{array}$$

Fie $a(x)$ o condiţie impusă elementelor unei mulţimi X, adică o expresie cu valoarea de adevăr sau fals dacă un anume element din X este înlocuit cu x. Mulţimea tuturor elementelor x din X pentru care expresia $a(x)$ are valoarea de adevăr se notează prin $\{x \in X : a(x)\}$ sau, mai simplu, prin $\{x : a(x)\}$. De exemplu, $\{x : x^2 = 16\}$ este mulţimea formată din numerele întregi -4 şi $+4$, iar $\{x : x^2 + 2x - 35 < 0\}$ este intervalul deschis $(-7, 5)$, adică $\{x : x^2 + 2x - 35 < 0\} = \{x : -7 < x < 5\}$.

Mulţimea părţilor unei mulţimi oarecare X se notează cu $\mathcal{P}(X)$. Avem $A \in \mathcal{P}(X)$ dacă şi numai dacă $A \subset X$. Evident, $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ şi $X \in \mathcal{P}(X)$. Elemente ale lui $\mathcal{P}(X)$ pot fi şi mulţimi formate din câte un singur element x din X.

1.2 Operaţii cu mulţimi

Definiţia 1.2.1. *Se numeşte* **reuniunea** *a două mulţimi* A *şi* B, *mulţimea notată* $A \cup B$ *formată din toate elementele* x *care aparţin cel puţin uneia din mulţimile* A *sau* B. *Deci, prin definiţie*

$$A \cup B = \{x : x \in A \textit{ sau } x \in B\}.$$

Definiţia 1.2.2. *Se numeşte* **intersecţia** *sau* **partea comună** *a mulţimilor* A *şi* B *mulţimea notată cu* $A \cap B$ *compusă din toate elementele* x *care aparţin atât mulţimii* A *cât şi mulţimii* B. *Prin definiţie*

$$A \cap B = \{x : x \in A \textit{ şi } x \in B\}.$$

Definiţia 1.2.3. *Mulţimile* A *şi* B *se numesc* **disjuncte** *dacă* $A \cap B = \emptyset$.

Definiţia 1.2.4. *Fie* A *şi* B *două mulţimi. Mulţimea*

$$A \setminus B = A \setminus B = C_A B = \{x : \ x \in A \textit{ şi } x \notin B\} = \{x \in A : \ x \notin B\}$$

se numeşte **diferenţa dintre mulţimea** A **şi mulţimea** B, *sau* **complementara** *mulţimii* B *în raport cu mulţimea* A. *Când mulţimea* A *se subînţelege din context, complementara lui* B *faţă de* A *se notează simplu prin* CB *şi se numeşte* **complementara mulţimii** B.

Prin urmare, $CB = \{x \in A : \ x \notin B\}$.

De asemenea, avem $CB \in \mathcal{P}(A)$.

Teorema 1.2.1. *Pentru orice mulţimi* $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ *au loc afirmaţiile:*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A; \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C); \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\emptyset \cup A = A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset; \tag{1.6}$$

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A; \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} (A \setminus B) \cap B = \emptyset, \\ A = (A \cap B) \cup (A \setminus B), \\ A \setminus B = A \setminus (A \cap B); \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} A \subset X \Longrightarrow (X \setminus A) \cup A = X \\ X \setminus (X \setminus A) = A; \end{cases} \tag{1.10}$$

$$A \subset X \Longrightarrow A \setminus B = A \cap (X \setminus B); \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} X \setminus (A \cup B) &= (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \\ X \setminus (A \cap B) &= (X \setminus A) \cup (X \setminus B); \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} A \subset X \;\; \text{și} \;\; B \subset X \Longrightarrow A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)). \end{cases} \tag{1.13}$$

Demonstraţie. Identităţile (1.4) sunt legile de *comutativitate* ale reuniunii şi respectiv intersecţiei mulţimilor, (1.5) sunt legile de *asociativitate* ale aceloraşi operaţii cu mulţimi, iar identităţile (1.8) reprezintă legile de *distributivitate* ale uneia din operaţii faţă de cealaltă.

Identităţile (1.12) şi (1.13) se numesc *relaţiile lui De Morgan.*

Demonstraţia oricărei din egalităţile (1.4) – (1.13) se bazează pe relaţia (1.3). Se arată că dacă un punct oarecare aparţine mulţimii din din primul membru al identităţii, atunci el este element şi al mulţimii din membrul drept al identităţii respective, şi reciproc.

Să demonstrăm, de exemplu, prima dintre identităţile (1.8).

Fie $x \in A \cap (B \cup C)$, atunci $x \in A$ şi $x \in B \cup C$, adică $x \in B$ sau $x \in C$. Se desprind două cazuri.

În primul caz, $x \in A$ şi $x \in B$, adică $x \in A \cap B$.

În cel de-al doilea caz, $x \in A$ şi $x \in C$, adică $x \in A \cap C$.

În fiecare din cele două cazuri, rezultă $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, deci are loc incluziunea

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.14}$$

Reciproc, să considerăm un element arbitrar $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Atunci $x \in A \cap B$ sau $x \in A \cap C$.

În primul caz, rezultă că $x \in A$ şi $x \in B$, în cel de-al doilea caz vom avea $x \in A$ şi $x \in C$.

Din primul caz urmează că $x \in A \cap (B \cup C)$, iar din cel de-al doilea vom avea că $x \in A \cap (B \cup C)$.

Aşadar, în ambele cazuri rezultă că $x \in A \cap (B \cup C)$ ceea ce arată că are loc şi incluziunea

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C). \tag{1.15}$$

Incluziunile (1.14), (1.15) şi proprietatea (1.3) arată că prima din identităţile (1.8) este adevărată. **q.e.d.**

Teorema 1.2.2. *Pentru orice mulţimi A,B,C,D,*

$$A \subset B = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B; \tag{1.16}$$

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A; \tag{1.17}$$

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \setminus B = \emptyset; \tag{1.18}$$

$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A; \tag{1.19}$$

$$A \subset C \quad \text{și} \quad B \subset D \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B \subset C \cup D \quad \text{și} \quad A \cap B \subset C \cap D; \tag{1.20}$$

$$A \subset C \quad \text{şi} \quad B \subset C \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B \subset C; \tag{1.21}$$

$$C \subset A \quad \text{şi} \quad C \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad C \subset A \cap B; \tag{1.22}$$

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad C \setminus B \subset C \setminus A. \tag{1.23}$$

Demonstraţie. Fiecare din aceste afirmaţii se demonstrează uşor utilizând definiţiile egalităţii, reuniunii, intersecţiei şi diferenţei a două mulţimi. **q.e.d.**

Noţiunile de reuniune şi intersecţie a mulţimilor pot fi generalizate la cazul unui număr arbitrar, finit sau infinit, de mulţimi.

Presupunem că A_t este o mulţime pentru orice t dintr-o mulţime nevidă T.

Prin *reuniunea* $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ (respectiv *intersecţia* $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$) a mulţimilor A_t, unde $t \in T$, înţelegem mulţimea tuturor punctelor x care aparţin cel puţin uneia din mulţimile A_t (respectiv fiecărei mulţimi A_t). În simboluri,

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{x : \exists\, t \in T \text{ astfel încât } x \in A_t\}, \quad \bigcap_{t\in T} A_t = \{x : x \in A_t, \ \forall t \in T\}.$$

Uneori, menţiunea $t \in T$, sub semnul $\bigcup$ sau $\bigcap$, se poate omite dacă se subînţeleg valorile lui t.

În cazul când T este o submulţime a numerelor naturale $I\!N$, putem folosi notaţiile

$$\bigcup_{j=m}^{n} A_j \text{ sau } A_m \cup A_{m+1} \cup ... \cup A_n \ (m \le n)$$

pentru reuniunea mulţimilor $A_m, A_{m+1}, ..., A_n$ şi

$$\bigcap_{j=m}^{n} A_j \text{ sau } A_m \cap A_{m+1} \cap ... \cap A_n \ (m \le n)$$

pentru intersecţia aceloraşi mulţimi.

În mod similar,

$$\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j \text{ sau } A_m \cup A_{m+1} \cup ...$$

reprezintă reuniunea mulţimilor $A_m, A_{m+1}, ...,$ iar

$$\bigcap_{j=m}^{\infty} A_j \text{ sau } A_m \cap A_{m+1} \cap ...$$

semnifică intersecţia acestor mulţimi.

1.3 Produse carteziene

Definiţia 1.3.1. *Fie $p \ge 2$, număr natural arbitrar, fixat, şi $X_1, X_2, ..., X_p$ mulţimi oarecare. Mulţimea p-uplelor ordonate $(x_1, x_2, ..., x_p)$, unde $x_i \in X_i$, $i \in \overline{1,p}$, se numeşte* **produsul cartezian** *al mulţimilor $X_1, X_2, ..., X_p$, în această ordine, şi se notează cu $X_1 \times X_2 \times ... \times X_p$.*

Aşadar,

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_p = \{x : \; x = (x_1, x_2, ..., x_p), \quad x_i \in X_i, \quad i \in \overline{1,p}\}. \tag{1.24}$$

În particular, produsul cartezian $X \times Y$ al două mulţimi X şi Y este mulţimea tuturor perechilor ordonate (x, y) unde $x \in X$ şi $y \in Y$. Deci

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}. \tag{1.25}$$

Deoarece $(x, y) \neq (y, x)$, rezultă că

$$X \times Y \neq Y \times X. \tag{1.26}$$

În cazul în care $X_1 = X_2 = ... = X_p = X$ produsul cartezian al celor p mulţimi identice cu X se notează prin X^p. Aşadar,

$$X^p = \{x : \; x = (x_1, x_2, ..., x_p), \quad x_i \in X, \quad i \in \overline{1,p}\}. \tag{1.27}$$

Dacă în (1.27) $X = I\!R$, atunci $I\!R^p$ se numeşte *spaţiul aritmetic* p*-dimensional*.

Definiţia 1.3.2. *Elementele* $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ *şi* $y = (y_1, y_2, ..., y_p)$ *din produsul cartezian* $X_1 \times X_2 \times ... \times X_p$ *se numesc* **egale** *dacă* $x_i = y_i, \; i \in \overline{1,p}$.

Teorema 1.3.1. *Produsul cartezian are următoarele proprietăţi:*

$$A \times B = \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset \text{ sau } B = \emptyset; \tag{1.28}$$

$$A \subset C \text{ şi } B \subset D \Longrightarrow A \times B \subset C \times D; \tag{1.29}$$

$$\begin{cases} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C, \\ A \times (B \setminus C) = A \times B \setminus A \times C; \end{cases} \tag{1.30}$$

$$\begin{cases} (A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C, \\ (A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C, \\ (A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C; \end{cases} \tag{1.31}$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D); \tag{1.32}$$

$$A \times B \setminus C \times D = (A \times (B \setminus D)) \cup ((A \setminus C) \times B); \tag{1.33}$$

$$A \times \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{t \in T} (A \times B_t), A \times \bigcap_{t \in T} B_t = \bigcap_{t \in T} (A \times B_t); \tag{1.34}$$

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) \times B = \bigcup_{t \in T} (A_t \times B), \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \times B = \bigcap_{t \in T} (A_t \times B). \tag{1.35}$$

Demonstraţie. Fiecare identitate se demonstrează arătând că un punct arbitrar aparţinând mulţimii din primul membru aparţine şi membrului doi al identităţii respective, şi reciproc. **q.e.d.**

Convenim ca produsul cartezian a p mulţimi să se numească simplu *produs*.

Dacă p este suma a două numere naturale nenule m şi n, produsul X^p din (1.27) poate fi conceput ca produsul mulţimilor X^m şi X^n.

Acest produs poate fi definit în modul următor.

Se fixează două p-uple

$$i = (i_1, i_2, ..., i_m), \quad j = (j_1, j_2, ..., j_n),$$

formate din numere naturale distincte, astfel încât

$$i_1, i_2, ..., i_m, j_1, j_2, ..., j_n$$

să fie o permutare a numerelor $1, 2, ..., p$. După definiţia permutării de p elemente, fiecare număr natural mai mic sau egal cu p apare exact o dată în p-uplele i şi j. Orice element

$$p = (x_1, x_2, ..., x_p) \in X^p \tag{1.36}$$

poate fi identificat cu elementul

$$(p_1, p_2) \in X^m \times X^n, \tag{1.37}$$

unde

$$p_1 = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in X^m, \tag{1.38}$$

$$p_2 = (x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_n}) \in X^n, \tag{1.39}$$

Spunem atunci că X^p este *produsul* (i, j) al lui X^m şi X^n şi vom scrie

$$p = (p_1, p_2). \tag{1.40}$$

În particular, produsul X^{k+1} poate fi conceput ca produsul $X^k \times X$ prin identificarea unui punct

$$(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}) \in X^{k+1}$$

cu punctul $(p, x_{k+1}) \in X^k \times X$, unde $p = (x_1, x_2, ..., x_k)$ şi $x_{k+1} \in X$.

Cazul particular descris corespunde celui general în care $i \in \overline{1, k}$ şi $j = k + 1$.

1.4 Relaţii binare. Funcţii. Legi de compoziţie

Definiţia 1.4.1. *Fie A şi B două mulţimi şi $G \subset A \times B$. Se numeşte* **relaţie binară** *sau* **corespondenţă** *de la mulţimea A la mulţimea B terna ordonată $\mathcal{R} = \{G, A, B\}$.*

Mulţimea G se numeşte *graficul relaţiei binare* $\mathcal{R}$, A se numeşte *mulţimea de pornire*, iar B *mulţimea de sosire*.

Spunem că elementele $a \in A$ şi $b \in B$ *sunt în relaţia* $\mathcal{R}$, şi scriem $a\mathcal{R}b$, dacă $(a, b) \in G$. Când perehcea $(a, b) \notin G$, atunci se spune că a *nu este în relaţia* $\mathcal{R}$ *cu* b şi scriem $a \not\mathcal{R} b$.

Dacă $A = B$, o relaţie binară de forma $\mathcal{R} = \{G, A, A\}$, unde $G \subset A \times A = A^2$, se numeşte *relaţie binară în mulţimea* A şi se notează $\mathcal{R} = \{G, A\}$.

De regulă, o relaţie binară se dă prin specificarea mulţimilor A şi B precum şi a proprietăţii caracteristice perechilor de elemente care sunt în acea relaţie, deci care aparţin lui G.

Mulţimea relaţiilor binare de la mulţimea A la mulţimea B are proprietăţi asemănătoare celor din teoria mulţimilor.

Relaţia $\mathcal{R}$ este *inclusă* în relaţia $\mathcal{R}_1$, şi scriem $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$, dacă

$$a\mathcal{R}b \Longrightarrow a\mathcal{R}_1 b.$$

Relaţiile binare $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}_1,$ de la mulţimea A la mulţimea $B,$ sunt *egale*, şi scriem $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1,$ dacă $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}.$

Reuniunea relaţiilor binare $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}_1,$ ambele de la mulţimea A la mulţimea $B,$ care se notează cu $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_1,$ este o relaţie binară de la mulţimea A la mulţimea B care ne spune că dacă $a\mathcal{R}\cup\mathcal{R}_1 b,$ atunci sau $a\mathcal{R}b$ sau $a\mathcal{R}_1 b$ şi invers.

Intersecţia $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}_1$ a relaţiei binare $\mathcal{R}$ cu relaţia binară $\mathcal{R}_1,$ ambele de la mulţimea A la mulţimea $B,$ este formată din totalitatea perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$ astfel încât $a\mathcal{R}b$ cât şi $a\mathcal{R}_1 b.$

În afirmaţiile referitoare la proprietăţile relaţiilor binare este posibil ca $B = A,$ iar o relaţie de la mulţimea A la mulţimea A se notează $\mathcal{R} = \{G, A\}.$

Definiţia 1.4.2. *Relaţia binară pe mulţimea A, $\mathcal{R} = \{G, A\}$, se numeşte:*

(i) **reflexivă**, *dacă* $\forall a \in A \Longrightarrow a\mathcal{R}a;$

(ii) **simetrică**, *dacă* $a\mathcal{R}b \Longrightarrow b\mathcal{R}a;$

(iii) **tranzitivă**, *dacă* $a\mathcal{R}b$ *şi* $b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c;$

(iv) **antisimetrică**, *dacă* $a\mathcal{R}b$ *şi* $b\mathcal{R}a \Longrightarrow a = b.$

Definiţia 1.4.3. *Se numeşte* **relaţie de echivalenţă** *în mulţimea A o relaţie binară $\mathcal{R} = \{G, A\}$ care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dacă $a\mathcal{R}b$ şi $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă în mulţimea $A,$ atunci scriem simplu $a \sim b.$*

Definiţia 1.4.4. *Fie $\mathcal{R} = \{G, A\}$ o relaţie de echivalenţă în mulţimea $A,$ dată. Prin* **clasă de echivalenţă modulo** $\mathcal{R}$ *asociată unui element $a \in A$ se înţelege mulţimea $C_a = \{x \in A : x \in A, x\mathcal{R}a\} \subset A.$ Oricare dintre elementele clasei de echivalenţă C_a se numeşte* **reprezentant** *al ei.*

Teorema 1.4.1. *Clasele de echivalenţă $C_a, C_b,$ asociate la două elemente a şi b din $A,$ sunt sau identice sau disjuncte.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că $\forall a, b \in A$ putem avea fie $a\mathcal{R}b$, fie $a \not\mathcal{R} b.$

Dacă $a\mathcal{R}b$, atunci $C_a = C_b.$ Într-adevăr, fie $x \in C_a$ arbitrar; atunci $x\mathcal{R}a.$ Cum $a\mathcal{R}b$ şi $\mathcal{R}$ este tranzitivă, rezultă $x\mathcal{R}b,$ deci $x \in C_b,$ ceea ce arată că $C_a \subset C_b.$ La fel se arată că $C_b \subset C_a.$ Din dubla incluziune a mulţimilor C_a şi C_b rezultă egalitatea lor.

Dacă $a \not\mathcal{R} b,$ arătăm că $C_a \cap C_b = \emptyset.$ Într-adevăr, dacă ar exista $x \in C_a \cap C_b$ atunci $x \in C_a$ şi $x \in C_b$, din care deducem $x\mathcal{R}a$ şi $x\mathcal{R}b.$ Din proprietăţile de simetrie şi tranzitivitate ale relaţiei $\mathcal{R}$ rezultă atunci $a\mathcal{R}b$, ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Definiţia 1.4.5. *Relaţia $\mathcal{R} = \{G, A\}$ se numeşte* **relaţie de ordine** *în mulţimea A dacă $\mathcal{R}$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

Observaţia 1.4.1. *Incluziunea în* $\mathcal{P}(X)$ *este o relaţie de ordine.*

Definiţia 1.4.6. *O mulţime* A *prevăzută cu o relaţie de ordine se numeşte* **mulţime ordonată**.

De obicei folosim pentru relaţia de ordine semnul $\leq$ şi scriem $x \leq y$ în loc de $x\mathcal{R}y$.

Se poate întâmpla ca în mulţimea ordonată A, în care relaţia de ordine este $\leq$, să existe *elemente incomparabile*, adică elemente x şi y pentru care nu sunt adevărate nici una din relaţiile $x \leq y$ sau $y \leq x$. Dacă însă A nu are elemente incomparabile, spunem că este o mulţime *total ordonată*.

Afirmaţia $x \leq y$ şi $x \neq y$ se scrie de obicei sub forma $x < y$ sau $y > x$.

Definiţia 1.4.7. *Fie date mulţimile nevide* A *şi* B. *Se numeşte* **funcţie** *definită pe* A *cu valori în* B *o relaţie binară* $f = \{G, A, B\}$ *care satisface proprietăţile:*

$$\forall\, x \in A, \quad \exists \quad y \in B \quad \textit{astfel încât} \quad (x, y) \in G \quad \textit{(existenţă);} \tag{1.41}$$

$$\forall\, (x, y_1) \in G \quad \textit{şi} \quad \forall\, (x, y_2) \in G \Longrightarrow y_1 = y_2 \quad \textit{(unicitate)}. \tag{1.42}$$

Observaţia 1.4.2. *Proprietăţile* (1.41) *şi* (1.42) *se pot scrie împreună astfel: oricare ar fi elementul* $x \in A$, *există un element şi numai unul singur* $y \in B$, *astfel încât*$(x, y) \in G$.

În baza acestei observaţii, putem formula o definiţie echivalentă pentru noţiunea de funcţie.

Definiţia 1.4.8. *Fie* A *şi* B *două mulţimi nevide. Prin* **funcţie definită pe mulţimea** A, **cu valori în mulţimea** B, *se înţelege orice procedeu, lege, convenţie* f, *în baza căruia* **oricărui** *element* $x \in A$ *i se asociază un* **unic** *element, notat* $f(x)$, *din* B.

Cuvintele *corespondenţă, aplicaţie, transformare, operator* sunt sinonime pentru noţiunea de funcţie.

O funcţie se notează $f : A \to B$. Mulţimea A se numeşte *domeniul de definiţie*, sau *mulţimea de definiţie*, iar B este *mulţimea în care funcţia ia valori.*

Dacă A şi B din prezentarea unei funcţii se înţeleg din context, atunci vom scrie simplu funcţia f.

Pentru o funcţie se mai folosesc şi notaţiile:

$$x \to f(x),\; x \in A,\; f(x) \in B;\; x \in A \mapsto f(x) \in B \;\text{ sau simplu }\; x \mapsto f(x).$$

În continuare, funcţiile sunt notate prin literele $f, g, h, \varphi, \psi, F, G, \phi, \Psi$ etc., eventual prevăzute cu indici.

Elementele mulţimii de definiţie A a unei funcţii $f : A \to B$ se numesc *surse.* Dacă $x \in A$ e o sursă, elementul $y \in B$ care se ataşează lui x se numeşte *valoarea funcţiei* în x, *transformatul* lui x sau *imaginea lui* x *prin* f. Se mai spune că x este *contraimaginea* lui y. Se vede din Definiţia 1.4.7 sau Definiţia 1.4.8 că nu orice element din B apare numaidecât ca valoare pentru funcţia f.

Este posibil ca o funcţie să se noteze prin $f : A \to B$ după care sa se menţioneze legea după care se calculează imaginile lui $x \in A$ prin f.

Definiţia 1.4.9. *Fie* $A_0 \subset A$ *şi* $f : A \to B$. *Mulţimea*

$$f(A_0) = \{y \in B : \exists\, x \in A_0 \text{ astfel încât } f(x) = y\} \subset B$$

se numeşte **imaginea prin funcţia** f **a mulţimii** A_0. *Când* $A_0 = A$, $f(A) = Im\, f \subset B$ *se numeşte* **mulţimea valorilor funcţiei** f.

Definiţia 1.4.10. *Funcţia* $f : A \to B$ *se numeşte* **surjecţie de la mulţimea** A **pe mulţimea** B *sau* **funcţie surjectivă** *dacă* $f(A) = B$.

Definiţia 1.4.11. *Funcţiile* $f_1 : A_1 \to B_1$ *şi* $f_2 : A_2 \to B_2$ *se numesc* **egale** *dacă* $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ *şi dacă* $f_1(x) = f_2(x), \ \forall\, x \in A$.

Definiţia 1.4.12. *Dacă mulţimea* $f(A) \subset B$, *a valorilor funcţiei* $f : A \to B$, *conţine doar un element al lui* B, *atunci* f *se numeşte* **funcţie constantă**.

O funcţie remarcabilă definită pe o mulţime nevidă A şi cu valori în A este *funcţia identică* $i_A : A \to A$, definită prin $i_A(x) = x, \ \forall x \in A$.

Definiţia 1.4.13. *Fie funcţia* $f : A \to B$ *şi* A_0 *o submulţime nevidă a lui* A. *Se numeşte* **restricţia** *funcţiei* f *la submulţimea* A_0, *funcţia* $g : A_0 \to B$ *ale cărei valori se calculează după legea* $g(x) = f(x), \ \forall x \in A_0$.

Observaţia 1.4.3. *O restricţie a unei funcţii* f *se obţine dacă se înlătură unele elemente din mulţimea de definiţie.*

Pentru restricţia funcţiei f la submulţimea $A_0 \subset A$ se utilizează notaţia $f_{/A_0}$.

Definiţia 1.4.14. *Funcţia* $f : A \to B$ *cu proprietatea* $f_{/A_0} = g$, *unde* $A_0 \subset A$, *se numeşte* **prelungire la mulţimea** A **a funcţiei** $g : A_0 \to B$.

Definiţia 1.4.15. *Funcţia* $f : A \to B$ *se numeşte* **injecţie de la mulţimea** A **la mulţimea** B *sau simplu, funcţie biunivocă, dacă totdeauna* $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

O injecţie de la mulţimea A la mulţimea B se numeşte *funcţie injectivă*.

Prin urmare, $f : A \to B$ este funcţie injectivă sau biunivocă dacă fiecare element din B are cel mult o contraimagine în A sau dacă orice două surse diferite au imagini diferite. De asemenea, funcţia f este injectivă dacă $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Definiţia 1.4.16. *O funcţie $f : A \to B$ care este simultan injectivă şi surjectivă se numeşte* **bijecţie de la mulţimea A la mulţimea B** *sau simplu,* **funcţie bijectivă**.

Dacă g este o funcţie de la mulţimea A pe mulţimea B şi f este o funcţie de la mulţimea B în mulţimea C, în baza Definiţiei 1.4.1, se constată că $x \mapsto f(g(x))$ este funcţie de la A în C.

Definiţia 1.4.17. *Fie funcţiile $g : A \to B_0$ şi $f : B \to C$ cu $g(A) = B \subset B_0$. Funcţia $h : A \to C$, $h(x) = f(g(x)), \forall x \in A$, se numeşte* **funcţia compusă** *a funcţiilor f şi g, iar funcţia $(f, g) \mapsto f \circ g$, $(f \circ g)(x) = h(x) = f(g(x)), \forall\, x \in A$, se numeşte* **compunerea** *funcţiei f cu funcţia g.*

Observăm , de asemenea, că $(f \circ g)(A) = f(g(A))$.

Fie f o aplicaţie biunivocă de la mulţimea A pe mulţimea B. Aceasta înseamnă că $f(A) = B$ şi $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. În acest caz, pentru orice element $y \in B$, există un element şi numai unul singur $x \in A$, astfel ca $f(x) = y$.

În acest mod putem stabili o corespondenţă $f(x) \mapsto x$ de la elementele lui B la elementele lui A, care defineşte o aplicaţie biunivocă a lui B pe A, numită *aplicaţia reciprocă* sau *funcţia inversă a funcţiei f*, notată cu simbolul f^{-1}.

Definiţia 1.4.18. *Fie funcţia biunivocă $f : A \to B$ şi $f(A) = B_0$ imaginea sa. Se numeşte* **funcţie inversă a funcţiei** *f, funcţia $f^{-1} : B_0 \to A$ care asociază fiecărui element $y \in B_0$ elementul unic $x \in A$ astfel încât $y = f(x)$.*

Din Definiţia 1.4.15, Definiţia 1.4.16 şi Definiţia 1.4.17 rezultă că pentru orice două elemente $x \in A$ şi $y \in B_0$, avem:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y);$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in A;$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall y \in B_0.$$

Ultimele două afirmaţii arată că funcţiiile compuse $f^{-1} \circ f$ şi $f \circ f^{-1}$ sunt aplicaţiile identice pe A şi respectiv B_0.

Observaţia 1.4.4. *Inversa $f^{-1} : B \to A$ a unei funcţii bijective $f : A \to B$ este, de asemenea, funcţie bijectivă şi $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Această afirmaţie rezultă din Definiţia 1.4.15 şi Definiţia 1.4.17. ■[1]

Observaţia 1.4.5. *Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt funcţii bijective, atunci $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Definiţia 1.4.19. *Fie funcţia $f : A \to B$ şi $B_0 \subset B, B_0 \neq \emptyset$. Mulţimea*

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : \exists\, y \in B_0 \text{ astfel încât } f(x) = y\} \subset A,$$

se numeşte **contraimaginea** *lui B_0 prin f.*

[1]Simbolul ■, care se va întâlni pe parcurs, semnifică fie sfârşitul unei justificări, fie terminarea rezolvării unui exerciţiu.

Teorema 1.4.2. *Pentru orice funcţie $f : A \to B$:*

$$A_1 \subset A_2 \subset A \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2); \tag{1.43}$$

$$B_1 \subset B_2 \subset B \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2); \tag{1.44}$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \tag{1.45}$$

sau, mai general

$$f\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \bigcup_{t\in T} f(A_t); \tag{1.46}$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \tag{1.47}$$

sau, mai general

$$f^{-1}\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right) = \bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t); \tag{1.48}$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \tag{1.49}$$

sau, mai general

$$f^{-1}\left(\bigcap_{t\in T} B_t\right) = \bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t); \tag{1.50}$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2), \tag{1.51}$$

în particular,

$$f^{-1}(C_B B_0) = f^{-1}(B \setminus B_0) = C_A f^{-1}(B_0) = A \setminus f^{-1}(B_0); \tag{1.52}$$

$$f \textit{ injectivă} \Longrightarrow f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2), \tag{1.53}$$

mai general,

$$f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) = \bigcap_{t\in T} f(A_t). \tag{1.54}$$

Demonstraţie. Incluziunile (1.43) şi (1.44) se arată verificând că un element oarecare aparţinând primei mulţimi este element şi pentru cea dea doua mulţime. Identităţile (1.45) – (1.54) se demonstrează verificând că un element arbitrar aparţinând unui membru al identităţii este element şi al celuilalt membru, şi reciproc. **q.e.d.**

Fie A şi B două mulţimi nevide. Notăm cu $\mathcal{F}(A, B)$ mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în B.

Dacă B este mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, atunci $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ se notează prescurtat cu $\mathcal{F}(A)$ şi este mulţimea *funcţiilor reale definite pe mulţimea* A.

Dacă A este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{F}(A, B)$, atunci se spune că $f : A \to B$ este o *funcţie de variabilă reală.*

În cazul când $A \subset \mathbb{R}$ şi $B \subset \mathbb{R}$, funcţia f se numeşte *funcţie reală de variabilă reală.*

Dacă $f : A \to B$ şi $A \subset X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci valoarea $f(p)$ într-un punct $p = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ se notează prin

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1.55}$$

şi spunem că funcţia f este o *funcţie de* n *variabile.* În cazul particular în care $X_1 = X_2 = ... = X_n = \mathbb{R}$ şi $B \subset \mathbb{R}$ vom spune că $f \in \mathcal{F}(A, B)$ este o *funcţie reală de* n *variabile reale.*

Prezenta lucrare are ca principal scop studiul funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

Dacă se fixează valorile a $n-1$ variabile, fie acestea

$$x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n, \quad \text{cu} \quad i \in \overline{2, n-1},$$

atunci expresia (1.55) poate fi concepută ca funcţie de variabila x_i, definită pe mulţimea

$$A_i = \{x_i : \ (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in A\} \subset X_i.$$

În calculul diferenţial se studiază proprietăţile unei funcţii în punctele mulţimii de definiţie şi în puncte vecine acestora. Aceste proprietăţi se numesc *proprietăţi cu caracter local*. Dacă o proprietate a funcţiei se referă la întreaga mulţime pe care este definită, atunci aceasta se numeşte *proprietate globală*.

Dacă mulţimile A şi B sunt înzestrate cu unele structuri algebrice, topologice, sau combinate, atunci aceste structuri, în anumite condiţii, transmit structuri asemănătoare pe $\mathcal{F}(A, B)$, sau pe părţi ale acesteia.

Definiţia 1.4.20. *Se numeşte* **lege de compoziţie binară internă** *pe mulţimea nevidă A, elementul $f \in \mathcal{F}(A \times A, A)$.*

Dacă prin legea de compoziţie binară internă $f \in \mathcal{F}(A \times A, A)$, perechii $(x, y) \in A \times A$ îi corespunde elementul $z \in A$, atunci scriem $z = f(x, y)$ sau $z = x * y$ sau $z = x \circ y$ şi z se numeşte *compusul* elementelor x şi y. De multe ori, pentru compusul lui x cu y se utilizează notaţia $x + y$; legea de compoziţie binară internă se numeşte *adunare*, iar $z = f(x, y) = x + y$ se numeşte *suma* elementelor x şi y. De asemenea, putem întâlni notaţia $x \cdot y$ sau, simplu, xy pentru compusul $z = f(x, y)$ a două elemente $x \in A$ şi $y \in A$. În acest caz f se numeşte *înmulţire*, iar $z = f(x, y) = x \cdot y = xy$ se numeşte *produsul* elementelor x şi y. Adunarea se mai numeşte *operaţie binară internă aditivă*, iar înmulţirea se numeşte *operaţie binară internă multiplicativă*.

Definiţia 1.4.21. *Se numeşte* **lege de compoziţie externă**, *sau* **operaţie externă** *a lui A cu elemente din $I\!\!K$, o aplicaţie $h \in \mathcal{F}(I\!\!K \times A, A)$.*

Mulţimea nevidă $I\!\!K$ se numeşte *mulţimea scalarilor*, sau *domeniu de operatori*, iar pentru $h(\alpha, x)$, imaginea prin funcţia h a perechii $(\alpha, x) \in I\!\!K \times A$, vom utiliza una din notaţiile: $\alpha \cdot x$; $x \cdot \alpha$; αx; $x\alpha$. Operaţiei externe pe A cu elemente din $I\!\!K$ îi vom spune mai simplu *înmulţire cu scalari* din $I\!\!K$. Peste tot în cele ce urmează, $I\!\!K$ este mulţimea numerelor reale $I\!\!R$.

1.5 Structuri algebrice. Izomorfism

Definiţia 1.5.1. *Se numeşte* **structură algebrică** *o mulţime nevidă A pe care s-a definit cel puţin o lege de compoziţie. Structurile algebrice A_1 şi A_2 se zic* **de acelaşi tip algebric** *dacă ambele au acelaşi număr de operaţii externe cu acelaşi domeniu de operatori $I\!\!K$.*

Dacă unele din funcţiile $f_1, f_2, ..., f_p$ sunt legi de compoziţie binare interne pe mulţimea A, iar celelalte sunt legi de compoziţie externe ale lui A cu acelaşi domeniu de operatori $I\!\!K$, atunci structura algebrică corespunzătoare se notează cu $(A, f_1, f_2, ..., f_p)$.

Definiţia 1.5.2. *Structurile algebrice (A_1, f_1) şi (A_2, f_2) se zic* **homomorfe** *dacă există o funcţie $h : A_1 \to A_2$, numită* **homomorfism**, *sau* **morfism**, *cu proprietatea:*

$$h(f_1(x, y)) = f_2(h(x), h(y)), \ \forall\, x, y \in A_1. \tag{1.56}$$

Convenim să spunem că funcţia $h : A_1 \to A_2$ cu proprietatea (1.56) *păstrează operaţiile* f_1 şi f_2 de pe respectiv mulţimile A_1 şi A_2.

Definiţia 1.5.3. *Două structuri algebrice* $(A_1, f_1, ..., f_p)$ *şi* $(A_2, g_1, ..., g_p)$ *se zic* **izomorfe** *dacă există o aplicaţie bijectivă* $h : A_1 \to A_2$*, numită* **izomorfism***, astfel încât să avem*

$$h(f_i(x, y)) = g_i(h(x), h(y)), \quad \forall\, x, y \in A_1, \quad \forall\, i \in \overline{1, p}. \tag{1.57}$$

Definiţia 1.5.4. *Fie* A_1 *şi* A_2 *două structuri algebrice de acelaşi tip,* $h : A_1 \to A_2$ *un izomorfism şi* P *o proprietate a elementelor lui* A_1*. Dacă aceeaşi proprietate o au şi elementele* $h(x)$*, unde* $x \in A_1$*, atunci* P *se numeşte* **proprietate algebrică***.*

Observaţia 1.5.1. *Din punctul de vedere al proprietăţilor algebrice două structuri algebrice sunt identice.*

Definiţia 1.5.5. *Mulţimea nevidă* G *se numeşte* **grup***, dacă pe* G *este definită o lege de compoziţie binară internă, notată de obicei aditiv (cu* $+$*), încât să fie îndeplinite axiomele (proprietăţile):*

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall\, x, y, z \in G \quad (\textbf{\textit{asociativitate}}); \tag{1.58}$$

$$\begin{gathered} \exists\, 0 \in G \text{ astfel încât } x + 0 = 0 + x = x,\ \forall\, x \in G \\ (\ \textbf{\textit{existenţa elementului nul}}\ (\ \textbf{\textit{neutru}})); \end{gathered} \tag{1.59}$$

$$\begin{gathered} \forall\, x \in G\ \exists\ -x \in G \quad \text{astfel încât}\, x + (-x) = (-x) + x = 0 \\ (\textbf{\textit{existenţa elementului opus}}\ (\textbf{\textit{simetrizabil}})). \end{gathered} \tag{1.60}$$

Dacă, în plus, este îndeplinită proprietatea

$$x + y = y + x, \quad \forall\, x \in G, \quad \forall\, y \in G \quad (\ \textbf{\textit{comutativitate}}), \tag{1.61}$$

atunci grupul $(G, +)$ *se numeşte* **comutativ***, sau* **grup aditiv abelian***.*

Dacă legea de compoziţie binară internă în grupul G este înmulţirea, notată cu simbolul "$\cdot$", grupul $(G, \cdot)$ se numeşte *grup multiplicativ*. Elementul neutru în grupul multiplicativ se notează cu 1 şi se numeşte *element unitate*, iar simetricul elementului x se notează cu x^{-1} şi se numeşte *inversul elementului* x.

Teorema 1.5.1. *Într-un grup* (G, f) *elementul neutru* θ *este unic şi fiecă-rui element* $x \neq \theta$ *îi corespunde un singur element simetric* $x' \in G$*.*

Demonstraţie. Pentru simplitatea scrierii vom introduce notaţia $f(x, y) = x * y$.

Arătăm întâi că $x * z = y * z, \ \forall\, z \in G \Longrightarrow x = y$.

Într-adevăr, fie z' simetricul lui $z \neq \theta$. Atunci, $(x * z) * z = (y * z) * z'$ şi, folosind proprietăţile (1.58) – (1.60), avem: $(x * z) * z' = x * (z * z') = x * \theta = x$ şi $(y * z) * z' = y * (z * z') = y * \theta = y$. În consecinţă, $x = y$.

Analog se demonstrează că $z * x = z * y, \forall\, z \in G \Longrightarrow x = y$.

Dacă θ_1 şi θ_2 sunt două elemente neutre, atunci aplicând proprietatea demonstrată, am avea $\theta_1 * x = \theta_2 * x = x$, ceea ce implică $\theta_1 = \theta_2$.

În mod similar, dacă x' şi x'' sunt două elemente simetrice ale aceluiaşi element $x \neq \theta$, atunci $x' * x = x'' * x = \theta \Longrightarrow x' = x''$ în virtutea aceleiaşi proprietăţi. **q.e.d.**

Definiţia 1.5.6. *Fie* $(A, +)$ *un grup aditiv comutativ. Dacă pe mulţimea* A *este definită o încă o lege de compoziţie binară internă, notată cu simbolul* " $\cdot$ ", *numită înmulţire care, pentru orice elemente* $x, y, z \in A$, *verifică proprietăţile:*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\textbf{\textit{asociativitate}}); \tag{1.62}$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (\textbf{\textit{distributivitate la dreapta}}); \tag{1.63}$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (\textbf{\textit{distributivitate la stânga}}), \tag{1.64}$$

atunci structura algebrică $(A, +, \cdot)$ *se numeşte* **inel**.

Propoziţia 1.5.1. *Dacă* $(A, +, \cdot)$ *este un inel, atunci:*

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \quad \forall\, x \in A. \tag{1.65}$$

Demonstraţie. Fie $x \in A$. Utilizând faptul că $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall\, x \in A$, în baza proprietăţilor (1.63) şi (1.64), avem

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \tag{1.66}$$

şi

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x, \tag{1.67}$$

de unde

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 \tag{1.68}$$

şi

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x. \tag{1.69}$$

Adunând în ambii membri ai relaţiei (1.68) opusul lui $x \cdot 0$, iar în relaţia (1.69) opusul lui $0 \cdot x$, se obţine

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Deoarece $x \in A$ a fost luat arbitrar, rezultă că (1.65) este adevărată. **q.e.d.**

Propoziţia 1.5.2. (**Regula semnelor**) *Dacă* $(A, +, \cdot)$ *este un inel şi* $x, y \in A$, *atunci au loc relaţiile:*

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y); \tag{1.70}$$

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y; \tag{1.71}$$

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n, & \text{dacă} \quad n \quad \text{este} \quad \text{par} \\ -(x^n), & \text{dacă} \quad n \quad \text{etse} \quad \text{impar,} \end{cases} \tag{1.72}$$

unde prin $-x$ *se înţelege opusul lui* x $($*simetricul său faţă de operaţia de adunare*$)$, *iar* $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Din Definiţia 1.5.6 avem că $(A, +)$ este grup comutativ, deci orice element $x \in A$ are un opus $-x \in A$. În baza relaţiilor (1.63), (1.64), a Propoziţiei 1.5.1 şi a proprietăţii (1.60) rezultă că pentru orice $x, y \in A$, avem $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0$ şi $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0$, de unde, folosind Teorema 1.5.1, obţinem: $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Din egalităţile evidente $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$; $-(-x) = x$ rezultă $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Relaţia (1.72) se demonstrează uşor prin inducţie. **q.e.d.**

Definiţia 1.5.7. *Un inel* $(A, +, \cdot)$ *în care înmulţirea are elementul unitate* $1 \neq 0$ *se numeşte* **inel cu element unitate**. *Dacă înmulţirea este comutativă, atunci inelul se numeşte* **comutativ**.

Definiţia 1.5.8. *O mulţime nevidă* $\mathbb{K}$ *se numeşte* **corp** *dacă:*

(i) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *este inel cu element unitate;*

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *astfel încât* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Dacă inelul $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ din definiţia structurii de corp este un inel comutativ, atunci structura algebrică $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se numeşte *corp comutativ*, sau *câmp*.

Observaţia 1.5.2. *Terna* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *este corp dacă:*

- $(\mathbb{K}, +)$ *este grup comutativ (abelian);*
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ *este grup;*
- *înmulţirea este distributivă la stânga şi la dreapta faţă de adunare.*

1.6 Mulţimea numerelor reale

În acest paragraf prezentăm un model simplificat de definiţie axiomatică a mulţimii numerelor reale precizând că există însă şi alte moduri de construcţie axiomatică ale acesteia (vezi [22], [14], [17]).

Definiţia 1.6.1. *Fie* $(X, +, \cdot)$ *un corp comutativ. Relaţia binară de ordine totală pe* X, $\leq$, *se numeşte* **compatibilă** *cu operaţiile interne* $+$ *şi* $\cdot$ *din* X, *dacă sunt satisfăcute proprietăţile:*

$$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z, \quad \forall\, z \in X; \tag{1.73}$$

$$\begin{cases} 0 < x \\ y \leq z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \leq x \cdot z. \tag{1.74}$$

Proprietatea (1.73) exprimă compatibilitatea relaţiei de ordine cu adunarea din X, în timp ce (1.74) exprimă compatibilitatea relaţiei binare de ordine $\leq$ faţă de înmulţirea elementelor lui X.

Definiţia 1.6.2. *Câmpul* $(X, +, \cdot)$ *se numeşte* **corp comutativ total ordonat** *dacă este prevăzut cu relaţia binară de ordine totală* $\leq$ *compatibilă cu operaţiile interne din mulţimea* X.

Observaţia 1.6.1. *Într-un corp comutativ total ordonat* $(X, +, \cdot)$ *se pot construi mulţimea numerelor naturale* $I\!N$, *mulţimea numerelor întregi* $\boldsymbol{Z}$ *şi mulţimea numerelor raţionale* $\mathbb{Q}$. *Între aceste mulţimi există relaţiile de incluziune* $I\!N \subset \boldsymbol{Z} \subset \mathbb{Q} \subset X$.

Întradevăr, dacă $0 \in X$ este elementul neutru la adunare (elementul nul), iar 1 este elementul unitate din X cu $0 \neq 1$ şi $0 < 1$, atunci în baza proprietăţilor de corp ale lui X putem defini elementele: $2 = 1+1$, $3 = (1+1)+1, \ldots.$ Aceste elemente alcătuiesc o mulţime, notată cu $I\!N$, numită *mulţimea numerelor naturale*. $I\!N$ este mulţime *total ordonată* faţă de relaţia de ordine $\leq$ şi, de asemenea, este *închisă* faţă de operaţiile din X în sensul că adunarea şi înmulţirea a două numere naturale este tot un număr natural. ■

Mai departe, putem introduce opusele numerelor naturale nenule, notate cu $-1,\ -2,\ -3, \ldots,$ pe care le vom denumi *numere întregi negative*.

Numerele naturale nenule pot fi numite şi *numere întregi pozitive*.

Dacă notăm cu $-I\!N$ mulţimea numerelor întregi negative, atunci mulţimea $\boldsymbol{Z} = -I\!N \cup I\!N$, ordonată crescător

$$\cdots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

se numeşte *mulţimea numerelor întregi*.

Observăm că $\boldsymbol{Z}$ are structură de grup aditiv abelian total ordonat.

Prin $x - y$ înţelegem $x + (-y)$. Adunarea unui număr întreg cu opusul unui alt număr întreg se numeşte *scăderea* celor două numere.

Mulţimea $\boldsymbol{Z}$ este închisă faţă de operaţiile de înmulţire şi scădere a numerelor întregi, iar terna $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate, numit *inelul numerelor întregi*.

Un element de forma $x \cdot y^{-1}$, unde $x \in \boldsymbol{Z}$ şi $y \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$, se numeşte *număr raţional*, se notează sub formă de fracţie, adică cu $\dfrac{x}{y}$, şi i se mai spune *câtul* numerelor întregi x şi y.

Două fracţii $\dfrac{x}{y}$ şi $\dfrac{x'}{y'}$ reprezintă acelaşi număr raţional dacă şi numai dacă $xy' = x'y$.

O fracţie $\dfrac{x}{y}$ se numeşte *ireductibilă* dacă numerele întregi x şi y sunt prime între ele.

Oricare număr raţional se poate reprezenta într–un singur mod ca fracţie ireductibilă cu numitorul număr natural nenul.

Mulţimea tuturor fracţiilor se numeşte *mulţimea numerelor raţionale* şi se notează cu $\mathbb{Q}$.

Prin urmare,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} : x, y \in \boldsymbol{Z},\ y \neq 0 \right\}.$$

Putem să considerăm că y din definiţia mulţimii $\mathbb{Q}$ este număr natural nenul.

Un număr întreg p se poate scrie ca fracţie sub forma $\dfrac{p}{1}$. Prin urmare, numerele întregi sunt în acelaşi timp numere raţionale ceea ce înseamnă că are loc incluziunea $\boldsymbol{Z} \subset \mathbb{Q}$.

De asemenea, să remarcăm că $\mathbb{Q}$ este închisă faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire din X, în sensul că suma $r + s$ şi produsul $r \cdot s$ a două numere raţionale sunt, de asemenea, numere raţionale.

În plus, dacă $r \in \mathbb{Q}$, atunci opusul său $-r$ este tot număr raţional, iar dacă $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *inversul* său $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$ este, de asemenea, număr raţional.

Apoi, două numere raţionale oarecare $\dfrac{x_1}{y_1}$ şi $\dfrac{x_2}{y_2}$, unde $x_1 \in \boldsymbol{Z},\; x_2 \in \boldsymbol{Z},$ iar $y_1 \in I\!N^*,\; y_2 \in I\!N^* = I\!N \setminus \{0\},$ sunt în relaţia de ordine $\dfrac{x_1}{y_1} \leq \dfrac{x_2}{y_2}$, când $x_1 y_2 \leq x_2 y_1$, sau în relaţia de ordine $\dfrac{x_2}{y_2} \leq \dfrac{x_1}{y_1}$ atunci când $x_2 y_1 \leq x_1 y_2$.

Dacă $x_1 y_2 < x_2 y_1,$ atunci $\dfrac{x_1}{y_1} < \dfrac{x_2}{y_2}$.

Rezultă că terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ total ordonat.

Mai mult, spre deosebire de $\boldsymbol{Z}$, mulţimea $\mathbb{Q}$ este *densă* în sensul că între orice două numere raţionale $a < b$ există o infinitate de numere raţionale deoarece

$$a < \frac{m \cdot a + n \cdot b}{m + n} < b, \quad \forall\, m \in I\!N^*,$$

Dacă a şi b sunt numere raţionale, atunci $b - a = b + (-a)$ şi $\dfrac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$ (dacă $a \neq 0$) sunt numere raţionale, deci ecuaţiile

$$a + x = b \quad \text{şi} \quad a \cdot x = b \;\; (\text{ dacă} \quad a \neq 0)$$

au soluţii în $\mathbb{Q}$ şi acestea sunt respectiv $x = b - a$ şi $x = \dfrac{b}{a}$.

Ecuaţia $x^2 = a,$ unde $a \in \mathbb{Q},$ nu mai are însă totdeauna soluţie raţională. De exemplu, ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţie raţională căci nu există nici un număr raţional al cărui pătrat să fie $2,$ demonstraţia acestei afirmaţii făâ̂ndu–se prin reducere la absurd.

Într-adevăr, dacă există un număr raţional $r = \dfrac{p}{q}$, unde p şi q sunt numere întregi fără nici un alt divizor comun afară de 1 şi $-1,$ care să verifice ecuaţia dată, atunci trebuie să avem $p^2 = 2q^2,$ ceea ce înseamna că p^2 este un număr par, lucru posibil numai dacă $p = 2m$ adică şi p este număr par.

Egalitatea $p^2 = 2q^2$ se scrie în forma $4m^2 = 2q^2,$ de unde $2m^2 = q^2.$ Rezultă că q^2 este un număr par, deci şi q este un număr par, adică $q = 2n,\; n \in I\!N^*.$

Aşadar, p şi q au pe 2 ca divizor comun şi astfel presupunerea că există un număr raţional r cu $r^2 = 2$ conduce la o contradicţie.

Acest exemplu demonstrează că $\mathbb{Q} \subset X,$ incluziunea fiind strictă. ∎

Structura algebrică astfel definită peste o mulţime oarecare X este destul de bogată în proprietăţi.

Pe baza axiomelor de corp comutativ total ordonat se poate defini operaţia de *scădere* a două elemente oarecare ale mulţimii $X,$ de *împărţire* a două elemente, cu condiţia ca cel de-al doilea să fie diferit de elementul neutru la adunare, şi de *ridicare la o putere întreagă* a unui element din X.

Dacă $x \in X$ şi $n \in I\!N^*$, atunci prin x^n înţelegem $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, de n ori, apoi $x^0 = 1,$ iar $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}\cdot$

Structura definită pe X are incoveniente deoarece axiomele sale nu permit definirea operaţiei inverse operaţiei de ridicare la puterea întreagă $n \in I\!N^*$, $n \geq 2,$ numită operaţie de *extragere a rădăcinii de un ordin oarecare* $n \in I\!N^*$, $n \geq 2.$

De exemplu, nu putem stabili în acest cadru axiomatic formulele de determinare a soluţiilor ecuaţiei de gradul doi $.ax^2 + bx + c = 0,$ unde $a, b, c \in X.$

Pentru satisfacerea unor astfel de cerinţe este necesar să introducem noţiuni noi care să permită definirea unei structuri suficient de generale pentru a descrie mulţimea numerelor reale.

Definiţia 1.6.3. *Fie $A \subset X$ o submulţime nevidă arbitrară a lui X. Spunem că mulţimea A este majorată, sau mărginită superior dacă există un element $b \in X,$ numit majorant al mulţimii $A,$ astfel încât*

$$x \leq b, \quad \forall\, x \in A. \tag{1.75}$$

Observaţia 1.6.2. *O mulţime majorată $A \subset X$ are o infinitate de majoranţi.*

Într-adevăr, dacă b este majorant pentru A şi dacă $b' \in X$ este astfel încât $b \leq b'$, din (1.75) şi proprietatea de tranzitivitate a relaţiei de ordine totală $\leq$, rezultă că b' este majorant. ■

Dacă există un majorant în mulţimea A, acesta se numeşte *maximul* mulţimii A şi se notează $\max A$.

Definiţia 1.6.4. *Fie A o submulţime nevidă majorată a corpului comutativ total ordonat $(X, +, \cdot)$. Se numeşte* **margine superioară** *a mulţimii A, notată $\sup A$, cel mai mic majorant.*

Observaţia 1.6.3. *Este posibil ca X să fie astfel încât marginea superioară a unei submulţimi $A \subset X$ să nu aparţină lui X, ceea ce poate conduce la imposibilitatea rezolvării unor probleme practice concrete.*

Într-adevăr, dacă luăm $X = \mathbb{Q}$ şi $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, se constată că $\sup A \notin X$. Spre exemplu, lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de mărime $\ell \in \mathbb{Q}$ nu aparţine lui $\mathbb{Q}$ deoarece nu se poate scrie sub forma p/q cu $p, q \in I\!N, q \neq 0$. ■

Din Observaţia 1.6.3 deducem că în mulţimea numerelor reale este necesară o astfel de proprietate care să asigure existenţa marginii superioare a unei mulţimi majorate. În acest sens, completăm axiomele de corp comutativ total ordonat cu încă una şi anume:

Axioma de existenţă a marginii superioare. Orice submulţime nevidă majorată A a unui corp comutativ total ordonat X admite un cel mai mic majorant.

Această axiomă este cunoscută şi sub numele de *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor*[2]*–Dedekind*[3].

Definiţia 1.6.5. *Se numeşte* **mulţime a numerelor reale** *un corp comutativ total ordonat în care orice submulţime nevidă majorată admite un cel mai mic majorant. O astfel de mulţime se notează cu $I\!R$.*

Mulţimea definită cu ajutorul fracţiilor zecimale infinite satisface Definiţia 1.6.5 şi furnizează o metodă de construcţie a mulţimii numerelor reale(vezi [22], [17]).

În baza construcţiei lui $I\!R$ cu ajutorul fracţiilor zecimale putem afirma că mulţimea $I\!R$ *există*.

Se pune insa întrebarea: este *unică* o astfel de mulţime $I\!R$?

Răspunsul îl găsim în următoarea teoremă pe care o dăm fără demonstraţie.

Teorema 1.6.1. *Dacă S_1 şi S_2 sunt două corpuri comutative total ordonate care satisfac axioma de existenţă a marginii superioare, atunci există o aplicaţie bijectivă $f : S_1 \to S_2$ astfel încât*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$
$$f(0_{S_1}) = 0_{S_2}, \qquad f(1_{S_1}) = 1_{S_2},$$

unde 0_{S_1} şi 0_{S_2} sunt elementele neutre în raport cu adunarea în S_1, respectiv S_2, iar 1_{S_1}, respectiv 1_{S_2} sunt elementele neutre în raport cu înmulţirea în S_1, respectiv S_2. În plus, dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \leq f(y)$.

Rezultă aşadar că f este izomorfism de corpuri care păstrează relaţia de ordine şi, în baza Observaţiei 1.5.1, S_1 şi S_2 sunt identice.

Axiomele ce definesc $I\!R$ caracterizează această mulţime până la un izomorfism, adică $I\!R$ este unică până la un izomorfism.

Cea de a treia problemă care se pune în legătură cu construcţia axiomatică a numerelor reale $I\!R$, pe lângă cea a existenţei şi unicităţii lui $I\!R$, este aceea a noncontradicţiei axiomelor care o definesc.

[2]Cantor, Georg (1845–1918), renumit matematician german.
[3]Dedekind, Richard (1831–1917), matematician german.

Se poate arăta că sistemul de axiome care defineşte mulţimea $I\!R$ este necontradictoriu [17].

Creator al teoriei numerelor reale poate fi considerat Eudoxus[4]. Ideile sale, inspirate din geometrie, au fost preluate de Weierstrass[5] şi Dedekind şi dezvoltate prin metode aritmetice şi analitice moderne. Lui Weierstrass îi aparţine definiţia numerelor reale printr–un şir descrescător de intervale. Dedekind a introdus numerele reale ca tăieturi în mulţimea numerelor raţionale, iar Cantor le–a construit cu ajutorul *şirurilor fundamentale*, cunoscute şi sub denumirea de *şiruri Cauchy*[6].

Mulţimile obţinute prin aceste metode diferite sunt izomorfe, astfel încât se poate afirma că mulţimea numerelor reale este, ca structură algebrică, unică.

Propoziţia 1.6.1. *Fie $A \subset I\!R$ o mulţime majorată. Atunci, $b = \sup A$ dacă şi numai dacă*

(i) $x \leq b, \ \ \forall\, x \in A;$

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, x_\varepsilon \in A,$ *astfel încât* $b - \varepsilon < x_\varepsilon.$

Demonstraţie. Mai întâi demonstrăm teorema directă.

Fie $b = \sup A.$

Din Definiţia 1.6.3 rezultă că b este un majorant al mulţimii $A,$ deci condiţia (i) este satisfăcută. De asemenea, avem că b este cel mai mic majorant al mulţimii $A,$ deci $\forall\, c < b$ rezultă că c nu majorează $A;$ ca urmare, există $x_c \in A$ care nu este majorat de $c,$ adică $c < x_c.$ Luând acum $c = b - \varepsilon,$ unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar, şi notând x_c corespunzător cu x_ε rezultă $(ii).$

Reciproc, din (i) şi $(ii),$ raţionând similar, rezultă că $b = \sup A.$ **q.e.d.**

Propoziţia 1.6.2. *Dacă $A \subset B \subset I\!R$ şi $B \subset I\!R$ sunt mulţimi nevide majorate şi $A \subset B,$ atunci*

$$a = \sup A \leq \sup B = b.$$

Demonstraţie. Prin reducere la absurd. Presupunem că $a > b.$ Luând $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(a - b),$ conform Propoziţiei 1.6.1 există $x_0 \in A$ astfel încât $x_0 > a - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$ deci $x_0 \geq b$, adică $x_0 \in A$ şi $x_0 \notin B$, ceea ce contrazice incluziunea $A \subset B.$ **q.e.d.**

Definiţia 1.6.6. *Submulţimea nevidă $A \subset I\!R$ se numeşte* **minorată** *dacă există un $a \in I\!R,$ care se numeşte* **minorant** *al mulţimii $A,$ cu proprietatea*

$$a \leq x, \ \forall\, x \in A.$$

[4] Eudoxus (408 î.Hr.–355 î.Hr.), matematician grec

[5] Weierstrass, Karl Theodor (1815–1897), proeminent matematician german, considerat fondatorul analizei matematice moderne.

[6] Cauchy, Augustin Louis (1789–1857), ilustru matematician şi inginer francez. A demarat un proiect important de reformulare şi demonstrare riguroasă a teoremelor de algebră, a fost unul dintre pionierii analizei matematice şi a adus o serie de contribuţii şi în domeniul fizicii. Datorita perspicacităţii şi rigurozităţii metodelor sale, Cauchy a avut o influenţă extraordinară asupra contemporanilor şi predecesorilor săi. Catolic şi roialist fervent, a manifestat o prezenţă socială activă.

Definiţia 1.6.7. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă minorată. Elementul notat $\inf A,$ definit ca fiind cel mai mare minorant, se numeşte* **marginea inferioară** *a mulţimii A.*

Propoziţia 1.6.3. *Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o submulţime minorată, atunci $\inf A \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Submulţimea $B \subset \mathbb{R}$ definită de $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ este mărginită superior, un majorant al lui B fiind elementul $-a \in \mathbb{R}$ care are proprietatea că opusul său, a, este minorant pentru A. Din axioma de existenţă a marginii superioare rezultă că există $\sup B \in \mathbb{R}$. Se vede că $-\sup B = \inf A$. **q.e.d.**

Propoziţia 1.6.4. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime minorată. Atunci, $a = \inf A \iff$*

1^0. $a \leq x, \ \ \forall\, x \in A$;

2^0. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in A,$ *astfel încât* $x_\varepsilon < a + \varepsilon.$

Demonstraţie. Fie $a = \inf A.$ Din Definiţia 1.6.6 şi Definiţia 1.6.7 rezultă că a este un minorant al mulţimii $A,$ deci are loc 1^0. Apoi, a fiind cel mai mare minorant rezultă că, indiferent de $\varepsilon > 0,$ numărul real $a + \varepsilon$ nu minorează A deci există cel puţin un element $x_\varepsilon \in A$ care nu este minorat de $a + \varepsilon$ ceea ce înseamnă că are loc şi 2^0.

Reciproc, din 1^0 şi 2^0, raţionând ca mai sus, rezultă că $a = \inf A.$ **q.e.d.**

Deosebit de importante sunt următoarele submulţimi de numere reale:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad (\textit{interval deschis});$$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad (\textit{interval închis}, \text{ sau } \textit{segment});$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (\textit{interval semideschis la dreapta});$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad (\textit{interval semideschis la stânga}),$$

unde a şi b sunt numere reale arbitrare cu $a < b.$

Observaţia 1.6.4. *Mulţimea numerelor reale verifică* **Axioma lui Arhimede**[7]*: Pentru orice două numere reale x şi y, cu $x > 0$ şi $y \geq 0$, există un număr natural n astfel încât $y \leq nx$.*

[7] Arhimede din Siracuza (287 î.Hr.–212 î.Hr.), unul dintre cei mai de seamă învăţaţi ai lumii antice cu realizări în matematică, fizică, astronomie, inginerie şi filozofie. Carl Friederich Gauss considera că Arhimede şi Isaac Newton au fost cei mai mari oameni de ştiinţă din întreaga istorie a civilizaţiei umane. Arhimede a pus bazele şi a explicat legea pârghiilor. A proiectat numeroase invenţii inclusiv maşini de asalt şi maşini capabile să scoată corăbiile din apă şi să le dea foc folosind un sistem de oglinzi. Este autorul invenţiei şurubul fără sfârşit. Arhimede este în general considerat a fi unul din cei mai mari matematicieni ai antichităţii şi unul dintre cei mai mari a tuturor timpurilor. El a folosit metoda epuizării pentru a calcula aria unui arc de parabolă prin determinarea sumei unei serii numerice, precum şi calculul aproximativ al numărului π cu o acurateţe remarcabilă pentru acele timpuri. De asemenea a definit spirala care–i poartă numele, formule de calcul a volumelor şi al suprafeţelor corpurilor de revoluţie, precum şi un sistem foarte ingenios de exprimare a numerelor foarte mari. Arhimede a murit în timpul asediului Siracuzei (localitatea natală din Sicilia, pe atunci colonie ggrecească), în ciuda ordinului primit de a nu-l ucide. Pe piatra funerară a mormântului a fost sculptată o sferă în interiorul cilindrului circumscris, lucru cerut chiar de Arhimede, deoarece el a demonstrat că raportul dintre aria sferei şi a cilindrului circumscris este egal cu raportul volumelor corpurilor, având valoarea $2/3$.

Definiţia 1.6.8. *O mulţime nevidă $A \subset I\!R$ se numeşte* ***mărginită*** *dacă este majorată şi minorată, adică dacă există un segment $[a, b]$ astfel încât $A \subset [a, b]$.*

Observaţia 1.6.5. *Pentru o mulţime mărginită există marginea inferioară, $\inf A$, marginea superioară, $\sup A$ şi $\inf A \leq x \leq \sup A, \ \forall x \in A$.*

Observaţia 1.6.6. *Mulţimea A este formată dintr-un singur element dacă şi numai dacă $\inf A = \sup A$.*

Definiţia 1.6.9. *O submulţime nevidă A din $I\!R$ se numeşte* **mulţime nemărginită superior** *dacă nu este majorată. Mulţimea A se numeşte* **nemărginită inferior** *dacă nu este minorată.*

O funcţie reală de variabilă reală care are un rol important în analiza matematică este *funcţia modul*

$$x \mapsto |x| \quad = \quad \begin{cases} \ \ x, & \text{dacă} \quad 0 \leq x \\ -x & \text{dacă} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.76}$$

Funcţia modul (1.76) are următoarele proprietăţi:

$$|x| \geq 0, \ \forall x \in I\!R; \ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \tag{1.77}$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in I\!R, \quad (\textit{inegalitatea triunghiulară}); \tag{1.78}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in I\!R; \tag{1.79}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in I\!R; \tag{1.80}$$

$$|x| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \ \forall x \in I\!R; \tag{1.81}$$

$$|x| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I\!R. \tag{1.82}$$

Funcţia modul este o *funcţie pară*, căci din (1.76) şi (1.80) avem $|x| = |-x|, \forall x \in I\!R$.

Propoziţia 1.6.5. *Mulţimea $A \subset I\!R$ este mărginită dacă şi numai dacă $\exists M \in I\!R_+^*$ astfel încât*

$$|x| \leq M, \ \forall x \in A. \tag{1.83}$$

Mulţimea $A \subset I\!R$ este nemărginită dacă şi numai dacă

$$\forall M \in I\!R_+^*, \quad \exists x_M \in A \quad \textit{astfel încât} \quad |x_M| > M. \tag{1.84}$$

Demonstraţie. Dacă există $M > 0$ astfel încât să aibă loc (1.83), atunci $-M \leq x \leq M,\ \forall\, x \in A,$ adică A este inclusă în intervalul mărginit $[-M, M]$, si deci A este mărginită.

Reciproc, dacă A este mărginită, există un interval mărginit (a, b) care include mulţimea A. Prin urmare, avem $a \leq x \leq b,\ \forall\, x \in A.$

Să punem $M = \max\{|a|,\ |b|\}$. Atunci, $b \leq |b| \leq M$ şi $-a \leq |a| \leq M$ deci $-M \leq -|a| \leq a,$ adică $-M \leq a \leq b \leq M,$ de unde $-M \leq x \leq M,$ sau $|x| \leq M,\ \ \forall\, x \in A.$

În mod similar se demonstrează şi partea a doua a propoziţiei. **q.e.d.**

Observaţia 1.6.7. *Numerele reale pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu punctele unei drepte D.*

Într-adevăr, să fixăm un punct O pe dreapta D care, prin definiţie,este corespondentul numărului real $x = 0.$ Se defineşte o unitate de lungime, iar dacă $x \in I\!R$ şi $0 < x$, acestui număr îi corespunde pe D extremitatea din dreapta a segmentului având lungimea egală cu x unităţi, extremitatea din stânga fiind punctul 0, numit *origine*. Dacă însă $x < 0$, segmentul de lungime $-x$ se plasează cu extremitatea din dreapta în origine, iar extremitatea cealaltă defineşte corespondentul numărului real x pe dreapta D.

Invers, odată fixat punctul P pe dreapta $D,$ lungimea segmentului de dreaptă OP defineşte numărul real $x,$ care este pozitiv dacă P se situează la dreapta pe D şi negativ în caz contrar. Numărul real x astfel specificat se numeşte *abscisa* punctului $P \in D$, iar dreapta D, pe care s-a definit o origine 0, o unitate de măsură şi un *sens de parcurs* se numeşte *dreaptă reală*, sau *axa numerelor reale*. Elementele sale se numesc *puncte*. ∎

Prezentarea unitară a unor rezultate fundamentale ale calculului diferenţial impune introducerea simbolurilor matematice $-\infty$ şi $+\infty$ numite *minus infinit* şi, respectiv, *plus infinit* (în locul lui $+\infty$ se obişnuieşte şi notaţia ∞). Mulţimea

$$\overline{I\!R} = I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

se numeşte *mulţimea extinsă* a numerelor reale.

Relaţia de ordine totală din $I\!R$ se extinde la $\overline{I\!R}$ luând prin definiţie

$$-\infty < x < +\infty,\ \forall\, x \in I\!R.$$

Se poate afirma că $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este cel mai mare (respectiv cel mai mic) element al mulţimii $\overline{I\!R}.$

Elementele $+\infty$ şi $-\infty$ nu sunt numere reale deoarece nu verifică toate axiomele care definesc $I\!R$. De exemplu, nu se poate da un sens direct expresiei $\infty + (-\infty) = \infty - \infty.$

Operaţiile algebrice definite pe $I\!R$ se extind numai parţial la $\overline{I\!R},$ după cum urmează:

$$x + \infty = +\infty + x = \infty, \quad \forall\, x \in \overline{I\!R} \setminus \{-\infty\}; \quad x + (-\infty) = x - \infty = -\infty + x = -\infty, \quad \forall\, x \in \overline{I\!R} \setminus \{+\infty\};$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \ \ \forall\, x \in I\!R; \quad x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & x > 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}; \quad x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases};$$

$$x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ \infty, & 0 < x < 1 \end{cases}; \quad x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & x > 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}; \quad \infty^{x} = \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

$$0^{\infty} = 0.$$

Următoarele operaţii, care se numesc *operaţii fără sens*, sau *cazuri de nedeterminare*, nu sunt definite pe $\overline{I\!R}$:

$$\infty + (-\infty); \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad 0^0; \quad 1^{\pm\infty}; \quad \infty^0.$$

Dacă $A \subset I\!\!R$ este neminorată, respectiv nemajorată, prin definiţie

$$\inf A = -\infty \quad \text{respectiv} \quad \sup A = +\infty.$$

O altă funcţie reală, dar de două variabile reale, care trebuie introdusă, este

$$d : I\!\!R \times I\!\!R \to I\!\!R, \quad d(x,y) = |x-y|, \ \forall\, x,y \in I\!\!R. \tag{1.85}$$

Din (1.76) – (1.78) şi (1.80) rezultă că funcţia d, introdusă în (1.85), are următoarele proprietăţi:

$$d(x,y) \geq 0, \quad \forall\, x,y \in I\!\!R; \quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \tag{1.86}$$

denumită *proprietatea de nenegativitate*;

$$d(x,y) = d(y,x), \quad \forall\, x,y \in I\!\!R, \quad (\textit{simetrie}); \tag{1.87}$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall\, x,y,z \in I\!\!R, \tag{1.88}$$

cunoscută ca *inegalitatea triunghiulară*.

O astfel de funcţie se numeşte *distanţă*, sau *metrică* pe $I\!\!R$. Numărul $d(x,y)$ este lungimea segmentului PQ unde P şi Q sunt punctele de pe dreapta reală D ce corespund respectiv numerelor reale x şi y.

Pe lângă submulţimile remarcabile ale lui $I\!\!R$ introduse mai sus semnalăm şi mulţimile nemărginite:

$$\begin{array}{rcl} (a,+\infty) &=& \{x \in I\!\!R : a < x\}; \quad [a,+\infty) \ = \ \{x \in I\!\!R : a \leq x\}; \\ (-\infty,a) &=& \{x \in I\!\!R : x < a\}; \quad (-\infty,a] \ = \ \{x \in I\!\!R : x \leq a\}, \end{array}$$

numite corespunzător: *semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta; semidreaptă închisă nemărginită la dreapta; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga; semidreaptă închisă nemărginită la stânga.*

Acestor mulţimi le vom spune *intervale nemărginite*.

Mulţimea numerelor reale însăşi poate fi considerată un interval nemărginit atât la stânga cât şi la dreapta şi anume $I\!\!R = (-\infty,\infty)$. Tot în acest context putem afirma că $\overline{I\!\!R} = [-\infty,+\infty] = \{x \in \overline{I\!\!R} : -\infty \leq x \leq +\infty\}$.

Definiţia 1.6.10. *Numerele reale care nu sunt raţionale se numesc* **numere iraţionale**.

Observaţia 1.6.8. *Mulţimea numerelor reale $I\!\!R$ este reuniunea mulţimii numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ cu mulţimea numerelor iraţionale.*

Definiţia 1.6.11. *Se numeşte* **număr algebric** *orice număr care este soluţie a unei ecuaţii algebrice de forma*

$$a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

cu coeficienţii $a_0,\ a_1,\ \cdots, a_n$ numere întregi.

Definiţia 1.6.12. *Două mulţimi A şi B se numesc* **echipotente**, *şi se scrie $A \sim B$, dacă pot fi puse în corespondenţă biunivocă, adică dacă există o aplicaţie biunivocă a lui A pe B.*

Definiţia 1.6.13. *O mulţime A se numeşte* **numărabilă** *dacă este echipotentă cu mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.*

Observaţia 1.6.9. *Mulţimea A este numărabilă dacă şi numai dacă elementele sale pot fi aşezate în forma*

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n,\ \cdots\}.$$

Observaţia 1.6.10. *O mulţime A este finită şi are n elemente dacă este echipotentă cu mulţimea $\{1,\ 2,\ \cdots, n\}$ a primelor n numere naturale.*

Definiţia 1.6.14. *O mulţime este* **cel mult numărabilă** *dacă este finită, sau numărabilă.*

Exemplul 1.6.1. *Mulţimea numerelor naturale este numărabilă.*

Într-adevăr, remarca are loc deoarece $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. ■

Exemplul 1.6.2. *Mulţimea numerelor naturale pare $\{2,\ 4,\ \cdots, 2n,\ \cdots\}$ este numărabilă.*

Într-adevăr, corespondenţa biunivocă din Definiţia 1.6.12 este $n \to 2n$. ■

Exemplul 1.6.3. *Mulţimea numerelor naturale impare*

$$\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots\}$$

este numărabilă.

Exemplul 1.6.4. *Mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.*

Exemplul 1.6.5. *Orice interval deschis nu este o mulţime numărabilă.*

Exemplul 1.6.6. *Mulţimea numerelor iraţionale $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu este numărabilă.*

Observaţia 1.6.11. *Mulţimile finite A şi B sunt echipotente dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente.*

Într-adevăr, fie n numărul elementelor mulţimii A. Aceasta înseamnă că avem $A \sim \{1,\ 2,\ \cdots, n\}$. Dar $A \sim B$, deci $B \sim \{1, 2, ..., n\}$, ceea ce arată că B are tot n elemente.

Reciproc, dacă A şi B au n elemente, atunci avem: $A \sim \{1, 2, ..., n\}$; $B \sim \{1, 2, ..., n\}$, deci $A \sim B$. ■

Definiţia 1.6.15. *Numerele reale care nu sunt algebrice se numesc* **numere transcendente**.

Observaţia 1.6.12. *Numerele e şi π sunt transcendente. Mulţimea numerelor algebrice este numărabilă.*

Definiţia 1.6.16. *Fie $x_0 \in I\!\!R$. Se numeşte* **vecinătate** *a lui x_0 orice mulţime $V \subset I\!\!R$ pentru care există un interval deschis (a, b) cu proprietatea $x_0 \in (a, b) \subset V$.*

Observaţia 1.6.13. *Orice interval deschis (a, b) care conţine punctul x_0 este o vecinătate a lui x_0.*

Definiţia 1.6.17. *O vecinătate a lui x_0 de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se numeşte* **vecinătate simetrică**, *sau* **bilă deschisă de rază ε centrată în x_0**.

Definiţia 1.6.18. *O mulţime $V \subset I\!\!R$ se numeşte* **vecinătate a lui** $+\infty$, *respectiv a simbolului $-\infty$, dacă V include o semidreaptă $(a, +\infty)$, respectiv o semidreaptă $(-\infty, a)$.*

O vecinătate a lui x_0 se notează prin V_{x_0}, sau prin $V(x_0)$, iar mulţimea tuturor vecinătăţilor elementului $x \in \overline{I\!\!R}$ se notează cu $\mathcal{V}(x)$.

Teorema 1.6.2. (**Proprietatea de separaţie Hausdorff**[8] **a mulţimii $I\!\!R$**) *Pentru orice două elemente $x, y \in \overline{I\!\!R}$, $x \neq y$, există vecinătăţile V_x şi V_y care au intersecţie vidă, adică $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Demonstraţie. Dacă $x, y \in I\!\!R$ şi $x < y$, iar $\varepsilon = d(x, y) = |x - y| > 0$, atunci mulţimile $V_x = \Big(x - \dfrac{\varepsilon}{3},\ x + \dfrac{\varepsilon}{3}\Big)$ şi $V_y = \Big(y - \dfrac{\varepsilon}{3},\ y + \dfrac{\varepsilon}{3}\Big)$ sunt vecinătăţi ale lui x şi respectiv y care nu se intersectează (au intersecţie vidă).

Dacă $x = -\infty$ şi $y = +\infty$, atunci mulţimile $V_x = (-\infty,\ 0)$ şi $V_y = (0,\ \infty)$, care sunt vecinătăţi ale lui x şi respectiv y, au intersecţie vidă.

Dacă $x = -\infty$ şi $y \in I\!\!R$, atunci mulţimile $V_x = (-\infty,\ y - |y|)$ şi $V_y = (y - |y|,\ y + |y|)$ sunt vecinătăţi pentru x şi respectiv y care nu au elemente comune. Analog se demonstrează cazul $x \in I\!\!R$ şi $y = +\infty$. **q.e.d.**

[8] Hausdorff, Felix (1868 - 1942), matematician german, considrat unul din fondatorii topologiei moderne

Observaţia 1.6.14. *Dacă* $x_0 \in I\!\!R$ *şi* $V_{x_0} = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ *este o vecinătate simerică a lui* x_0*, atunci*

$$x \in V_{x_0} \Longleftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon.$$

Observaţia 1.6.15. *Oricare ar fi vecinătatea* $V(a)$*,* $a \in I\!\!R$*, există o vecinătate simetrică* $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ *astfel încât* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V(a)$*.*

Într-adevăr, dacă $V(a)$ este vecinătate, din Definiţia 1.6.16 rezultă că există intervalul deschis $(\alpha,\ \beta) \subset V(a)$ astfel încât $x_0 \in (\alpha,\ \beta)$. Luând $\varepsilon = \min\{a - \alpha,\ \beta - a\}$, deducem că $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \subset V(a)$. ■

Capitolul 2

Şiruri şi serii de numere reale

În acest capitol se studiază un caz particular de funcţie reală de o variabilă reală. Particularitatea constă în aceea ca domeniul de definiţie a unei astfel de funcţie este sau mulţimea numerelor naturale, sau o submulţime a mulţimii numerelor naturale.

2.1 Şiruri de numere reale

Definiţia 2.1.1. *Se numeşte* **şir de numere reale**, *sau* **şir numeric**, *orice funcţie de forma* $f : I\!N_k \to I\!R$, *unde* $I\!N_k = \{n \in I\!N : \; n \geq k, \; k \in I\!N\}$.

Punând $f(n) = a_n$, şirul se notează prin $(a_n)_{n \geq k}$. În mod uzual se ia $k = 1$, uneori $k = 0$. În cazul $k = 1$ vom scrie prescurtat (a_n). Numărul real a_n se numeşte **termenul de rang** n al şirului, sau *termen general.* Elementele $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ se numesc *termenii şirului*, iar mulţimea $\{a_n : n \in I\!N_k\}$ se numeşte *mulţimea valorilor şirului.* Şirul (a_n) se numeşte **şir constant** dacă mulţimea valorilor sale este formată dintr–un singur element, adică $a_n = c, \; \forall \, n \in I\!N^*$, unde $c \in I\!R$.

Definiţia 2.1.2. *Fie şirul de numere reale* (a_n)*. Elementul* $a \in \overline{I\!R}$ *se numeşte* **limită** *a şirului* (a_n) *şi scriem*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{sau} \quad a_n \to a, \tag{2.1}$$

dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$ *avem* $a_n \notin V$ *pentru un număr finit de valori ale lui* $n \in I\!N^*$.

Observaţia 2.1.1. *Şirul* (a_n) *are limita* $a \in \overline{I\!R}$ *dacă în afara oricărei vecinătăţi* $V \in \mathcal{V}(a)$ *rămân un număr finit de termeni ai şirului.*

Definiţia 2.1.3. *Dacă* $a \in I\!R$ *are proprietatea* (2.1), *atunci şirul* (a_n) *se numeşte* **convergent**.

Definiţia 2.1.4. *Dacă* $a = +\infty$, *respectiv* $a = -\infty$, *satisface* (2.1), *şirul* (a_n) *se numeşte* **divergent cu limita egală cu** $+\infty$, *respectiv* **divergent cu limita egală cu** $-\infty$.

Definiţia 2.1.5. *Dacă nu există* $a \in \overline{I\!R}$ *astfel încât să aibă loc* (2.1), *atunci şirul* (a_n) *se numeşte* **şir fără limită**, *sau* **şir oscilant**.

Observaţia 2.1.2. *Numărul termenilor şirului* (a_n), *cu limita* $a \in \overline{I\!R}$, *care rămân în afara vecinătăţii* $V(a)$, *depinde de această vecinătate. În particular, pot exista vecinătăţi* $V \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât mulţimea* $\{n \in I\!N^* : a_n \notin V\}$ *să fie mulţimea vidă, care este mulţime finită.*

Teorema 2.1.1. *Şirul numeric* (a_n) *este convergent dacă şi numai dacă există* $a \in I\!R$ *cu proprietatea:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in I\!N, \quad \textit{astfel încât} \quad |a_n - a| < \varepsilon,\, \forall\, n > N(\varepsilon). \tag{2.2}$$

Demonstraţie. Dacă (a_n) este şir convergent, atunci există $a \in I\!R$ care satisface proprietatea din Definiţia 2.1.2. Dacă luăm $V(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar, atunci pentru un număr finit de valori ale lui $n \in I\!N^*$ care, fiind dependent de vecinătatea $V(a)$, deci de ε, îl notăm cu $N(\varepsilon)$, avem $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că numerele naturale pentru care $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sunt primele $N(\varepsilon)$; deci pentru $n > N(\varepsilon)$ avem $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ceea ce este echivalent cu $|a_n - a| < \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon)$, adică (2.2) este adevărată.

Invers, să presupunem că numărul real a are proprietatea (2.2). De aici deducem că în afara intervalului simetric centrat în a de lungime 2ε se găsesc termenii $a_1, a_2, ..., a_{N(\varepsilon)}$. Cum orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ include o vecinătate simetrică a lui a, rezultă că şi în afara lui V se găsesc un număr finit de termeni ai şirului (cel mult $N(\varepsilon)$), de unde, folosind Definiţia 2.1.2, deducem că $a_n \to a$. **q.e.d.**

Teorema 2.1.2. *Şirul numeric* (a_n) *are limita* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) dacă şi numai dacă*

$$\forall\, M > 0\, \exists\, N(M) \in I\!N \ \textit{a.î}\ a_n > M(\ \textit{resp.}\ a_n < -M)\ \ \forall\, n > N(M).$$

Demonstraţie. Dacă $a_n \to +\infty$, atunci în afara vecinătăţii (M, ∞), $M > 0$, a punctului de la infinit, rămîn un număr finit de termeni ai şirului; fie aceştia $a_1,\, a_2, ...,\, a_{N(M)}$. Atunci, $\forall\, n > N(M)$ avem $a_n > M$.

Reciproc, dacă $a_n > M, \forall\, n > N(M)$, atunci în afara intervalului $(M, +\infty)$ rămîn un număr finit de termeni ai şirului, deci $a_n \to +\infty$.

In mod similar se demonstrează şi cazul $a_n \to -\infty$. **q.e.d.**

Observaţia 2.1.3. *Oricare din condiţiile din Teorema* 2.1.1 *şi Teorema* 2.1.2 *poate fi luată, după caz, ca definiţie a limitei unui şir de numere reale.*

Teorema 2.1.3. *Limita unui şir, dacă există, este unică.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd. Se face separat pentru cazul şirului convergent şi pentru cazul şirului divergent la $+\infty$, sau la $-\infty$. În toate cazurile se presupune ca (a_n) are două limite distincte şi apoi se utilizează Teorema 1.6.2 şi Definiţia 2.1.2. **q.e.d.**

Propoziţia 2.1.1. (**Criteriul majorării**) *Fie (a_n) un şir de numere reale. Dacă există un număr real a şi un şir de numere reale (b_n) convergent la zero astfel încât termenii şirurilor (a_n) şi (b_n) să satisfacă condiţia*

$$|a_n - a| \leq b_n, \;\; n \in \mathbb{N}^*,$$

eventual cu excepţia unui număr finit de termeni, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Dacă există şirul numeric (b_n) cu limita egală cu $+\infty$, respectiv $-\infty$, şi

$$a_n \geq b_n, \;\; \textit{respectiv } a_n \leq b_n,$$

cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \;\; \textit{respectiv } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 2.1.1 şi Teorema 2.1.2. **q.e.d.**

Corolarul 2.1.1. *Şirul numeric (a_n) este convergent la $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul de numere nenegative $(d(a_n, a))$, $d(a_n, a) = |a_n - a|$, este convergent la zero.*

Teorema 2.1.4. *Dacă şirurile $(a_n), (b_n)$ sunt convergente şi au limitele a şi respectiv b şi dacă α şi β sunt numere reale arbitrare, atunci şirul $(\alpha a_n + \beta b_n)$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.3}$$

Demonstraţie. Considerăm mai întâi cazul $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Din Teorema 2.1.1 rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ şi $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, \quad \forall\, n > N_1(\varepsilon); \tag{2.4}$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \quad \forall\, n > N_2(\varepsilon). \tag{2.5}$$

Să evaluăm acum diferenţa $|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)|$. Avem

$$|(\alpha a_n + \beta b_n)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b|. \tag{2.6}$$

Din (2.4) − (2.6), rezultă

$$|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| < \varepsilon,\ n > N(\varepsilon) = max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}, \tag{2.7}$$

care, împreună cu Teorema 2.1.1, arată că (2.3) are loc.

Dacă $\alpha \cdot \beta = 0$, atunci cu mici adaptări ale demonstraţiei de mai sus se vede că (2.3) este de asemenea adevărată. **q.e.d.**

Propoziţia 2.1.2. (**Monotonie**) *Fie şirurile numerice (a_n) şi (b_n). Dacă $a_n \geq b_n$ şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ atunci $a \geq b$.*

Demonstraţie. Considerăm doar cazul când şirurile sunt convergente, celelalte situaţii fiind evidente. Fie (c_n) cu $c_n = a_n - b_n$. Evident că $c_n \geq 0$. După Teorema 2.1.4, avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a - b$. Să presupunem că $a - b < 0$. Atunci pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|a - b| > 0\ \exists\, N_1 \in I\!N$ astfel încât

$$|c_n - (a - b)| < \frac{|a - b|}{2}\ \forall\, n \geq N_1,$$

din care deducem

$$c_n < a - b + \frac{|a - b|}{2} = a - b + \frac{b - a}{2} < 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Definiţia 2.1.6. *Şirul de numere reale (a_n) se numeşte* **mărginit**, *respectiv* **nemărginit**, *dacă mulţimea valorilor sale $f(I\!N^*) = \{a_n : n \geq 1\}$ este mărginită, respectiv nemărginită.*

Observaţia 2.1.4. *Şirul (a_n) este mărginit dacă $\exists M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$, $\forall\, n \in I\!N^*$.*

Şirul (a_n) este nemărginit dacă $\forall\, M > 0\ \exists\ n_M \in I\!N^*$ astfel încât $|a_{n_M}| > M$.

Propoziţia 2.1.3. *Prin schimbarea ordinii termenilor unui şir cu limită se obţine un şir care are aceeaşi limită.*

Demonstraţie. Fie $a_n \to a,\ \ a \in \overline{I\!R}$ şi fie (b_n) şirul obţinut din şirul (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor.

Poziţia pe axa reală a termenilor şirului (a_n) nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică. Cum $a_n \to a$, după Definiţia 2.1.2, avem că în afara fiecărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi, totodată, acelaşi număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci şirul (b_n) are tot limita a. **q.e.d.**

Propoziţia 2.1.4. *Dacă la un şir cu limita egală cu a se adaugă, sau se inlătură un număr finit de termeni, şirul obţinut are aceeaşi limită.*

Demonstraţie. Dacă $a_n \to a$, atunci în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n), iar după adăugarea, sau înlăturarea unui număr finit de termeni, în afara fiecărei vecinătăţi a lui a se află tot un număr finit de termeni ai şirului obţinut, deci şi acesta are limita egală cu a. **q.e.d.**

Propoziţia 2.1.5. *În mulţimea şirurilor convergente au loc următoarele proprietăţi:*

(i) $a_n \to a,\ a \in I\!R \Longrightarrow |a_n| \to |a|;$

(ii) $|a_n| \to 0 \Longleftrightarrow a_n \to 0;$

(iii) $a_n \to a,\ a \in I\!R \Longrightarrow (a_n)$ *şir mărginit;*

(iv) $a_n \to 0$ *şi* (b_n) *şir mărginit* $\Longrightarrow a_n \cdot b_n \to 0;$

(v) $a_n \to a,\ a \in I\!R$ *şi* $b_n \to b,\ b \in I\!R \Longrightarrow a_n \cdot b_n \to a \cdot b;$

(vi) $b_n \to b,\ b \in I\!R,\ b \neq 0 \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{b_n}\right)$ *şir mărginit şi* $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b};$

(vii) $a_n \to a,\ a \in I\!R$ *şi* $b_n \to b,\ b \in I\!R,\ b \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b};$

$(viii)$ $a_n \to a,\ a \neq 0$ *şi* $k \in I\!N \Longrightarrow a_n^{-k} \to a^{-k}.$

Demonstraţie. (i) Din (1.79) deducem inegalitatea

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|,\ \forall\, n \in I\!N^*.$$

Folosind ipoteza din (i) şi Teorema 2.1.1, obţinem

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon,\ n > N(\varepsilon).$$

Folosind din nou Teorema 2.1.1, aplicată şirului $(|a_n|)$, deducem $a_n \to a$.

(ii) În adevăr,

$$|a_n| \to 0 \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in I\!N \quad \text{astfel încât} \quad |a_n| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon),$$

iar aceasta din urmă înseamnă că $a_n \to 0$.

Implicaţia inversă rezultă din (i).

(iii) Luând $M = |a|$, avem $-M < a < M$, deci intervalul $(-M, M)$ este o vecinătata a lui a.

Deoarece în afara acestei vecinătăţi se află un numă finit de termeni ai şirului (a_n), există un număr natural N astfel încâ să avem $a_n \in (-M, M),\ \forall\, n > N$.

Notând $M_1 = max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, M\}$, deducem $|a_n| \leq M_1$ care, după Observaţia 2.1.4 şi Definiţia 2.1.6, arată că şirul (a_n) este mărginit.

Prin negaţie, din (iii) deducem că *orice şir nemărginit este fie divergent, fie oscilant.*

(iv) Deoarece şirul (b_n) este mărginit, după Observaţia 2.1.4, există $M > 0$ astfel încât să avem $|b_n| \leq M$, pentru toţi termenii b_n, deci

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |a_n|,\ \forall\, n \in I\!N^*.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to 0$, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Urmează că $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq N(\varepsilon)$, adică $a_n \cdot b_n \to 0$.

(v) Şirurile a_n şi b_n se pot scrie în forma $a_n = a + \alpha_n$ şi $b_n = b + \beta_n$ şi, după Teorema 2.1.4, avem că $\alpha_n \to 0$ şi $\beta_n \to 0$. Atunci, notând $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, avem

$$a_n \cdot b_n = (a + \alpha - n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \alpha_n \cdot \beta_n + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n = a \cdot b + \gamma_n.$$

Dar $\alpha_n \cdot \beta_n \to 0,\ a \cdot \beta_n \to 0$ şi $b \cdot \alpha_n \to 0,$ deci $\gamma_n \to 0$, deci $a_n \cdot b_n \to 0$.

Prin inducţie completă se demonstrează că *suma şi produsul unei familii finite de şiruri convergente sunt de asemenea şiruri convergente şi limita sumei este egală cu suma limitelor, iar limita produsului este egală cu produsul limitelor.*În particular, luând k şiruri convergente egale cu (a_n), deducem

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^k) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k.$$

(vi) Deoarece $b \neq 0$ putem presupune că toţi termenii b_n sunt nenuli, deci şirul $(\dfrac{1}{b_n})$ este bine definit. Să luăm, de exemplu, $\alpha = \dfrac{|b|}{2} > 0$. Avem $|b_n| \to |b| > \alpha$. Urmează că există un număr natural N cu proprietatea că începând de la termenii cu rangul $N+1$ avem inegalitatea $|b_n| > \alpha$. Atunci,

$$\frac{1}{b_n} < \frac{1}{\alpha},\ \forall\, n > N.$$

Luând $M = \max\{\dfrac{1}{|b_1|}, \dfrac{1}{|b_2|}, ..., \dfrac{1}{|b_N|}, \dfrac{1}{\alpha}\}$, avem $|\dfrac{1}{b_n}| \leq M,\ \forall\, n \in I\!N^*$, deci şirul $(\dfrac{1}{b_n})$ este mărginit. De aici deducem cu uşurinţă:

$$b_n \to 0 \text{ şi } b_n \neq 0,\ \forall\, n \in I\!N^* \to (\frac{1}{b_n}) \ \text{ şir nemărginit }.$$

Pentru demonstraţia părţii a doua să observăm că avem

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n \cdot b} = \frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{b} \cdot (b - b_n).$$

Dar $b - b_n \to 0$, deci $\dfrac{1}{b} \cdot (b - b_n) \to 0$. Din partea precedentă rezultă că şirul $(\dfrac{1}{b_n})$ este mărginit, deci $\dfrac{1}{b_n} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot (b - b_n) \to 0$. Aşadar $\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b} \to 0$, adică $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$. În plus, deducem că dacă $b_n \to 0$, şirul $(\dfrac{1}{b_n})$ nu este convergent deoarece este nemărginit.

(vii) Termenul general al *şirului cât* $(\dfrac{a_n}{b_n})$ se poate scrie sub forma produsului $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$, iar şirul $(\dfrac{1}{b_n})$ este convergent. Urmează că şirul produs $\left(a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}\right)$ este convergent, deci şirul cât $(\dfrac{a_n}{b_n})$ este convergent. Folosind acum cele demonstrate anterior, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Această proprietate poate fi formulată în cuvinte astfel: *limita câtului este egală cu raportul limitelor.*

$(viii)$ Într-adevăr $a_n^k \to a^k \neq 0$, deci $\dfrac{1}{a_n^k} \to \dfrac{1}{a^k}$, adică $a_n^{-k} \to a^{-k}$ şi propoziţia este complet demonstrată.**q.e.d.**

Propoziţia 2.1.6. *În mulţimea şirurilor cu limită au loc următoarele proprietăţi:*

(a) $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a_n + b_n \to +\infty$;

(b) $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$, *dacă* $b > 0$ *şi* $a_n \cdot b_n \to -\infty$, *dacă* $b < 0$;

(c) $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a_n + b_n \to -\infty$;

(d) $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty$, *dacă* $b > 0$ *şi* $a_n \cdot b_n \to +\infty$, *dacă* $b < 0$;

(e) $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to +\infty \Longrightarrow a_n + b_n \to +\infty$ *şi* $a_n \cdot b_n \to +\infty$;

(f) $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to -\infty \Longrightarrow a_n + b_n \to -\infty$ *şi* $a_n \cdot b_n \to +\infty$;

(g) $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to -\infty \Longrightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty$;

(h) $a_n \to +\infty$, *sau* $a_n \to -\infty \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to 0$;

(i) $a_n \to 0$ *şi* $a_n > 0($ *resp.* $a_n < 0) \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to +\infty$ *(resp.* $\dfrac{1}{a_n} \to -\infty)$.

Demonstraţie. Vom face demonstraţia pentru ultimele două proprietăţi.

După Teorema 2.1.2, rezultă că $\forall\, M > 0\ \exists\ N(M) \in \mathbb{N}$ a.î $a_n > M, \forall\, n > N(M)$, din care găsim $\dfrac{1}{a_n} < \dfrac{1}{M}, \forall\, n > N(M)$. Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci, există $M > 0$ aşa încât să avem $\varepsilon < \dfrac{1}{M}$. Din inegalităţile de mai sus deducem $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 < \dfrac{1}{a_n} < \varepsilon, \forall\, n > N(\varepsilon)$ care, după Teorema 2.1.1, arată că şirul $(\dfrac{1}{a_n})$ este convergent şi are limita egală cu 0.

În mod asemănător se demonstrează că $a_n \to -\infty \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Pentru a demonstra ultima proprietate plecăm de la Teorema 2.1.2 care, în baza faptului că $a_n \to 0$, conduce la $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$. Considerăm cazul $a_n > 0$. Atunci, din ultima inegalitate găsim $\dfrac{1}{a_n} > \dfrac{1}{\varepsilon},\ \ \forall\, n > N(\varepsilon)$. Dacă $M > 0$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\dfrac{1}{\varepsilon} \geq M$. Considerând că ε s-a ales astfel, din cele de mai sus rezultă:

$$\forall\, M > 0\ \exists\ N(M) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \frac{1}{a_n} > M, \forall\, n > N(M),$$

ceea ce, după Teorema 2.1.2, arată că şirul $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. La fel se demonstrează cea de a doua implicaţie din (i). Celelalte proprietăţi se demonstrează la fel de uşor dacă se foloseşte Teorema 2.1.1 şi Teorema 2.1.2. **q.e.d.**

Definiţia 2.1.7. *Şirul numeric* (a_n) *se numeşte* **monoton** *dacă diferenţa* $a_{n+1} - a_n$ *păstrează semn constant* $\forall\, n > N_0$, *unde* $N_0 \in \mathbb{N}$.

Dacă $a_{n+1} - a_n \geq 0$, *respectiv* $a_{n+1} - a_n > 0$, $\forall\, n > N_0$, *şirul numeric* (a_n) *se numeşte* **monoton crescător**, *respectiv* **monoton strict crescător**.

Dacă $a_{n+1} - a_n \leq 0$, $\forall\, n > N_0$, *respectiv* $a_{n+1} - a_n < 0$, $\forall\, n > N_0$, *şirul numeric* (a_n) *se numeşte* **monoton descrescător**, *respectiv* **monoton strict descrescător**.

Un şir numeric se numeşte **monoton** *dacă este sau monoton crescător, sau monoton descrescător.*

Observaţia 2.1.5. *După Propoziţia 2.1.4 putem considera că* N_0 *din Definiţia 2.1.7 este egal cu* 0.

Observaţia 2.1.6. *Dacă* $a_n > 0$, *studiul monotoniei şirului* (a_n) *se poate face evaluând raportul a doi termeni consecutivi ai şirului. Dacă* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *şirul este monoton crescător, iar dacă* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, *şirul este monoton descrescător.*

Teorema 2.1.5. **(Weierstrass)** *Orice şir numeric monoton* (a_n) *are limită în* $\overline{I\!\!R}$.

Dacă şirul numeric (a_n) *este monoton crescător, respectiv monoton descrescător, limita sa este egală cu marginea superioară, respectiv marginea inferioară, a mulţimii valorilor şirului .*

Demonstraţie. Să presupunem mai întâi că (a_n) este şir monoton crescător şi mărginit. Conform axiomei de existenţă a marginii superioare mulţimea valorilor şirului admite un cel mai mic majorant pe care îl vom nota cu a. Deoarece a este majorant al mulţimii $\{a_n : n \in I\!\!N^*\}$ rezultă $a_n \leq a,\ \forall\, n \in I\!\!N^*$. Din Propoziţia 1.6.1 rezultă

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ a_{N(\varepsilon)} \text{ astfel încât } a - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a.$$

Fiindcă şirul (a_n) este crescător,

$$a_n \geq a_{N(\varepsilon)},\ \forall\, n > N(\varepsilon),$$

deci

$$a - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon) \Longleftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Din Teorema 2.1.1 rezultă că (a_n) este convergent şi are limita a.

Dacă presupunem că şirul (a_n) este monoton crescător şi nemărginit superior, atunci $\sup\{a_n : n \in I\!\!N^*\} = +\infty$, deci $\forall M > 0\ \exists\ N(M) \in I\!\!N$ cu proprietatea $a_{N(M)} \geq M$. Cum pentru orice $n > N(M)$ avem $a_n \geq a_{N(M)}$, deducem că avem şi $a_n \geq M\ \forall\, n > N(M)$, ceea ce, după Teorema 2.1.2, arată că $a_n \to +\infty$.

În sfârşit, dacă (a_n) este şir monoton descrecător şi mărginit inferior, atunci şirul (b_n), unde $b_n = -a_n$, este monoton crescător şi mărginit superior, deci are limita egală cu $b = \sup\{b_n : n \in I\!\!N^*\}$. Dar

$$\sup\{b_n : n \in I\!\!N^*\} = \sup\{-a_n : n \in I\!\!N^*\} = -\sup\{a_n : n \in I\!\!N^*\}$$

şi cum $b_n = -a_n$, deducem că $a_n \to a = \inf\{a_n : n \in I\!\!N^*\}$.

În mod asemănător, se arată că dacă (a_n) este monoton descrescător şi mărginit inferior limita şirului (a_n) este $-\infty$. **q.e.d.**

Teorema 2.1.6. **(Lema intervalelor incluse a lui Cantor)** *Dacă* $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, *este un şir descrescător de intervale astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *atunci există un singur punct* c *comun tuturor intervalelor închise* I_n, *adică* $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n = c$.

Demonstraţie. Odată precizate intervalele, se pun în evidenţă şirurile extremităţilor $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$, ai căror termeni satisfac inegalităţile $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Fiindcă $(a_n)_{n\geq 0}$ este şir monoton crescător, mărginit superior (de exemplu de b_0), după Teorema 2.1.5, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c = \sup\{a_n : n \in I\!N\} \in I\!R.$

Şirul (b_n) este monoton descrecător şi mărginit inferior şi are limita $c_1 = \inf\{b_n : n \in I\!N\}.$

Din $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$ rezultă $c = c_1.$

Din faptul că $a_n \leq c \leq b_n$ rezultă că c aparţine tuturor intervalelor $I_n.$ **q.e.d.**

Ca aplicaţii la Teorema 2.1.5 şi Teorema 2.1.6 prezentăm două exemple de şiruri de numere reale remarcabile care le vom folosi mai târziu la serii numerice.

Exemplul 2.1.1. (**Numărul** e) *Şirul numeric* (a_n) *având termenul general dat de* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,\ n \geq 1,$ *este monoton strict crescător şi majorat, deci convergent; limita sa se notează cu* e *şi avem* $2 < e < 3.$

Într-adevăr, ţinând seama de *inegalitatea lui Bernoulli*

$$(1+x)^n > 1 + nx,\ \forall\, x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\},\ \forall n \in I\!N^*,$$

rezultă mai întâi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\dfrac{n}{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = 1,$$

deci $a_{n+1} > a_n,$ deci şirul (a_n) este monoton strict crescător.

Fie apoi şirul (b_n) cu termenul general $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Folosind din nou inegalitatea lui Bernoulli, deducem $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} > 1,$ din care tragem concluzia că şirul (b_n) este monoton strict descrescător.

Evident, $\forall\, n \in I\!N^*$ avem

$$0 < b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{b_n}{n} \leq \frac{b_1}{n} \to 0,$$

deci, folosind Teorema 2.1.6, putem afirma că şirurile a_n şi b_n sunt convergente şi limitele lor sunt egale; să notăm această limită cu e. Este clar că

$$2 = a_1 < e < b_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} < 3.$$

Din cele deduse mai sus putem scrie inegalităţile:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n \in I\!N^*.$$

Logaritmând aceste inegalităţi, obţinem inegalităţile

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad n \in I\!N^*, \tag{2.8}$$

pe care le vom folosi în exemplul care urmează. ■

Exemplul 2.1.2. (**Constanta lui Euler**[1] c) *Şirul* (a_n) *cu termenul general*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \tag{2.9}$$

este monoton strict descrescător şi minorat de zero, deci convergent; limita sa, numită constanta lui Euler, se notează cu c *şi avem* $0 < c < 1.$

Într-adevăr, din (2.8) avem:

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{2.10}$$

Sumăm acum membru cu membru inegalităţile (2.10) scrise pentru toate valorile lui k de la 1 până la n şi obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ţinând cont de expresia termenului general al şirului pe care îl studiem, se vede că inegalităţile de mai sus se pot scrie în forma:

$$a_{n+1} - 1 + \ln(n+1) < \ln(n+1) < a_n + \ln n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Din aceste inegalităţi şi inegalitatea dedusă la sfârşitul exemplului precedent deducem că şirul considerat este monoton strict descrescător şi mărginit, toate valorile şirului fiind cuprinse în intervalul $(0,1)$. Din Teorema 2.1.5 rezultă că şirul este convergent; fie c limita sa. Evident avem $0 < c < 1$. ■

Definiţia 2.1.8. *Fie (a_n) un şir de numere reale şi (k_n) un şir strict crescător de numere naturale. Şirul (b_n), unde $b_n = a_{k_n}$, se numeşte* **subşir** *al şirului (a_n).*

Observaţia 2.1.7. *Un şir are o infinitate de subşiruri.*

Propoziţia 2.1.7. *Şirul (a_n) are limita $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă orice subşir al său are limita egală cu a.*

Demonstraţie. Fie mai întâi $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ arbitrar şi a_{k_n}, un subşir arbitrar al şirului (a_n). Atunci, există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât (2.2) să aibă loc. Din Definiţia 2.1.8 şi (2.2) rezultă evident $|a_{k_n} - a| < \varepsilon,\ \forall n > N(\varepsilon)$, ceea ce demonstrează că a este limita subşirului $(a_{k_n})_{n\geq 1}$.

Dacă $a = +\infty$, atunci folosind Teorema 2.1.2 avem:

$$\forall M > 0\ \exists\ N(M) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } a_n > M,\ \forall\, n > N(M).$$

Cum $k_n \geq n$ vom avea şi $a_{k_n} > M$, $\forall\, n > N(M)$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty$.

În mod analog se arată că dacă $a_n \to -\infty$, atunci orice subşir al şirului (a_n) are de asemeni limita egală cu $-\infty$.

Reciproc, dacă orice subşir al şirului (a_n) are limita egală cu a, atunci şirul (a_n) are, de asemenea, limita a, fiindcă (a_n) însuşi este unul din subşirurile sale. **q.e.d.**

Exerciţiul 2.1.1. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}\Big) = \ln k, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq 2, \quad k \text{ fixat.}$$

[1]Euler, Leonard (1707–1783), mare matematician şi fizician elveţian care a adus numeroase şi însemnate contibuţii în diverse domenii ale matematicii şi fizicii (geometrie analitică, trigonometrie, calcul diferenţial, teoria numerelor etc.). Euler este considerat a fi fost forţa dominantă a matematicii secolului al XVIII-lea şi unul dintre cei mai remarcabili matematicieni şi savanţi multilaterali ai omenirii. Alături de influenţa considerabilă pe care a exercitat-o asupra matematicii şi matematizării ştiinţelor stau atât calitatea şi profunzimea, cât şi prolificitatea extraordinară a scrierilor sale, opera sa exhaustivă, dacă ar fi publicată vreodată integral,putând cu uşurinţă umple între 70 şi 80 de volume de dimensiuni standard.

Soluţie. Pentru determinarea acestei limite se trece la limită în relaţia evidentă

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{kn}=a_{kn}-a_n+\ln k,\ \ k\in I\!N^*,\ \ k\geq 2,$$

şi se ţine cont că $(a_{kn})_{n\geq 1}$ este un subşir al şirului (a_n) din (2.9). ■

Exerciţiul 2.1.2. *Să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

Soluţie. Pentru determinarea acestei limite se trece la limită în relaţia evidentă

$$\frac{1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=\frac{1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}-\ln n}{\ln n}+1,\ \ n>1$$

şi se ţine cont de faptul că şirul (2.9) este convergent. ■

Corolarul 2.1.2. *Dacă şirul (a_n) are două subşiruri având limitele distincte b şi c, atunci şirul (a_n) nu are limită.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd. Dacă şirul (a_n) are limită, atunci după Propoziţia 2.1.7 toate subşirurile acestuia au aceeaşi limită şi prin urmare rezultă $b=c$, ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Propoziţia 2.1.8. (**Lema lui Cesaro**[2]) *Orice şir numeric mărginit conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie (a_n) un şir numeric mărginit. Atunci, mulţimea $\{a_n : n\in I\!N^*\}$ este mărginită şi prin urmare orice submulţime a sa este de asemeni mărginită. Dacă $A_k=\{a_n : n\geq k,\ k\in I\!N^*\}$ şi $c_k=\sup A_k$, atunci avem că $c_k\in I\!R$, iar din faptul că $A_k\supset A_{k+1}$ şi Propoziţi a 1.6.2 rezultă $c_k\geq c_{k+1}$, ceea ce arată că şirul (c_k) este descrescător. Totodată, şirul (c_k) este şi mărginit deoarece $A_k\subset A_1$ şi A_1 este mulţime mărginită. După Teorema 2.1.5, rezultă că şirul (c_k) are limită finită.

Dacă $c_k\in A_k, \forall\, k\in I\!N^*$, atunci există $n_k\geq k$ astfel încât $c_k=a_{n_k}$.

Aplicând şirului (n_k) Propoziţia 2.1.2 deducem $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=+\infty$. Conform Propoziţiei 2.1.6, din şirul (n_k) putem extrage un subşir monoton strict crescător cu limita $+\infty$ şi astfel se obţine un subşir al şirului (a_n) care are limită finită, deci convergent.

Presupunem acum că există un indice $l\in I\!N^*$ astfel încât c_l să nu aparţină mulţimii A_l. Deoarece $c_l=\sup A_l$, pentru orice $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, deci $\forall\, n\in I\!N^*$, există $k_n\in I\!N^*$ astfel încât (vezi Propoziţia 1.6.1)

$$c_l-\frac{1}{n}<a_{l+k_n}\leq c_l<c_l+\frac{1}{n},$$

adică

$$|a_{l+k_n}-c_l|<\frac{1}{n}. \tag{2.11}$$

[2]Cesàro, Ernesto (1859 – 1906), matematician italian.

Din (2.11) şi Propoziţia 2.1.1 rezultă
$$\lim_{n\to\infty} a_{l+kn} = c_l.$$

Dacă şirul (b_n), unde $b_n = a_{l+k_n}$, nu conţine un subşir al şirului (a_n), şirul (k_n) trebuie să fie mărginit, deci există N_0 astfel încât $k_n = k_{N_0}$, pentru toţi $n \geq N_0$. Dar, $|a_{l+k_{N_0}} - c_l| \leq \dfrac{1}{n}$ pentru toţi $n > N_0$,, deci $a_{l+k_{N_0}} = c_l$ şi $c_l \in A_l$, ceea ce am exclus.

Astfel, am demonstrat că în orice caz există un subşir al şirului (a_n) care are limită finită. **q.e.d.**

Observaţia 2.1.8. *Lema lui Cesaro se poate extinde astfel:* **din orice şir de numere reale se poate extrage un subşir care are limită.**

Într-adevăr, dacă şirul (a_n) este nemărginit superior, atunci
$$\forall\, k \in I\!N^* \quad \exists\, n_k \in I\!N^*, \quad \text{astfel încât} \quad a_{n_k} > k,$$
din care deducem $a_{n_k} \to \infty$, pentru $k \to \infty$.

Şirul de numere naturale (n_k) fiind divergent, cu limita $+\infty$, se poate extrage din el un subşir (p_n), cu $p_n \geq n$ şi $p_n < p_{n+1}$, care are limita egală cu $+\infty$. Atunci, (a_{p_n}) este un subşir al şirului (a_n) care are limita egală cu $+\infty$.

Asemănător se studiază cazurile (a_n) şir nemărginit inferior şi (a_n) şir nemărginit. ■

2.2 Şir fundamental în $I\!R$

Definiţia 2.2.1. *Şirul numeric* (a_n) *se numeşte* **şir fundamental** *sau şir Cauchy dacă* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N^*$ *astfel încât*
$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \forall m > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, n > N(\varepsilon). \tag{2.12}$$

Observaţia 2.2.1. *Inegalitatea* (2.12) *este echivalentă cu*
$$d(a_m, a_n) < \varepsilon, \quad \forall\, m > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, n > N(\varepsilon). \tag{2.13}$$

Observaţia 2.2.2. *Deoarece în* (2.12) *şi* (2.13) *nu se precizează poziţia lui* m *faţă de* n, *putem considera* $m > n$, *deci există* $p \in I\!N^*$ *astfel încât*$m = n + p$.

Această observaţie sugerează o formulare echivalentă pentru Definiţia 2.2.1.

Definiţia 2.2.2. *Şirul numeric* (a_n) *se numeşte* **şir fundamental în** $I\!R$ *sau, simplu, şir fundamental dacă* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N^*$ *astfel încât*
$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall p \in I\!N^*, \tag{2.14}$$

sau

$$d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{2.15}$$

Propoziţia 2.2.1. *Orice şir numeric convergent este fundamental.*

Demonstraţie. Fie şirul numeric (a_n) convergent la $a \in I\!R$. Atunci, după Teorema 2.1.1, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât să avem simultan

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \tag{2.16}$$

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, m > N(\varepsilon). \tag{2.17}$$

Pe de altă parte,

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a|. \tag{2.18}$$

Din (2.16), (2.17) şi (2.18), rezultă că relaţia (2.12) este satisfăcută, deci (a_n) este şir fundamental. **q.e.d.**

Propoziţia 2.2.2. *Orice şir numeric fundamental este mărginit.*

Demonstraţie. Şirul (a_n) fiind fundamental, din Definiţia 2.2.1, avem că pentru $\varepsilon = 1$ există $N_0 \in I\!N^*$ astfel încât

$$|a_m - a_n| < 1, \quad \forall\, m > N_0 \quad \text{şi} \quad \forall\, n > N_0. \tag{2.19}$$

Se observă apoi că

$$|a_n| \le |a_n - a_m| + |a_m|. \tag{2.20}$$

Luând în (2.20) $m = N_0 + 1$ şi ţinând cont de (2.19), obţinem

$$|a_n| < 1 + |a_{N_0+1}|, \quad \forall\, n > N_0. \tag{2.21}$$

Fie acum

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N_0}|, 1 + |a_{N_0}|\}. \tag{2.22}$$

Atunci, din (2.21) şi (2.22) obţinem $|a_n| \le K,\ \forall\, n \in I\!N^*$, ceea ce arată că şirul (a_n) este mărginit. **q.e.d.**

Teorema 2.2.1. *Orice şir numeric fundamental este convergent.*

Demonstraţie. Dacă (a_n) este şir numeric fundamental, din Propoziţia 2.2.2, rezultă că şirul este mărginit. Folosind Propoziţia 2.1.7, deducem că şirul (a_n) admite un subşir (a_{k_n}) convergent la un punct $a \in I\!R$.

Arătăm că $a_n \to a$. Pentru aceasta, evaluăm diferenţa $a_n - a$. Avem mai întâi

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a|. \tag{2.23}$$

Din $a_{k_n} \to a$ şi Teorema 2.1.1, rezultă că $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in I\!N$ cu proprietatea că $\forall\, n > N_1(\varepsilon)$ (amintim că $k_n \ge n$ şi deci $k_n > N_1(\varepsilon)$), avem

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Deoarece şirul (a_n) este fundamental, pentru acelaşi ε, după Definiţia 2.2.1, există $N_2(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n > N_2(\varepsilon). \tag{2.25}$$

Luând acum $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon)N_2(\varepsilon)\}$, din (2.23), (2.24) şi (2.25), deducem

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon). \tag{2.26}$$

Din Teorema 2.1.1 şi (2.5) obţinem $a_n \to a$. **q.e.d.**

Propoziţia 2.2.1 şi Teorema 2.2.1 pot fi reunite într-o singură teoremă.

Teorema 2.2.2. (**Criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a şirurilor reale**) *Un şir numeric este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.*

2.3 Limita superioară şi limita inferioară ale unui şir numeric

Fie (a_n) un şir de numere reale mărginit şi fie $[\alpha, \beta]$ intervalul închis din $I\!R$ care conţine toţi termenii şirului.

Notăm

$$A_n = \{a_n, a_{n+1}, ...\},\ n \in I\!N^*.$$

Avem:

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ... \text{ şi } A_n \subset [\alpha, \beta],\ \forall\, n \in I\!N^*.$$

Notăm:

$$a'_n = \inf A_n, \quad a''_n = \sup A_n,$$

care, după axioma de existenţă a marginii superioare a unei mulţimi de numere reale şi Propoziţia 1.6.3, sunt numere reale. În plus, din Propoziţia 1.6.2 şi $A_n \supset A_{n+1}$, deducem $a'_n \le a_{n+1}$ şi $a''_n \ge a''_{n+1}$. De asemenea, avem $a'_n \in [\alpha, \beta], a''_n \in [\alpha, \beta], a'_n \le a''_n$.

Prin urmare, şirul (a'_n) este monoton crescător, iar (a''_n) este şir monoton descrescător.

Fiind monotone şi mărginite, şirurile (a'_n) şi (a''_n) sunt convergente.

Dacă $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n$ şi $a'' = \lim\limits_{n\to\infty} a''_n$, atunci $a' \le a''$.

Definiţia 2.3.1. *Numărul real* $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\inf A_n)$ *se numeşte* **limita inferioară** *a şirului* (a_n), *iar numărul real* $a'' = \lim\limits_{n\to\infty} a''_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup A_n)$ *se numeşte* **limita superioară** *a şirului* (a_n).

Limita inferioară a şirului (a_n) se notează $\underline{\lim}\, a_n$, iar limita superioară a aceluiaşi şir se notează $\overline{\lim}\, a_n$. Se mai utilizează şi notaţiile $\lim\ \inf\ a_n$ şi $\lim\ \sup\ a_n$ pentru respectiv numerele reale $\underline{\lim}\, a_n$ şi $\overline{\lim}\, a_n$.

Exemplul 2.3.1. *Pentru şirul numeric* (a_n) *având termenul general* $a_n = (-1)^{n-1}$, $\forall\, n \in I\!N^*$, *avem* $A_n = \{-1, +1\}$, $\forall\, n \in I\!N^*$, *deci* $a'_n = -1$ *şi* $a''_n = +1, \forall\, n \in I\!N^*$. *Prin urmare* $\underline{\lim}\, a_n = -1$ *şi* $\overline{\lim}\, a_n = +1$.

Exemplul 2.3.2. *Şirul numeric* (a_n), *unde* $a_n = \sin n\dfrac{\pi}{4}$, *are mulţimea punctelor limită*

$$A_n = \{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\},\ \forall\, n \in I\!N^*,$$

deci $a'_n = -1$ *şi* $a''_n = 1$. *Prin urmare,* $\lim\ \inf\ a_n = -1$, *iar* $\lim\ \sup\ a_n = 1$.

Definiţia 2.3.2. *Dacă şirul* (a_n) *nu este mărginit superior limita superioară este* $+\infty$ *(scriem* $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$*) şi dacă şirul* (a_n) *nu este mărginit inferior limita sa inferioară este* $-\infty$ *(scriem* $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$*).*

Teorema 2.3.1. *Fie* (a_n) *un şir numeric mărginit.*

Atunci, $\underline{\lim}\, a_n$ *are următoarele proprietăţi:*

(1^0) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $a_n > \underline{\lim}\, a_n - \varepsilon$, *când* $n > N(\varepsilon)$;

(2^0) $\forall \varepsilon > 0$ *şi* $\forall\, N \in \mathbb{N}^* \exists n(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $n(\varepsilon, N) > N$ *şi* $a_{n(\varepsilon,N)} > \underline{\lim}\, a_n + \varepsilon$.

Reciproc, dacă numărul rel $a' \in \mathbb{R}$ *are proprietăţile* (1^0) *şi* (2^0)*, atunci* $a' = \underline{\lim}\, a_n$.

Analog, $\overline{\lim}\, a_n$ *are următoarele proprietăţi:*

(i) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $a_n < \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon$, $\forall\, n > N(\varepsilon)$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ *şi* $\forall\, N \in \mathbb{N}^* \exists n(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $n(\varepsilon, N) \geq N$ *şi* $a_{n(\varepsilon,N)} > \overline{\lim} a_n - \varepsilon$.

Reciproc, dacă $a'' \in \mathbb{R}$ *are proprietăţile* (i) *şi* (ii)*, atunci* $a'' = \overline{\lim}\, a_n$.

Demonstraţie. Prin definiţie, $\underline{\lim}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n$, unde $a'_n = \inf A_n$ şi $A_n = \{a_n, a_{n+1}, ...\}$.

Şirul numeric (a'_n) este crescător, mărginit şi, fiind convergent, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$a'_n > \underline{\lim}\, a_n - \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Deoarece $a'_n \leq a_{n+p}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, rezultă

$$a_{n+p} > \underline{\lim}\, a_n - \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

deci pentru $n > N(\varepsilon)$ avem $a_n > \underline{\lim}\, a_n - \varepsilon$ şi concluzia (1^0) este verificată.

Considerăm acum $\varepsilon > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$a'_N \leq \underline{\lim}\, a_n < \underline{\lim}\, a_n + \varepsilon,$$

deci $\inf A_N < \underline{\lim}\, a_n + \varepsilon$ şi din Propoziţia 1.6.4 rezultă că există $a_{N+p} \in A_N$ astfel încât $a_{N+p} < \underline{\lim}\, a_n + \varepsilon$, deci $N + p = n(\varepsilon, N) \geq N$ are proprietatea (2^0).

Fie acum $a' \in \mathbb{R}$ cu proprietăţile (1^0) şi (2^0). Deoarece $a_n \geq a' - \varepsilon$, $\forall\, n > N(\varepsilon)$, rezultă că toate elementele din $A_{N(\varepsilon)}$ sunt minorate de $a' - \varepsilon$, deci $\inf A_{N(\varepsilon)} > a' - \varepsilon$.

Deoarece pentru $n \geq N(\varepsilon)$ avem $A_n \subset A_{N(\varepsilon)}$, rezultă cu atât mai mult $\inf A_n > a' - \varepsilon$ pentru $n \geq N(\varepsilon)$, deci $\underline{\lim\, a_n} > a' - \varepsilon$.

Din (2) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $N \in \mathbb{N}^*$ există $a_{n(\varepsilon,N)} < a' + \varepsilon$ şi $n(\varepsilon, N) \geq N$, deci $\inf A_N < a' + \varepsilon$.

Fiindcă $\inf A_N < a' + \varepsilon, \forall\, N \in \mathbb{N}^*$ rezultă $\lim\limits_{N\to\infty} (\inf A_N) \leq a' + \varepsilon$. În definitiv, $\forall\, \varepsilon > 0$ avem

$$a' - \varepsilon < \underline{\lim}\, a_n \leq a' + \varepsilon,$$

adică $\underline{\lim}\, a_n = a'$.

Analog se demonstrează şi cea de a doua parte a teoremei relativă la $\overline{\lim}\, a_n$. **q.e.d.**

Teorema de mai sus arată că pentru orice $\varepsilon > 0$ în intervalele $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ şi $(a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)$ se află o infinitate de termeni ai şirului mărginit (a_n), iar în afara intervalului $(a' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Altfel spus:

- mulţimea $\{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)\}$ este infinită;
- mulţimea $\{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \in (a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)\}$ este infinită;
- mulţimea $\{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \notin (a' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)\}$ este finită.

Teorema 2.3.2. *Şirul numeric (a_n) are limită dacă şi numai dacă limitele sale inferioară şi superioară sunt egale. Dacă şirul (a_n) are limita a, atunci*

$$a = a' = \underline{\lim}\, a_n = a'' = \overline{\lim}\, a_n.$$

Demonstraţie. Fie $(\lambda, \mu) = V(a)$, o vecinătate a punctului $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. după Definiţia 2.1.2, în afara vecinătăţii $V(a)$ se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Deci avem $a_n \le \lambda$ şi $a_n \ge \mu$ pentru cel mult un număr finit de termeni ai şirului (a_n). În acelaşi timp avem $a_n > \lambda$ şi $a_n > \mu$ pentru o infinitate de termeni ai şirului considerat. Prin urmare, după Teorema 2.3.1, rezultă $a = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$.

Reciproc, fie $a = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ şi (λ, μ) o vecinătate oarecare a lui a. După Teorema 2.3.1, mulţimea indicilor n pentru care $a_n \le \lambda$ şi $a_n \ge \mu$ este cel mult finită, deci în afara vecinătăţii (λ, μ) a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului (a_n). Aceasta arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. **q.e.d.**

2.4 Puncte limită ale unui şir numeric

Fie (a_n) un şir de numere reale.

Definiţia 2.4.1. *Elementul $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte* **punct limită** *al şirului (a_n), dacă orice vecinătate a lui ξ conţine o infinitate de termeni ai şirului.*

Altfel spus, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ se este punct limită al şirului (a_n) dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\xi)$ conţine a_n pentru o infinitate de valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$.

Observaţia 2.4.1. *Dacă un şir are un subşir constant, cu termenii egali cu c, atunci c este punct limită al şirului respectiv.*

Observaţia 2.4.2. *Dacă ξ este punct limită al unui şir, atunci în afara oricărei vecinătăţi a lui ξ pot exista o infinitate de termeni ai acelui şir.*

De exemplu, şirul $((-1)^{n-1})$, după Observaţia 2.4.1, are pe 1 drept punct limită şi în afara vecinătăţii $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$ a lui 1 se află o infinitate de termeni ai şirului, şi anume toţi termenii egali cu -1. ■

Observaţia 2.4.3. *Un şir poate avea mai multe puncte limită.*

De exemplu, şirul $((-1)^{n-1})$ are două puncte limită, şi anume -1 şi 1. ■

Observaţia 2.4.4. *Există şiruri care au o infinitate de puncte limită.*

De exemplu, şirul $0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, ..., 0, 1, 2, 3, ..., n, ...,$ are o infinitate de puncte limită şi anume orice număr natural este punct limită al acestui şir deoarece oricare ar fi numărul natural p există un subşir constant ai cărui termeni sunt egali cu p. De asemenea, $+\infty$ este punct limită fiindcă orice vecinătate a sa conţine o infinitate de numere naturale. ■

Observaţia 2.4.5. *Există şiruri pentru care mulţimea punctelor limită este dreapta reală încheiată.*

Într-adevăr, deoarece mulţimea numerelor raţionale poate fi pusă în corespondenţă bijectivă cu mulţimea numerelor naturale, adică este mulţime *numărabilă* (vezi [26, p. 21–24], putem aşeza toate numerele raţionale într-un şir

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$$

Fie ξ un număr real oarecare şi (α, β) o vecinătate oarecare a lui ξ. Orice interval conţine o infinitate de numere raţionale, deci vecinătatea (α, β) a lui ξ conţine o infinitate de termeni ai şirului (ξ_n). Cum ξ a fost ales arbitrar, rezultă că orice $\xi \in I\!R$ este punct limită al şirului (ξ_n).
De asemenea, $+\infty$ şi $-\infty$ sunt puncte limită ale şirului (ξ_n). ■

Observaţia 2.4.6. *Există şiruri care nu au nici un punct limită finit.*

De exemplu, şirul numerelor naturale $(n)_{n\geq 0}$, care nu are nici un punct limită finit. Singurul punct limită al acestui şir este $+\infty$. ■

Teorema 2.4.1. (**Caracterizarea punctelor limită cu subşiruri**) *Un element $\xi \in \overline{I\!R}$ este punct limită pentru şirul (a_n) dacă şi numai dacă există un subşir al său (a_{k_n}) care să aibă limita egală cu ξ.*

Demonstraţie. Presupunem că $\xi \in I\!R$ este punct limită pentru şirul numeric (a_n) şi fie vecinătatea $(\xi-1, \xi+1) = V_1 \in \mathcal{V}(\xi)$. Aici sunt o infinitate de termeni ai şirului. Alegem $a_{k_1} \in V_1$, unde $k_1 \in I\!N^*$.

În vecinătatea $V_2 = (\xi - \dfrac{1}{2}, \xi + \dfrac{1}{2})$. se află o infinitate de termeni ai şirului (a_n). Fie a_{k_2} unul din aceştia astfel încât$k_2 \geq 2, \quad k_2 > k_1$ şi putem continua astfel încât în vecinătatea $(\xi - \dfrac{1}{n}, \xi + \dfrac{1}{n}) = V_n$ să putem alege $a_{k_n} \in V_n$ aşa încât $k_n > k_{n-1}$ şi $k_n \geq n$. Faptul că $a_{k_n} \in V_n$ se traduce prin $|a_{k_n} - \xi| < \dfrac{1}{n}$.

Din $\dfrac{1}{n} \to 0$ şi Propoziţia 2.1.1 rezultă $a_{k_n} \to \xi$.

Dacă punctul limită este $+\infty$, atunci în demonstraţia de mai sus, se ia $V_n = (n, +\infty)$ şi raţionamentul se repetă găsind în final un subşir al şirului considerat care să aibă ca limită pe $+\infty$.

Similar se procedează în cazul $\xi = -\infty$ când se aleg vecinătăţile $V_n, n \in I\!N^*$, de forma $V_n = (-\infty, n)$

Reciproc, dacă există un subşir (a_{k_n}) al şirului (a_n) care să aibă limita egală cu ξ, atunci în fiecare vecinătate a lui ξ se află o infinitate de termeni ai subşirului (a_{k_n}), deci ai şirului (a_n). După Definiţia 2.4.1, rezultă că ξ este punct limită al şirului (a_n). **q.e.d.**

Teorema 2.4.2. *Limita inferioară şi limita superioară ale şirului numeric* (a_n), *sunt puncte limită ale şirului dat şi, oricare ar fi un alt punct limită* ξ *al şirului, avem*

$$\underline{\lim}\, a_n \leq \xi \leq \overline{\lim}\, a_n.$$

Demonstraţie. Presupunem $a' = \underline{\lim}\, a_n \in I\!R$.

În intervalul $(a' - 1, a' + 1)$, care este vecinătate a punctului a', după Teorema 2.2.1, se află o infinitate de termeni ai şirului (a_n), deci există posibilitatea găsirii lui $k_1 \in I\!N^*$ astfel încât $a_{k_1} \in (a' - 1, a' + 1)$.

În intervalul $(a' - \dfrac{1}{2}, a' + \dfrac{1}{2})$ se află , de asemenea, o infinitate de termeni ai şirului (a_n), ca atare avem posibilitatea alegerii lui $k_2 \in I\!N, k_2 \geq 2$ şi $k_1 < k_2$ aşa încât $a_{k_2} \in (a' - \dfrac{1}{2}, a' + \dfrac{1}{2})$.

Procedând similar, în intervalul $(a' - \dfrac{1}{n}, a' + \dfrac{1}{n})$ există posibilitatea găsirii lui a_{k_n}, unde $k_n \geq n$ şi $k_n > k_{n-1}$.

Procedeul continuă.

Şirul (a_{k_n}) astfel determinat este subşir al şirului (a_n) şi are proprietatea $|a_{k_n} - a'| < \dfrac{1}{n}$. Folosind Propoziţia 2.1.1 şi Corolarul 2.1.1, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a'.$$

Prin urmare, după Teorema 2.4.1, rezultă că a' este punct limită al şirului(a_n).

În mod similar se face demonstreaţia în cazurile: $a' = -\infty, a'' \in I\!R;\ a'' = +\infty$.

Dacă $\xi \in \overline{I\!R}$ este punct limită al şirului (a_n), atunci din Teorema 2.4.1 rezultă existenţa subşirului (a_{k_n}) astfel încât $a_{k_n} \to \xi,$ când $n \to \infty$.

Evident, ξ nu poate fi în afara intervalului $[\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n]$, căci dacă s-ar întâmpla ca, de exemplu, $\overline{\lim}\, a_n < \xi$, ar exista (în cazul $\xi \in I\!R$) o vecinătate de forma $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ astfel încât $\xi - \varepsilon > \overline{\lim}\, a_n$, cu proprietatea că în afara sa rămân un număr finit de termeni ai şirului, ceea ce ar însemna că la dreapta lui $\overline{\lim}\, a_n$, mai precis la dreapta lui $\xi - \varepsilon$, s-ar afla un număr infinit de termeni ai şirului (a_n) ceea ce ar contrazice rezultatul stabilit în Teorema 2.3.1. **q.e.d.**

Corolarul 2.4.1. *Un şir numeric are limită dacă şi numai dacă are un singur punct limită.*

Demonstraţie. Rezultă imediat din Teorema 2.3.2 şi Teorema 2.4.2. **q.e.d.**

Observaţia 2.4.7. *Din lema lui Cesaro (vezi Propoziţia 2.1.8), Observaţia 2.1.7 şi Teorema 2.4.1 rezultă că un şir numeric are cel puţin un punct limită. În plus, dacă şirul este mărginit, atunci are cel puţin un punct limită finit.*

Observaţia 2.4.8. *Limita inferioară a unui şir de numere reale este cel mai mic punct limită al şirului respectiv, iar limita superioară a sa este cel mai mare punct limită al şirului considerat.*

Observaţia 2.4.9. *Când mulţimea punctelor limită ale unui şir de numere reale este nemărginită inferior, prin definiţie limita inferioară este $-\infty$ şi când această mulţime este nemărginită superior, limita superioară a şirului considerat este prin definiţie $+\infty$.*

Observaţia 2.4.10. *Pentru a determina practic limita superioară şi limita inferioară ale unui şir de numere reale se determină toate subşirurile cu limită ale şirului. Dacă există un subşir cu limita $+\infty$, atunci $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$. Dacă există un subşir al şirului dat cu limita egalaă cu $-\infty$, atunci $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$, iar dacă toate subşirurile sunt convergente şi A este mulţimea punctelor limită, atunci din 2.4.2 deducem că cel mai mare element al lui A este limita superioară a şirului, iar cel mai mic element al mulţimii A este limita inferioară a şirului considerat.*

Teorema 2.4.3. *Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive. Atunci, au loc inegalităţile:*

$$\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Demonstraţie. Fie $l = \underline{\lim}\, \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ şi $L = \overline{\lim}\, \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Dacă $l = 0$ sau $L = +\infty$, inegalităţile din teoremă sunt evidente.

Presupunem că $l > 0$ şi $L < +\infty$ şi fie $\varepsilon > 0$ fixat, dar arbitrar. Atunci, după Teorema 2.3.1, $\exists N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât să avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon),$$

deci

$$a_{N(\varepsilon)+p} < (L+\varepsilon)^p a_{N(\varepsilon)+1}, \quad \forall\, p \geq 2,$$

de unde rezultă

$$\sqrt[N(\varepsilon)+p]{a_{N(\varepsilon)+p}} < (L+\varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot \sqrt[N(\varepsilon)+p]{a_{N(\varepsilon)+1}}, \quad \forall\, p \geq 2.$$

Deducem apoi

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}\, \sqrt[N(\varepsilon)+p]{a_{N(\varepsilon)+p}} \leq \overline{\lim}\, \big((L+\varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot \sqrt[N(\varepsilon)+p]{a_{N(\varepsilon)+1}}\big) =$$

$$= \big(\overline{\lim}\, (L+\varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}}\big) \cdot \big(\overline{\lim}\, \sqrt[N(\varepsilon)+p]{a_{N(\varepsilon)}}\big) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} (L+\varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)}} \cdot \lim_{p\to\infty} \sqrt[N(\varepsilon)+p]{a_{N(\varepsilon)+1}} =$$

$$= (L+\varepsilon)^{\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot (a_{N(\varepsilon)+1})^{\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{N(\varepsilon)+p}} = L + \varepsilon.$$

Aşadar, $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Deoarece $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$ nu are cum să depindă de ε, deducem $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq L$.

În cea de a doua parte a demonstraţiei, considerăm $\varepsilon > 0$ fixat astfel încât $0 < l - \varepsilon < l$. Conform Teoremei 2.3.1, există $N(\varepsilon) \in I\!N$ aşa încât $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq l - \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),$ din care deducem $a_{N(\varepsilon)+p} \geq (l-\varepsilon)^p \cdot a_{N(\varepsilon)+1}$, $\forall\, p \geq 2$.

Procedând ca în prima parte a demonstraţiei, obţinem $\underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \geq l - \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, ceea ce arată că $\underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \geq l$.

Inegalitatea $\underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$ este evidentă. **q.e.d.**

2.5 Serii de numere reale. Definiţii. Exemple

Definiţia 2.5.1. *Se numeşte* **serie de numere reale**, *sau* **serie numerică**, *ansamblul şirurilor numerice* $\{(a_n), (s_n)\}$ *unde* (a_n) *este un şir de numere reale arbitrar, iar* (s_n) *este un şir numeric ca termenul general*

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{2.27}$$

Elementele care intră în Definiţia 2.5.1 au următoarele semnificaţii:

- (a_n) se numeşte *şirul termenilor seriei*;
- a_n este *termenul general al seriei*, sau *termenul de rang* n *al seriei*;
- (s_n) se numeşte *şirul sumelor parţiale* al seriei;
- s_n este *suma parţială de rang* n a seriei.

Pentru că notaţia sugerată de Definiţia 2.5.1 este anevoioasă, convenim să notăm o serie numerică prin

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

sau, folosind simbolul sumă, prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2.28}$$

drept pentru care unei serii adeseori i se spune *sumă infinită*, deşi această denumire nu este pe deplin justificată (vezi comentariul de mai jos). Dacă primul termen al şirului termenilor seriei este a_p, unde $p \in I\!N$, atunci seria numerică corespunzătoare se notează prin

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n.$$

Când $p = 1$, seria numerică corespunzătoare se notează simplu prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Notaţia (2.28) pentru o serie numerică se justifică după prezentarea definiţiei următoare.

Definiţia 2.5.2. *Seria numerică* (2.28) *se numeşte* **convergentă** *dacă şirul sumelor parţiale* (s_n), *unde* s_n *are expresia* (2.27), *este convergent în* $I\!R$.

Definiţia 2.5.3. *Dacă seria numerică* (2.28) *este convergentă, atunci numărul real*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2.29}$$

se numeşte **suma seriei**.

Când seria numerică (2.28) este convergentă, scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s; \tag{2.30}$$

Definiţia 2.5.4. *Seria numerică (2.28) se numeşte* **divergentă** *şi are suma $+\infty$, respectiv $-\infty$, dacă şirul sumelor parţiale (2.27) are limita $+\infty$, respectiv $-\infty$.*

Definiţia 2.5.5. *Seria (2.28) se numeşte* **oscilantă** *dacă şirul sumelor parţiale (2.27) nu are limită.*

Dacă avem în vedere (2.29), atunci justificarea notaţiei (2.28) pentru o serie numerică poate fi explicată prin suprimarea simbolului $\lim\limits_{n\to\infty}$ în membrul drept al lui (2.29) cu condiţia înlocuirii lui n, limita superioară a indicelui de sumare, cu ∞, ceea ce înseamnă că (2.29) devine

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Cum indicele de sumare se poate nota cu orice simbol, se ajunge la notaţia (2.28) pentru o serie.

Observaţia 2.5.1. *În studiul seriei numerice (2.28) rolul principal îl are şirul sumelor parţiale cu termenul general (2.27).*

Se poate afirma că teoria seriilor este o *combinaţie* între studiul sumelor finite şi al limitelor de şiruri.

Prezentarea unei serii numerice ca sumă infinită este eronată deoarece în mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se poate defini doar o sumă finită de numere.

Seriile numerice au proprietăţi diferite de sumele finite. Mai precis, vom vedea că nu întotdeauna au loc proprietăţile de comutativitate, asociativitate, etc. ale adunării unui număr infinit de numere reale.

Definiţia 2.5.6. *Prin* **natura** *unei serii numerice înţelegem calitatea sa de a fi convergentă, divergentă, sau oscilantă.*

Exemplul 2.5.1. *Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}$ este oscilantă.*

Într-adevăr, deoarece $s_{2n} = 0$ şi $s_{2n-1} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, după Corolarul 2.1.1, rezultă că şirul (s_n) nu are limită. Din Definiţia 2.5.2 deducem că seria dată este oscilantă. ■

În studiul unei serii numerice problema principală este determinarea naturii sale şi, în caz de convergenţă, evaluarea exactă, sau aproximativă, cu o eroare prestabilită, a sumei seriei respective.

2.5.1 Seria geometrică

Definiţia 2.5.7. *Dacă termenul general al seriei (1.57) are proprietatea că există $q \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.31}$$

atunci seria se numeşte **serie geometrică** *cu* **raţia** *q şi* **primul termen** *egal cu a_1.*

Să studiem natura seriei geometrice cu termenul general (2.31). Şirul sumelor parţiale are termenul general

$$s_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{2.32}$$

dacă $q \neq 1$, şi

$$s_n = a_1 \cdot n, \tag{2.33}$$

dacă q=1.

Din (2.33) deducem că în cazul $q = 1$ şirul sumelor parţiale are limita $+\infty$ dacă $a_1 > 0$ şi $-\infty$ dacă $a_1 < 0$, deci seria geometrică (2.31) este divergentă pentru $q = 1$.

Dacă $|q| < 1$, atunci $q^n \to 0$ şi din (1.61) deducem $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, ceea ce arată că în acest caz seria geometrică este convergentă şi are suma egală cu raportul dintre primul termen şi numărul real $1 - q$.

Dacă $q > 1$, din (2.32) deducem $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot (+\infty)$, deci seria geometrică corespunzătoare este divergentă şi are suma $+\infty$ dacă $a_1 > 0$ şi divergentă având suma $-\infty$ dacă $a_1 < 0$.

În sfârşit, dacă $q \leq -1$, seria geometrică este oscilantă deoarece subşirurile de rang par şi respectiv de rang impar ale şirului sumelor parţiale au limite diferite.

În acest mod am studiat natura seriei geometrice cu termenul general (2.31) pentru toate valorile reale ale lui q şi a_1. ■

2.5.2 Seria telescopică

Exemplul 2.5.2. *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *este convergentă şi are suma* 1.

Într-adevăr, termenul de rang k al seriei date este egal cu $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, de unde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Prin urmare, $s_n \to 1$, ceea ce arată că seria este convergentă şi are suma 1. ■

Observaţia 2.5.2. *Din exemplul de mai sus vedem că termenul general* a_n *al seriei se scrie sub forma*

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, \tag{2.34}$$

natura şirului (α_n) *este cunoscută.*

Definiţia 2.5.8. *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cu proprietatea că termenul general de rang* n *se poate scrie sub forma* (2.34) *se numeşte* **serie telescopică**.

Propoziţia 2.5.1. *Seria telescopică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1})$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul* (α_n) *este convergent.*

Într-adevăr, afirmaţiile de mai sus rezultă din faptul că suma parţială de rang n a seriei telescopice este $s_n = \alpha_1 - \alpha_{n+1}$ şi din Definiţia 2.5.2. ■

Observaţia 2.5.3. *Studiul naturii şirului numeric dat* (α_n) *poate fi redus la studiul naturii seriei*

$$\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) + \ldots$$

pentru care şirul sumelor parţiale este chiar şirul (α_n).

În felul acesta, utilizând anumite procedee pentru determinarea naturii unei serii ne vom putea pronunţa asupra naturii anumitor şiruri.

2.5.3 Seria armonică

Exemplul 2.5.3. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *numită* **seria armonică**, *este divergentă şi are suma egală cu* $+\infty$.

Denumirea *armonică* atribuită seriei se datorează faptului că termenul general $a_n = \frac{1}{n}$ este *media armonică a* termenilor a_{n-1} şi a_{n+1}, adică

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Arătăm că şirul sumelor parţiale (s_n) al acestei serii nu este şir fundamental. Atunci, după Teorema 2.2.2, rezultă că (s_n) nu este convergent. Pentru aceasta, fie $n \in I\!N^*$ şi $p \geq n$. Avem

$$|s_n - s_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, există $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$ astfel încât $\forall\ n \in I\!N^* \exists\ p \in I\!N^*$ aşa încât $|s_n - s_{n+p}| > \frac{1}{2}$, ceea ce asigură că (s_n) nu este şir fundamental, de unde rezultă că seria armonică este divergentă. Fiindcă (s_n) este şir monoton strict crescător, limita sa este $+\infty$, deci suma seriei armonice este $+\infty$. ■

În exemplele de mai sus am putut să ne pronunţăm asupra naturii unor serii numerice, ba chiar am determinat şi sumele lor, întrucât am reuşit să găsim o formă convenabilă pentru termenul general al şirului sumelor parţiale al fiecărei serii. În general, asemenea situaţii sunt rare şi ca atare se impune dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor care să permită deciderea naturii unei serii în funcţie de comportarea termenului ei general, fără a găsi efectiv suma seriei.

2.6 Proprietăţi generale ale seriilor convergente

Din Definiţia 2.5.2, Teorema 2.1.4 şi Propoziţia 2.1.2, deducem cu uşurinţă următoarele proprietăţi ale seriilor numerice.

Teorema 2.6.1. *Dacă seriile numerice* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt convergente şi au respectiv sumele* s *şi* t, *atunci seriile:*

- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ – *seria sumă a celor doua serii;*

- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ – *seria diferenţă a celor două serii;*
- $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$ – *seria produsul cu o constantă* $\lambda \in I\!R$ *a seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *sunt convergente şi au respectiv sumele:* $s + t,\ s - t$ *şi* $\lambda \cdot s$.

Demonstraţie. Fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şi $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, sumele parţiale de rang n ale respectiv seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Deoarece $s_n \to s$, iar $t_n \to t$ rezultă că $\sigma_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n)$ converge la $s + t$, ceea ce arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t$.

Suma parţială a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ este $\tau_n = s_n - t_n$ şi evident $\tau_n \to s - t$, ceea ce arată că această serie este convergentă şi are suma $s - t$.

Deoarece suma parţială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$ este $\lambda \cdot s_n$ şi $\lambda \cdot s_n \to \lambda \cdot s$, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$ este convergentă şi are suma $\lambda \cdot s$. **q.e.d.**

Observaţia 2.6.1. *Dacă seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt divergente, sau oscilante este posibil ca seria sumă să fie convergentă.*

Într-adevăr, dacă se consideră seriile $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, ambele oscilante după Exemplul 2.5.1, dar seria $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1} + (-1)^n)$, care este *seria identic nulă*, este convergentă. ■

Observaţia 2.6.2. *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este divergentă, sau oscilantă, atunci seria sumă poate fi divergentă, sau oscilantă.*

Într-adevăr, dacă , prin absurd, seria sumă ar fi convergentă, atunci după Teorema 2.6.1, seria $\sum_{n=1}^{\infty}((a_n+b_n)-a_n)$ ar fi convergentă, adică $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ar fi convergentă, ceea ce ar contrazice ipoteza teoremei. ■

Corolarul 2.6.1. *Dacă* $\lambda \in I\!R^* = I\!R \setminus \{0\}$, *atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$ *au aceeaşi natură.*

Într-adevăr, în cazul când seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, afirmaţia a fost demonstrată în Teorema 2.6.1. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, sau oscilantă rezultă că (s_n) este un şir divergent, sau oscilant, ceea ce evident antrenează că şirul $(\lambda \cdot a_n)$ cu $\lambda \in I\!R^*$, este divergent, sau oscilant, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n), \lambda \in I\!R^*$ este divergentă, sau oscilantă. Cealaltă parte a corolarului se obţine din prima înlocuind λ cu $\frac{1}{\lambda}$. ■

Teorema 2.6.2. *Dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma s, atunci seria obţinută prin schimbarea ordinei unui număr finit de termeni ai seriei este convergentă şi are aceeaşi sumă. Dacă seria este divergentă şi are suma $+\infty$, sau $-\infty$, atunci seria obţinută prin acelaşi procedeu este , de asemenea, divergentă şi are aceeaşi sumă.*

Demonstraţie. Să notăm cu s_n suma parţială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi cu σ_n suma parţială de rang n a seriei obţinute din seria dată prin schimbarea ordinei termenilor $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_p}$, unde $p \in I\!N^*$. Rezultă clar că pentru $n > \max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$ avem $s_n = \sigma_n$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n. \tag{2.35}$$

Din Definiţia 2.5.2 şi egalitatea (2.35) rezultă toate afirmaţiile teoremei. **q.e.d.**

Observaţia 2.6.3. *Dacă schimbarea ordinei afectează o mulţime infinită de termeni ai unei serii, afirmaţiile din Teorema 2.6.2 nu mai sunt în general adevărate.*

Teorema 2.6.3. *Dacă la o serie numerică se adaugă, sau se înlătură un număr finit de termeni, seria obţinută are aceeaşi natură cu seria dată. Dacă seria dată este convergentă, seria modificată nu are în general aceeaşi sumă. Dacă seria dată este divergentă şi are suma $+\infty$, sau $-\infty$, seria modificată are aceeaşi sumă.*

Demonstraţie. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Din Teorema 2.6.1 putem considera că termenii înlă-turaţi sunt primii p de la început. Dacă s_n este suma parţială de rang n a seriei date, atunci avem

$$\sigma_n = s_{n+p} - s_p, \quad \forall\, n \in I\!N^*, \tag{2.36}$$

unde (σ_n) este şirul sumelor parţiale al seriei modificate.

Din relaţia (2.36) constatăm că şirul (σ_n) are aceeaşi natură cu şirul (s_n). Dacă prima serie este convergentă, atunci la fel este şi seria modificată şi, mai mult, suma ei σ este dată de

$$\sigma = s - s_p. \tag{2.37}$$

Relaţia (2.37) arată că, în general, sumele celor două serii nu coincid.

Dacă însă în (2.37), $s = +\infty$, respectiv $-\infty$, atunci $\sigma = +\infty$, respectiv $\sigma = -\infty$.

Dacă adăugăm un număr finit de termeni seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, obţinem seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Atunci, putem considera că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se obţine din seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ prin înlăturarea unui număr finit de termeni, deci, conform primei părţi a demonstraţiei, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ are aceeaşi natură ca şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **q.e.d.**

Observaţia 2.6.4. *Deoarece termenii nuli nu au influenţă asupra comportării seriei, chiar dacă sunt în număr infinit, putem totdeauna sa-i înlăturăm şi să considerăm că seria este formată numai din termeni diferiţi de zero.*

Definiţia 2.6.1. *Seria de numere reale* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **serie cu termeni oarecare** *dacă mulţimile* $N_1 = \{n \in I\!N^* : a_n > 0\} \subset I\!N$ *şi* $N_2 = \{n \in I\!N^* : a_n < 0\} \subset I\!N$ *sunt infinite. Dacă* N_2 *este mulţimea vidă, sau mulţime finită, seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **serie cu termeni pozitivi**.

Definiţia 2.6.2. *Numim* **rest de ordin** p*,* R_p*, al seriei numerice* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, seria* $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$.

Teorema 2.6.4. *Seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $p \in I\!N$*, restul de ordin* p*,* R_p*, este o serie convergentă. În plus, dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci şirul resturilor seriei* $(R_p)_{p\geq 0}$ *este un şir convergent la zero.*

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din Teorema 2.6.3. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma s, atunci avem:

$$R_p = s - s_p, \quad p \in I\!N^*; \quad R_0 = s. \tag{2.38}$$

Trecând la limită în (2.38) pentru $p \to \infty$ şi ţinând cont că $s_p \to s$, când $p \to \infty$, deducem că şirul resturilor $(R_p)_{p\geq 0}$ este convergent la zero. **q.e.d.**

Teorema 2.6.5. (**Condiţie necesară de convergenţă**) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci* $a_n \to 0$.

Demonstraţie. Din (2.35) deducem $s_n = s_{n-1} + a_n,\ n \geq 2,$ deci $a_n = s_n - s_{n-1},\ n \geq 2.$ Din ipoteză avem că $s_n \to s$ şi $s_{n-1} \to s.$

Trecând la limită în ultima egalitate şi ţinând cont de cele afirmate mai sus, deducem $a_n \to 0.$ **q.e.d.**

Corolarul 2.6.2. *Dacă şirul termenilor seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este un şir fără limită, sau este un şir cu limită nenulă, seria nu este convergentă. In acest caz, seria este fie divergentă, fie oscilantă.*

Demonstraţie. Afirmaţia se dovedeşte uşor folosind metoda reducerii la absurd şi Teorema 2.6.5. **q.e.d.**

Observaţia 2.6.5. *Condiţia* $a_n \to 0$ *este necesară, nu şi suficientă, pentru convergenţa seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

În sprijinul acestei afirmaţii dăm ca exemplu seria armonică. Şirul termenilor acestei serii este convergent la zero, iar seria este divergentă. ∎

Ca aplicaţie la Corolarul 2.6.2 putem considera seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ pe care am studiat-o mai sus. Şirul termenilor acestei serii este oscilant. După Corolarul 2.6.2, seria considerată nu este convergentă; este, după cum am văzut, serie oscilantă.

Exemplul 2.6.1. *Seriile numerice* $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1),$ *unde* $a \in I\!R_+^* \setminus \{1\},$ *nu sunt convergente.*

Într-adevăr, $\lim(1 + \dfrac{1}{n})^n = e \neq 0$ şi $\lim n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \neq 0.$ După Corolarul 2.6.2, seriile considerate nu sunt convergente.

Să observăm că prima serie este cu termeni pozitivi, deci nu poate fi oscilantă. Această serie este divergentă şi are suma $+\infty$.

Cea de a doua serie este cu termeni pozitivi dacă $a > 1$ şi, în cazul $0 < a < 1$, seria are toţi termenii negativi. În primul caz, seria este divergentă şi are suma $+\infty$, pe când în cazul $0 < a < 1,$ seria dată este divergentă şi are suma egală cu $-\infty.$ ∎

Teorema 2.6.6. *Dacă într-o serie numerică convergentă sau divergentă, se asociază termenii în grupe finite, cu păstrarea ordinei, atunci seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} b_k,$ *unde* b_k *este suma termenilor din grupa de rang* $k,$ *are aceeaşi natură şi aceeaşi sumă cu seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

Demonstraţie. Fie:

$$b_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_i, \quad j \geq 1, \quad n_0 = 0, \tag{2.39}$$

unde $1 \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_k > \cdots$ şi

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad \sigma_k = b_1 + b_2 + ... + b_k, \tag{2.40}$$

sumele parţiale de rang n şi k ale respectiv seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Din (2.39) şi (2.40), deducem

$$\sigma_1 = s_{n_1}, \quad \sigma_2 = s_{n_2}, \quad \cdots, \quad \sigma_k = s_{n_k} \quad \cdots. \tag{2.41}$$

Egalităţile (2.41) arată că şirul (σ_k) este un subşir al şirului (s_n) de unde, din Propoziţia 2.1.6, rezultă cu uşurinţă concluzia teoremei. **q.e.d.**

Observaţia 2.6.6. *Prin asocierea termenilor unei serii oscilante în grupe finite, cu păstrarea ordinei termenilor, se pot obţine serii convergente.*

Ilustrăm această afirmaţie considerând seria din Exemplul 2.5.1 care am văzut că este oscilantă. Dacă în această serie efectuăm asocieri în două moduri diferite, obţinem seriile:

$$(1-1) + (1-1) + ... + (1-1) + ...; \tag{2.42}$$

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + ... + (-1+1) + ..., \tag{2.43}$$

ambele convergente, prima cu suma zero şi a doua cu suma egală cu 1. ■

Observaţia 2.6.7. *Dacă avem o serie convergentă ai cărei termeni sunt sume finite, atunci prin disociere (desfacerea parantezelor) se poate obţine o serie oscilantă.*

Este suficient să considerăm seriile (2.42) şi (2.43), ambele convergente, care prin disociere conduc la seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ studiată în Exemplul 2.5.1 şi care este oscilantă. ■

2.7 Criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice

În acest paragraf se prezintă o condiţie necesară şi suficientă de convergenţă a unei serii numerice. În acest scop se uilizează criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a unui şir numeric, aplicat însă şirului sumelor parţiale al seriei considerate.

Teorema 2.7.1. (**Criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice**) *Seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *astfel încât*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*. \tag{2.44}$$

Demonstraţie. Fie (s_n) şirul sumelor parţiale al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Suma a p termeni consecutivi ai seriei este dată de

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} = s_{n+p} - s_n. \tag{2.45}$$

Concluziile teoremei rezultă rapid din următorul şir de echivalenţe logice: seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Longleftrightarrow$ şirul (s_n) este convergent $\Longleftrightarrow$ (s_n) este şir fundamental $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{2.46}$$

Din (2.45), (2.46) şi echivalenţele logice menţionate, rezultă ambele concluzii ale teoremei. **q.e.d.**

Observaţia 2.7.1. *Negând criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice deducem:* **seria** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **nu este convergentă dacă** $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ **astfel încât** $\forall\, n \in I\!N^*$ **să existe** $p \in I\!N^*$**cu proprietatea**

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \geq \varepsilon_0.$$

Pentru a ilustra practic Observaţia 2.7.1 recomandăm consultarea raţionamentului din Exemplul 2.5.3. ■

2.8 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

În acest paragraf se consideră serii cu termeni oarecare pentru care termenul general a_n este scris în forma

$$a_n = \alpha_n \cdot u_n. \tag{2.47}$$

Observaţia 2.8.1. *Termenul general al oricărei serii numerice se poate scrie în forma (2.47), seria corespunzătoare fiind*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n. \tag{2.48}$$

Vom prezenta criterii (condiţii suficiente) specifice seriilor de tipul (2.48). Este vorba de criteriul lui Abel[3], criteriul lui Dirichlet[4] şi de criteriul lui Leibniz [5].

Demonstraţiile acestor criterii necesită întâi anumite inegalităţi, datorate lui Abel.

[3]Abel, Niels Henrik (1802–1829), celebru matematician norvegian.
[4]Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859), matematician german.
[5]Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), mare filosof şi matematician german.

Propoziţia 2.8.1. (**Lema lui Abel**) *Dacă seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *are şirul sumelor parţiale* (σ_n) *mărginit, iar şirul numeric* (α_n) *este monoton, atunci*

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot u_k| \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|), \quad \forall\, p \in I\!N^*, \tag{2.49}$$

unde L *este un număr real pozitiv cu proprietatea*

$$|\sigma_n| \leq L, \ \forall\, n \in I\!N^*.$$

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că (α_n) este şir monoton descrescător. Ţinând cont că $u_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, \forall\, n \geq 2$ şi că $u_1 = \sigma_1$, obţinem $|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot u_k| = |\alpha_1 \cdot \sigma_1 + \alpha_2 \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) + ... + \alpha_p \cdot (\sigma_p - \sigma_{p-1})|$. Grupând termenii intrun alt mod, deducem

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot u_k| = |(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sigma_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \sigma_2 + ... + (\alpha_{p-1} - \alpha_p) \cdot \sigma_{p-1} + \alpha_p \cdot \sigma_p|,$$

de unde avem pe rând:

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot u_k| \leq \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \cdot |\sigma_k| + |\alpha_p| \cdot |\sigma_p|;$$

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot u_k| \leq L(\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + |\alpha_p|) = L(\alpha_1 - \alpha_p + |\alpha_p|) \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|), \forall\, p \in I\!N^*,$$

care arată că inegalitatea (2.49) este adevărată. **q.e.d.**

Inegalitatea (2.49) se numeşte *prima inegalitate a lui Abel.*

Corolarul 2.8.1. (**A doua inegalitate a lui Abel**) *Dacă există* $L > 0$ *astfel încât*

$$|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}| \leq L, \ \forall (n, p) \in I\!N^* \times I\!N^*$$

şi dacă şirul (α_n) *este monoton, atunci*

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \cdot u_{n+k}| \leq L \cdot (|\alpha_{n+1}| + 2|\alpha_{n+p}|), \quad \forall\, (n, p) \in I\!N^* \times I\!N^*. \tag{2.50}$$

Într-adevăr, dacă în (2.37) trecem u_k în u_{n+k} şi α_k în α_{n+k} cu $n \in I\!N^*$ arbitrar, obţinem (2.50). ∎

Teorema 2.8.1. (**Criteriul lui Abel**) *Dacă seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, iar şirul de numere reale* (α_n) *este monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Şirul (α_n) fiind mărginit, există $M > 0$ astfel încât $|\alpha_n| \leq M$, $\forall\, n \in I\!N^*$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ fiind convergentă, din Teorema 2.7.1 rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \in I\!N$, astfel încât să avem

$$|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{2.51}$$

Aplicând acum (2.50), unde $L = \dfrac{\varepsilon}{3M}$, şi ţinând cont de (2.51), obţinem

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \cdot u_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{3M}(M + 2M) = \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, p \in I\!N^*,$$

de unde, în baza criteriului general al lui Cauchy pentru serii numerice, deducem că seria (2.48) este convergentă. **q.e.d.**

Teorema 2.8.2. (**Criteriul lui Dirichlet**) *Dacă seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *are şirul sumelor parţiale* (σ_n) *mărginit, iar* (α_n) *este monoton şi convergent la zero, atunci seria cu termeni oarecare* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Din (σ_n) şir mărginit rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât

$$|\sigma_n| \leq M, \quad \forall n \in I\!N^*.$$

Pe de altă parte, $|\sum\limits_{k=1}^{p} u_{n+k}| = |\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq |\sigma_{n+p}| + |\sigma_n| \leq 2M$, $\forall\, (n, p) \in I\!N^* \times I\!N^*$, deci constanta L din (2.50) este egală cu $2M$.

Din $\alpha_n \to 0$ şi din Teorema 2.1.1, rezultă

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N(\varepsilon) \in I\!N \quad \text{astfel încât} \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n > N(\varepsilon). \tag{2.52}$$

Din (2.50), în care $L = 2M$, şi (2.52) deducem că $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} \cdot u_{n+k}| < 2M(\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{2\varepsilon}{6M}) = \varepsilon.$$

Acest rezultat, cuplat cu Teorema 2.7.1, conduce la concluzia că seria (2.48) este convergentă. **q.e.d.**

Definiţia 2.8.1. *Seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **serie alternată** *dacă* $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, *adică produsul oricăror doi termeni consecutivi este număr negativ.*

Observaţia 2.8.2. *Termenul general al unei serii alternate este de forma* (2.47) *în care* $\alpha_n > 0$, *iar* $u_n = (-1)^{n-1}$. *Aşadar, o serie alternată se poate scrie în forma* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\alpha_n$, *unde* (α_n) *este un şir de numere reale pozitive.*

Corolarul 2.8.2. (**Criteriul lui Leibniz**) *Dacă şirul de numere reale pozitive* (α_n) *este monoton descrescător şi convergent la zero, atunci seria alternată* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n$ *este convergentă. Dacă* s *este suma seriei alternate convergente, atunci* $|s - s_n| \leq \alpha_{n+1}$.

Demonstraţie. În criteriul lui Dirichlet luăm $u_n = (-1)^{n-1}$. Atunci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ are sumele parţiale mărginite de 1. Cum şirul (α_n) este monoton descrescător şi convergent la zero, rezultă că suntem în ipotezele criteriului lui Dirichlet, deci seria alternată este convergentă.

Ne propunem ca pentru o serie alternată convergentă care verifică condi ţiile criteriului lui Leibniz, să calculăm eroarea pe care o facem luând în locul sumei sale o sumă parţială, adică să evaluăm valoarea absolută a numărului $s - s_n$. Deoarece seria este convergentă, şirul sumelor parţiale este convergent şi are limita s, suma seriei. Orice subşir al şirului (s_n) are aceeaşi limită s. Prin urmare, subşirurile (s_{2n-1}) şi (s_{2n}) sunt convergente şi au aceeaşi limită s, adică

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s. \tag{2.53}$$

Deoarece (α_n) este un şir monoton descrescător, avem:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}) \leq s_{2n-1},\ n \in I\!N^*; \tag{2.54}$$

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}) \leq s_{2n-2},\ n \in I\!N^*, \tag{2.55}$$

inegalităţi care arată că şirul sumelor parţiale impare (s_{2n-1}) este descrescător, iar şirul sumelor pare (s_{2n}) este crescător. Din (2.53) $--$(2.55) şi Teorema 2.1.5, deducem

$$\sup\{s_{2n} : n \in I\!N^*\} = s = \inf\{s_{2n-1} :\ n \in I\!N^*\}. \tag{2.56}$$

Egalităţile (2.56) arată că

$$s_{2k} < s < s_{2p-1}, \quad \forall\,(p,n) \in I\!N^* \times I\!N^*. \tag{2.57}$$

Considerând (2.57) pentru $k = p - 1 = n$ şi apoi pentru $k = p = n$, obţinem :

$$0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = \alpha_{2n+1},\ n \in I\!N^*; \tag{2.58}$$

$$0 > s - s_{2n-1} > s_{2n} - s_{2n-1} = -\alpha_{2n}. \tag{2.59}$$

Din relaţiile (2.57) şi (2.58) rezultă evident ultima concluzie din Corolarul 2.8.2, care tradusă în cuvinte afirmă că dacă înlocuim suma s a seriei alternate convergente cu suma parţială de rang n, atunci eroarea care se comite este mai mică decît primul termen neglijat α_{n+1}. Eroarea este prin lipsă dacă n este par, şi prin adaos dacă n este impar. **q.e.d.**

Exemplul 2.8.1. *Seria alternată* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$ *este convergentă.*

Într-adevăr, şirul numeric cu termenul general $\dfrac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la zero. Dacă plicăm criteriul lui Leibniz, deducem că seria considerată este convergentă.

Exemplul 2.8.2. *Seriile cu termeni oarecare*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin nx,$$

sunt convergente oricare ar fi parametrul real x.

Într-adevăr, să remarcăm că dacă $x\in\{2k\pi : k\in\boldsymbol{Z}\}$ prima serie devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, care vom dovedi mai târziu că este convergentă, iar cea de a doua serie este seria nulă, deci convergentă, cu suma nulă. În cazul în care $x\neq 2k\pi$ observăm că prima serie este de forma (2.48) în care $\alpha_n=\dfrac{1}{n^2}$ şi $u_n=\cos nx$, cea de a doua fiind de acelaşi tip, cu acelaşi α_n şi u_n schimbat, mai precis, $u_n=\sin nx$. Şirul (α_n) este monoton descrescător şi convergent la zero. Să studiem mărginirea şirurilor sumelor parţiale ale respectiv seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$. Trebuie să calculăm sumele parţiale ale lor

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx,\qquad t_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx.$$

Înmulţind în ambii membri ai acestor sume cu $2\sin\dfrac{x}{2}$ şi folosind formulele de transformare în produse a sumelor de funcţii trigonometrice şi invers, găsim:

$$s_n=\frac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}},\qquad t_n=\frac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Dar valorile funcţiilor trigonometrice sunt mărginite în valoare absolută de 1, astfel că din evaluările de mai sus deducem

$$|s_n|\leq\frac{1}{|\sin\dfrac{x}{2}|},\qquad |t_n|\leq\frac{1}{|\sin\dfrac{x}{2}|}.$$

Ultimele inegalităţi arată că pentru fiecare serie din acest exemplu este îndeplinită şi cea de a doua ipoteză din Teorema 2.8.2, deci seriile sunt convergente. ■

Exemplul 2.8.3. *Seriile numerice cu termeni oarecare*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos nx,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin nx,$$

sunt convergente oricare ar fi parametrul real x.

Indicaţie. Se aplică criteriul lui Dirichlet şi se folosesc unele rezultate de la exemplul precedent. ■

2.9 Serii numerice absolut convergente şi serii semi–convergente

Definiţia 2.9.1. *Seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **absolut convergentă** *dacă seria valorilor absolute*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2.60}$$

este convergentă.

Observaţia 2.9.1. *Seria (2.60) este serie cu termeni pozitivi.*

Teorema 2.9.1. *Dacă seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este absolut convergentă, atunci este convergentă.*

Demonstraţie. Seriei (2.60) i se aplică criteriul general al lui Cauchy şi se ţine cont de inegalitatea

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}|.$$

Prin urmare, absoluta convergenţă a unei serii numerice implică convergenţa acesteia. **q.e.d.**

Observaţia 2.9.2. *Reciproca din Teorema 2.9.1 nu este în general adevărată.*

Într-adevăr, fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ care după Exemplul 2.8.1 este convergentă. Seria modulelor acestei serii este seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ studiată în Exemplul 2.5.3 care am văzut că este divergentă. ■

Definiţia 2.9.2. *Seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **semi–convergentă** *sau* **simplu convergentă** *dacă ea este convergentă, iar seria modulelor (2.60) este divergentă.*

Observaţia 2.9.3. *Seria alternată* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ *este semi–convergentă.*

Într-adevăr, această afirmaţie rezultă din Exemplul 2.8.1, Definiţia 2.9.2 şi Exemplul 2.5.3. ■

Observaţia 2.9.4. *O serie numerică se poate plasa în una din situaţiile: serie absolut convergentă, serie semi–convergentă, serie divergentă şi serie oscilantă.*

Observaţia 2.9.5. *Din Teorema 2.9.1 şi Observaţia 2.9.1 rezultă necesitatea unui studiu suplimentar al seriilor cu termeni pozitivi, care se va efectua în secţiunea următoare.*

În mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ are loc proprietatea de comutativitate a adunării care afirmă că suma unui număr finit de termeni este independentă de ordinea termenilor sumei. De exemplu,

$$a+b+c+d=c+b+d+a=a+c+d+b=\cdots$$

Într-o sumă infinită, deci într-o serie numerică, suma este definită într-un mod nou, mai precis ca limită a unui şir, şirul sumelor parţiale al seriei.

Dorim să investigăm dacă în această extensiune a adunării în $\mathbb{R}$ a unui număr infinit de termeni, se păstrează proprietatea de independenţă referitoare la ordinea în care se face adunarea termenilor. De exemplu, să luăm seria armonică alternată

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}+...,$$

despre care ştim că este simplu convergentă (vezi Observaţia 2.9.3), şi să aranjăm termenii după regula: după primul termen 1 se consideră doi termeni negativi urmaţi de un termen pozitiv, ş. a. m. d. Se obţine, atunci seria

$$\sigma=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\cdots$$

Apar în acest mod două întrebări:

1. Este noua serie convergentă?
2. Dacă da, atunci $\sigma=s$?

Notăm suma parţială de rang n a primei serii cu s_n şi cu σ_n suma parţială de rang n al celei de a doua serii. Să examinăm σ_{3n}.

$$\sigma_{3n}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k})=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k})=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Acum, în prima sumă din ultima expresie scădem termenii pari, de forma $\dfrac{1}{2k}$ şi, ca să nu se schimbe σ_{3n}, adunăm ce am scăzut şi obţinem:

$$\sigma_{3n}=\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j+1}}{j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k})-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}n\frac{(-1)^{j+1}}{j}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}s_{2n}.$$

Deoarece $s_{2n}\to s$, urmează că $\sigma_{3n}\to\dfrac{1}{2}s$. Însă, orice sumă parţială σ_n a celei de a doua serii diferă de o sumă parţială de rang multipltu de trei cel mult printr-un termen, care atunci când $n\to\infty$, tinde la zero. Prin urmare, $\sigma_n\to\dfrac{1}{2}s$ şi scriem

$$\frac{1}{2}s=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+...$$

Să remarcăm că putem aranja termenii primei serii şi într-un alt mod, după o altă regulă, astfel încât seriile noi obţinute să nu mai aibă suma $\frac{1}{2}s$, ba chiar să fie divergente. În legătură cu acest aspect demonstrăm în continuare unele teoreme importante, nu înainte de a arăta cum se obţine orice altă serie de forma σ pornind de la o serie s.

Definiţia 2.9.3. *Fie* $I\!N_k = \{n \in I\!N : \; n \geq k, \; k \in I\!N\}$. *Se numeşte* **permutare** *a lui* $I\!N_k$ *orice aplicaţie bijectivă* $\varphi : I\!N_k \to I\!N_k$.

După cum am afirmat la începutul acestui capitol, de cele mai multe ori $k = 1$, deci $I\!N_1 = I\!N^*$, însă este posibil să lucrăm şi cu $I\!N_0 = I\!N$, această situaţie având loc, de exemplu, pentru seriile de puteri, un caz particular de serii de funcţii reale de variabilă reală.

Definiţia 2.9.4. *Seria numerică cu termeni nenuli oarecare* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **necondiţionat convergentă** *dacă pentru orice permutare* φ *a mulţimii* $I\!N^*$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *unde* $b_n = a_{\varphi(n)}$, *este convergentă.*

Teorema 2.9.2. *Dacă seria numerică cu termeni oarecare* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este absolut convergentă ea este necondiţionat convergentă şi pentru orice permutare* φ *a lui* $I\!N^*$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *unde* $b_n = a_{\varphi(n)}$, *este absolut convergentă şi are aceeaşi sumă ca seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstraţie. Deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă, deci are loc Teorema 2.7.1.

Fie φ o permutare a mulţimii $I\!N^*$ şi

$$N'(\varepsilon) = \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), ..., \varphi^{-1}(N(\varepsilon))\},$$

unde $\varphi^{-1}(j)$ este numărul natural dus în j prin permutarea φ, iar $N(\varepsilon)$ este numărul natural din Teorema 2.7.1. Dacă $n > N'(\varepsilon)$ rezultă $\varphi(n) > N(\varepsilon)$ căci, în caz contrar, dacă $\varphi(n)$ ar fi mai mic cel mult egal cu $N(\varepsilon)$, am avea $\varphi(n) = k \leq N(\varepsilon)$, deci $n = \varphi^{-1}(k) \leq N'(\varepsilon)$, ceea ce ar contrazice faptul că $n > N'(\varepsilon)$.

Dacă $b_n = a_{\varphi(n)}$, avem

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + ... + |b_{n+p}| = |a_{\varphi(n+1)}| + |a_{\varphi(n+2)}| + ...|a_{\varphi(n+p)}|$$

şi, dacă $n > N'(\varepsilon)$, avem $\varphi(n+k) > N(\varepsilon), \; k \in \overline{1,p}$, deci

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + ... + |b_{n+p}| \leq |a_{N(\varepsilon)+1}| + |a_{N(\varepsilon)+2}| + ... + |a_{N(\varepsilon)+q}|,$$

unde q este astfel încât $N(\varepsilon) + q = \max\{\varphi(n+1), \varphi(n+2), \cdots, \varphi(n+p)\}$.

Se observă că q depinde de n dar acest fapt nu influenţează demonstraţia.

Din absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi criteriul general al lui Cauchy, deducem

$$|a_{N(\varepsilon)+1}| + |a_{N(\varepsilon)+2}| + ... + |a_{N(\varepsilon)+q}| < \varepsilon,\ q \in I\!N^*,$$

deci

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + ... + |b_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon),\ \forall\, p \in I\!N^*$$

care, după Teorema 2.7.1, arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ este convergentă adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este absolut convergentă. Deoarece φ a fost o permutare oarecare a lui $I\!N^*$ am demonstrat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este necondiţionat convergentă şi că seria obţinută prin permutarea, sau rearanjarea termenilor, este tot absolut convergentă.

Să arătăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ are aceeaşi sumă cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. În acest sens, fie $s \in I\!R$ suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, φ o permutare oarecare a mulţimii $I\!N^*$ şi $b_n = a_{\varphi(n)}$. Din absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi Teorema 2.7.1 rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$, astfel încât

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*.$$

Pe de altă parte, dacă s_n este suma parţială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, folosind rezultatul de mai sus, avem

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Făcând $p \to \infty$ în aceste ultime relaţii şi ţinând cont de faptul că $s_{n+p} \to s$, când $p \to \infty$, deducem

$$|s - s_n| \le \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Fie din nou $N'(\varepsilon) = \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2)\varphi^{-1}(N(\varepsilon))\}$, $n > N'(\varepsilon)$ şi

$$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

Printre numerele $b_1, b_2, ..., b_n$ se află $a_1, a_2, ..., a_{N(\varepsilon)}$ deoarece $a_k = b_{\varphi^{-1}(k)}$ şi pentru $k \le N(\varepsilon)$ avem $\varphi^{-1}(k) \le N'(\varepsilon)$. Deci, pentru $n > N'(\varepsilon)$, putem scrie

$$S_n = s_{N(\varepsilon)+1} + \hat{s}_n,$$

unde $\hat{s}_n$ este o sumă de termeni de forma b_l, cu $l > N(\varepsilon)$, din care cauză vom avea $|\hat{s}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Evaluând acum diferenţa $S_n - s$, găsim

$$|S_n - s| = |s_{N(\varepsilon)+1} + \hat{s}_n - s| \le |s_{N(\varepsilon)+1} - s| + |\hat{s}_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N'(\varepsilon) \in I\!N$ aşa încât

$$|S_n - s| < \varepsilon,\ \forall\, n > N'(\varepsilon),$$

ceea ce înseamnă că $S_n \to s$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$, şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Observaţia 2.9.6. *Teorema 2.9.2 arată că dacă o serie este absolut convergentă, suma ei nu se schimbă dacă efectuăm sumarea termenilor seriei în oricare altă ordine.*

Considerăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică cu termeni oarecare şi notaţiile:

$$u_k = \begin{cases} a_k, & \text{dacă } a_k > 0 \\ 0, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases} \quad ; \quad v_k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -a_k, & \text{dacă } a_k < 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Având în vedere notaţiile (2.61), orice sumă parţială s_n a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ poate fi scrisă în forma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} v_k. \tag{2.62}$$

Cu aceste pregătiri prezentăm următorul rezultat important.

Propoziţia 2.9.1. *Dacă seria numerică cu termeni oarecare* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este semi–convergentă, atunci seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt divergente.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, că cel puţin una din cele două serii este convergentă. Pentru fixarea ideilor presupunem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă. Din (2.62), deducem

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.63}$$

Deoarece ambele sume din membrul doi al relaţiei (2.63) au limită când $n \to \infty$, la fel se întâmpla şi cu suma din membrul întâi, adică există

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = V \in I\!R. \tag{2.64}$$

Relaţia (2.64) arată că seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă şi are suma V. Pe de altă parte,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k. \tag{2.65}$$

Folosind (2.64) şi (2.65), deducem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergentă, ceea ce, după Definiţia 2.9.1, arată că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă, fapt ce constituie contradicţie. Prin urmare, seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt divergente.**q.e.d.**

Acum avem totul pregătit pentru a evidenţia o proprietate interesantă a seriilor semi–convergente.

Teorema 2.9.3. *Dacă seria cu termeni oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este simplu convergentă, există o permutare* φ *a lui* $\mathbb{N}^*$ *astfel încât seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, unde* $b_n = a_{\varphi(n)}$*, să fie divergentă; pentru orice* $A \in \mathbb{R}$ *există o permutare* φ *a lui* $\mathbb{N}^*$ *aşa încât seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *să fie convergentă şi să aibă suma* A*.*

Demonstraţie. Notăm $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ şi $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Din Propoziţia 2.9.1 rezultă $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$ şi $\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, din Teorema 2.6.5, deducem $a_n \to 0$, de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} v_n = 0. \tag{2.66}$$

Notăm cu (M_n) un şir cu limita $+\infty$ şi construim o permutare φ a mulţimii $\mathbb{N}^*$ în modul următor:

- adunăm termeni u_k până obţinem o sumă superioară lui M_1, lucru posibil deoarece $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$, şi adunăm apoi $-v_k$;
- adunăm în continuare termeni u_k până obţinem o sumă superioară lui M_2 şi adunăm apoi $-v_k$; continuăm în acelaşi mod.

Pentru k suficient de mare avem $v_k < 1$, deoarece avem (2.66). De aici, deducem că putem să construim un şir de sume parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ care să majoreze pe $M_n - 1$, deci un subşir al şirului sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ care are limita $+\infty$. În acest mod, seria determinată $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Demonstrăm acum partea a doua a teoremei. Observăm mai întâi că seriile asociate $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, cu termeni pozitivi, sunt ambele divergente, având fiecare suma egală cu $+\infty$. Pentru o mai bună înţelegere a modului de construcţie al seriei rearanjate care să fie convergentă şi să aibă suma A, presupunem $A > 0$. Modul de construcţie al acestei serii este următorul:

(i) Formăm succesiv sumele parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ până când obţinem prima sumă parţială mai mare decât A. Acest lucru este posibil având în vedere că $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$, deci şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ are limita $+\infty$.

(ii) La rezultatul obţinut la pasul precedent scădem sume parţiale ale seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ până când ajungem la prima sumă care scăzută din rezultatul anterior ne situează sub A.

(iii) La rezultatul obţinut la pasul doi adăugăm alţi termeni ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ până când obţinem ca rezultat un număr mai mare decât A. Procedeul continuă apoi ca la pasul (ii).

Acest procedeu generează o serie convergentă cu suma egală cu A.

Într-adevăr, având în vedere că $u_n \to 0$ şi $v_n \to 0$, sumele obţinute după diverşi paşi diferă de A, fie printr-un termen u_k, fie printr-un termen v_k.

Procedeul de determinare al sumelor fiind continuu, iar $v_n \to 0$ şi $u_n \to 0$, deducem că abaterea de la A este din ce în ce mai mică. Această abatere tinde la zero odată ce numărul de paşi tinde la $+\infty$, ceea ce arată că sumele parţiale astfel construite tind către A. **q.e.d.**

Observaţia 2.9.7. *Teorema 2.9.3 scoate în evidenţă faptul că seriile semiconvergente au comportare diferită faţă de cea a sumelor finite.*

Pentru seriile absolut convergente, proprietatea menţionată în Teorema 2.9.3 nu mai are loc. Mai precis, avem (vezi [14, p. 189])

Teorema 2.9.4. *Dacă seria cu termeni oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este absolut convergentă, atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt convergente.*

2.10 Serii cu termeni pozitivi

Aşa după cum s–a menţionat mai sus, rezultatul stabilit în Teorema 2.9.1 impune un studiu detailat al seriilor numerice cu termeni pozitivi.

Teorema 2.10.1. *Seria numerică cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale* (s_n) *al seriei este mărginit.*

Demonstraţie. În primul rând să observăm că şirul sumelor parţiale (s_n) al unei serii cu termeni pozitivi este monoton strict crescător. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (s_n) este convergent. Din Teorema 2.1.5, deducem că (s_n) este convergent dacă şi numai dacă

$$\sup\{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k : \; n \in I\!N^*\} < +\infty,$$

adică şirul sumelor parţiale al seriei este mărginit. **q.e.d.**

Observaţia 2.10.1. *O serie cu termeni pozitivi nu poate fi oscilantă. O astfel de serie este fie convergentă, fie divergentă cu suma egală cu* $+\infty$.

Într-adevăr, din Teorema 2.1.5 rezultă că $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : \; n \in I\!N^*\}$ şi, ori $s \in I\!R$ dacă (s_n) este mărginit, caz în care seria este convergentă, ori $s = +\infty$ când (s_n) este nemărginit, caz în care seria este divergentă şi are suma egală cu $+\infty$. ■

Observaţia 2.10.2. *Dacă şirul sumelor parţiale al seriei cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *admite un subşir cu limita egală cu* $+\infty$, *atunci seria corespunzătoare este divergentă.*

2.10.1 Seria armonică generalizată

Exemplul 2.10.1. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in I\!R$, *numită* **seria lui Riemann**[6], *sau* **seria armonică generalizată**. *Să se arate că această serie este convergentă dacă* $\alpha > 1$ *şi divergentă dacă* $\alpha \leq 1$.

Într-adevăr, fie mai întâi $\alpha > 1$ şi S_m suma parţială de rang $m \in I\!N^*$ a seriei lui Riemann. Alegem $n \in I\!N^*$ astfel încât $2^n - 1 > m$. Pentru aceasta este suficient să considerăm că $n > [\log_2(m+1)] \in I\!N$, unde $[f]$ este funcţia partea întreagă a funcţiei f. Din (S_n) şir monoton strict crescător rezultă evident $S_m < S_{2^n-1}$.

Determinăm un majorant al mulţimii de numere reale $\{S_{2^n-1} :\ n \in I\!N^*.\}$ Pentru aceasta grupăm termenii sumei S_{2^n-1} după cum urmează:

$$S_{2^n-1} = 1 + \Big(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\Big) + (\frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{7^\alpha}\Big) + ... + \Big(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + ... + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}\Big).$$

Grupurile de termeni din parantezele de mai sus sunt în număr de $n-1$. În grupul de ordin k, $k \in \overline{1, n-1}$, se află 2^k termeni. Ţinând cont că fiecare termen din grupul de ordin k se poate majora prin $\frac{1}{(2^k)^\alpha}$, obţinem pentru S_{2^n-1} următoarea majorare:

$$S_{2^n-1} < 1 + \Big(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\Big) + \Big(\frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{4^\alpha}\Big) + ... + \Big(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + ... + \frac{1}{2^{n-1})^\alpha}\Big).$$

Cum în gruparea de ordin k de mai sus se află 2^k termeni egali, după adunarea acestora şi efectuarea simplificărilor ce se impun, obţinem:

$$S_{2^n-1} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + ... + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}}.$$

Membrul doi al inegalităţii obţinute este suma primilor n termeni a unei progresii geometrice cu raţia $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, deci

$$S_{2^n-1} < \frac{1 - \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^n}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} = \text{ constant } .$$

Prin urmare, în cazul $\alpha > 1$, $(S_m)_{m\geq 1}$ este şir mărginit şi, după Teorema 2.10.1, seria armonică generalizată este convergentă.

Să presupunem că $\alpha \leq 1$. Arătăm că seria armonică generalizată corespunzătoare este divergentă. Pentru aceasta să observăm mai întâi că $n^\alpha \leq n$. Apoi, grupând termenii lui S_{2^n} după o regulă asemănătoare celei din cazul $\alpha > 1$, avem

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \Big(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\Big) + \Big(\frac{1}{5^\alpha} + ... + \frac{1}{8^\alpha}\Big) + ... + \Big(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2^n)^\alpha}\Big).$$

Minorând fiecare termen al unei grupări cu ultimul termen al grupării respective, obţinem

[6]Riemann, Bernhard (1826–1866), matematician german cu importante contribuţii în analiza matematică şi geometria diferenţială, unele dintre ele deschizând ulterior drumul spre teoria relativităţii generalizate.

$$S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8}\Big) + ... + \Big(\frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^n}\Big).$$

În gruparea de ordin $k,\ k \in \overline{1, n-1}$, sunt 2^k termeni şi după adunarea acestora şi efectuarea simplificăriilor, ajungem la

$$S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Acest rezultat arată că subşirul (S_{2^n}) al şirului sumelor parţiale al seriei lui Riemann este divergent la $+\infty$, ceea ce, după Observaţia 2.10.2, arată că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ este divergentă în cazul $\alpha \le 1$. ■

2.11 Criterii de convergenţă şi divergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

Prezentăm acum un grup de criterii pentru serii cu termeni pozitivi care rezultă din criteriul general al lui Cauchy. Aceste criterii sunt condiţii suficiente cu ajutorul cărora cunoaşterea naturii unei serii poate fi utilizată la studiul naturii unei alte serii atât timp cât între termenii generali ai celor două serii există o anumită relaţie. Natura precisă a acestei relaţii este precizată în propoziţiile care urmează. Denumirea comună a acestor propoziţii este aceea de criterii de comparaţie. În acelaşi timp, acestea sunt criterii de absolută convergenţă pentru serii cu termeni oarecare.

2.11.1 Criterii de comparaţie

Definiţia 2.11.1. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *două serii de numere reale pozitive. Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este* **majorată** *de seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, sau că* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *este* **serie majorantă** *pentru seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi scriem*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{2.67}$$

dacă există $M \in I\!\!R_+^*$ *şi* $N \in I\!\!N^*$ *astfel încât*

$$a_n \le M \cdot b_n, \quad n \ge N. \tag{2.68}$$

Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este majorată de* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *este majorată de* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, spunem că cele două serii sunt* **echivalente** *şi scriem*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Spunem că cele două serii au **aceeaşi natură** *dacă ambele sunt convergente, sau divergente.*

Observaţia 2.11.1. *Dacă folosim Teorema 2.6.3, putem considera că* N *din Definiţia 2.11.1 este egal cu* 1.

Propoziţia 2.11.1. (Primul criteriu al comparaţiei) *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea* (2.67)*. Atunci, au loc afirmaţiile:*

$$\begin{array}{llll} (i) & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{serie convergentă} & \Longrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{serie convergentă;} \\ (ii) & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{serie divergentă} & \Longrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{serie divergentă.} \end{array}$$

Demonstraţie. Din Definiţia 2.11.1, Observaţia 2.11.1 şi ipotezele primei părţi din Propoziţia 2.11.1 rezultă că există $M > 0$ aşa încât să aibă loc (2.68) în care $N = 1$. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă,din Teorema 2.10.1 şi (2.68), obţinem

$$\sup\{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k : \ n \in I\!N^*\} \leq M \cdot \sup\{t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k : \ n \in I\!N^*\} < +\infty. \tag{2.69}$$

rezultat care arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Cea de a doua parte a propoziţiei se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunem contrariul, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă. Atunci, în baza primei părţi a propoziţiei rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Exemplul 2.11.1. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Soluţie. Seria dată este serie majorantă pentru seria armonică $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ deoarece avem $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Cum seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din Propoziţia 2.11.1, punctul (ii), rezultă că seria dată este divergentă. ■

Corolarul 2.11.1. *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt serii cu termeni oarecare astfel încât seria cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *este serie majorantă pentru seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este absolut convergentă, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este absolut convergentă.*

Într-adevăr, afirmaţia de mai sus rezultă din Propoziţia 2.11.1, punctul (i), aplicat seriilor cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. ■

Propoziţia 2.11.2. (**Al doilea criteriu de comparaţie**) *Fie seriile numerice cu termeni pozitivi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Atunci, au loc următoarele afirmaţii:

$$(1) \quad \overline{\lim}\, \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$(2) \quad \underline{\lim}\, \frac{a_n}{b_n} > 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

$$(3) \quad 0 < \underline{\lim}\, \frac{a_n}{b_n} \le \overline{\lim}\, \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demonstraţie. (1). Fie $L = \overline{\lim}\, \dfrac{a_n}{b_n}$ şi c fixat astfel încât $L < c < +\infty$. Conform Teoremei 2.3.1, la dreapta lui c se află un număr finit de termeni ai şirului $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\ge 1}$. Prin urmare, există $N_c \in I\!N^*$ astfel încât $\dfrac{a_n}{b_n} \le c,\ \forall\, n \ge N_c$, de unde deducem $a_n \le c \cdot b_n,\ \forall\, n \ge N_c$ şi deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Desigur că de aici înainte se aplică Propoziţia 2.11.1.

(2). Fie $l = \underline{\lim}\, \dfrac{a_n}{b_n} > 0$ şi $0 < c < l$, fixat. Atunci, din Teorema 2.3.1 deducem că există $N_c \in I\!N^*$ aşa fel încât $\dfrac{a_n}{b_n} \ge c,\ \forall\, n \ge N_c$, adică $b_n \le \dfrac{1}{c} \cdot a_n,\ \forall\, n \ge N_c$ ceea ce arată că $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi din acest loc se aplică din nou Propoziţia 2.11.1.

(3). Rezultă din (1) şi (2). **q.e.d.**

Corolarul 2.11.2. *Dacă pentru seriile cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$, *atunci au loc afirmaţiile:*

$$a) \quad A < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$b) \quad A > 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

$$c) \quad 0 < A < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$d) \quad A = 0 \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serie convergentă} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serie convergentă};$$

$$e) \quad A = +\infty \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serie divergentă} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serie divergentă}.$$

Exemplul 2.11.2. *Să se studieze natura următoarelr serii cu termeni pozitivi:*

$$\mathbf{1}.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}};\quad \mathbf{2}.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}};\quad \mathbf{3}.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{2^n},\ a\in I\!R;$$

$$\mathbf{4}.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosan}{n^2},\ a\in I\!R;\quad \mathbf{5}.\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}};\quad \mathbf{6}.\ \sum_{n=1}^{\infty}arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Soluţie 1. Se aplică Corolarul 2.11.2 cu $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ şi $b_n=\dfrac{1}{n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

deci seriile $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ au aceeaşi natură. Dar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă. Prin urmare seria de la primul punct este divergentă.

2. Deoarece $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$ rezultă că seria de la punctul 2 este echivalentă cu seria armonică generalizată în care $\alpha=\dfrac{3}{2}$, despre care ştim din Exemplul 2.10.1 că este convergentă. Aşadar, seria de la punctul 2 este convergentă.

3. Avem evident $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{\sin an}{2^n}|\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\ \forall\, a\in I\!R$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ serie convergentă deoarece este serie geometrică cu raţia $q=\dfrac{1}{2}$. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{2^n}$ este absolut convergentă $\forall\, a\in I\!R.$

4. Evident $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos an}{n^2}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \forall\, a\in I\!R$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serie convergentă fiindcă este serie armonică generalizată cu $\alpha=2>1.$ Rezultă deci că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos an}{n^2}$ este absolut convergentă $\forall\, a\in I\!R.$

5. Seria dată la acest punct este o serie majorantă a seriei $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ deoarece, pentru $n\geq 2,$ are loc inegalitatea $\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n}.$ Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă pentru că şirul termenilor seriei nu are limita egală cu zero, din Propoziţia 2.11.1 rezultă că seria $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ este divergentă.

6. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1\in(0,+\infty),$ rezultă că seria dată are aceeaşi natură cu seria armonică generalizată în care $\alpha=\dfrac{1}{2}$, despre care se cunoaşte că este divergentă. ■

Propoziţia 2.11.3. (**Criteriul de comparaţie de speţa a treia**) *Fie seriile numerice cu termeni pozitivi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n;\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Dacă există $N \in I\!N^*$ astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \geq N, \tag{2.70}$$

atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n.$

Demonstraţie. Din (2.70) rezultă $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a_n}{b_n}, \ \forall\, n \geq N,$ din care, pentru $n \geq N+1,$ deducem

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{a_N}{b_N} = M,$$

adică $a_n \leq M \cdot b_n, \ \forall\, n \geq N,$ care arată că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n.$ **q.e.d.**

Corolarul 2.11.3. *Fie a_n serie numerică cu termeni pozitivi. Dacă $\exists\, N \in I\!N^*$ şi $\exists\, \rho \in (0,1)$ (respectiv $\rho \geq 1$) astfel încât*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho \quad \text{respectiv} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \rho, \quad n \geq N, \tag{2.71}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă (respectiv divergentă).

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 2.11.3 luând $b_n = \rho^n$. Pentru această alegere a lui (b_n) rezultă că (2.70) este satisfăcută, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Dacă adăugăm faptul că seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$ este convergentă dacă raţia ρ este subunitară şi respectiv divergentă dacă $\rho \geq 1,$ rezultă evident concluziile corolarului. **q.e.d.**

2.11.2 Criteriul condensării al lui Cauchy

Definiţia 2.11.2. *Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ se numeşte* **seria condensată** *a seriei cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n.$*

Teorema 2.11.1. (**Criteriul condensării al lui Cauchy**) *Dacă (a_n) este un şir de numere reale pozitive monoton descrescător, atunci seriile numerice cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Din Teorema 2.6.6 rezultă că seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m,$ unde $b_m = \sum\limits_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} a_j.$ Deoarece termenul general al seriei $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m$ are $2^{m+1} - 2^m$ termeni, car sunt 2^m termeni consecutivi ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ începând cu a_{2^m} şi deoarece $a_i \geq a_{i+1}$, $\forall\, i \in I\!N^*$, rezultă

$$\frac{1}{2}(2^{m+1}\, a_{2^{m+1}}) = 2^m\, a_{2^{m+1}} \leq b_m \leq 2^m\, a_{2^m},\ \forall\, m \in I\!N.$$

Aceste inegalităţi, împreună cu Definiţia 2.11.1, conduc la concluziile $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m+1} a_{2^{m+1}} \ll \sum_{m=0}^{\infty} b_m \ll \sum_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m}$.

Aplicând acum Propoziţia 2.11.1, deducem că seriile $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ şi $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m}$ au aceeaşi natură, prin urmare seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeaşi natură. **q.e.d.**

Exemplul 2.11.3. *Utilizând criteriul condensării al lui Cauchy să se studieze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:*

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ \ \alpha \in I\!R; \qquad (b)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n};$$

$$((c)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha},\ \ \alpha > 0; \qquad (d)\quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n \ln n ... \ln^{(p)} n},$$

unde $p \in I\!N$, $p \geq 2$, $\ln^{(2)} x = \ln(\ln x), ..., \ln^{(p)} x = \ln \ln^{(p-1)} x$, *iar* n_0 *este ales astfel încât* $\ln^{(p)} n$ *să aibă sens pentru orice* $n \geq n_0$.

Soluţie (a) Pentru $\alpha \leq 0$ seria armonică generalizată (vezi Exemplul 2.10.1) este divergentă deoarece termenul general nu tinde la zero. Pentru $\alpha > 0$ şirul termenilor seriei armonice generalizate este monoton strict descrescător, deci seria dată are aceeaşi natură cu seria condensată $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$. Dar această serie este serie geometrică cu raţia $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} > 0.$

Dacă $q < 1,$ ceea ce înseamnă $\alpha > 1,$ seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă şi prin urmare seria armonică generalizată este convergentă.

Dacă $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1,$ adică $\alpha \leq 1,$ seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$ este divergentă. Prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este , de asemenea, divergentă.

(b) Întrucât şirul numeric $(\frac{1}{n \ln n})_{n\geq 2}$ este monoton strict descrescător rezultă că seria de la acest punct are aceeaşi natură cu seria condensată

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2},$$

care este divergentă fiindcă este comparabilă cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

(c) Seria condensată a seriei de la acest punct este $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^\alpha\, n^\alpha}$ care este comparabilă cu seria lui Riemann, deci pentru $0 < \alpha \leq 1$ seria dată este divergentă, iar pentru $\alpha > 1$ este convergentă.

(d) Seria în cauză are aceeaşi natură cu seria condensată

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n ... \ln^{(p)} 2^n}.$$

Pentru $p = 1,$ obţinem seria de la punctul precedent care este divergentă.
Demonstrăm prin inducţie că seria de la acest punct este divergentă.

Pentru aceasta presupunem că seria $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\ln n \ln(\ln n) ... \ln^{(p-1)} n}$ este divergentă.

Deoarece $\ln 2^n = n \ln 2 < n,$ găsim $\ln^{(p)} 2^n = \ln^{(p-1)}(ln 2^n) < \ln^{(p-1)} n$ şi deci

$$\frac{1}{\ln 2^n \ln^{(2)} 2^n} ... \ln^{(p)}(2^n) > \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n) ... \ln^{(p-1)} n}, \quad n \geq n_0.$$

Aplicând primul criteriu de comparaţie, criteriul condensării al lui Cauchy şi inducţia matematică după $p,$ rezultă că seria de la punctul 3 este divergentă. ∎

2.11.3 Criteriul logaritmic

Propoziţia 2.11.4. (**Criteriul logaritmic**) *Fie seria cu termeni pozitivi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

(i) Dacă există $\alpha > 1$ *şi* $N_1 \in I\!N^*,\ N_1 > 1$ *astfel încât*

$$\frac{\ln \dfrac{1}{a_n}}{\ln n} \geq \alpha, \quad \forall\, n \geq N_1, \tag{2.72}$$

atunci seria dată este convergentă;

(ii) dacă există $\alpha \leq 1$ *şi* $N_2 \in I\!N^*,\ N_2 > 1$ *aşa încât*

$$\frac{\ln \dfrac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1, \quad \forall\, n \geq N_2, \tag{2.73}$$

atunci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Afirmaţiile de mai sus rezultă din faptul că (2.72) este echivalentă cu $a_n \leq \dfrac{1}{n^\alpha},\ \forall\, n \geq N_1,$ iar (2.73) este echivalentă cu $a_n \geq \dfrac{1}{n^\alpha},\ \forall\, n \geq N_2.$ De fapt (2.72) arată că $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pe când (2.73) spune că $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$ Dacă la acestea adăugăm rezultatele referitoare la seria armonică generalizată din Exemplul 2.10.1, precum şi Propoziţia 2.11.1, vedem că ambele afirmaţii din Propoziţia 2.11.4 sunt adevărate. **q.e.d.**

În aplicaţiile practice însa se foloseşte *formularea cu limită* a criteriului logaritmic care se deduce uşor din Propoziţia 2.11.4.

Corolarul 2.11.4. (**Formularea cu limită a criteriului logaritmic**) *Dacă pentru seria numerică cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda,$$

atunci au loc următoarele implicaţii:

$$\lambda > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{este serie convergentă;}$$

$$\lambda < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{este serie divergentă;}$$

$$\lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{poate fi serie convergentă, sau divergentă.}$$

Demonstraţie. Fie mai întâi $\lambda > 1$. Atunci, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\alpha = \lambda - \varepsilon > 1$. Este de ajuns să luăm pe ε astfel încât $0 < \varepsilon < \lambda - 1$.

În afara vecinătăţii simetrice $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ rămân un număr finit de termeni ai şirului $\left(\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$. Prin urmare, există $N_1 \in \mathbb{N}^*, N_1 \geq 2$ astfel încât să aibă loc (2.72). După Propoziţia 2.11.4 , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

În mod asemănător se arată că are loc şi concluzia a doua.

Pentru justificarea ultimei părţi, considerăm seria de la punctul (c) din Exemplul 2.11.3 pentru care

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n{}^{-1}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\alpha \ln\ln n}{\ln n}) = 1, \ \forall\, \alpha > 0,$$

de unde rezultă afirmaţia a treia a corolarului. **q.e.d.**

2.11.4 Criteriul de convergenţă în α

Corolarul 2.11.5. (**Criteriul de convergenţă în** α) *Fie seria cu termeni pozitivi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.74}$$

Dacă există $\alpha > 1$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot a_n = A, \tag{2.75}$$

şi $A \in [0, +\infty)$, *seria* (2.74) *este convergentă, iar dacă există* $\alpha \leq 1$ *aşa încât*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot a_n = A \tag{2.76}$$

şi $A \in (0, +\infty]$, *atunci seria* (2.74) *este divergentă.*

Demonstraţie. Într-adevăr, să observăm mai întâi că (2.75) este echivalentă cu existenţa numă-rului natural N_1 cu proprietatea

$$a_n < \frac{A_1}{n^\alpha},\ n \geq N_1, \tag{2.77}$$

iar (2.76) este echivalentă cu existenţa lui $N_2 \in I\!\!N$ astfel încât

$$\frac{A_2}{n^\alpha} < a_n, \quad n \geq N_2. \tag{2.78}$$

Inegalitatea (2.77) arată că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ şi (2.78) exprimă că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Din Propoziţia 2.11.1 şi Exemplul 2.10.1 rezultă concluziile de mai sus. **q.e.d.**

2.11.5 Criteriul raportului

Teorema 2.11.2. (**Criteriul raportului a lui D'Alembert**[7] **cu limite extreme**) *Fie seria de numere reale pozitive* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $L = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *şi* $l = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Atunci, au loc următoarele implicaţii:

$$(i) \qquad L < 1 \qquad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{este serie convergentă;}$$

$$(ii) \qquad l > 1 \qquad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{este serie divergentă;}$$

$$(iii) \qquad l \leq 1 \leq L \qquad \Longrightarrow \quad \textit{seria} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{poate fi oricum, ca natură.}$$

Demonstraţie. Fie $L < 1$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $\rho = L + \varepsilon < 1$. Atunci, după Teorema 2.3.1, există $N_1(\varepsilon) \in I\!\!N^*$ astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho, \quad \forall\, n \geq N_1(\varepsilon). \tag{2.79}$$

Convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rezultă din Corolarul 2.11.3 şi (2.79).

Dacă $l > 1$, există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea $\rho = l - \varepsilon > 1$. Din Teorema 2.3.1 rezultă că la stânga lui $l - \varepsilon$ se află un număr finit de termeni ai şirului $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$, deci există $N_2(\varepsilon) \in I\!\!N$ cu proprietatea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \rho, \quad n \geq N_2(\varepsilon) \tag{2.80}$$

Ţinând cont acum de Corolarul 2.11.3 şi de relaţia (2.80), deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Pentru a justifica afirmaţia din ultima parte a teoremei să considerăm seria

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{2}{3^\alpha} + \ldots \quad \alpha \in I\!\!R \tag{2.81}$$

[7] D'Alembert, Jean le Rond (1717–1783), filosof şi matematician francez.

Seria (2.81) provine din operaţii aritmetice asupra seriei armonice generalizate.

Dacă t este suma seriei (2.81), iar s este suma seriei armonice generalizate, atunci $t = s + 2(s-1) = 3s - 1.$

Prin urmare, natura seriei (2.81) este aceeaşi cu cea a seriei armonice generalizate: convergentă pentru $\alpha > 1;$ divergentă dacă $\alpha \leq 1.$ Pe de altă parte:

$$l = \underline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1,\ \forall\,\alpha \in I\!\!R; \quad L = \overline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1,\ \forall\,\alpha \in I\!\!R,$$

de unde constatăm că în cazul $l \leq 1,$ sau $L \geq 1,$ natura seriei poate fi oricum. În această situaţie spunem că seria dată se plasează în *caz de dubiu.* **q.e.d.**

Corolarul 2.11.6. *Fie seria numerică cu termeni nenuli* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,$

$$l = \underline{\lim}\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{şi} \quad L = \overline{\lim}\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Atunci, au loc următoarele implicaţii:

(1) $L < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este serie absolut convergentă;*

(2) $l > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este serie divergentă, sau oscilantă;*

(3) $l \leq 1,$ *sau* $L \geq 1,$ *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se plasează în caz de dubiu.*

Demonstraţie. Implicaţiile (1) şi (3) sunt evidente după cum rezultă din Teorema 2.11.2. Pentru demonstraţia celui de al doilea punct al corolarului să observăm că dacă $l > 1$, atunci şirul termenilor seriei date nu poate fi convergent la zero şi, după Corolarul 2.6.2, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nu este convergentă. În ce priveşte (3) se procedează ca în Teorema 2.11.2. **q.e.d.**

Corolarul 2.11.7. (**Formularea cu limită a criteriului raportului**) *Fie seria de numere reale pozitive cu proprietatea că există* $r \in [0, +\infty]$ *astfel încât*

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{2.82}$$

Atunci, au loc implicaţiile:

(i) $r < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie convergentă;*

(ii) $r > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie divergentă;*

(iii) $r = 1 \Longrightarrow$ *caz de dubiu.*

Într-adevăr, afirmaţiile de mai sus rezultă din Teorema 2.11.2 şi din faptul că din (2.82) avem $l = L = r$. ■

Observaţia 2.11.2. *Rezultatele din Corolarul 2.11.7 se transpun corespunză-tor şi seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *unde* a_n, $n \in I\!N^*$, *sunt numere reale nenule cu proprietatea că există* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

2.11.6 Criteriul radicalului

Un alt criteriu de convergenţă care se deduce din criteriile de comparaţie este *criteriul radicalului al lui Cauchy*. Seria de comparaţie în acest caz este seria geometrică.

Teorema 2.11.3. (**Criteriul radicalului al lui Cauchy**) *Fie seria de numere reale pozitive* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n}$. *Atunci:*

- $L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie convergentă;*
- $L > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie divergentă;*
- $L = 1 \Longrightarrow$ *natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *poate fi oricum.*

Demonstraţie. Dacă $L < 1$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $q = L + \varepsilon < 1$. Există atunci $N \in I\!N^*$ aşa încât $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, $\forall\, n \geq N$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Cum seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ cu raţia q subunitară este convergentă, din Propoziţia 2.11.1 deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Să presupunem acum că $L > 1$ şi fie $0 < \varepsilon < L - 1$ fixat. Din Teorema 2.3.1 rezultă că există $n_1 < n_2 < \ldots$ a.î $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq L - \varepsilon > 1$, $k \geq 1$ deci $a_{n_k} \geq 1$ ceea ce arată că a_n nu converge la zero. Folosind acum Corolarul 2.6.2, deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nu este convergentă. Fiindcă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este serie cu termeni pozitivi, nu poate fi oscilantă, deci este serie divergentă.

Ca şi în alte situaţii similare, pentru a demonstra ultima parte a teoremei, considerăm seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in I\!R$. Se vede imediat că $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1$. Dacă la aceasta mai adăugăm faptul că pentru $\alpha > 1$ seria lui Riemann este convergentă, iar pentru $\alpha \leq 1$ aceeaşi serie este divergentă, ajungem să justificăm şi partea a treia a teoremei, adică o serie numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pentru care L din Teorema 2.11.3 este 1, poate fi convergentă, sau divergentă. **q.e.d.**

Corolarul 2.11.8. *Fie seria numerică cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Dacă există numă-rul* $\rho \in [0,\infty]$ *definit de* $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, *atunci:*

$$\rho < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{este serie convergentă;}$$

$$\rho > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{este serie divergentă;}$$

$$\rho = 1 \quad \Longrightarrow \quad \textit{natura seriei } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ poate fi oricum.}$$

Demonstraţie. Se foloseşte Teorema 2.11.3 şi Teorema 2.3.2. **q.e.d.**

Corolarul 2.11.9. *Fie seria numerică cu termeni nenuli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Atunci, au loc urmă-toarele implicaţii:*

- $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie absolut convergentă;*
- $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nu este serie convergentă;*
- $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Longrightarrow$ *natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *poate fi oricum.*

Exemplul 2.11.4. *Să se studieze natura seriilor numerice cu termeni pozitivi:*

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}};$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{2^n}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n, \qquad a \in \mathbb{R};$$

$$d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a\cdot n+1}{n+2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n \cdot a^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Pentru studiul naturii acestor serii, aplicăm criteriul radicalului, fie în *formularea cu limită*, dată de Corolarul 2.11.8, fie în *formularea cu limită superioară*:

$$a)\quad a_n = \frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n^2}} \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e} < 1,$$

deci seria de la punctul a) este convergentă;

$$b)\quad a_n = \frac{n^\alpha}{2^n} \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^\alpha}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

convergentă;

$$c)\quad a_n = n\cdot a^n \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = |a|\,\sqrt[n]{n} \to |a| \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

este serie absolut convergentă dacă $|a| < 1,$ divergentă dacă $a \ge 1$ şi oscilantă dacă $a \le -1;$

$$d)\quad a_n = \Big(\frac{a\cdot n+1}{n+2}\Big)^n \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{a\cdot n+1}{n+2} \to a \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serie convergentă dacă $0 < a < 1$ şi divergentă pentru $a > 1.$ În cazul $a = 1$ seria este , de asemenea, divergentă pentru că termenul general al ei nu tinde la zero şi este serie cu termeni pozitivi.

$$\begin{aligned} e)\qquad & a_n = (3+(-1)^n)^n\cdot a^n \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = (3+(-1)^n)\cdot|a| \Longrightarrow \\ \Longrightarrow\quad & L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 4|a|. \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $4|a| < 1,$ adică $a \in (-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}),$ seria dată este absolut convergentă. Pentru $a \ge \dfrac{1}{4}$ seria dată este divergentă, iar pentru $a \le \dfrac{-1}{4}$ seria este oscilantă. ■

Corolarul 2.11.10. *Dacă există* $N \in I\!N^*$ *şi* $\rho \in (0,1)$ *astfel încât*

$$\sqrt[n]{a_n} \le \rho, \quad \forall\, n \ge N, \tag{2.83}$$

atunci

$$0 \le s - s_n \le \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}, \quad \forall\, n \ge N. \tag{2.84}$$

Într-adevăr, din (2.83) deducem $a_n \le \rho^n,$ din care rezultă (2.84). ■

Exemplul 2.11.5. *Să se calculeze, cu o eroare mai mică decât* $10^{-7},$ *valoarea aproximativă a sumei seriei* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n^2}.$

Soluţie. În Exemplul 2.11.4 am arătat că seria de mai sus este convergentă. Apoi, din $\sqrt[n]{a_n} = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-n}$ şi din Exemplul 2.1.1 deducem că numărul ρ şi N din Corolarul 2.11.10 au valorile: $\rho = \dfrac{1}{2};$ $N = 1.$ Aplicând acum (2.84) obţinem că $0 \le s - s_n \le \dfrac{1}{2^n}.$ Impunând condiţia ca eroarea să fie mai mică decât 10^{-3} găsim $n \ge 10.$

Aşadar, sumând primii 10 termeni ai seriei date obţinem valoarea aproximativă a sumei sale cu o eroare mai mică decât 10^{-3}. ■

2.12 Alte criterii de convergenţă ale seriilor cu termeni pozitivi

Din cele prezentate în paragraful anterior se constată că există situaţii când aplicarea unui criteriu pentru stabilirea naturii unei serii numerice cu termeni pozitivi conduce la caz de dubiu. De aici necesitatea formulării altor criterii, mai puternice, care să poată decide natura seriei în cazul când aplicarea unui anumit criteriu generează incertitudine.

2.12.1 Criteriul lui Kummer

Teorema 2.12.1. **(Criteriul lui Kummer[8])** *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie numerică cu termeni pozitivi.*

(i) Dacă există un şir de numere reale pozitive (b_n), *o constantă pozitivă* α *şi un număr natural* N *aşa încât*

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \geq \alpha, \quad \forall n \geq N, \tag{2.85}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*

Dacă $c_n \leq 0,\ \forall\, n \geq N$ *şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *este divergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este serie divergentă.*

Formulare alternativă. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *unde* $a_n > 0$, *şi* (c_n) *şirul numeric al cărui termen general este definit în* (2.85). *Atunci, au loc următoarele implicaţii:*

(I) $\underline{\lim}\, c_n > 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie convergentă;*

(II) $\overline{\lim}\, c_n < 0$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *serie divergentă* $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie divergentă.*

Demonstraţie. (i) Deoarece $a_{n+1} > 0$, din (2.85) deducem

$$b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} \geq \alpha \cdot a_{n+1},\ \forall\, n \in I\!N^*.$$

Sumând membru cu membru în această inegalitate după valorile lui n de la N până la $N+p$, obţinem

$$b_N \cdot a_N - b_{N+p} \cdot a_{N+p} \geq \alpha \cdot (a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p})$$

Având în vedere că

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} = s_{N+p} - s_N,$$

unde s_n este suma parţială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, din ultima inegalitate deducem

$$s_{N+p} - s_N \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (b_N \cdot a_N - b_{N+p} \cdot a_{N+p}) < \frac{1}{\alpha} \cdot a_N \cdot b_N,$$

din care mai apoi găsim $s_{N+p} < s_N + \frac{1}{\alpha} \cdot b_N \cdot a_N, \quad \forall\, p \geq 1.$ Acest rezultat arată că şirul sumelor parţiale (s_n) este mărginit şi, după Teorema 2.10.1, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

[8]Kummer, Ernst Eduard, (1810–1893), matematician german.

(ii)Din $c_n \leq 0$ deducem evident $b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0,\ \forall\, n \geq N,$ rezultat care se mai poate scrie în forma $\dfrac{\dfrac{1}{b_{n+1}}}{\dfrac{1}{b_n}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n},\ \forall\, n \geq N.$

Folosind Propoziţia 2.11.3, în care a_n trece în $\dfrac{1}{b_n}$, iar b_n trece în a_n, şi ţinând cont că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ este , prin ipoteză, divergentă, deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

(I) Fie $0 < \ell < \underline{\lim}\, c_n$. Atunci, folosind Teorema 2.3.1, rezultă că există $N \in I\!N^*$ aşa încât $c_n > \ell,\ \forall\, n \geq N,$ adică tocmai (2.85). În baza lui (i) rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

(II) Dacă $\overline{\lim}\, c_n < 0,$ atunci doar un număr finit de termeni ai şirului $(c_n)_{n\geq 1}$ se află la dreapta lui $0,$ prin urmare există $N \in I\!N^*$ astfel încât $c_n \leq 0,\ \forall\, n \geq N.$ Cum avem şi ipoteza că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ este divergentă rezultă că suntem în ipotezele (ii) de mai sus şi prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă. **q.e.d.**

2.12.2 Criteriul lui Raabe

Corolarul 2.12.1. (**Criteriul lui Raabe**[9]) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi,* $l = \underline{\lim}\, n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ *şi* $L = \overline{\lim} n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right).$
Atunci, au loc afirmaţiile:

- $l > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie convergentă;*
- $L < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie divergentă;*
- $l \leq 1 \leq L \Longrightarrow$ *natura seriei poate fi oricum.*

Demonstraţie. În formularea alternativă a criteriului lui Kummer luăm $b_n = n$ după care, folosind (2.85), determinăm şirul c_n corespunzător.

Ţinând cont că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă, se constată prin calcul că primele două implicaţii din acest corolar sunt cele din formularea alternativă a criteriului lui Kummer în care $c_n = -1 + n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$

În ce priveşte partea a treia a corolarului, se procedează ca şi până acum: se aleg două serii cu termeni pozitivi diferite ca natură; se determină l şi L din enunţul corolarului; pentru ambele serii se constată că ori $l \leq 1,$ ori $L \geq 1.$ **q.e.d.**

[9]Raabe, Josef, Ludwig (1801–1859), matematician german.

Corolarul 2.12.2. (**Criteriul lui Raabe cu limită**) *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pentru care presupunem că există*

$$\lambda \;=\; \underline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\overline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right). \tag{2.86}$$

Atunci, au loc implicaţiile:

- $\lambda > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie convergentă;*
- $\lambda < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie divergentă;*
- $\lambda = 1 \Longrightarrow$ *nu putem decide asupra naturii seriei.*

Demonstraţie. Implicaţiile din enunţ sunt consecinţe imediate din Corolarul 2.12.1 şi (2.86). **q.e.d.**

Corolarul 2.12.3. (**Criteriu de absolută convergenţă**) *Dacă pentru seria numerică cu termeni nenuli oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right) > 1,$$

atunci seria este absolut convergentă.

Demonstraţie. Rezultă fără dificultate din Corolarul 2.12.3 şi Definiţia 2.9.1. **q.e.d.**

Exemplul 2.12.1. *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{(a+x_1)(2a+x_2)...(na+x_n)},$$

unde $a>0$ *şi* (x_n) *este un şir convergent de numere reale pozitive având limita egală cu* α.

Soluţie. Avem $a_n = \dfrac{n!a^n}{(a+x_1)(2a+x_2)...(na+x_n)}$, $n \geq 1$.

Prin calcul efectiv, găsim

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\frac{\alpha}{a}.$$

Din Corolarul 2.12.2 rezultă că dacă $\alpha > a$, seria considerată este convergentă, iar dacă $\alpha < a$, seria este divergentă.

Pentru $\alpha = a$, în cazul general, nu putem spune nimic despre natura seriei, ea depinzând de modul în care şirul (x_n) converge către α. ■

2.12.3 Criteriul logaritmic al lui Bertrand

Corolarul 2.12.4. (**Criteriul logaritmic al lui Bertrand**[10]) *Fie seria numerică cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi elementele din* $\overline{I\!R}$:

$$\lambda_1 = \underline{\lim}\Big(L^{(p)}(n)\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - L^{(p)}(n+1)\Big);\quad \lambda_2 = \overline{\lim}\Big(L^{(p)}(n)\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - L^{(p)}(n+1)\Big),$$

unde $L^{(p)}(x) = x\cdot\log_a x\cdot\ldots\cdot\log_a^{(p)} x,\ p\geq 1,\ x\in I=(0,\infty)$ *este astfel încât există* $\log_a^{(p)} x = \log_a^{(p-1)}(\log_a x)$, *iar* $\log_a^{(0)} x = \log_a x$.

În aceste ipoteze, au loc următoarele implicaţii:

(i) $\lambda_1 > 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este serie convergentă;*

(ii) $\lambda_2 < 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este serie divergentă.*

Demonstraţie. Se aplică criteriul lui Kummer luând $b_n = L^{(p)}(n),\ n\geq n_0$ şi se ţine cont de Exemplul 2.11.3 în care s–a arătat că seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{L^{(p)}(n)}$ este divergentă. **q.e.d.**

În aplicaţiile practice cel mai adesea se ia $p=1, a=e$ şi deci $b_n = \ln n,\ n\geq 2$.

Exemplul 2.12.2. *Să se studieze natura seriei cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 ... (2n)}\Big)^2$.

Soluţie. Aplicarea criteriului raportului conduce la cazul de dubiu deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2n+1}{2n+2}\Big)^2 = 1.$$

Folosim atunci criteriul lui Raabe. Avem

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \frac{n(4n+3)}{(2n+1)^2},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = 1,$$

aceasta însemnând că şi criteriul lui Raabe conduce la caz de dubiu.

Aplicăm Corolarul 2.12.4, în care $p=1$ şi $a=e$.

În acest caz, şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ corespunzător din Teorema 2.12.1 are termenul general

$$c_n = n(\ln n)\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1)$$

[10] Bertrand, Joseph L. F. (1822–1900), matematician francez.

şi limita acestuia se dovedeşte că este aceeaşi cu limita şirului al cărui termen general este

$$\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n - 1 = -\frac{(n+1)\ln n}{(2n+1)^2}-1.$$

Un calcul elementar arată că ultimul şir are limita -1. Conform Corolarului 2.12.4, seria considerată este divergentă. ■

Observaţia 2.12.1. *Din calculele efectuate în Exemplul 2.12.2 se vede că, în cazul* $p=1, a=e$ *şi* $b_n = n\ln n,\ n\geq 2,$ *criteriul logaritmic al lui Bertrand se poate enunţa într-o altă formă prezentaă în corolarul care urmează.*

Corolarul 2.12.5. *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cu proprietatea că există*

$$\mu = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n.$$

Atunci, au loc afirmaţiile:

- $\mu > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie convergentă;*
- $\mu < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *serie divergentă;*
- $\mu = 1 \Longrightarrow$ *caz de dubiu.*

Demonstraţie. Se foloseşte Corolarul 2.12.4 în cazul particular specificat în Observaţia 2.12.1 şi se ţine cont că $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\to e.$ **q.e.d.**

Corolarul 2.12.6. *Dacă pentru seria de numere reale pozitive* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, există*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ln n,$$

atunci au loc următoarele implicaţii:

$$\begin{aligned}
\gamma > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{este serie convergentă;}\\
\gamma < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{este serie divergentă.}
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Se aplică criteriul general al lui Kummer cu $b_n = \ln n$. **q.e.d.**

2.12.4 Criteriul lui Gauss

Corolarul 2.12.7. (**Criteriul lui Gauss**[11]) *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este o serie numerică cu termeni pozitivi şi raportul* $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ *se poate pune sub forma* $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^{1+\alpha}},\ \forall\, n \geq N,$ *unde* $N \in I\!N^*, \alpha > 0,$ *iar* (θ_n) *este un şir numeric mărginit, atunci au loc următoarele implicaţii:*

$$\lambda > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{este serie convergentă;}$$

$$\lambda = 1 \text{ şi } \mu > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie convergentă;}$$

$$\lambda < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{este serie divergentă;}$$

$$\lambda = 1 \text{ şi } \mu \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie divergentă.}$$

Demonstraţie. Deoarece $\alpha > 0$, iar (θ_n) este şir mărginit, rezultă că $\dfrac{\theta_n}{n^{1+\alpha}} \to 0$. Prin urmare $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to \lambda$ de unde, folosind Corolarul 2.11.7, deducem că dacă $\lambda > 1$ seria este convergentă, iar dacă $\lambda < 1$ ea este divergentă. Dacă $\lambda = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mu + \dfrac{\theta_n}{n^{\alpha}}) = \mu$. Din Corolarul 2.12.2 deducem că în acest caz seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă $\mu > 1$ şi divergentă dacă $\mu < 1$.

A rămas de cercetat cazul $\lambda = 1$ şi $\mu = 1$.

Vom aplica criteriul logaritmic al lui Bertrand şi pentru aceasta, în Corolarul 2.12.4, luăm $p = 1$.

Avem $c_n = n(\ln n)\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = (n+1)\ln\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{\theta_n}{n^{\alpha}} \cdot \ln n$.

Dar, $0 < \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}} = \dfrac{2}{\alpha} \cdot \dfrac{\ln n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^{\alpha}} < \dfrac{2}{\alpha} \cdot \dfrac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^{\alpha}} = \dfrac{2}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\theta_n}{n^{\alpha}} \cdot \ln n = 0$.

Pe de altă parte, $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\ln\dfrac{n}{n+1} = -\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \dfrac{1}{n})^{n+1} = -\ln e = -1$.

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -1 < 0$, de unde rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă. **q.e.d.**

[11] Gauss, Karl Friedrich (1777–1855), matematician, fizician şi astronom german celebru pentru lucrările despre integralele multiple, teoria numerelor, statistică matematică, analiză matematică, geometrie diferenţială, geodezie, geofizică, electrostatică, magnetism şi optică.

Exemplul 2.12.3. *Să se studieze natura seriilor cu termeni pozitivi:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^p\cdot\frac{1}{n^q},\ \ p>0,\ q>0;\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{q(q+1)...(q+n)}\cdot\frac{1}{n^p},\ \ p>0,\ q>0;$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)+...+(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^a},\ \ \alpha>0,\ a\in I\!R.$$

Soluţie. (a) Termenul general al seriei şi raportul a doi termeni consecutivi sunt:

$$a_n=\Big(\frac{1\cdot 3\cdot...(2n-1)}{2\cdot 4...(2n)}\Big)^p\cdot\frac{1}{n^q};\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\Big(\frac{2n+1}{2n+2}\Big)^p\cdot\frac{1}{n^q}.$$

Se vede că $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1,$ deci nu putem decide asupra naturii seriei cu ajutorul criteriului raportului. Folosim criteriul lui Raabe. Avem

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\Big((1+\frac{1}{2n+1})^p(1+\frac{1}{n})^q-1\Big).$$

Pentru a finaliza acest exerciţiu avem nevoie de dezvoltarea după puterile lui x a funcţiei $(1+x)^p$, pe care o vom prezenta fără demonstraţie. Pentru $p>0$ seria de puteri ale lui x

$$1+\frac{p}{1!}\cdot x+\frac{p(p-1)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}\cdot x^n+...,$$

numită *serie binomială*, este absolut convergentă pentru $x\in[-1,+1]$ şi are suma $(1+x)^p$. Prin urmare, pe intervalul $[-1,+1]$ are loc egalitatea [15, p. 143]

$$(1+x)^p=1+\frac{p}{1!}\cdot x+\frac{p(p-1)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{p(p-1)\cdot...\cdot(p-n+1)}{n!}\cdot x^n+... \tag{2.87}$$

Folosind acum seria binomială (2.87) găsim că

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q+\frac{p\cdot n}{2n+1}+\frac{p\cdot q}{2n+1}+\frac{p(p-1)n}{2!(2n+1)^2}+\frac{q(q-1)}{2!n}+..., \tag{2.88}$$

care arată că $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\to q+\frac{p}{2}$. Atunci, după criteriul lui Raabe, avem:

- $q+\frac{p}{2}>1\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serie convergentă;
- $q+\frac{p}{2}<1\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serie divergentă;
- $q+\frac{p}{2}=1\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ se plasează în caz de dubiu.

În ultimul caz se aplică criteriul lui Gauss. Pentru aceasta, în (2.88) facem înlocuirea $p=2(1-q)$ şi aducem raportul $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ la forma din criteriul lui Gauss. Se găseşte:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

unde (θ_n) este un şir mărginit deoarece este convergent. Fiindcă suntem în cazul $\lambda = \mu = 1,$ din Corolarul 2.12.7, deducem că seria este divergentă.

Să remarcăm un alt studiu al seriei de mai sus, mult mai simplu de altfel, care utilizează inegalităţile simple

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in I\!N^*,$$

uşor de demonstrat prin metoda inducţiei matematice şi criteriul de comparaţie de prima speţă (exerciţiu!).

(b) Avem $a_n = \dfrac{n!}{q(q+1)...(q+n)n^p}$, din care găsim

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \Big(1 + \frac{q}{n+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^p =$$

$$\Big(1 + \frac{q}{n+1}\Big)\Big(1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + ... + \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!n^k} + ... + \frac{1}{n^p}\Big) =$$

$$1 + \frac{p}{n} + \frac{q}{n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \frac{pq}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} + ...$$

Însă

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n})^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + ...$$

Prin urmare,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p+q}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

unde (θ_n) este un şir convergent, deci şi mărginit.

Aplicând acum criteriul lui Gauss deducem:

- $p + q > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serie convergentă;
- $p + q \le 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serie divergentă.

(c) Procedând ca la celelalte exemple din acest paragraf, găsim

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a+1-\alpha}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

din care deducem:

- $a > \alpha \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serie convergentă;
- $a < \alpha \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serie divergentă.

■

Observaţia 2.12.2. *Din Teorema 2.4.3, Teorema 2.11.2 şi Teorema 2.11.3 desprindem concluzia că dacă prin criteriul raportului reuşim să determinăm natura seriei cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,$ *atunci acelaşi lucru se realizează şi prin criteriul rădăcinii. Reciproc nu este în general adevărat. În acest sens dăm exemplul următor.*

Exemplul 2.12.4. *Să se studieze natura seriei*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+...$$

şi să se remarce că deşi criteriul rădăcinii este concludent, cel al raportului nu se bucură de aceeaşi proprietate.

Soluţie. Efectuând raportul a doi termeni consecutivi găsim:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n, & \text{dacă } n \text{ este par;}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^n, & \text{dacă } n \text{ este impar,}\end{cases}$$

ceea ce conduce la concluzia

$$\underline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,\qquad \overline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty,$$

care, după Teorema 2.11.2, arată că nu putem să decidem natura seriei.

Dacă însă calculăm $\sqrt[n]{a_n}$, găsim:

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & \text{dacă } n \text{ este par;}\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar,}\end{cases}$$

de unde tragem concluzia că $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{2}<1$ şi după Teorema 2.11.3 rezultă că seria dată este convergentă.■

Observaţia 2.12.3. *Dacă în urma aplicării criteriului radicalului nu putem decide natura unei serii cu termeni pozitivi, atunci şi criteriul raportului conduce la aceeaşi imposibilitate.*

Afirmaţia rezultă imediat din Teorema 2.4.3, Teorema 2.11.2 şi Teorema 2.11.3 . ■

Observaţia 2.12.4. *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. *Dacă şirul numeric* $(\dfrac{a_{n+1}}{a_n})_{n\geq 1}$ *are limita* ℓ, *atunci şi* $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 1}$ *are aceeaşi limită dar este posibil ca* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ *să existe şi* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *să nu existe.*

Într-adevăr, prima parte a acestei observaţii rezultă din Teorema 2.4.3, iar pentru a justifica cea de a doua parte a ei este suficient să considerăm seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, unde $a_{2n}=\alpha^n\beta^n$, $a_{2n+1}=\alpha^{n+1}\beta^n$ şi $0<\alpha<\beta$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\sqrt{\alpha\beta}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{\frac{n+1}{2n+1}}\cdot\beta^{\frac{n}{2n+1}}$, adica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha\cdot\beta$.

Pe de altă parte, $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\alpha$, iar $\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\beta$, deci $\underline{\lim}\,\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$.

De asemenea, avem $\overline{\lim}\,\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\beta$ şi cum $\alpha<\beta$ rezultă că nu există $\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. ■

Observaţia 2.12.5. *Având în vedere Observaţia 2.12.3 putem afirma:* **criteriul radicalului este mai tare (mai eficient) decât criteriul raportului.**

Încheiem acest paragraf cu prezentarea unui ultim criteriu de convergenţă al seriilor cu termeni pozitivi frecvent aplicat în practică.

2.12.5 Criteriul integral al lui Cauchy

Teorema 2.12.2. (**Criteriul integral al lui Cauchy**) *Fie $f:[0,+\infty)\to I\!R$ o funcţie continuă, descrescătoare, nenegativă şi fie $a_n=f(n)$. În aceste ipoteze, seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul numeric $(F_n)_{n\geq 1}$, unde $F_n=\int_1^n f(x)dx$, este mărginit.*

Demonstraţie. Să remarcăm întâi că $F_n=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_{n-1}^n f(x)dx$.

Deoarece f este funcţie descrescătoare, are loc implicaţia

$$k-1\leq x\leq k\Longrightarrow f(k)\leq f(x)\leq f(k-1),\ \forall\, k\in\overline{2,n}.$$

Integrând aceste inegalităţi pe intervalul $[k-1,k]$ şi ţinând cont că $f(k)=a_k$, suntem conduşi la:

$$a_k\leq\int_{k-1}^k f(x)dx\leq a_{k-1},\ \forall\, k\in\overline{2,n}.$$

Sumând membru cu membru aceste inegalităţi după k de la 2 până la n, obţinem:

$$a_2+a_3+...+a_n\leq F_n\leq a_1+a_2+...+a_{n-1},$$

sau

$$s_n-a_1\leq F_n\leq s_{n-1},$$

unde s_n este suma parţială de rang n a seriei din enunţul teoremei.

Dacă şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că $(s_n)_{n\geq 1}$ este şir mărginit şi, din Teorema 2.10.1, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă, avem că $(s_n)_{n\geq 1}$ este şir mărginit deci $(F_n)_{n\geq 1}$ este , de asemenea, mărginit. **q.e.d.**

Observaţia 2.12.6. *Dacă funcţia f satisface ipotezele Teoremei 2.11.2, iar şirul $(F_n)_{n\geq 1}$, $F_n=\int_1^n f(x)dx$, este nemărginit, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, unde $a_n=f(n)$, este divergentă şi reciproc.*

Exemplul 2.12.5. *Să se regăsească rezultatele privind natura seriei armonice generalizate utilizând criteriul integral al lui Cauchy.*

Soluţie. Seria de studiat este $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha},\ \alpha\in I\!R.$

Pentru $\alpha\leq 0$, seria este divergentă pentru că termenul ei general nu tinde la zero.

Pentru $\alpha >, 0$ termenul general, de rang n, al seriei este valoarea în n a funcţiei

$$f : [1, +\infty) \to I\!R, \quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \; x \in [1, +\infty).$$

Funcţia f satisface ipotezele din Teorema 2.12.2 şi ca atare procedăm la calculul lui $F_n = \int_1^n f(x)dx$. Pentru $\alpha = 1$ găsim $F_n = \ln n$. Deoarece şirul $(\ln n)$ este nemărginit, din Observaţia 2.12.6 rezultă că seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Pentru $\alpha > 0$ şi $\alpha \neq 1$, avem $F_n = \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1)$.

Dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $F_n \to +\infty$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Dacă $\alpha > 1$, urmează că $F_n \to \frac{1}{\alpha - 1}$.

Deoarece şirul (F_n) este convergent, (F_n) este mărginit, deci seria armonică generalizată cu $\alpha > 1$ este convergentă. ■

Funcţia $\zeta : (1, +\infty) \to I\!R_+^*$ definită prin $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ se numeşte *funcţia zeta a lui Riemann*. Această funcţie se utilizează la calculul aproximativ al sumelor unor serii numerice [14, pp. 492–501].

Exemplul 2.12.6. *Să se studieze natura seriilor cu termeni pozitivi:*

$$a) \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}; \quad b) \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}; \quad c) \; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln ln n)^\alpha}, \quad \alpha \in I\!R,$$

unde e^x este funcţia exponenţială cu baza numărul e.

Soluţie. Pentru studiul naturii acestor serii, aplicăm criteriul integral al lui Cauchy. La fiecare serie vom preciza funcţia f din enunţul criteriului, calculăm F_n şi studiem natura şirului (F_n).

$a)$ Funcţia

$$f : [1, +\infty) \to I\!R, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$$

satisface ipote4zele din criteriul integral al lui Cauchy. Apoi,

$$F_n = \int_1^n \frac{lnx}{x\sqrt{x}}dx = -2\int_1^n \Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)' \ln x dx = -2\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\Big|_1^n - \int_1^n x^{-\frac{3}{2}}dx\Big) = 2\Big(2 - \frac{\ln n}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}}\Big),$$

de unde rezultă că şirul (F_n) este convergent şi are limita 4, deci este mărginit.

Conform Teoremei 2.12.2, seria de la punctul $a)$ este convergentă.

$b)$ Pentru această serie funcţia f este definită de $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ şi satisface ipotezele Teoremei 2.12.2. Atunci,

$$F_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx = -e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^n = e - e^{\frac{1}{n}} \to e,$$

deci seria este convergentă.

$c)$ Pentru $\alpha \leq 0$, seria este divergentă fiindcă termenul ei general nu tinde la zero.

În cazul $\alpha > 0$, se vede că funcţia f este

$$f : [2, +\infty) \to I\!R_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^\alpha},$$

Observând că f este derivata funcţiei

$$F : [2, +\infty) \to I\!\!R_{+}^{*}, \quad F(x) = \frac{1}{1-\alpha}(\ln\ln x)^{1-\alpha},$$

deducem $F_n = F(n) - F(2)$, deci

$$F_n = \frac{1}{1-\alpha}\Big((\ln\ln n)^{1-\alpha} - (\ln\ln 2)^{1-\alpha}\Big). \tag{2.89}$$

Pentru $\alpha > 1$ şirul (F_n), cu termenul general dat de (2.89), este convergent.

Prin urmare, seria de la punctul $c)$ este convergentă.

În cazul $\alpha < 1$, (F_n) este şir divergent ceea ce implică faptul că este nemărginit. După Observaţia 2.12.6, seria dată este divergentă.

Pentru $\alpha = 1$ funcţia F de mai sus este dată de

$$F(x) = \ln\ln x, \quad x \in [2, +\infty),$$

deci $F_n = F(n) = \ln\ln n - \ln\ln 2.$

Se vede uşor că $F_n \to +\infty$, ceea ce arată că şirul (F_n) este şi de această dată nemărginit.

Prin urmare, seria $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)}$ este divergentă. ■

2.13 Calculul aproximativ al sumei unei serii numerice convergente

Să punem acum în evidenţă un lucru important pentru aplicaţiile practice şi anume acela al calculului aproximativ al sumei s a unei serii numerice convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ care este de fapt o altă consecinţă dedusă din Teorema 2.11.2.

Corolarul 2.13.1. *Fie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie numerică cu termeni pozitivi, convergentă, pentru care există* $0 \leq r < 1$ *astfel încât* $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Atunci, pentru orice* $q \in (r, 1)$ *există* $N \in I\!\!N^*$ *cu proprietatea*

$$0 \leq s - s_n \leq \frac{a_N \cdot q^{n-N+1}}{1-q}, \quad \forall n > N. \tag{2.90}$$

unde s_n *este suma parţială de rang* n *a seriei.*

Demonstraţie. Deoarece $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$ deducem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ luat astfel încât $r + \varepsilon = q < 1$, există $N(\varepsilon) \in I\!\!N^*$ cu proprietatea

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \tag{2.91}$$

de unde găsim $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r + \varepsilon = q \in (r, 1)$, $\forall\, n \geq N$, N fiind primul număr natural de după $N(\varepsilon)$ care satisface (2.91).

Să considerăm $n \in I\!\!N^*$ arbitrar dar superior lui N. Avem

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leq q \cdot q \ldots q \cdot a_N = q^{n-N} \cdot a_N,$$

adică

$$a_n \leq q^{n-N} \cdot a_N, \quad n > N. \tag{2.92}$$

Diferenţa $s - s_n$, adică restul de ordinul n al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, este

$$s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots. \tag{2.93}$$

Folosind (2.92) în (2.93) găsim

$$s - s_n \le a_N \cdot q^{n-N+1} + a_N \cdot q^{n-N+2} + \ldots + a_N \cdot q^{n-N+p} + \ldots, \ \forall\, n > N,$$

din care deducem (2.90). **q.e.d.**

Exemplul 2.13.1. *Să se arate că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{2^n}$ *este absolut convergentă, să se evalueze restul de ordin* n *al seriei şi să se determine suma acesteia cu o aproximaţie de* 10^{-5}.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} = r < 1$, din Corolarul 2.11.7 şi Observaţia 2.11.1 deducem că seria dată este absolut convergentă. Luând q arbitrar între $\dfrac{1}{2}$ şi 1 avem că $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{n}) \le q$ dacă $n \ge \dfrac{1}{2q-1} \ge [\dfrac{1}{2q-1}] = n \in I\!N^*$.

Valoarea absolută a restului de ordin n, R_n, unde $n > N$, este

$$|R_n| = |\sum_{k=n+1} \infty (-1)^k \frac{k}{2^k}| \le \frac{|a_N| q^{n-N+1}}{1-q}.$$

Dacă de exemplu, $q = \dfrac{3}{5}$, atunci $[\dfrac{1}{2q-1}] = 5$ şi $N = 5$. Cum $|a_5| = \dfrac{5}{2^5} = 0,15625$, din evaluarea de mai sus deducem că valoarea absolută a restului de ordin n, cu $n > 5$, satisface limitarea $|R_n| = |s - s_n| \le 0,390625 \cdot (\dfrac{3}{5})^{n-4}$.

Impunem acum condiţia $0,390625 \cdot (\dfrac{3}{5})^{n-4} < 10^{-5}$, din care se găseşte $n \ge 25$.

Aşadar, suma parţială de rang 25, adică s_{25} aproximează suma s a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{2^n}$ cu mai puţin de 10^{-5}, ceea ce este echivalent cu a afirma că adunând primii 25 de termeni ai seriei, valoarea obţinută reprezintă aproximarea lui s cu o eroare mai mică decât 10^{-5}. ■

2.14 Serii numerice remarcabile

În această secţiune urmează să prezentăm un set de serii numerice remarcabile ce vor fi studiate folosind rezultatele stabilite anterior.

Propoziţia 2.14.1. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1}$, *unde* $a \in I\!R$, *este absolut convergentă şi are suma* $\dfrac{1}{(1-a)^2}$, *dacă* $|a| < 1$, *divergentă, dacă* $a \ge 1$, *şi oscilantă pentru* $a \le -1$.

Demonstraţie. Vom folosi Definiţia 2.5.2 şi Definiţia 2.5.7.

Suma parţială de rang n a seriei de studiat, $s_n(a)$, este derivata sumei parţiale de rang $n+1$ a seriei geometrice de raţie a şi primul termen egal cu 1. Ştiind că această sumă parţială este , pentru $a \neq 1$, $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$, deducem că $s_n(a) = \dfrac{1+na^{n+1}-(n+1)a^n}{(1-a)^2}$, $\forall\, a \in I\!R\setminus\{1\}$ şi $\forall\, n \in I\!N^*$.

Dacă $|a| < 1$, avem $na^n \to 0$, deci $s_n(a) \to \dfrac{1}{(1-a)^2}$.

Prin urmare, în cazul $|a| < 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ este convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \dfrac{1}{(1-a)^2}$.

Dacă $a \geq 1$, şirul termenilor seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ nu converge la zero, deci seria dată este divergentă şi are suma $+\infty$.

În sfârşit, dacă $a \leq -1$, şirul sumelor parţiale al seriei are două subşiruri cu limite diferite, deci s_n este şir oscilant, de unde rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ este oscilantă. **q.e.d.**

Corolarul 2.14.1. *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a^n}$ *este convergentă şi are suma* $\dfrac{a}{(1-a)^2}$, *dacă* $|a| > 1$.

Demonstraţie. Luăm $b = \dfrac{1}{a}$. Avem $|b| < 1$. Atunci, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb^n = b\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb^{n-1} = \dfrac{b}{(1-b)^2} = \dfrac{a}{(1-a)^2}$. **q.e.d.**

Propoziţia 2.14.2. *Dacă pentru seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *există un şir convergent de numere reale* $(f(n))$ *şi* $p \in I\!N^*$ *astfel încât* $a_n = f(n+p) - f(n)$, $\forall\, n \in I\!N^*$, *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este serie convergentă şi are suma* $s = p \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f(n) - \sum\limits_{k=1}^{p} f(k)$.

Demonstraţie. Fie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, suma parţială de rang $n \in I\!N^*$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Atunci, pentru orice număr natural $n > p$, avem:

$$s_n = \sum k = 1^n\Big(f(k+p) - f(k)\Big) = \sum_{i=p+1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=p+1}^{n} f(i) + \sum_{i=n+1}^{n+p} f(i) - \Big(\sum_{i=1}^{p} f(i) + \sum_{i=p+1}^{} nf(i)\Big) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+p} f(i) - \sum_{i=1}^{} pf(i) = \sum_{k=1}^{p} f(n+k) - \sum_{k=1}^{p} f(k),$$

de unde, prin trecere la limită, obţinem $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = p \cdot \lim\limits_{j\to\infty} f(j) - \sum\limits_{k=1}^{p} f(k)$.

Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma s. **q.e.d.**

Observaţia 2.14.1. *Dacă în Propoziţia 2.14.2, valoarea lui p este 1, cu notaţia $f(n) = \alpha_n$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ devine seria telescopică introdusă în Definiţia 2.5.8, iar suma sa este $s = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) - f(1)$.*

Exemplul 2.14.1. *Să se arate că seriile următoare sunt convergente şi au sumele indicate alăturat:*

1^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p}\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}, \ \forall\, p \in I\!N^*;$

2^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{k!}, \ \forall\, k \in I\!N^* \setminus \{1\};$

3^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1}, \ \forall\, k \in I\!N^* \setminus \{1\};$

4^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!+n!} = 1;$

5^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2};$

6^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1;$

7^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{1}{2};$

8^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)(p+2)...(p+n)}{(q+1)(q+2)...(q+n)} = \frac{p+1}{q-p-1},$

9^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4};$

10^0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}.$

Soluţie. Tuturor seriilor li se aplică Propoziţia 2.14.2.

De fiecare dată prezentăm doar funcţia f, dedusă din termenul general al seriei corespunzătoare, aranjat într-o formă adecvată.

Aşadar, avem:

1^0. $a_n = \dfrac{1}{p}\cdot\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p}\Big)$ de unde rezultă că $f(x) = -\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{x}, \ \forall\, x \in [1,\infty)$. Observăm că $a_n = f(n+p) - f(n)$;

2^0. $a_n = \dfrac{n!}{(n+k)!} = \dfrac{1}{k-1}\Big(\dfrac{n!}{(n+k-1)!} - \dfrac{(n+1)!}{(n+k)!}\Big) \Longrightarrow f(n) = -\dfrac{1}{k-1}\cdot\dfrac{n!}{(n+k-1)!}$. Se observă că $a_n = f(n+1) - f(n)$;

3^0. Fie $b_n = \dfrac{n!k!}{(n+k)!}$. Observăm că $b_n = k!a_n$, unde a_n este termenul general al seriei de la punctul precedent, convergentă cu suma $\dfrac{1}{k-1}\cdot\dfrac{1}{k!}$.

Conform Teoremei 2.6.1, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este , de asemenea, convergentă şi are suma $k!\cdot\dfrac{1}{k-1}\cdot\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{k-1}$;

4^0. $a_n = \dfrac{1}{(n-1)!+n!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} \Longrightarrow f(n) = -\dfrac{1}{n!}$. Observăm că $a_n = f(n+1) - f(n)$;

5^0. $a_n = \dfrac{n}{(2n+1)!!} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{(2n-1)!!} - \dfrac{1}{(2n+1)!!}\Big)$. Luând $f(n) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(2n-1)!!}$, atunci $a_n = f(n+1) - f(n)$;

6^0. $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = f(n+1) - f(n)$, unde $f(n) = -\dfrac{1}{n!}$;

$7^{\cdot}$ $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n=2)!!} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$, de unde rezultă $f(n) = -\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

8^0. $a_n = \dfrac{(p+1)(p+2)...(p+n)}{(q+1)(q+2)...(q+n)} = \dfrac{q!}{p!}\cdot\dfrac{(p+n)!}{(q+n)!} = f(n+1) - f(n)$, unde

$$f(n) = \frac{1}{p-q+1}\cdot\frac{q!}{p!}\cdot\frac{(p+n)!}{(q+n)!};$$

9^0. $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1} - \operatorname{arctg}\dfrac{n-1}{n}$, deci $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x}$, $x \in [1,+\infty)$;

10^0. $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1} = f(n+1) - f(n)$, unde $f(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x \in [1,+\infty)$. ■

Propoziţia 2.14.3. (**Leibniz**) *Seria armonică alternată* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ *este semi–convergentă şi are suma* $\ln 2$.

Demonstraţie. Faptul că seria armonică alternată este semi–convergentă s–a dovedit în Exemplul 2.8.1 şi Exemplul 2.5.3. Rămâne să determinăm suma s a seriei. Fie atunci s_n suma parţială de rang n a seriei. Şirul (s_n) este convergent şi are limita s. Orice subşir al şirului (s_n) are aceeaşi limită s. În particular, şirul (s_{2n}) are limita egală cu s. Să remarcăm acum că are loc identitatea evidentă

$$s_{2n} = a_{2n} - a_n + \ln 2,$$

unde a_n este termenul general al şirului din (2.9) care are ca limită constanta c a lui Euler. Trecând la limită în ultima egalitate şi ţinând cont de cele spuse mai sus, rezultă ca $s = \ln 2$. **q.e.d.**

Propoziţia 2.14.4. (**Euler**) *Seria* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big)$ *este convergentă şi are suma egală cu constanta* c *a lui Euler.*

Demonstraţie. Fie $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\Big)$. Evident avem $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot...\cdot\frac{n+1}{n}\Big) = \ln(n+1)$, deci $s_n = a_n - \ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$, unde a_n este termenul general al şirului ce are drept limită constanta c a lui Euler.

Din ultima egalitate, după trecere la limită, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$. **q.e.d.**

Propoziţia 2.14.5. (**Euler**) *Seria* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ *este convergentă şi are suma egală cu numă-rul* e.

Demonstraţie. Fie $s_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ o sumă parţială a seriei date şi $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ termenul general al şirului studiat în Exemplul 2.1.1 care am văzut că este convergent către numărul e. Dar şirul (s_n) este monoton strict crescător, deci are limită finită, sau egală cu $+\infty$. Notăm această limită cu e'. Aplicând formula de ridicare la putere a unui binom, deducem că a_n se scrie în forma

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{2!} + ... + \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdot...\cdot\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)\frac{1}{n!}. \tag{2.94}$$

Având în vedere că pentru $k \in \overline{1, n-1}$, avem $1 - \dfrac{k}{n} < 1$, vedem că $a_n < s_n$, de unde, prin trecere la limită, obţinem

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} s_n = e'. \tag{2.95}$$

Notăm cu $a_n(k)$ suma primilor k termeni ai expresiei (2.94) a termenului general a_n al seriei. Avem evident $a_n(k) \le a_n$, de unde prin trecere la limită, obţinem

$$s_k = \lim_{n\to\infty} a_n(k) \le \lim_{n\to\infty} a_n = e. \tag{2.96}$$

Trecând la limită în (2.96) pentru $k \to \infty$, deducem

$$e' = \lim_{k\to\infty} s_k \le e. \tag{2.97}$$

Din (2.95) şi (2.97) rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este convergentă şi are suma e. **q.e.d.**

Corolarul 2.14.2. *Pentru orice $n \in I\!N^*$ au loc inegalităţile*

$$0 < e - \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\Big) < \frac{1}{n!n}. \tag{2.98}$$

Demonstraţie. Fie $s_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$. Se vede că numărul pozitiv $e - s_n$ admite majorarea

$$e - s_n < \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ...\Big). \tag{2.99}$$

Seria din membrul drept al lui (2.99) este o serie geometrică cu raţia subunitară şi pozitivă $q = \dfrac{1}{n+1}$, deci convergentă şi are suma $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{n+1}{n}$. Folosind aceste rezultate în (2.99) deducem (2.98). **q.e.d.**

Corolarul 2.14.3. *Numărul e este iraţional.*

Demonstraţie. Din Corolarul 2.14.2 rezultă că $\forall\, n \in I\!N^*$, $\exists\, \theta_n \in (0,1)$ astfel încât

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}. \tag{2.100}$$

Presupunem e raţional, deci $\exists\, p, q \in I\!N^*$, prime între ele, cu $p/q = e$. Înlocuind în (2.100) pe e cu p/q, unde $n = q$, deducem $\exists\, \theta = \theta(q) \in (0,1)$ astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + \frac{\theta(q)}{q!q},$$

deci $\theta(q) = q!p - q!q\Big(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{q!}\Big)$, de unde rezultă că $\theta(q)$ este număr întreg, ceea ce este absurd. Prin urmare, e este iraţional. **q.e.d.**

Observaţia 2.14.2. *Utilizând inegalităţile (2.98), putem calcula valoarea aproximativă a numărului e.*

Exemplul 2.14.2. *Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului e cu o eroare mai mică cel mult egală cu 10^{-7}, deci cu 6 zecimale exacte.*

Soluţie. Admitem drept valoare aproximativă a numărulului e o sumă parţială s_n a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ şi anume acea diferenţă pentru care $e - s_n < 10^{-7}$. Folosim în acest scop (2.98). Prin urmare, trebuie să rezolvăm inecuaţia $\dfrac{1}{n!n} < 10^{-7}$. Se găseşte că $n \geq 10$ ceea ce înseamnă

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{10!}, \tag{2.101}$$

eroarea fiind mai mică decât 10^{-7}. Efectuând calculele în (2.101), găsim că valoarea aproximativă a numărului e, cu 6 zecimale exacte, este $2,718083$. ■

Exemplul 2.14.3. *Să se arate că seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}$ *sunt convergente şi să se determine sumele lor.*

Soluţie. Seriile sunt convergente în baza criteriului raportului cu limită.

Deoarece $n^2 = n(n-1) + n,\ \forall\, n \in I\!N^*$, avem $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!} + \dfrac{1}{(n-1)!},\ \forall\, n \geq 2$, deci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{4}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 3 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 3 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 2 + 2e.$$

Prin acelaşi procedeu vom calcula şi suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}$. Pentru aceasta să observăm că $\forall\, n \in I\!N^*,\ n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$. Folosind această identitate, deducem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!} = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^3}{n!} = 5 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 5e.$$

2.15 Produsul după Cauchy al două serii numerice

Fie şirurile de numere reale $(u_n)_{n\geq 0}$ şi $(v_n)_{n\geq 0}$.

Definiţia 2.15.1. *Şirul numeric $(w_n)_{n\geq 0}$, unde*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + ... + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}, \tag{2.102}$$

se numeşte **convoluţia** *şirurilor $(u_n)_{n\geq 0}$ şi $(v_n)_{n\geq 0}$.*

Definiţia 2.15.2. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$*, a cărei termen general* w_n *este definit de (2.102), se numeşte* **seria produs** *a seriilor* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$*, sau* **produsul în sens Cauchy** *al celor două serii.*

Teorema 2.15.1. *Dacă seriile numerice cu termeni oarecare* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *sunt absolut convergente, atunci seria produs* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *este absolut convergentă şi suma sa este egală cu produsul sumelor celor două serii.*

Demonstraţie. Trebuie studiată natura şirului cu termenul general $\sum_{k=0}^{n} |w_k|$. Un calcul simplu arată că

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| \le \sum_{k=0}^{n} |u_k| \cdot \sum_{k=0}^{n} |v_k|. \tag{2.103}$$

Deoarece seriile $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ sunt convergente, şirurile sumelor parţiale ale lor sunt convergente, deci şi mărginite. Prin urmare există $M > 0$ şi $L > 0$ astfel încât

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k| \le M \text{ şi } \sum_{k=0}^{n} |v_n| \le L, \ \forall\, n \in I\!N. \tag{2.104}$$

Din (2.103) şi (2.104), deducem

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| \le M \cdot L, \quad \forall\, n \in I\!N. \tag{2.105}$$

Inegalitatea (2.105) arată că şirul sumelor parţiale al seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ este mărginit şi, după Teorema 2.10.1, seria $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ este convergentă ceea ce arată că seria $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ este absolut convergentă.

Rămâne să mai arătăm că suma seriei produs $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ este egală cu produsul sumelor seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Din criteriul general al lui Cauchy aplicat seriilor convergente $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ avem că $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N^*$ astfel încât $\forall\, n \ge [\frac{1}{2} N(\varepsilon)]$

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2V}, \quad \forall\, p \in I\!N^* \tag{2.106}$$

şi

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + ... + |v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2U}, \quad \forall\, p \in I\!N^*, \tag{2.107}$$

unde

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|, \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|. \tag{2.108}$$

Pe de altă parte, putem arăta că

$$\sum_{k=0}^{n} w_k - \Big(\sum_{j=0}^{n} u_j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n} v_l\Big) = \sum_{j+l>n,\, 0\le j,l\le n} u_j v_l \le \sum_{j+l>n,\, 0\le j,l\le n} |u_j||v_l|. \tag{2.109}$$

Dacă $n > N(\varepsilon)$ şi $j + l > n$, cel puţin unul din indicii j şi l este superior lui $\dfrac{1}{2}N(\varepsilon)$, deci

$$\begin{aligned}\sum_{j+l>n,\, 0\le j,l\le n} |u_j||v_l| \le \Big(|u_{[\frac{1}{2}N(\varepsilon)]+1}| + \ldots + |u_n|\Big)\cdot\Big(|v_0| + |v_1| + \ldots + |v_n|\Big) + \\ +\Big(|v_{[\frac{1}{2}N(\varepsilon)]+1}| + \ldots + |v_n|\Big)\cdot\Big(|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|\Big).\end{aligned} \tag{2.110}$$

Folosind acum (2.106) − (2.108), din (2.110), obţinem

$$\sum_{j+l>n,\, 0\le j,l\le n} |u_j||v_l| < \frac{\varepsilon}{2V}\cdot V + \frac{\varepsilon}{2U}\cdot U = \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon). \tag{2.111}$$

Din (2.109) şi (2.111), deducem $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} w_k - \Big(\sum\limits_{j=0}^{n} u_j\Big)\Big(\sum\limits_{l=0}^{n} v_l\Big)\Big) = 0$, din care obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} w_k = \Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} u_j\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n} v_l\Big). \tag{2.112}$$

Relaţia (2.112) demonstrează ultima parte a teoremei. **q.e.d.**

Observaţia 2.15.1. *În definiţia seriei produs am folosit o notaţie diferită pentru termenii seriilor, în care indicele de sumare porneşte de la zero. Această notaţie este mai convenabilă în definiţia convoluţiei şi nu modifică nimic din teoria generală dezvoltată anterior.*

Teorema 2.15.1 rămâne valabilă şi în cazul când una din seriile factor este absolut convergentă.

Teorema 2.15.2. (**Mertens**[12]) *Produsul după Cauchy al seriilor convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, dintre care cel puţin una este absolut convergentă, este serie convergentă cu suma egală cu produsul sumelor seriilor factor.*

Definiţia 2.15.3. *Se numeşte* **câtul în sens Cauchy** *al seriilor numerice $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, în această ordine, seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ cu proprietatea că produsul după Cauchy al acesteia cu cea de a doua serie este prima serie, adica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n\Big)\cdot\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\Big)$. Se obişnuieşte să se scrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n}$.*

[12] Mertens, Franz (1840 − 1927), matematician german.

Capitolul 3

Elemente de teoria spaţiilor metrice

3.1 Definiţia spaţiului metric. Proprietăţi. Exemple

Fie X o mulţime nevidă oarecare ale cărei elemente sunt notate cu litere mici ale alfabetului latin, eventual prevăzute cu indici, şi

$$X \times X = \{(x,y) : x \in X, y \in X\},$$

produsul cartezian al mulţimii X cu ea însăşi.

Definiţia 3.1.1. *Aplicaţia, funcţia,* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *se numeşte* **distanţă**, *sau* **metrică** *pe* X, *dacă sunt îndeplinite următoarele proprietăţi numite şi axiome:*

$$\begin{array}{ll} (M_1) & d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y; \\ (M_2) & d(x,y) = d(y,x), \ \ \forall\,(x,y) \in X \times X \\ & (\textit{proprietatea de } \textbf{simetrie} \textit{ a distanţei}); \\ (M_3) & d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z), \ \ \forall\,(x,y,z) \in X \times X \times X \\ & (\textbf{inegalitatea triunghiului}). \end{array}$$

Observaţia 3.1.1. *Metrica* d *pe mulţimea nevidă* X *este o funcţie reală de două variabile definită pe produsul cartezian* $X^2 = X \times X$. *Mai mult, mulţimea valorilor unei metrici* d *pe mulţimea nevidă* X *este în* $\mathbb{R}_+$.

Într-adevăr, luând $z = x$ în (M_3) şi ţinând cont de axiomele (M_1) şi (M_2), obţinem $0 \le 2d(x,y)$. Dacă , în plus, $x \ne y$, din $d(x,y) \ge 0$ şi axioma (M_1) rezultă evident $d(x,y) > 0$. ■

Observaţia 3.1.2. *Deoarece* $d(x,y) \ge 0$, *oricare ar fi punctele* $x, y \in X$, *unde* (X,d) *este un spaţiu metric, axiomei* M_1 *din Definiţia 3.1.1 i se spune* ***nenegativitate***.

Definiţia 3.1.2. *Fie* d *o distanţă pe mulţimea nevidă* X.

(i) *Numărul real nenegativ* $d(x,y)$ *se numeşte* **distanţa** *dintre* x *şi* y.

(ii) *Perechea* (X,d) *se numeşte* **spaţiu metric**.

(iii) *Elementele unui spaţiu metric se numesc* **puncte**.

Definiţia 3.1.3. *Se numeşte* ***subspaţiu metric*** *al unui spaţiu metric* (X, d) *perechea* (X', d'), *unde* X' *este o submulţime nevidă a lui* X, *iar* d' *este restricţia lui* d *la mulţimea* $X' \times X'$.

Observaţia 3.1.3. *Dacă* $A \subset X$ *este o submulţime nevidă a spaţiului metric* (X, d), *atunci cuplul* $(A, d_{/A\times A})$ *este spaţiu metric.*

Într-adevăr, restricţia funcţiei $d \in \mathcal{F}(X)$ la mulţimea $A \times A$

$$d_{/A\times A} : A \times A \to I\!R, \quad d_{/A\times A}(x, y) = d(x, y), \quad \forall\, (x, y) \in A \times A,$$

satisface axiomele $(M_1) - (M_3)$ din Definiţia 3.1.1, deci $d_{/A\times A}$ este o metrică pe mulţimea A. Atunci, după Definiţia 3.1.2, perechea $(A, d_{/A\times A})$ este spaţiu metric. ■

Observaţia 3.1.4. *Pe o mulţime nevidă* X *pot fi definite mai multe distanţe. Dacă* d_1 *şi* d_2 *sunt două metrici diferite pe* X, *atunci spaţiile metrice* (X, d_1) *şi* (X, d_2) *sunt distincte.*

Propoziţia 3.1.1. *Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric şi*

$$x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n, \quad x, \quad y, \quad z$$

sunt puncte arbitrare din X, *atunci au loc relaţiile:*

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \quad ... \quad + d(x_{n-1}, x_n); \tag{3.1}$$

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \quad \le \quad d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4); \tag{3.2}$$

$$|d(x, z) - d(y, z)| \quad \le \quad d(x, y). \tag{3.3}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (3.1) este o generalizare a inegalităţii triunghiului (M_3).

Pentru $n = 2$, (3.1) este banală, iar pentru $n = 3$ este chiar inegalitatea triunghiulară (M_3). Pentru $n \ge 2$, demonstraţia se face prin inducţie matematică.

Să aplicăm acum inegalitatea (3.1) punctelor x_1, x_2, x_3, x_4 din X. Avem

$$d(x_1, x_2) \le d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_2),$$

de unde, ţinând cont şi de (M_3), deducem $d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \le d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)$.

Schimbând rolurile perechilor de puncte (x_1, x_2) şi (x_3, x_4) şi ţinând cont iarăşi de (M_2), din ultima inegalitate găsim

$$d(x_3, x_4) - d(x_1, x_2) \le d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

Ultimele două inegalităţi conduc la (3.2).

Inegalitatea (3.3) este consecinţă imediată a inegalităţii (3.2).

Într-adevăr, dacă în (3.2) luăm $x = x_1$, $y = x_3$ şi $x_2 = x_4 = z$ şi ţinem cont de axioma (M_1), obţinem (3.3).

q.e.d.

Observaţia 3.1.5. *Dacă X reprezentă mulţimea punctelor unui plan şi dacă, date două puncte x şi y ale acestui plan, prin $d(x,y)$ înţelegem lungimea segmentului de dreaptă care are cele două puncte ca extremităţi, atunci (M_3) împreună cu (3.3) exprimă un adevăr bine cunoscut din geometria Euclidiană şi anume:* **lungimea oricărei laturi a unui triunghi este cel puţin egală cu valoarea absolută a diferenţei celorlalte două laturi şi cel mult egală cu suma acestora**. *De asemenea, şi (3.2) poate fi interpretată geometric:* **într-un patrulater oarecare din plan, valoarea absolută a diferenţei lungimilor a două din laturi este cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două**.

Din motivul expus în partea a doua din Obsrvaţia 3.1.5, inegalitatea (3.2) se numeşte *inegaliatatea patrulaterului.*

Definiţia 3.1.4. *Fie (X,d) un spaţiu metric şi A o submulţime nevidă a lui X. Se numeşte* **diametrul** *mulţimii A elementul*

$$diam\ A \in \overline{I\!R}, \qquad diam\ A = \sup\{d(x,y):\ x \in A,\ y \in A\}.$$

Prin definiţie, mulţimea vidă $\emptyset$ are diametrul egal cu zero, deci $diam\ \emptyset = 0$.

Propoziţia 3.1.2. *Fie A şi B submulţimi ale spaţiului metric (X,d). Dacă $A \subset B$, atunci $\text{diam}\ A \leq \text{diam}\ B$.*

Demonstraţie. Afirmaţia de mai sus rezultă imediat din Definiţia 3.1.4 şi Propoziţia 1.6.2. **q.e.d.**

Definiţia 3.1.5. *Submulţimea A din spaţiul metric (X,d) se numeşte* **mărginită**, *respectiv* **nemărginită**, *dacă $diam\,A < +\infty$, respectiv $diam\,A = +\infty$.*

Observaţia 3.1.6. *Orice submulţime a unei mulţimi mărginite este mărginită.*

Într-adevăr, afirmaţia rezultă din Definiţia 3.1.5 şi Propoziţia 3.1.2. ■

Definiţia 3.1.6. *Se numeşte* **distanţa** *dintre submulţimile nevide A şi B ale spaţiului metric (X,d) numărul nenegativ $dist\,(B,A) \in [0,+\infty]$, $dist\,(B,A) = \inf\{d(x,y) : x \in B, y \in A\}$. Dacă una din mulţimile A şi B este mulţimea vidă, convenim să spunem ca $dist\,(B,A) = +\infty$.*

Avem evident $\text{dist}\,(B,A) = \text{dist}\,(A,B)$.

Dacă $B = \{x_o\}$, adică B are un singur element, atunci în loc de $\text{dist}\,(B,A)$ scriem $\text{dist}\,(x_0,A)$, deci

$$\text{dist}\,(x_0,A) = \inf\{d(x_0,x) : x \in A\}.$$

Dacă A este mulţime nevidă, atunci $0 \leq \text{dist}\,(x_0,A) < +\infty$, iar dacă $A = \emptyset$ convenim ca $\text{dist}\,(x_0,\emptyset) = +\infty$.

Numărul nenegativ $\text{dist}\,(x_0,A)$ poate fi numit în acelaşi timp şi *distanţa* de la punctul x_0 la submulţimea de puncte A.

Propoziţia 3.1.3. *Fie mulţimile*

$$\{x_0, x_1, x_2\} \subset X, \quad A \subset X, \quad B \subset X$$

şi spaţiul metric (X, d). *Atunci, au loc următoarele afirmaţii:*

$$0 \leq \operatorname{dist}(x_0, A) \leq +\infty;$$
$$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{dist}(x_0, B) \leq \operatorname{dist}(x_0, A);$$
$$\operatorname{dist}(x_0, \{x\}) = d(x_0, x);$$
$$\operatorname{dist}(x_0, A \cup B) = \min\{\operatorname{dist}(x_0, A), \operatorname{dist}(x_0, B)\};$$
$$\operatorname{dist}(x_0, A) = 0 \Longleftrightarrow x_0 \in A;$$
$$A \neq \emptyset \Longrightarrow |\operatorname{dist}(x_1, A) - \operatorname{dist}(x_2, A)| \leq d(x_1, x_2).$$

Demonstraţie. Primele cinci afirmaţii sunt evidente dacă avem în vedere Definiţia 3.1.7.
Să demonstrăm ultima afirmaţie. În acest sens, fie $x \in A$, arbitrar.
Din inegalitatea evidentă $\operatorname{dist}(x_1, A) \leq d(x-1, x)$ şi axioma (M_3), deducem

$$\operatorname{dist}(x_1, A) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, A).$$

Schimbând rolurile lui x_1 şi x_2 în această ultimă inegalitate şi folosind (M_2), obţinem

$$\operatorname{dist}(x_2, A) \leq d(x_1, x_2) + \operatorname{dist}(x_1, A).$$

Ultimele două inegalităţi demonstrează şi cea de–a cincea afirmaţie de mai sus. **q.e.d.**

Definiţia 3.1.7. *Fie* $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ *şi* (X, d) *spaţiu metric. se numeşte* **bilă deschisă**, *sau simplu* **bilă**, *cu centrul în* x_0 *şi rază egală cu* ε, *submulţimea* $B(x_0, \varepsilon)$ *a lui* X *definită prin*

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Propoziţia 3.1.4. *Orice bilă şi, în consecinţă, orice submulţime a unei bile sunt mulţimi mărginite.*
Reciproc, orice mulţime mărginită A *este o submulţime a unei bile având centru într-un punct arbitrar* x_0, *iar raza* ε *orice număr mai mare decât* $\mathit{dist}(x_0, A) + \mathit{diam}\, A$.

Demonstraţie. Dacă $x_1, x_2 \in B(x_0, \varepsilon)$, atunci

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_0) + d(x_2, x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

care, împreună cu Definiţia 3.1.4, dovedeşte că $\operatorname{diam} B(x_0, \varepsilon) \leq 2\varepsilon$. Prin urmare, după Definiţia 3.1.5, mulţimea $B(x_0, \varepsilon)$ este mărginită.
Faptul că orice submulţime a unei bile este mulţime mărginită rezultă din Observaţia 3.1.6.

Fie acum x şi y două puncte arbitrare din mulţimea mărginită $A \subset X$ şi $x_0 \in X$, arbitrar, dar fixat. Deoarece pentru orice $x \in A$ avem

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) \leq \operatorname{diam} A + d(y, x_0),$$

rezultă că

$$d(x, x_0) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{dist}(x_0, A) < \varepsilon,$$

ceea ce arată că $A \subset B(x_0, \varepsilon)$, unde ε este orice număr mai mare decât $\operatorname{diam} A + \operatorname{dist}(x_0, A)$. **q.e.d.**

Definiţia 3.1.8. *Fie (X, d) spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Prin* **bilă închisă** *de rază ε şi centru x_0, înţelegem mulţimea $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset X$ definită de*

$$\overline{B(x_0, \varepsilon)} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Propoziţia 3.1.5. *Într-un spaţiu metric (X, d) au loc următoarele afirmaţii:*

$x \in B(x_0, \varepsilon) \Longleftrightarrow d(x, x_0) < \varepsilon$; $\quad x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)} \Longleftrightarrow d(x, x_0) \leq \varepsilon$;

$B(x_0, \varepsilon) \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)}$; $\quad 0 < \varepsilon' < \varepsilon \Longrightarrow B(x_0, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon)$.

Demonstraţie. Aceste afirmaţii sunt evidente în baza definiţiilor de mai sus. **q.e.d.**

Definiţia 3.1.9. *Două metrici d_1 şi d_2 pe aceeaşi mulţime X se numesc* **metrici echivalente**, *şi scriem $d_1 \sim d_2$, dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon),\ \forall\, x_0 \in X$$

şi $\forall\, \lambda > 0\ \exists\, \mu(\lambda) > 0$ astfel încât

$$B_{d_2}(x_0, \mu(\lambda)) \subset B_{d_1}(x_0, \lambda),\ \forall\, x_0 \in X.$$

Observaţia 3.1.7. *Din definiţia metricilor echivalente şi proprietăţile operaţiilor cu mulţimi, rezultă că relaţia $\sim$ în mulţimea metricilor echivalente pe mulţimea nevidă X este o relaţie binară reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci este o relaţie de echivalenţă în mulţimea metricilor pe mulţimea X.*

Propoziţia 3.1.6. *O condiţie suficientă ca două metrici d_1 şi d_2 pe aceeaşi mulţime nevidă X să fie echivalente este ca să existe constantele $0 < a \leq b$ astfel încât*

$$a d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b\, d_1(x, y), \quad \forall\, (x, y) \in X \times X. \tag{3.4}$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{b}$, din partea a doua a inegalităţii (3.4) şi $x \in B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$ rezultă $d_2(x_0, x) < \varepsilon$, adică $x \in B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$, de unde tragem concluzia că $B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$.

Pentru a obţine cea de a doua incluziune din Definiţia 3.1.9 este destul să luăm $\mu(\lambda) = a\lambda$. Într-adevăr, dacă $x \in B_{d_2}(x_0, \mu(\lambda))$, atunci $d_1(x_0, x) \leq \dfrac{1}{a} d_2(x_0, x) < a\mu(\lambda) = \lambda$, adică $x \in B_{d_1}(x_0, \lambda)$. **q.e.d.**

Observaţia 3.1.8. *Inegalităţile (3.4) reprezintă doar condiţii suficiente pentru ca două metrici d_1 şi d_2 pe aceeaşi mulţime nevidă X să fie echivalente. Se pot da exemple de metrici echivalente pentru care dubla inegalitate din (3.4) să nu aibă loc.*

Într-adevăr, să considerăm $X = I\!\!R$ şi aplicaţiile:

$$d_1 : I\!\!R \times I\!\!R \to I\!\!R, \quad d_1(x, y) = |x - y|, \quad \forall\, x \in I\!\!R,\ \forall\, y \in I\!\!R;$$

$$d_2 : I\!\!R \times I\!\!R \to I\!\!R, \quad d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad \forall\, x \in I\!\!R,\ \forall\, y \in I\!\!R.$$

Este simplu de demonstrat că aceste două aplicaţii sunt metrici pe $I\!\!R$. În acest sens, relaţiile (1.85) – (1.88) şi Definiţia 3.1.1 rezolvă problema în privinţa lui d_1.

În ceea ce priveşte aplicaţia d_2, se arată relativ uşor că satisface axiomele $(M_1) - (M_3)$ din Definiţia 3.1.1. Evident

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y), \quad \forall\, x,\, y \in I\!\!R,$$

astfel că pentru a avea incluziunea $B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$ putem lua $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Pe de altă parte, se observă că

$$d_2(x, y) < 1, \quad \forall\, x,\, y \in I\!\!R,$$

ceea ce conduce la afirmaţia evidentă

$$B_{d_2}(x_0, \rho) = I\!\!R, \quad \forall\, x_0 \in I\!\!R, \quad \forall\, \rho \geq 1.$$

Dacă $0 < \rho < 1$, din $x \in B_{d_2}(x_0, \rho)$ rezultă $\dfrac{|x - x_0|}{1 + |x - x_0|} < \rho$, din care deducem $|x - x_0| < \dfrac{\rho}{1 - \rho}$, deci $x \in B_{d_1}(x_0, \dfrac{\rho}{1 - \rho})$.

În sfârşit, pentru a avea satisfăcută şi cea de a doua incluziune din Definiţia 3.1.9 este destul să luăm $\mu(\lambda)$, astfel încât $\dfrac{\mu(\lambda)}{1 - \mu(\lambda)} < \lambda$, aceasta însemnând că $\mu(\lambda)$ poate fi orice număr pozitiv subunitar cu proprietatea $\mu(\lambda) < \dfrac{\lambda}{1 + \lambda}$.

Prin urmare, am demonstrat că cele două metrici sunt echivalente.

Deşi aceste metrici sunt echivalente, prima din dubla inegalitate (3.4) nu are loc căci, în caz contrar, având în vedere că $d_2(x, y) < 1$, $\forall\, x,\, y \in I\!\!R$, au loc relaţiile

$$d_1(x, y) \leq \frac{1}{a} d_2(x, y) < \frac{1}{a}, \ \forall\, x,\, y \in I\!\!R.$$

De aici, rezultă inegalitatea

$$d_1(x, y) < \frac{1}{a}, \ \forall\, (x, y) \in I\!\!R \times I\!\!R,$$

care este falsă. ■

Observaţia 3.1.9. *Dacă dubla inegalitate (3.4) are loc, atunci o formă echivalentă a acestora este*

$$\alpha d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta d_2(x,y), \quad (x,y) \in X \times X,$$

unde $\alpha = \dfrac{1}{b}$, $\beta = \dfrac{1}{a}$, *iar* a *şi* b *sunt numerele pozitive din (3.4).*

Definiţia 3.1.10. *Se numeşte* **vecinătate** *a punctului* x_0 *din spaţiul metric* (X,d)*, o submulţime* V *a lui* X *care include o bilă deschisă cu centrul în* x_0 *şi rază* $r > 0$.

Observaţia 3.1.10. *Mulţimea* $V \subset X$ *este vecinătate a punctului* x_0 *din spaţiul metric* (X,d) *dacă* $\exists \varepsilon > 0$ *astfel încât* $B(x_0,\varepsilon) \subset V$.

O vecinătate a lui x_0 se notează cu $V(x_0)$, sau cu V_{x_0}.
Mulţimea vecinătăţilor punctului x_0 se numeşte *sistemul de vecinătăţi* a lui x_0 şi se notează cu $\mathcal{V}(x_0)$.

Teorema 3.1.1. *Dacă* (X,d) *este un spaţiu metric şi* $x_0 \in X$ *este un punct arbitrar, atunci au loc proprietatele:*

$$\begin{aligned}
&(V_1) \quad V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ şi } \forall\, U \subset X \text{ astfel încât} V \subset U \Longrightarrow U \in \mathcal{V}(x_0);\\
&(V_2) \quad \forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0) \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0);\\
&(V_3) \quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x_0) \Longrightarrow x_0 \in V;\\
&(V_4) \quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x_0)\, \exists\, W \in \mathcal{V}(x_0),\ W \subset V, \quad \text{astfel încât}\\
&\qquad\quad \forall\, y \in W \Longrightarrow V \in \mathcal{V}(y).
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Să arătăm (V_1).
Fie $V \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $V \subset U$. Din Definiţia 3.1.10 şi Observaţia 3.1.10 rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x_0,\varepsilon) \subset V$. Cum avem şi $V \subset U$, deducem că $B(x_0,\varepsilon) \subset U$, ceea ce implică $U \in \mathcal{V}(x_0)$.
Demonstrăm (V_2).
Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$, arbitrare. Atunci, există bilele deschise $B(x_0,\varepsilon_1) \subset V_1$ şi $B(x_0,\varepsilon_2) \subset V_2$.
Bila deschisă $B(x_0,\varepsilon)$, unde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, este inclusă atât în V_1 cât şi în V_2. Prin urmare, $B(x_0,\varepsilon) \subset V_1 \cap V_2$, ceea ce înseamnă că $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$.
Din Definiţia 3.1.10 se vede imediat că (V_3) este îndeplinită.
Pentru a demonstra (V_4), fie $\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0)$. Atunci,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ astfel încât} B(x_0,\varepsilon) \subset V.$$

Este suficient să considerăm drept W chiar pe $B(x_0,\varepsilon)$.
Dacă $y \in W$, întrucât $d(y,x_0) < \varepsilon$, luând ε' astfel încât $0 < \varepsilon' < \varepsilon - d(x_0,y)$, se observă că $B(y,\varepsilon') \subset B(x_0,\varepsilon) \subset V$, care, după Observaţia 3.1.10, conduce la concluzia dorită. **q.e.d.**

Propoziţia 3.1.7. *Oricare bilă deschisă dintr-un spaţiu metric este vecinătate pentru orice punct al ei.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $B(x_0, \varepsilon)$ este o astfel de bilă deschisă şi $y \in B(x_0, \varepsilon)$, atunci bila deschisă $B(y, \varepsilon')$, având raza astfel încât $0 < \varepsilon' < d(x_0, y)$, are proprietatea: $B(y, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon)$ care, după Definiţia 3.1.10 şi Observaţia 3.1.10, arată că $B(x_0, \varepsilon) \in \mathcal{V}(y)$. **q.e.d.**

O noţiune deosebit de importantă pentru analiza matematică este şi aceea de *sistem fundamental de vecinătăţi*, sau *bază locală*, noţiune care permite ca într-o serie de proprietăţi în care intervin vecinătăţile unui punct x_0 să se considere elementele unei subfamilii a lui $\mathcal{V}(x_0)$, subfamilie care are mai puţine elemente, fără ca proprietăţile considerate sa–şi schimbe conţinutul.

Definiţia 3.1.11. *Fie $x_0 \in (X, d)$ şi $\mathcal{V}(x_0)$ sistemul vecinătăţilor punctului x_0. Se spune că o familie $\mathcal{U}(x_0)$ de părţi ale lui X formează un* **sistem fundamental de vecinătăţi***, sau o* **bază locală** *pentru punctul x_0, dacă satisface proprietăţile:*

- $\mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$;
- $\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0)\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ *astfel încât* $U \subset V$.

Observaţia 3.1.11. *Mulţimea bilelor deschise cu centrul într–un punct x_0 formează un sistem fundamental de vecinătăţi al lui x_0.*

Într-adevăr, după Propoziţia 3.1.7, familia $\mathcal{U}(x_0) = \Big\{B(x_0, \varepsilon) : \varepsilon \in I\!R^*_+\Big\}$ are prima proprietate din Definiţia 3.1.11. Pe de altă parte, din Definiţia 3.1.10, rezultă că $\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0)\, \exists B(x_0, \varepsilon) \subset V$ şi luând $U = B(x_0, \varepsilon)$ deducem că şi cea de a doua proprietate din Definiţia 3.1.11 este satisfăcută.

Observaţia 3.1.12. *Am demonstrat anterior că perechea $(I\!R, d)$, unde*

$$d : I\!R \times I\!R \to I\!R, \quad d(x, y) = |x - y|, \forall\, x\, y \in I\!R,$$

este spaţiu metric.

Familia $\mathcal{U}(x_0) = \{(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) : \varepsilon \in I\!R^*_+\}$ constituie un sistem fundamental de vecinătăţi al lui $x_0 \in I\!R$.

Observaţia 3.1.13. *Într-un spaţiu metric (X, d), familia de bile deschise $\tilde{\mathcal{U}}(x_0) = \Big\{B\Big(x_0, \dfrac{1}{n}\Big) : n \in I\!N^*\Big\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru $x_0 \in X$. Mai mult, elementele lui $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$ pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale $I\!N$, adica mulţimea $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$ este numărabilă.*

Într-adevăr, avem $\tilde{\mathcal{U}}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$ şi

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0) \exists \varepsilon > 0 \quad \text{astfel încât} \quad B(x_0, \varepsilon) \subset V.$$

Dar, după axioma lui Arhimede (Observaţia 3.184), (vezi Sect. 1.6) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in I\!N^*$ astfel încât să avem $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Atunci, se vede imediat că $B\Big(x_0, \dfrac{1}{n_0}\Big) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset V$, ceea ce arată că $\forall\, V \in \mathcal{V}(x_0)\ \exists U = B\Big(x_0, \dfrac{1}{n_0}\Big) \in \tilde{\mathcal{U}}(x_0)$ aşa fel încât $U \subset V$. Deci $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$ constituie un sistem fundamental de vecinătăţi pentru punctul x_0. În particular, dacă $X = I\!R$ şi $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x \in I\!R$, $\forall\, y \in I\!R$, atunci

$$\tilde{\mathcal{U}}(x_0) = \Big\{\Big(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\Big) : n \in I\!N^*\Big\}$$

formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru $x_0 \in I\!R$, arbitrar. Evident, elementele familiei $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$ pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu mulţimea $I\!N^*$, deci $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$ este numărabilă.

Definiţia 3.1.12. *O mulţime nevidă abstractă X se numeşte* **spaţiu topologic** *dacă fiecărui punct al ei i se poate ataşa o familie de vecinătăţi cu proprietţile $(V_1)-(V_4)$.*

Definiţia 3.1.13. *Spaţiul topologic (X,τ) satisface* **axioma I a numărabilităţii**, *sau* **axioma** (C_1) *dacă pentru orice $x \in X$ se poate indica un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi ale lui x.*

Teorema 3.1.2. *Orice spaţiu metric (X,d) satisface axioma I a numărabilităţii.*

Demonstraţie. Rezultă simplu din rezultatele anterioare. **q.e.d.**

Teorema 3.1.3. (**Teorema de separare a spaţiilor metrice**) *Pentru orice două puncte distincte x şi y ale spaţiului metric (X,d) există vecinătăţile V_x şi V_y astfel încât $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon = d(x,y)$. Din (M_1) rezultă $\varepsilon > 0$. Atunci, $V_x = B\Big(x, \dfrac{\varepsilon}{3}\Big)$ şi $V_y = B\Big(y, \dfrac{\varepsilon}{3}\Big)$ sunt vecinătăţi ale lui x şi respectiv y. Aceste vecinătăţi sunt disjuncte căci, în caz contrar, dacă $V_x \cap V_y \neq \emptyset$, ar exista $z \in V_x \cap V_y$, adica ar exista $z \in V_x$ şi $z \in V_y$. Prin urmare, $d(x,z) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ şi $d(y,z) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. În acest caz am avea

$$\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

ceea ce ar conduce la contradicţia $1 < \dfrac{2}{3}$. **q.e.d.**

În continuare prezentăm exemple de spaţii metrice frecvent utilizate pe parcurs.

Până acum am definit spaţiul metric $(I\!R, d)$, unde d este metrica obişnuită pe $I\!R$.

Intenţionăm să prezentăm structuri de spaţiu metric ale mulţimii $I\!R^n$.

Menţionăm că, de aici înainte, un element al mulţimii $I\!R^n$, de forma $(x_1, x_2, ..., x_n)$, se notează prin $\mathbf{x}$. Prin urmare,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n.$$

Exemplul 3.1.1. (**Spaţiul metric** $I\!R^n$). *Funcţia $d : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$, definită prin*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}, \tag{3.5}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sunt elemente arbitrare din $I\!R^n$, este metrică pe $I\!R^n$, deci perechea $(I\!R^n, d)$ este spaţiu metric.

Soluţie. Să arătăm că aplicaţia d definită de (3.5) satisface axiomele $(M_1) - (M_3)$ din Definiţia 3.1.1.

În primul rând se vede că $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0,\ \forall\, \mathbf{x} \in I\!R^n$ şi $\forall\, \mathbf{y} \in I\!R^n$. Apoi:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow (x_k = y_k,\ k \in \overline{1,n}) \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Aşadar, funcţia d din (3.5) satisface axioma (M_1).

În privinţa lui (M_2), lucrurile stau foarte simplu pentru că

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} = d(\mathbf{y},\mathbf{x}),\ \forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in I\!R^n \times I\!R^n.$$

Să demonstrăm acum (M_3). Trebuie să arătăm că $\forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n$, unde $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)$, avem

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}), \tag{3.6}$$

adică

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}. \tag{3.7}$$

Dacă notăm $a_k = x_k - z_k,\quad b_k = z_k - y_k,\quad k \in \overline{1,n}$, atunci $x_k - y_k = a_k + b_k$ şi inegalitatea (3.7) este echivalentă cu

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{3.8}$$

sau cu

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{3.9}$$

care, mai departe, este echivalentă cu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{3.10}$$

Vom demonstra inegalitatea:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{3.11}$$

Mai întâi, să remarcăm că dacă $a_k = 0,\ k \in \overline{1,n}$, inegalitatea (3.11) este satisfăcută ca egalitate.

Pentru a demonstra (3.11) când nu toţi $a_i,\ \ (i = \overline{1,n})$, sunt nuli, pornim de la funcţia $\varphi : I\!R \to I\!R$, definită prin

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot t - b_k)^2,\ t \in I\!R.$$

Se observă că

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \forall\, t \in I\!R. \tag{3.12}$$

Dar,

$$\varphi(t) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)t^2 - 2(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k)t + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

ceea ce arată că φ este funcţie de gradul al doilea cu coeficientul termenului de gradul doi, pozitiv. Atunci, (3.12) este echivalentă cu $\Delta \leq 0$, unde

$$\frac{\Delta}{4} = (\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum b_k^2,$$

din care, după trecerea unui grup de termeni în membrul al doilea şi extragerea rădăcinii pătrate, rezultă (3.11).

Deoarece funcţia modul are proprietatea $x \leq |x|,\ \forall\ x \in I\!R,$ din (3.11) rezultă (3.10).

Să observăm că (3.11) este *inegalitatea Cauchy–Buniakowski*[1]*–Schwarz*[2] aşa cum a fost prezentată în manualul de algebră elementară.

Raţionamentul făcut mai sus arată că axioma (M_3) este satisfăcută, deci aplicaţia d din (3.5) este metrică pe $I\!R^n,$ adică $(I\!R^n, d)$ este spaţiu metric. Aplicaţia d se numeşte *metrica Euclidiană* pe $I\!R^n.$

În cazul $n = 1,$ metrica Euclidiană devine $d(x, y) = |x - y|,\ \forall\, x \in I\!R,\ \forall\ y \in I\!R,$ adica *metrica obişnuită* pe $I\!R,$ iar în cazul $n = 2,$ având în vedere corespondenţa între punctele unui plan şi perechile de numere reale $(x_1, x_2) = \mathbf{x},$ elemente ale lui $I\!R^2 = I\!R \times I\!R,$ rezultă că $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},\ \mathbf{y} = (y_1, y_2),$ este distanţa Euclidiană dintre punctele $M_1(x_1, x_2)$ şi $M_2(y_1, y_2).$ ∎

Exerciţiul 3.1.1. (**Metrici echivalente pe** $I\!R^n$) *Să se arate că aplicaţiile:*

$$d_1 : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R, \quad d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_k - y_k| :\ k \in \overline{1, n}\};$$

$$d_2 : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R, \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

în care $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n,\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in I\!R^n,$ *sunt metrici pe* $I\!R^n.$ *Arătaţi apoi că* d, d_1 *şi* d_2 *sunt metrici echivalente pe* $I\!R^n,$ *iar în cazul* $n = 2$ *să se reprezinte grafic, în acelaşi reper cartezian din plan, mulţimile:* $B(\mathbf{0}, \varepsilon);\ B_1(\mathbf{0}, \varepsilon);\ B_2(\mathbf{0}, \varepsilon);\ \overline{B(x_0, \varepsilon)};\ \overline{B_1(x_0, \varepsilon)};\ \overline{B_2(x_0, \varepsilon)}$ *şi să se pună în evidenţă concluziile din Propoziţia 3.1.6.*

Indicaţie. Se verifică cu uşurinţă că d_1 şi d_2 satisfac axiomele $(M_1){-}(M_3)$ şi apoi se arată că au loc inegalităţile:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y});\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

oricare ar fi punctele $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din $I\!R^n.$

În ce priveşte reprezentările grafice ale mulţimilor indicate, acestea se pot face lesne cu ajutorul cunoştinţelor elementare de geometrie analitică. ∎

Definiţia 3.1.14. *Fie spaţiul metric* $(X, d),$ *mulţimea nevidă* A *şi* $\mathcal{F}(A, X),$ *mulţimea funcţiilor definite pe* A *cu valori în* $X.$ *Funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, X)$ *se numeşte* **mărginită** *dacă mulţimea valorilor sale,* $f(A) = \operatorname{Im} f \subset X,$ *este o mulţime mărginită în spaţiul metric* $(X, d).$

Exemplul 3.1.2. (**Spaţiul metric al funcţiilor mărginite**). *Fie* A *o mulţime nevidă oarecare,* (X, d) *un spaţiu metric arbitrar şi* $\mathcal{F}(A, X)$ *mulţimea funcţiilor definite pe* A *cu valori în* $X.$ *Introducem mulţimea*

$$\mathcal{M}(A, X) = \{f \in \mathcal{F}(A, X) :\ f - \ \textit{funcţie mărginită}\ \}.$$

Aplicaţia

$$\begin{gathered} \rho : \mathcal{M}(A, X) \times \mathcal{M}(A, X) \to I\!R, \\ \rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) :\ x \in A\} \end{gathered} \tag{3.13}$$

este o metrică pe mulţimea $\mathcal{M}(A, X),$ *numită* **metrica convergenţei uniforme**, *sau* **metrica lui Cebâşev**[3].

[1] Buniakowski, Victor Iakovlevici (1804–1889), matematician rus.

[2] Schwarz, Karl Herman Amandus (1843–1921), matematician german, cunoscut mai ales pentru contribuţiile sale în analiza complexă.

Soluţie. Mai întâi, din (3.13) se vede că

$$\rho(f,g) \geq 0, \quad \forall\, f \in \mathcal{M}(A,X), \quad \forall\, g \in \mathcal{M}(A,X),$$

iar

$$\rho(f,g) = 0 \Longleftrightarrow d(f(x),g(x)) = 0,\ \forall\, x \in A \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall\, x \in A \Longleftrightarrow f = g,$$

deci axioma (M_1) este îndeplinită.

Din (3.13) rezultă

$$\rho(f,g) = \rho(g,f),\ \forall\, f,\, g \in \mathcal{M}(A,X),$$

ceea ce arată că şi (M_2) este satisfăcută.

Fie elementele arbitrare f, g şi h din $\mathcal{M}(A,X)$. Din faptul că d este metrică pe X, iar $f(x), g(x), h(x),\ \forall\, x \in A$, sunt puncte ale lui X, rezultă

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),h(x)) + d(h(x),g(x)),\ \forall\, x \in A.$$

Dar, pentru orice $x \in A$, avem:

$$d(f(x),h(x)) \leq \sup\{d(f(x),h(x)) :\ x \in A\} = \rho(f,h);$$

$$d(h(x),g(x)) \leq \sup\{d(h(x),g(x)) :\ x \in A\} = \rho(h,g).$$

Prin urmare,

$$d(f(x),g(x)) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g), \ \ \forall\, x \in A,$$

din care rezultă

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g),$$

ceea ce arată că aplicaţia ρ din (3.13) satisface (M_3). Deoarece ρ are proprietăţile $(M_1) - (M_3)$, rezultă că este o metrică pe $\mathcal{M}(A,X)$, deci cuplul $(\mathcal{M}(A,X),\rho)$ este spaţiu metric. ■

Exemplul 3.1.3. (**Spaţiul metric al funcţiilor reale mărginite**). *Fie A o mulţime nevidă oarecare şi $\mathcal{B}(A)$ mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe A, mărginite, adică funcţii de forma $f : A \to I\!R$ cu proprietatea că mulţimea $f(A) = Im\ f \subset I\!R$ este mărginită în spaţiul metric $(I\!R, d)$, $d(y_1,y_2) = |y_1 - y_2|$, $y_1 \in I\!R$, $y_2 \in I\!R$, ceea ce arată că $\forall\, f \in \mathcal{B}(A)\ \exists\ \sup\{|f(x)| :\ x \in A\} < +\infty$. Atunci, aplicaţia*

$$\rho : \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \to I\!R, \quad \rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| :\ x \in A\} \tag{3.14}$$

este o distanţă pe $\mathcal{B}(A)$.

Soluţie. Într-adevăr, dacă facem observaţia că $\mathcal{B}(A)$ este un caz particular de mulţime $\mathcal{M}(A,X)$, atunci faptul că ρ din (3.13) este metrică pe $\mathcal{B}(A)$ rezultă din Exemplul 3.1.2. În particular, dacă $A = [a,b] \subset I\!R$ şi $C([a,b]) \subset \mathcal{B}([a,b])$ este mulţimea funcţiilor reale continue definite pe compactul $[a,b]$, metrica indusă pe $C[a,b]$, notată tot cu ρ, este

$$\rho(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| :\ x \in [a,b]\}, \quad \forall\, f,\, g \in C([a,b]),$$

aceasta fiind astfel datorită teoremei lui Weierstrass pentru funcţiii reale de variabilă reală şi pe care o vom relua într-un context mai general în capitolul următor. ■

---

[3]Cebâşev, Pafnuti Lvovici (1821–1894), renumit matematician rus.

Exerciţiul 3.1.2. *Fie spaţiile metrice* (X_1, d_1), (X_2, d_2), ... (X_n, d_n),

$$X = X_1 \times ... \times X_n,$$

produsul cartezian al mulţimilor $X_1, ..., X_n$, *iar* $x = (x_1, ..., x_n)$ *şi* $y = (y_1, ..., y_n)$, *elemente ale lui* X.

Să se arate că aplicaţiile

$$d : X \times X \to I\!R,\ \ d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)};$$

$$d' : X \times X \to I\!R,\ \ d'(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) :\ \ (i = \overline{1, n})\};$$

$$d'' : X \times X \to I\!R,\ \ d''(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i);$$

$$d''' : X \times X \to I\!R,\ \ d'''(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)},$$

sunt metrici pe mulţimea X.

Ce devin aceste metrici când $X_1 = X_2 = ... = X_n = I\!R$ *şi metricile* $d_1, d_2, ..., d_n$ *sunt identice cu metrica obişnuită din* $I\!R$?

Indicaţie. Folosind inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz şi proprietăţile funcţiei max, se demonstrează că proprietăţile $(M_1) - (M_3)$ sunt satisfăcute de către oricare din funcţiile d, d', d'' şi d'''.

În cazul particular menţionat, se compară rezultatele obţinute după înlocuiri cu cele din Exemplul 3.1.1.

Metrica d''' se va relua într-un alt exemplu. ■

3.2 Definiţia spaţiului liniar (vectorial). Proprietăţi. Exemple

Fie $(I\!K, +, \cdot)$ un corp comutativ, sau câmp ale cărui elemente sunt notate cu litere mici ale alfabetului grec, eventual prevăzute cu indici inferiori şi al cărui element neutru la adunare este 0, iar 1 este elementul unitate. Elementele lui $I\!K$ se numesc *scalari*, iar câmpul $I\!K$ *domeniu de operatori.* Fie, de asemenea, V o mulţime nevidă ale cărei elemente sunt notate cu litere ale alfabetului latin, supraliniate, şi prevăzute eventual cu indici inferiori.

Definiţia 3.2.1. *Mulţimea nevidă* V *se numeşte* **spaţiu liniar peste câmpul de scalari** $I\!K$, *sau* **spaţiu vectorial peste câmpul de scalari** $I\!K$, *dacă pe* V *sunt definite două legi de compoziţie, una binară internă, numită* **adunarea** *elementelor lui* V, *notată cu* $+$, *cu proprietatea că perechea* $(V, +)$ *este grup abelian şi cealaltă, externă, numită* **produsul** *elementelor lui* V *cu scalari din* $I\!K$, *notată cu* $\cdot$, *şi care are proprietăţile:*

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall\, \mathbf{u} \in V, \quad 1 \in I\!K; \tag{3.15}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha\beta\mathbf{u},\ \ \forall\, \alpha, \beta \in I\!K,\ \ \forall \mathbf{u} \in V; \tag{3.16}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u},\ \ \forall\, \alpha, \beta \in I\!K,\ \ \forall \mathbf{u} \in V; \tag{3.17}$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v},\ \ \forall\, \alpha \in I\!K,\ \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{3.18}$$

Relaţiile (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), în această ordine, au următoarele interpretări:

- *identitate*;
- *asociativitatea scalarilor*;
- *distributivitatea* produsului elementelor mulţimii V cu scalari din $I\!K$ faţă de adunarea elementelor din $I\!K$;
- *distributivitatea* produsului elementelor mulţimii V cu scalari din $I\!K$ faţă de adunarea elementelor lui V.

Deşi operaţiile din K şi operaţiile din V sunt notate cu aceleaşi simboluri, nu se poate face confuzie între acestea.

Perechii $(\alpha, \mathbf{u}) \in I\!K \times V$ i se asociază în mod unic, prin legea de compoziţie externă pe V cu domeniul de operatori $I\!K$, elementul $\alpha \cdot \mathbf{u} \in V$, dar acesta se poate scrie fie în forma $\alpha\mathbf{u}$, fie $\mathbf{u} \cdot \alpha$, fie $\mathbf{u}\alpha$.

Elementele unui spaţiu liniar V peste câmpul $I\!K$ se numesc *vectori*, iar lui V i se mai spune *spaţiu vectorial* peste câmpul de scalari $I\!K$.

Elementul nul $\mathbf{0}$ al grupului abelian aditiv $(V, +)$ se numeşte *vectorul nul*, iar elementul simetric elementului $\mathbf{u} \in V$ în raport cu adunarea din V, notat cu $-\mathbf{u}$, se numeşte *opusul vectorului* $\mathbf{u}$.

Dacă avem $I\!K = I\!R$, atunci spaţiul vectorial corespunzător V se numeşte *spaţiu vectorial real*; când $I\!K$ este corpul comutativ al numerelor complexe, spaţiul liniar corespunzător se numeşte *spaţiu vectorial complex.* Ori de câte ori nu se precizează în mod explicit câmpul $I\!K$ se subînţelege că este $I\!R$.

Un spaţiu liniar V peste câmpul de scalari $I\!K$ se va numi, mai simplu, $I\!K-$spaţiu liniar V sau, şi mai simplu, spaţiul liniar $V/I\!K$.

Observaţia 3.2.1. *Într-un $I\!K-$spaţiu liniar V, vectorul nul $\mathbf{0}$ este unic, iar opusul $-\mathbf{u}$ al unui vector $\mathbf{u} \in V$ este, de asemenea, unic.*

Într-adevăr, această afirmaţie rezultă din Teorema 1.5.1. ■

Observaţia 3.2.2. *Un corp comutativ $(I\!K, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial peste el însuşi. În particular, $I\!R$ este spaţiu liniar real.*

Într-adevăr, dacă analizăm axiomele care definesc structura algebrică de corp comutativ, şi anume Definiţia 1.5.8, constatăm că cele care definesc spaţiul liniar peste câmpul $I\!K$ se regăsesc în totalitate printre proprietăţile ternei $(I\!K, +, \cdot)$, considerată corp comutativ. ■

Propoziţia 3.2.1. *În spaţiul liniar $V/I\!K$ au loc afirmaţiile:*

$$0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \forall\, \mathbf{u} \in V; \tag{3.19}$$

$$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \forall\, \alpha \in I\!K; \tag{3.20}$$

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V; \tag{3.21}$$

$$\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \alpha = 0, \quad \textit{sau} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Demonstraţie. Din (3.15), (3.17) şi axiomele care definesc câmpul $I\!K$, avem egalităţile

$$\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (1+0)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \mathbf{u},$$

rezultat care, dacă îl confruntăm cu Observaţia 3.2.1, arată că $0\mathbf{u}$ este vectorul nul din V, deci (3.19) este adevărată.

În mod analog se demonstrează (3.20).

Din (3.15), (3.17), (3.19) şi faptul că mulţimea $I\!K$ este corp comutativ, deducem:

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \Big(1 + (-1)\Big) = 0\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

de unde în baza Observaţiei 3.2.1, rezultă (3.21).

Dacă $\alpha = 0$, sau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, rezultă că $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Să presupunem, în sfârşit, că $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ şi să arătăm că $\alpha = 0$, sau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dacă $\alpha \neq 0, \exists \alpha^{-1} \in I\!K$ cu proprietatea $\alpha\alpha^{-1} = 1 \in K$. Înmulţind la stânga în $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ cu α^{-1} şi folosind (3.16) şi (3.15), deducem $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dacă însă $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, din $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ rezultă $\alpha = 0$, căci în caz contrar, raţionând ca mai sus, deducem $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui $\mathbf{u}$. **q.e.d.**

Teorema 3.2.1. *Dacă V este $I\!K-$ spaţiu liniar, mulţimea*

$$V^n \;=\; \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{de\ \ n\ \ ori}$$

este , de asemenea, un $I\!K-$ spaţiu liniar.

Demonstraţie. Elementele oarecare $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ ale mulţimii V^n au formele

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n), \\ \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

unde $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$, cu $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sunt $2n$ vectori din V.

Definim adunarea în V prin

$$\forall\, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^n \times V^n \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

unde

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{u} \in V^n, \mathbf{v} \in V^n.$$

Din modul cum a fost definită adunarea în V^n deducem că aceasta este lege de compoziţie binară internă pe V^n, adica

$$+ : V^n \times V^n \to V^n.$$

Se constată imediat că $(V^n, +)$ este grup abelian deoarece adunarea în V^n satisface axiomele care definesc noţiunea de grup abelian.

Elementul nul în V^n este $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$, iar opusul elementului $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n) \in V^n$ este $-\mathbf{u} = (-\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2, ..., -\mathbf{u}_n)$ care se vede că este, de asemenea, element al lui V^n.

Definim operaţia de înmulţire a elementelor lui V^n cu scalari din $I\!K$, prin

$$\forall\, (\alpha, \mathbf{u}) \in I\!K \times V^n \mapsto \alpha\mathbf{u}, \quad \text{unde} \quad \alpha\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{u}_1, \alpha\mathbf{u}_2, ..., \alpha\mathbf{u}_n),$$

din care rezultă că că operaţia de înmulţire a elementelor lui V^n cu scalari din $I\!K$ este o lege de compoziţie externă pe V^n, cu domeniu de operatori $I\!K$.

Din modul cum s–a definit această lege şi folosind faptul că V este spaţiu vectorial peste câmpul $I\!K$, deducem cu uşurinţă că (3.15) – (3.18) sunt verificate, deci V^n este spaţiu liniar peste câmpul $I\!K$. **q.e.d.**

Observaţia 3.2.3. *Mulţimea* $\mathbb{K}^n$ *este* $\mathbb{K}-$*spaţiu vectorial. În particular,* $\mathbb{R}^n$ *este spaţiu vectorial real.*

Într-adevăr, aceste afirmaţii rezultă din Observaţia 3.2.2 şi Teorema 3.2.1. ■

Definiţia 3.2.2. *Submulţimea nevidă* $S \subset V$ *se numeşte* **subspaţiu liniar** *al spaţiului liniar* $V/\mathbb{K}$ *dacă cele două legi de compoziţie care definesc pe* V *ca spaţiu liniar, induc pe* S *o structură algebrică de* $\mathbb{K}-$ *spaţiu liniar.*

Se poate demonstra fără dificultate ([9, p. 40]) rezultatul următor.

Teorema 3.2.2. *Fie* V *un* $\mathbb{K}-$ *spaţiu liniar şi* S *o submulţime nevidă a lui* V*. Mulţimea* S *este subspaţiu liniar al lui* V *dacă şi numai dacă*

$$\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, \mathbf{u} \in S,\ \forall\, \mathbf{v} \in S.$$

Exemplul 3.2.1. (**Spaţiul vectorial** s **al şirurilor de numere reale**) *Mulţimea* s *a tuturor şirurilor de numere reale este spaţiu vectorial.*

Soluţie. Definim adunarea în s în modul următor: fie $\mathbf{a} = (a_n)$ şi $\mathbf{b} = (b_n)$ două şiruri numerice arbitrare; prin suma celor două şiruri se înţelege şirul $\mathbf{c} = (c_n)$ al cărui termen general este $c_n = a_n + b_n,\ n \geq 1.$ Prin urmare, adunarea este lege de compoziţie binară internă pe s şi, se constată uşor că , cuplul $(s, +)$ este grup abelian.

Produsul dintre şirul $\mathbf{a} = (a_n)$ şi numărul real λ este şirul $\mathbf{b} = (b_n)$ al cărui termen general este $b_n = \lambda \cdot a_n,\ \forall\, n \geq 1.$ Din nou constatăm cu uşurinţă că operaţia de înmulţire a elementelor lui s cu scalari din $\mathbb{R}$ satisface $(3.15) - (3.18)$. Prin urmare, după Definiţia 3.2.1, s este $\mathbb{R}-$spaţiu liniar.

Dacă notăm cu m submulţimea lui s formată din toate şirurile mărginite şi aplicăm Teorema 3.2.2, constatăm că aceasta este subspaţiu liniar al lui $s.$

Fie acum c_0 submulţimea lui m alcătuită din toate şirurile convergente la zero. Din nou, folosind rezultatele din primul paragraf al capitolului al doilea şi Teorema 3.2.2, constatăm că c_0 este subspaţiu liniar al lui $m,$ deci şi al lui $s.$ ■

Exerciţiul 3.2.1. *Să se arate că submulţimea* l_2 *a lui* s *dată de:*

$$l_2 = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1} :\ a_n \in \mathbb{R}\ \text{şi}\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty\}$$

este subspaţiu liniar al lui $s.$

Soluţie. Aplicăm Teorema 3.2.2. Dacă $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_2$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ sunt elemente arbitrare, atunci $\lambda \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}$ este şirul care are termenul general $\lambda \cdot a_n + b_n.$ Pentru a arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n + b_n)^2$ este convergentă, aplicăm criteriul general de convergenţă al unei serii numerice al lui Cauchy din Teorema 2.7.1. Pentru aceasta calculăm $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (\lambda \cdot a_k + b_k)^2.$ Avem

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda \cdot a_k + b_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cdot b_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2,$$

din care, dacă folosim inegalitatea (3.11) a lui Cauchy–Buniakowski–Schwarz, obţinem

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}(\lambda\cdot a_k+b_k)^2\leq\lambda^2\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k^2+2|\lambda|\sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k^2}+\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k^2. \tag{3.23}$$

Deoarece $\mathbf{a}=(a_n)\in l_2,\mathbf{b}=(b_n)\in l_2$, deducem că pentru orice $\varepsilon>0$ există $N_2(\varepsilon)\in I\!N^*$ aşa fel încât

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k^2<\frac{\varepsilon}{4\lambda^2},\quad\forall\,n>N_1(\varepsilon)\quad\text{şi}\quad\forall\,p\in I\!N^*. \tag{3.24}$$

Pentru acelaşi $\varepsilon>0\;\exists\;N_2(\varepsilon)\in I\!N^*$ astfel încât

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k^2<\frac{\varepsilon}{4},\quad\forall\,n>N_2(\varepsilon)\quad\text{şi}\quad\forall\,p\in I\!N^*. \tag{3.25}$$

Atunci, pentru $N(\varepsilon)=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$, (3.24) şi (3.25) au loc simultan, iar din (3.23) – (3.25) deducem

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}(\lambda a_k+b_k)^2<\lambda^2\frac{\varepsilon}{4\lambda^2}+2\lambda\frac{\varepsilon}{2\lambda}\frac{\varepsilon}{2\lambda}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon, \tag{3.26}$$

Relaţia (3.26), împreună cu criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a unei serii numerice, demonstrează că seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+b_n)^2<+\infty$, deci $\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}\in l_2$, care, după Teorema 3.2.2, arată că l_2 este subspaţiu liniar al spaţiului liniar s. ■

Exemplul 3.2.2. **(Spaţiul vectorial $\mathcal{F}(A,V)$)** *Fie A o mulţime nevidă arbitrară, $V/I\!K$ un spaţiu vectorial şi $\mathcal{F}(A,V)$ mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în V. Atunci, $\mathcal{F}(A,V)$ este $I\!K-$spaţiu vectorial.*

Soluţie. Într-adevăr, dacă $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(A,V),\mathbf{g}\in\mathcal{F}(A,V)$, atunci definim suma lor, notată $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, ca fiind funcţia definită pe A ale cărei valori se determină după legea

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x),\;\;\forall\,x\in A.$$

Deoarece $\mathbf{f}(x)\in V$ şi $\mathbf{g}(x)\in V$ rezultă $\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x)\in V$, deci $(\mathbf{f}+\bar{g})(x)\in V,\;\forall\,x\in A,$ ceea ce arată că $\mathbf{f}+\mathbf{g}\in\mathcal{F}(A,V)$. În baza faptului că $(V,+)$ este grup abelian rezultă că $\Big(\mathcal{F}(A,V),+\Big)$ este, de asemenea, grup abelian. Elementul nul al acestui grup este funcţia nulă $\mathbf{0}:A\to V$ definită prin $\mathbf{0}(x)=\mathbf{0}\in V,\;\forall\,x\in A,$ iar opusul elementului $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(A,V)$ este elementul $-\mathbf{f}:A\to V$ definit de $(-\mathbf{f})(x)=-\mathbf{f}(x),\;\forall\,x\in A.$

Definim produsul elementului $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(A,V)$ cu scalarul $\lambda\in I\!K$, elementul notat prin $\lambda\mathbf{f}$, dat de $(\lambda\bar{f})(x)=\lambda\mathbf{f}(x),\;\forall\,x\in A.$ Rezultă că $\lambda\mathbf{f}\in\mathcal{F}(A,V),\;\forall\,\lambda\in I\!K$ şi $\forall\;\bar{f}\in\mathcal{F}(A,V)$ şi că operaţia externă astfel introdusă satisface (3.15) – (3.18). Prin urmare, $\mathcal{F}(A,V)$ este $I\!K-$spaţiu vectorial. În particular, dacă $V=I\!R$, mulţimea $\mathcal{F}(A,I\!R)=\mathcal{F}(A)$ este spaţiu liniar real. ■

Definiţia 3.2.3. *Fie V un $K-$spaţiu liniar şi $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_p,\mathbf{v}\}\subset V$. Spunem că vectorul $\mathbf{v}$ este* **combinaţie liniară** *a vectorilor $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_p$ dacă există p scalari $\lambda_i\in I\!K,\;i\in\overline{1,p}$, astfel încât*

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\cdot\mathbf{u}_i.$$

Definiţia 3.2.4. *Fie spaţiul vectorial* $V/\mathbb{K}$. *Sistemul de vectori* $S_p = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\} \subset V$ *se numeşte* **liniar dependent**, *sau vectorii* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p$ *se numesc* **liniar dependenţi** *dacă există scalarii* $\lambda_j \in \mathbb{K},\ j \in \overline{1,p}$, *nu toţi nuli, aşa fel încât*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_j \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{0}. \tag{3.27}$$

Definiţia 3.2.5. *Dacă egalitatea* (3.27) *are loc atunci şi numai atunci când* $\lambda_j = 0,\ j \in \overline{1,p}$, *sistemul de vectori* $S_p = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ *se numeşte* **liniar independent**. *În această situaţie, vectorii* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p$ *se numesc* **liniar independenţi**.

Definiţia 3.2.6. *Un sistem infinit de vectori din* $\mathbb{K}-$*spaţiul vectorial* V *se numeşte* **liniar independent** *dacă orice subsistem finit al său este liniar independent.*

Definiţia 3.2.7. $\mathbb{K}-$*spaţiul liniar* V *se numeşte* **finit dimensional** *dacă există numărul natural* $n = \dim V$ *cu proprietatea că numărul maxim de vectori liniar independenţi din* V *este* n. *Numărul natural* $n = \dim V$ *se numeşte* **dimensiunea** $\mathbb{K}-$*spaţiului vectorial finit dimensional* V.

Dacă $V = \{\mathbf{0}\}$, atunci $\dim V = 0$. Dacă $S \subset V$ este subspaţiu liniar al $\mathbb{K}-$spaţiului vectorial V, atunci $\dim S \leq \dim V$.

Putem afirma că spaţiul liniar V peste câmpul $\mathbb{K}$ este finit dimensional şi are dimensiunea egală cu n dacă există n vectori liniar independenţi şi orice sistem format din $n+1$ vectori ai lui V este liniar dependent.

Definiţia 3.2.8. *Se numeşte* **bază** *în spaţiul liniar nenul* $n-$*dimensional* $V/\mathbb{K}$, *orice sistem format din* n *vectori din* V, *liniar independenţi.*

Teorema 3.2.3. *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul finit de vectori* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\} \subset V$ *să fie bază a spaţiului liniar* $V/\mathbb{K}$ *este ca orice vector* $\bar{x} \in V$ *să se exprime în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului* $\mathcal{B}$, *de forma*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + ... + x_n\mathbf{u}_n, \tag{3.28}$$

unde $x_i \in \mathbb{K},\ i \in \overline{1,n}$.

Demonstraţie. **Necesitatea**. Dacă $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ este bază în spaţiul liniar $V/\mathbb{K}$, atunci din Definiţia 3.2.7 şi Definiţia 3.2.8 rezultă că sistemul de vectori $S_{n+1} = \{\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, u_2, ..., \mathbf{u}_n\} \subset V$, unde $\mathbf{x}$ este vector arbitrar din V, este liniar dependent. Atunci, după (3.27), există scalarii $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ din $\mathbb{K}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\lambda\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \tag{3.29}$$

Scalarul $\lambda \in \mathbb{K}$ din (3.29) nu poate fi nul căci în caz contrar, ar rezulta că $\mathcal{B}$ este sistem de vectori liniar dependent. Notând $x_i = -\lambda^{-1}\lambda_i,\ i \in \overline{1,n}$, din (3.29) obţinem (3.28).

Să arătăm că scrierea (3.28) este unică. Presupunem contrariul şi anume că vectorul $\mathbf{x}$ se poate scrie şi în forma

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + ... + y_n\mathbf{u}_n. \tag{3.30}$$

Atunci, din (3.28), (3.30) şi Propoziţia 3.2.1, deducem

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \tag{3.31}$$

Deoarece $\mathcal{B}$ este bază, din (3.31), Definiţia 3.2.8 şi Definiţia 3.2.5 rezultă $y_i - x_i = 0,\ i \in \overline{1,n},$ adica $y_i = x_i,\ i \in \overline{1,n},$ ceea ce arată că scrierea (3.28) este unică.

Suficienţa. Dacă orice vector $\mathbf{x} \in V/I\!K$ se exprimă în mod unic în forma (3.28), vectorul nul $\mathbf{0}$ are aceeaşi proprietate, deci egalitatea

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{u_n} \tag{3.32}$$

coroborată cu egalitatea

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + ... + 0\mathbf{u}_n,$$

evidentă în baza lui (3.19), conduce la concluzia $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$

Cu alte cuvinte, (3.32) are loc dacă şi numai dacă toţi scalarii $\lambda_i,\ i \in \overline{1,n}$ sunt nuli ceea ce, după Definiţia 3.2.5, atrage că $\mathcal{B}$ este sistem de vectori liniar independent.

Cum, în baza lui (3.28), nu pot exista $n+1$ vectori ai lui V, liniar independenţi, rezultă că $\mathcal{B}$ este bază în $V/I\!K$. **q.e.d.**

Definiţia 3.2.9. *Dacă $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ este o bază în spaţiul liniar $V/I\!K$ de dimensiune $n \in I\!N^*$ şi $\mathbf{x} \in V$, atunci scalarii unic determinaţi $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât să aibă loc (3.29) se numesc* **coordonatele** *vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}$ şi scriem acest fapt fie în forma (3.28), fie în forma*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathcal{B}}.$$

Propoziţia 3.2.2. *Dacă $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathcal{B}}$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)_{\mathcal{B}}$ sunt doi vectori arbitrari din spaţiul vectorial $n-$dimensional $V/I\!K$, iar $\lambda \in I\!K$ este un scalar arbitrar, atunci*

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)_{\mathcal{B}}, \\ \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)_{\mathcal{B}}. \end{cases} \tag{3.33}$$

Demonstraţie. Egalităţile (3.33) rezultă imediat în baza afirmaţiilor de mai sus. **q.e.d.**

Observaţia 3.2.4. *Dacă în spaţiul liniar $V/I\!K$, finit dimensional, este fixată o bază, atunci operaţiile din V se dau prin operaţii corespunzătoare pe coordonate.*

Definiţia 3.2.10. *Spaţiul vectorial V peste câmpul de scalari $I\!K$ se numeşte* **infinit dimensional** *dacă există un sistem infinit de vectori, liniar independent. În acest caz $\dim V = +\infty$.*

Definiţia 3.2.11. *Se numeşte* **bază infinită** *într-un spaţiu liniar* $V/\mathbb{K}$ *un sistem infinit liniar independent de vectori din* V.

Observaţia 3.2.5. *Spaţiul liniar* $V/\mathbb{K}$ *este infinit dimensional dacă are o bază infinită. Spaţiul liniar* $V/\mathbb{K}$ *are dimensiunea finită* $n \in \mathbb{N}^*$ *dacă în el există o bază formată din* n *vectori.*

Observaţia 3.2.6. *Se poate demonstra că în orice spaţiu vectorial nenul* $V/\mathbb{K}$ *există cel puţin o bază şi că dată o bază în* V *se pot construi alte baze [9, p. 49], numărul acestora fiind infinit. De asemenea, oricare două baze ale aceluiaşi spaţiu vectorial, de dimensiune finită, conţin acelaşi număr de vectori, număr care este dimensiunea spaţiului respectiv.*

Observaţia 3.2.7. *Dimensiunea* $\mathbb{K}-$*spaţiului liniar* V *este cardinalul bazelor sale.*

Observaţia 3.2.8. *Dacă* $\mathcal{B}$ *şi* $\mathcal{B}'$ *sunt două baze ale* $\mathbb{K}-$*spaţiului vrctorial* V, *atunci ele sunt cardinal echivalente în sensul că există o aplicaţie bijectivă* $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Observaţia 3.2.9. *Într-un spaţiu vectorial* $n-$*dimensional* $V/\mathbb{K}$ *în care o bază este* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$, *exprimarea (3.28) a unui vector* $\mathbf{x} \in V$ *în baza* $\mathcal{B}$ *se poate scrie, cel puţin formal, în modul:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\, X, \tag{3.34}$$

unde $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n) \in V^n,\ X$ *este matricea coloană şi cu* n *linii având ca elemente coordonatele vectorului* $\mathbf{x}$ *în baza* $\mathcal{B}$, *iar prin produsul dintre vectorul* $\mathbf{u} \in V^n$ *şi matricea unicolonară* X *înţelegem desigur vectorul* $\mathbf{x} \in V$ *dat de membrul doi al lui (3.28), adică*

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\, X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i.$$

Exemplul 3.2.3. (***Spaţiul liniar al matricelor de acelaşi tip***) *Mulţimea* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, *a matricelor de acelaşi tip* $m \times n$, *cu elemente din câmpul* $\mathbb{K}$, *este* $\mathbb{K}-$*spaţiu liniar de dimensiune* $m \cdot n$.

Soluţie. O matrice de tipul $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{K}$ este o aplicaţie $f : M \times N \to \mathbb{K}$, unde $M = \{1, 2, ..., m\}$ şi $N = \{1, 2, ..., n\},\ m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^*$. Se vede că mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a tuturor matricelor de acelaşi tip $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{K}$ este de fapt mulţimea $\mathcal{F}\Big(M \times N, \mathbb{K}\Big)$ care este spaţiu liniar peste câmpul $\mathbb{K}$ dacă avem în vedere rezultatele din Exemplul 3.2.2 şi Observaţia 3.2.2.

Deoarece mulţimea valorilor lui $f \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se poate organiza sub forma unui tabel dreptunghiular alcătuit din m linii şi n coloane, astfel încât la intersecţia liniei i cu coloana j să se găsească valoarea funcţiei f în perechea $(i, j) \in M \times N$, o matrice se poate nota prin $A = \| a_{ij} \|_{m \times n},\ i \in \overline{1, m},\ j \in \overline{1, n}$. Indicele i este evident indice de linie al matricei, j este indice de coloană, iar a_{ij} se numeşte **elementul de pe linia** i **şi coloana** j al matricei A.

Să arătăm acum că $\dim\mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K) = m \cdot n$. Pentru aceasta introducem sistemul $\mathcal{B}$ de matrice

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, ..., E_{mn}\} \subset \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K), \tag{3.35}$$

unde matricea $E_{ij} \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K)$ are toate elementele egale cu zero cu excepţia celui de pe linia i şi coloana j care este egal cu $1 \in I\!\!K$. Evident, $\mathcal{B}$ are $m \cdot n$ elemente.

Sistemul de matrice $\mathcal{B}$ din (3.35) este liniar independent deoarece combinaţia liniară

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij} \cdot E_{ij} = O \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K)$$

are loc dacă şi numai dacă $\lambda_{ij} = 0 \in I\!\!K,\ \forall\, i \in \overline{1,m}\ \forall\, j \in \overline{1,n}$.

Pe de altă parte, orice matrice $A = \| \, a_{ij} \, \|_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K)$ se scrie în mod unic în forma

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Acum, din Teorema 3.2.3 rezultă că $\mathcal{B}$ din (3.35) este bază în $\mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K)$, iar din Observaţia 3.2.5 deducem că $\dim\mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K) = m \cdot n$. Baza $\mathcal{B}$ din (3.35) se numeşte *baza canonică*, sau *baza standard* din $\mathcal{M}_{m,n}(I\!\!K)$. ■

Exerciţiul 3.2.2. (**Spaţiul liniar** $I\!\!K^n$) *Să se arate că mulţimea* $I\!\!K^n$ *este* $I\!\!K-$*spaţiu liniar de dimensiune* n.

Soluţie. Din Definiţia 3.2.3 avem că mulţimea $I\!\!K^n$ este într-adevăr spaţiu liniar peste câmpul $I\!\!K$.

Să arătăm că are dimensiunea egală cu n.

Pentru aceasta, fie sistemul de vectori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!\!K^n,$$

unde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 0, 1) \tag{3.36}$$

Se constată simplu că sistemul de vectori din (3.36) este liniar independent şi dacă $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!\!K^n$, atunci

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, x_n) = \\ &= x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}X, \tag{3.37}$$

unde $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in (I\!\!K^n)^n$ şi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!\!K)$, elementele singurei sale coloane fiind $x_1, x_2, ..., x_n$.

Rezultatele stabilite permit să afirmăm că mulţimea de vectori $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, unde $\mathbf{e}_i,\ i \in \overline{1,n}$ sunt daţi în (3.36), este o bază în $I\!\!K^n$ şi deci $\dim I\!\!K^n = n$.

Baza $\mathcal{B} \subset I\!\!K^n$ ale cărei elemente sunt (3.36) se numeşte *baza canonică*, sau *baza standard* din $I\!\!K^n$. Dacă un vector $\mathbf{x} \in I\!\!K^n$ se scrie în forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, conform lui (3.37) subânţelegem că $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt coordonatele lui $\mathbf{x}$ în baza canonică din $I\!\!K^n$.

În particular, considerând $I\!\!K = I\!\!R$, deducem că mulţimea $I\!\!R^n$ este spaţiu vectorial real. ■

Exerciţiul 3.2.3. *Să se arate că spaţiul liniar* s *al şirurilor de numere reale este infinit dimensional.*

Soluţie. Considerăm mulţimea infinită de şiruri

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n, ...\}, \tag{3.38}$$

unde şirul $\mathbf{e}_i$, $i \in I\!N^*$, are toţi termenii egali cu $0 \in I\!R$ cu excepţia termenului de rangul i care este $1 \in I\!R$. Utilizând Definiţia 3.2.6 şi Definiţia 3.2.5, constatăm că mulţimea de vectori $\mathcal{B}$ din (3.38) este un sistem infinit de vectori din s, liniar independent, deci este bază în s. Prin urmare, după Observaţia 3.2.5, rezultă că s este spaţiu liniar real infinit dimensional. ■

Exerciţiul 3.2.4. *Care din următoarele mulţimi de vectori sunt baze în* $I\!R^3$?

(a) $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1 = (1,1,1), \mathbf{u}_2 = (1,1,0), \mathbf{u}_3 = (1,0,0)\}$;

(b) $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1 = (1,0,1), \mathbf{f}_2 = (0,1,0), \mathbf{f}_3 = (1,1,1)\}$;

(c) $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1 = (-1,1,1), \mathbf{g}_2 = (1,-1,0), \mathbf{g}_3 = (1,1,-1)\}$;

(d) $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}_1 = (1,-1,0), \mathbf{h}_2 = (1,0,-1), \mathbf{h}_3 = (-1,0,1)\}$.

Soluţie. Vectorii sunt exprimaţi în baza canonică din $I\!R^3$,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}.$$

Notăm $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in I\!R^3 \times I\!R^3 \times I\!R^3 = (I\!R^3)^3$ şi $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \in (I\!R^3)^3$. Atunci,

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}\,C, \tag{3.39}$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coloanele matricei C sunt coordonatele vectorilor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ în baza canonică $\mathcal{B} \subset I\!R^3$. Cu ajutorul acestei matrice, practic, se face *trecerea* de la sistemul vectorilor bazei la sistemul $\mathcal{U}$ de vectori. Din acest motiv matricei C i se spune *matricea de trecere* de la baza $\mathcal{B}$ la sistemul $\mathcal{U}$ de vectori.

Pentru ca $\mathcal{U}$ să fie bază în $I\!R^3$, trebuie ca vectorii care alcătuiesc sistemul să fie liniar independenţi, deci combinaţia liniară

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \tag{3.40}$$

să aibă loc numai când $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Folosind Observaţia 3.2.9, constatăm că egalitatea (3.40) se scrie în forma

$$\mathbf{u}\Lambda = \mathbf{0}, \tag{3.41}$$

unde membrul drept este vectorul nul din $I\!R^3$, iar Λ din membrul îintâi este matrice coloană, cu trei linii de elemente λ_1, λ_2 şi λ_3, respectiv.

Înlocuind pe $\mathbf{u}$ din (3.39) în (3.41), obţinem

$$\mathbf{e}(C\Lambda) = \mathbf{0}. \tag{3.42}$$

Ţinând cont acum că $\mathcal{B}$ este bază în $I\!R^3$, din (3.42) deducem

$$C\Lambda = O, \tag{3.43}$$

unde, în membrul doi, O este matricea unicolonară cu trei linii, cu elementele egale cu zero.

Însă (3.43) este un sistem liniar şi omogen de trei ecuaţii cu trei necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; acesta are numai soluţia banală dacă şi numai dacă

$$\det C \neq 0. \tag{3.44}$$

Calculând determinantul matricei C, găsim $\det C = -1$, ceea ce arată că (3.43) are numai soluţia banală.
Aceeaşi afirmaţie este adevărată şi pentru (3.40) şi prin urmare $\mathcal{U}$ este bază în $I\!R^3$.
În mod asemănător se studiază celelalte puncte.
De exemplu, la sistemul de vectori de la punctul (b) matricea de trecere are determinantul nul ceea ce atrage faptul că sistemul (3.43) are soluţii nebanale şi prin urmare combinaţia (3.40) are loc şi când nu toţi scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt nuli. Aceasta înseamnă că vectorii $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ sunt liniar dependenţi, deci $\mathcal{F}$ nu este bază în $I\!R^3$. ■

Analiza acestui exerciţiu sugerează o teoremă importantă a algebrei liniare (vezi [7],[9, p. 96]) pe care o dăm fără demonstraţie.

Teorema 3.2.4. *Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ o bază în spaţiul $n-$dimensional $V/I\!K$ şi $C \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!K)$, matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la sistemul de vectori*

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, ..., \mathbf{u}'_n\}.$$

Necesar şi suficient ca $\mathcal{U}$ să fie bază în V este ca matricea de trecere C sa fie nesingulară, sau echivalent, determinantul matricei de trecere să fie diferit de zero.

3.3 Şiruri de puncte în spaţii metrice. Şir de funcţii

În acest paragraf vom extinde noţiunea de şir la alte mulţimi de elemente.
Pentru a putea transpune unele rezultate de la şirurile numerice, studiate în Cap.2, este nevoie ca aceste mulţimi să fie înzestrate cu o asemenea structură încât să permită introducerea noţiunii de vecinătate. Acesta este cazul spaţiilor metrice. Vom constata că majoritatea proprietăţilor expuse în Cap. 2 se extind în mod natural la spaţii metrice, dar vom vedea, pe de altă parte, că există şi unele proprietăţi care nu se mai conservă în cadrul spaţiilor metrice. Astfel, vom observa că nu orice şir fundamental de puncte dintr–un spaţiu metric este convergent, ceea ce impune considerarea unui noi noţiuni, aceea de *spaţiu metric complet*, un spaţiu de puncte în care noţiunile de şir convergent şi de şir fundamental coincid. Această categorie de spaţii metrice este de o deosebită importanţă în analiza matematică, fapt de care ne vom putea convinge în continuare.

Definiţia 3.3.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare. Se numeşte* **şir de puncte** *în X aplicaţia, funcţia*

$$f : I\!N_k \to X, \quad \text{unde} \quad I\!N_k = \{n \in I\!N : \ n \geq k, \ k \in I\!N\}.$$

Punând $f(n) = x_n$, unde $x_n \in X$, şirul se notează prin $(x_n)_{n \geq k}$. Uzual se ia $k = 1$, uneori $k = 0$. În cazul $k = 1$, se scrie prescurtat (x_n).

Definiţia 3.3.2. *Fie şirul de puncte (x_n).*

- *Punctele $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ se numesc* **termenii şirului** *(x_n).*
- *Mulţimea $\{x_n : n \in I\!N^*\} \subset X$ se numeşte* **mulţimea valorilor şirului***.*
- *Punctul $x_n \in X$ se numeşte* **termenul general***, sau* **termenul de rang** *n al şirului (x_n).*

Evident, nu excludem cazul în care X este în acelaşi timp şi spaţiu vectorial, caz în care şirului de puncte i se spune *şir de vectori*. Un astfel de şir se notează prin $(\mathbf{x}_n)$, unde $\mathbf{x}_n \in X$ şi $n \in I\!N$.

Definiţia 3.3.3. *Spunem că şirul de puncte* (x_n) *din spaţiul metric* (X, d) *are* **limita** $x \in X$ *dacă în afara oricărei vecinătăţi* $V \in \mathcal{V}(x)$ *rămân un număr finit de termeni ai şirului sau, altfel spus, dacă mulţimea valorilor lui* $n \in I\!N^*$ *pentru care* $a_n \notin V$ *este finită.*

Dacă x este limita şirului de puncte (x_n) din spaţiul metric (X, d), atunci scriem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{sau} \quad x_n \to x$$

şi spunem că (x_n) este *convergent în* X la x, sau că şirul de puncte (x_n) *converge în* X la (către) punctul x.

Definiţia 3.3.4. *Şirurile de puncte din spaţiul metric* (X, d) *care nu sunt convergente se numesc* **divergente**, *sau* **fără limită**.

Având în vedere că noţiunea de vecinătate a punctului $x \in X$ implică numărul real nenegativ $d(x, y)$, unde $y \in X$, putem da următoarea teoremă de caracterizare a convergenţei unui şir de puncte dintr–un spaţiu metric.

Teorema 3.3.1. *Şirul de puncte* $(x_n), x_n \in (X, d)$, *este convergent la* $x \in X$ *dacă şi numai dacă şirul de numere reale nenegative* $\Big(d(x_n, x)\Big)_{n\geq 1}$ *este convergent la zero, sau, echivalent:*

$$x_n \to x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in I\!N \text{ astfel încât } d(x_n, x) < \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei se dovedesc simplu folosind atât Definiţia 3.3.3, cât şi rezultatele stabilite în primele paragrafe din capitolele anterioare. **q.e.d.**

Să remarcăm că Teorema 3.3.1 poate constitui baza afirmaţiei făcută la începutul paragrafului privtoare la extensiuni la şiruri de puncte în spaţii metrice a rezultatelor stabilite pentru şiruri numerice.

Definiţia 3.3.5. *Fie şirul de puncte* (x_n), $x_n \in X$ *şi* (k_n) *un şir strict crescător de numere naturale. Şirul de puncte* (y_n) *cu proprietatea că* $\forall\, n \in I\!N^*\ \exists\, k_n$ *astfel încât* $y_n = x_{k_n}$, *se numeşte* **subşir** *al şirului de puncte* (x_n) *din spaţiul metric* (X, d).

Cele mai multe din definiţiile şi proprietăţile şirurilor de numere reale se regăsesc şi la şiruri de puncte dintr–un spaţiu metric. Astfel, avem:

Teorema 3.3.2. *În orice spaţiu metric* (X, d)

(a) *orice şir de puncte are cel mult o limită;*

(b) *dacă* $x_n = x,\ \forall\, n \geq N_0,\ N_0 \in I\!N^*$, *atunci* $x_n \to x$;

(c) *orice subşir de puncte al unui şir convergent la* $x \in X$ *converge, de asemenea, la* x;

(d) *dacă orice subşir al unui şir de puncte conţine un subşir convergent la* $x \in X$, *atunci acel şir are limita* x.

Demonstraţie. Proprietăţile $(b), (c), (d)$ rezultă direct din definiţia convergenţei în (X, d) şi din proprietăţile analoage ale şirurilor numerice aplicate şirului de numere nenegative $(d(x_n, x))$. Pentru a demonstra (a) presupunem că $x_n \to x$ şi $x_n \to y$, simultan. În acest fel,

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \to 0,$$

care arată că $d(x, y) = 0$, deci $x = y$. **q.e.d.**

Teorema 3.3.3. *Dacă $y_n \to y$ în spaţiul metric (X, d) şi A este o submulţime a spaţiului, atunci*

$$\mathrm{dist}(y_n, A) \to \mathrm{dist}(y, A).$$

În particular, dacă $A = \{x\}$, atunci

$$d(y_n, x) \to d(y, x).$$

Demonstraţie. Prima parte a teoremei este consecinţă a ultimei inegalităţi din Propoziţia 3.1.3. Partea a doua rezultă din prima luând $A = \{x\}$. **q.e.d.**

Definiţia 3.3.6. *Şirul de puncte (x_n) din spaţiul metric (X, d) se numeşte* **şir fundamental**, *sau* **şir Cauchy** *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există numărul natural $N(\varepsilon)$, astfel încât*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \forall\, m > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \tag{3.45}$$

sau, echivalent,

$$d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*. \tag{3.46}$$

Propoziţia 3.3.1. *Orice şir de puncte convergent este şir fundamental.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $x_n \to x$, atunci

$$0 \leq d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) \to 0,\ m \to \infty,\ n \to \infty,$$

care arată că (3.45) este satisfăcută, deci şirul (x_n) este fundamental. **q.e.d.**

Reciproca Propoziţiei 3.3.1 nu este în general adevărată. Se pot da exemple de spaţii metrice în care există şiruri de puncte divergente care să satisfacă condiţia (3.45).

Definiţia 3.3.7. *Numim* **şir de funcţii** *o aplicaţie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(A, B))$ unde A şi B sunt mulţimi nevide arbitrare.*

Mai târziu, pentru un şir de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, unde $f_n \in \mathcal{M}(A,X)$, iar (X,d) este un spaţiu metric, pe lângă convergenţa în metrica ρ, care urmează a fi introdusă şi care este numită *metrica convergenţei uniforme*, convergenţa numindu–se *convergenţă uniformă*, se poate introduce şi *convergenţa punctuală* a acelui şir de funcţii.

3.4 Spaţii metrice complete. Exemple

Definiţia 3.4.1. *Spaţiul metric (X,d) se numeşte* **spaţiu metric complet** *dacă orice şir de puncte fundamental din X este convergent la un punct din X..*

Exemplul 3.4.1. *Spaţiul metric $(\mathbb{R}, d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|)$ este spaţiu metric complet.*

Soluţie. Într-adevăr, această afirmaţie rezultă din Teorema 2.2.2. ■

Teorema 3.4.1. *Spaţiul metric $(\mathbb{R}^p, d)$, unde d este metrica Euclidiană, este spaţiu metric complet.*

Demonstraţie. Amintim că metrica Euclidiană în $\mathbb{R}^p$ este definită prin $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i)^2}$, unde $\mathbf{x} = (x_1,...,x_p)$ şi $\mathbf{y} = (y_1,...,y_p)$ sunt vectori oarecare din spaţiul liniar $\mathbb{R}^p$.

Este suficient să arătăm că are loc reciproca din Propoziţia 3.3.1.

Fie în acest sens un şir de puncte arbitrar $(\mathbf{x}_n)$ din $\mathbb{R}^p$ care să fie şir fundamental în spaţiul metric $(\mathbb{R}^p, d)$, aceasta însemnând că $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât (3.46) să aibă loc.

Să remarcăm mai întâi că a da un şir de puncte în $\mathbb{R}^p$, de fapt un şir de vectori în $\mathbb{R}^p$, este echivalent cu a da p şiruri numerice $(x_{kn})_{n\geq 1},\ k \in \overline{1,p}$, numite *şirurile coordonate*, deoarece termenul general al şirului este o $p-$uplă ordonată de numere reale de forma

$$\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{pn}).$$

Şirul de puncte $(\mathbf{x}_n)$ din $(\mathbb{R}^p, d)$ este fundamental dacă şi numai dacă şirurile coordonate $(x_{kn})_{n\geq 1},\ k \in \overline{1,p}$, sunt şiruri fundamentale în $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$. Aceste afirmaţii rezultă din inegalităţile evidente

$$|x_{i;n+q} - x_{in}| \leq d(\mathbf{x}_{n+q}, \mathbf{x}_n) \leq \sum_{j=1}^{p} |x_{j;n+q} - x_{jn}|, \tag{3.47}$$

oricare ar fi $i \in \overline{1,q}$ şi oricare ar fi perechea $(n,q)\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, la care trebuie să adăugăm Definiţia 3.3.6şi rezultatele din Secţiunea 2.1 şi Secţiunea 2.2 referitoare la şiruri de numere reale.

Într-adevăr, dacă şirul $(\mathbf{x}_n)$ din $(\mathbb{R}^p, d)$ este fundamental, avem

$$d(\mathbf{x}_{n+q}, \mathbf{x}_n) < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \forall\, q \in \mathbb{N}^*. \tag{3.48}$$

Atunci, din (3.47) şi (3.48), deducem

$$|x_{i;n+q} - x_{in}| < \varepsilon,\ \ \forall\, i \in \overline{1,n},\ \ \forall n > N(\varepsilon),\ \ \forall\, q \in \mathbb{N}^*,$$

care arată că fiecare din şirurile coordonate $(x_{in}),\ i \in \overline{1,p}$ este şir numeric fundamental în spaţiul metric $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$.

Reciproc, dacă $(x_{jn})_{n\geq 1}, j\in\overline{1,p}$, sunt şiruri fundamentale în $I\!R$, atunci $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\in I\!N$ astfel încât să avem

$$|x_{j;n+q}-x_{jn}|<\frac{\varepsilon}{p},\quad \forall\,n>N(\varepsilon),\quad \forall;q\in I\!N^*,\quad \forall\,j\in\overline{1,p}. \tag{3.49}$$

Utilizând (3.49) în partea dreaptă a lanţului de inegalităţi (3.47), deducem (3.48), adică $(\mathbf{x}_n)$ este şir fundamental în spaţiul metric $(I\!R^p,d)$. Însă, în $I\!R$ orice şir fundamental este convergent, deci $\exists\ x_j\in I\!R\ j\in\overline{1,p}$ astfel încât $x_{jn}\to x_j,\ n\to\infty,\ \forall\ j\in\overline{1,p}$, aceasta însemnând că $\forall\,\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in I\!N$ aşa fel încât

$$|x_{jn}-x_j|<\frac{\varepsilon}{p},\quad \forall\,n>N(\varepsilon),\quad \forall\,j=\overline{1,p}. \tag{3.50}$$

Pe de altă parte, din echivalenţa metricilor d,d_1 şi d_2 pe $I\!R^p$, avem (vezi Exerciţiul 3.1.1)

$$d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x})\leq\sum_{j=1}^{p}|x_{jn}-x_j|,\quad \forall\,n\in I\!N^*, \tag{3.51}$$

unde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_p)\in I\!R^p$. Din (3.50) şi (3.51), deducem $d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x})<\varepsilon,\ \ \forall\,n>N(\varepsilon)$, ceea ce, după Teorema 3.3.1, arată că $\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}\in I\!R^p$. **q.e.d.**

Teorema 3.4.2. *Şirul de vectori* $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1},\ \ \mathbf{x}_n\in(I\!R^p,d),\ \ \mathbf{x}_n=(x_{1n},x_{2n},...,x_{pn})$ *are limita* $\mathbf{x}_0=(x_{10},x_{20},...,x_{p0})\in I\!R^p$ *dacă şi numai dacă şirurile coordonate* $(x_{1n})_{n\geq 1},\ (x_{2n})_{n\geq 1},...,\ (x_{pn})_{n\geq 1}$ *au limită în spaţiul metric* $(I\!R,|\cdot-\cdot|)$ *după cum urmează* $x_{1n}\to x_{10},\ x_{2n}\to x_{20},\ ...\ ,\ x_{pn}\to x_{p0}$.

Demonstraţie. După adăugarea la inegalitatea (3.51), în care în locul vectorului $\mathbf{x}$ se pune vectorul $\mathbf{x}_0$ din enunţ, a inegalităţilor evidente

$$|x_{i\,n}-x_{i\,0}|\leq d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_0),\quad \forall\,n\in I\!N^*\ \text{ şi }\ \forall\,i\in\overline{1,p},$$

demonstraţia teoremei este un simplu exerciţiu. **q.e.d.**

Exerciţiul 3.4.1. *Să se arate că* $C([a,b])$, *spaţiul metric al funcţiilor reale continue pe compactul* $[a,b]\subset I\!R$, *este complet.*

Soluţie. În Exemplul 3.1.3 am arătat că $\Big(C([a,b],\rho)\Big)$, unde ρ este metrica convergenţei uniforme, este spaţiu metric.

Să arătăm că este spaţiu metric complet.

În acest sens, fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir fundamental în $\Big(C([a,b],\rho)\Big)$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon>0$, există numărul natural $N(\varepsilon)$, astfel încât

$$\rho(f_{n+p},f_n)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\,n>N(\varepsilon)\quad \text{şi}\quad \forall\,p\in I\!N.$$

Având în vedere că $\rho(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|:\ x\in[a,b]\}$, din $\rho(f_{n+p},f_n)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, găsim că

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\quad \forall\,n>N(\varepsilon),\quad \forall\,p\in I\!N \tag{3.52}$$

Din (3.52) deducem că $\forall\,x\in[a,b]$ şirul numeric $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este fundamental în spaţiul metric $(I\!R,|\cdot-\cdot|)$, deci $\exists\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x),\forall\,x\in[a,b]$ şi această limită este număr real. Să definim acum funcţia

$$f:[a,b]\to I\!R,\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\qquad \forall\,x\in[a,b] \tag{3.53}$$

şi să arătăm că este continuă şi că $\rho(f_n, f) \to 0, \;\; n \to \infty.$

Să considerăm x_0 arbitrar din $[a, b]$ şi să evaluăm diferenţa $|f(x) - f(x_0)|$, unde $x \in [a, b]$. Funcţia reală de variabilă reală f este continuă în x_0 dacă diferenţa $|f(x) - f(x_0)|$este foarte mică când numărul $|x - x_0|, \; x \in [a, b],$ este foarte mic. Această diferenţă o putem majora prin

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|, \tag{3.54}$$

unde n_0 este un număr natural arbitrar mai mare decât $N(\varepsilon)$ de mai sus. În baza celor afirmate referitor de continuitatea funcţiilor reale şi folosind faptul că şirurile de numere reale $(f_n(x))$ şi $(f_n(x_0))$ sunt convergente la respectiv $f(x)$ şi $f(x_0)$, putem afirma că inegalităţile:

$$\begin{cases} |f(x) - f_{n_0}(x)| & < \dfrac{\varepsilon}{3}; \\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| & < \dfrac{\varepsilon}{3}; \\ |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| & < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases} \tag{3.55}$$

sunt evidente dacă $x \in [a, b]$ este astfel încât $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Existenţa numărului pozitiv $\delta(\varepsilon)$ este asigurată de continuitatea în x_0 a funcţiei $f_{n_0} \in C([a, b])$.

Folosind acum (3.54) şi (3.55), deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea

$$\forall\, x \in [a, b] \quad \text{cu} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că funcţia f, definită de (3.53), aparţine lui $C([a, b])$.

Să arătăm, în sfârşit, că şirul fundamental $(f_n)_{n \geq 1}$ este convergent în spaţiul metric $\Big(C([a, b]), \rho\Big)$ către funcţia f.

Pentru aceasta, trecem la limită pentru $p \to \infty$ în (3.52) şi ţinem cont de (3.53). Obţinem,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \; n > N(\varepsilon) \text{ şi } \forall\, x \in [a, b],$$

care antrenează $\max\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon, \;\; \forall\, n > N(\varepsilon)$, adică $\rho(f_n, f) < \varepsilon, \;\; \forall\, n > N(\varepsilon)$.

Aceasta demonstrează că $\rho(f_n, f) \to 0$, deci $\Big(C([a, b]), \rho\Big)$ este spaţiu metric complet. ■

3.5 Spaţii vectoriale normate. Spaţii Banach

Fie V un spaţiu vectorial real.

Definiţia 3.5.1. *Aplicaţia* $\|\cdot\| : V \to I\!\!R$ *se numeşte* **normă** *pe spaţiul liniar real* V *dacă satisface următoarele proprietăţi:*

$$\begin{array}{ll} (N_1) & \|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}; \\ (N_2) & \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|, \; \forall\, \lambda \in I\!\!R \text{ şi } \forall\, \mathbf{x} \in V; \\ (N_3) & \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \; \forall \mathbf{x}, \, \mathbf{y} \in V. \end{array}$$

Uneori, pentru proprietăţile (N_1), (N_2), (N_3), se foloseşte termenul de *axiome*.

Observaţia 3.5.1. *Dacă* $\|\cdot\| : V \to I\!\!R$ *este o normă pe spaţiul vectorial* V, *atunci* $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \;\; \forall\, \mathbf{x} \in V$. *În consecinţă, dacă* $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, *atunci* $\|\mathbf{x} > 0\|$.

Într-adevăr, luând în (N_3) $\mathbf{y} = -\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$, unde $\mathbf{x} \in V$ şi ţinând cont de Definiţia 3.2.1, Propoziţia 3.2.1 şi de axiomele $(N_1) - (N_3)$, obţinem $2\|\mathbf{x}\| \geq 0$. Mai mult, dacă $\mathbf{x} \in V \setminus \mathbf{0}$, atunci din $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ şi axioma (N_1) deducem $\|\mathbf{x}\| > 0$. ■

Acest rezultat justifică denumirea de *axioma de nenegativitate a normei* care se atribuie proprietăţii (N_1). Axioma (N_3) este cunoscută sub numele de *inegalitatea triunghiulară*.

Definiţia 3.5.2. *Fie* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *o normă pe* V.

(i) Numărul nenegativ $\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x} \in V$, *se numeşte* **norma** *sau* **lungimea** *vectorului* $\mathbf{x}$.

(ii) Cuplul $(V, \|\cdot\|)$ *se numeşte* **spaţiu normat**.

Observaţia 3.5.2. *Pe un spaţiu vectorial real se pot defini mai multe norme. Dacă* $\|\cdot\|_1$ *şi* $\|\cdot\|_2$ *sunt două norme distincte pe* V, *atunci spaţiile normate* $(V, \|\cdot\|_1)$ *şi* $(V, \|\cdot\|_2)$ *sunt distincte, deci au proprietăţi distincte.*

Propoziţia 3.5.1. *În spaţiul normat* $(V, \|\cdot\|)$ *au loc inegalităţile:*

(a) $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{u}_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|\mathbf{u}_k\|, \; \forall\, \lambda_k \in \mathbb{R}, \; \forall \mathbf{u}_k \in V, \; k \in \overline{1,n}$;

(b) $\Big| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \Big| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \; \forall\, \mathbf{u}, \, \mathbf{v} \in V$.

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ inegalitatea (a) este evidentă, fiind chiar egalitate în baza lui (N_2).

Presupunem că (a) este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$, adică

$$\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}_i\| \leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \|\mathbf{u}_i\|, \; \forall\, \lambda_i \in \mathbb{R}, \; \forall \mathbf{u}_i \in V, \; i \in \overline{1,k}, \tag{3.56}$$

şi să demonstrăm că are loc pentru $k + 1$ scalari reali şi pentru $k + 1$ vectori din V.

Folosind (N_3), (3.56) şi (N_2), deducem cu uşurinţă că (a) are loc pentru $k + 1$.

În baza inducţiei matematice după n, rezultă că (a) are loc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$ şi $\forall\, \mathbf{u}_i \in V, \; i \in \overline{1,n}$.

Pentru a demonstra (b), pornim de la inegalitatea

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|, \; \forall\, \mathbf{u} \in V \text{ şi } \forall\, \mathbf{v} \in V, \tag{3.57}$$

care este adevărată în baza identităţii $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}$ şi a proprietăţii (N_3) a normei.

Schimbând rolurile lui $\mathbf{u}$ cu $\mathbf{v}$ în (3.57), obţinem

$$\|\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|, \tag{3.58}$$

unde am ţinut cont şi de axioma (N_2). Atunci, din (3.57) şi (3.58) se obţine (b). **q.e.d.**

Propoziţia 3.5.2. *Dacă* $(V, \|\cdot\|)$ *este spaţiu normat, atunci aplicaţia*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \;\; d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \; \forall \mathbf{x}, \, \mathbf{y} \in V, \tag{3.59}$$

este o metrică pe V care are următoarele două proprietăţi speciale:

$$d(\mathbf{x}+\mathbf{z},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in V\times V\times V; \tag{3.60}$$

$$d(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \forall\,\lambda\in I\!\!R,\ \forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in V\times V. \tag{3.61}$$

Demonstraţie. Folosind Definiţia 3.5.1 se constată uşor că aplicaţia d din (3.59) satisface proprietăţile (M_1) şi (M_2).

Demonstrăm că este satisfăcută şi (M_3).

Avem, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{z})+(\mathbf{z}-\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})$, din care rezultă că şi (M_3) este satisfăcută, deci d din (3.59) este o metrică pe V. **q.e.d.**

Metrica d pe un spaţiu normat V definită ca în (3.59) se numeşte **metrica indusă de norma**.

Observaţia 3.5.3. *Orice spaţiu normat poate fi structurat ca spaţiu metric.*

Reciproca acestei afirmaţii nu este în general adevărată întrucât pentru definirea noţiunii de metrică nu se cere structură de spaţiu liniar pe mulţimea nevidă X. Dar chiar şi în cazul în care X este spaţiu liniar se pot defini metrici care să nu fie induse de norme. Exemplul 3.5.2) este concludent în acest sens.

Dacă o metrică d pe un spaţiu vectorial V provine însă din norma $\|\cdot\|$, atunci norma pe V este la rându–i determinată de d prin

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x},\mathbf{0}),\ \forall\mathbf{x}\in V.$$

Definiţia 3.5.3. *Fie două norme $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ pe spaţiul liniar V. Spunem că $\|\cdot\|_1$ este* **echivalentă** *cu $\|\cdot\|_2$ dacă există $0 < a \leq b$ astfel încât*

$$a\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq b\|\mathbf{x}\|_1, \quad \forall\,\mathbf{x}\in V. \tag{3.62}$$

Observaţia 3.5.4. *Dacă $\|\cdot\|_1$ este echivalentă cu $\|\cdot\|_2$, atunci şi $\|\cdot\|_2$ este echivalentă cu $\|\cdot\|_1$.*

Într-adevăr, din (3.62), obţinem $\alpha\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \beta\|\mathbf{x}\|_2,\ \forall\,\mathbf{x}\in V$, unde numerele reale α şi β sunt astfel încât $0<\alpha=\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{a}=\beta.$ ■

Observaţia 3.5.5. *Dacă $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ sunt două norme echivalente pe V, atunci metricile induse de aceste norme d_1 şi d_2 sunt, de asemenea, echivalente.*

Într-adevăr, din (3.62) şi (3.59), deducem

$$a d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq b d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \forall\,\mathbf{x},\mathbf{y}\in V,$$

care, după Propoziţia 3.1.6, arată că afirmaţia făcută este adevărată. ■

Observaţia 3.5.6. *Dacă $(V, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, după Propoziţia 3.5.2 şi Observaţia 3.5.2 este şi spaţiu metric, deci bilele deschisă şi închisă de centru $\mathbf{x}_0$ şi rază $\varepsilon > 0$ sunt, respectiv,*

$$B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in V : \; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\},$$

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in V : \; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Propoziţia 3.5.3. *Submulţimea A din spaţiul normat $(V, \|\cdot\|)$ este mărginită dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel încât*

$$\|\mathbf{x}\| < M, \quad \forall\, \mathbf{x} \in A, \tag{3.63}$$

sau, echivalent, pentru orice $\mathbf{x}_0 \in V$ există $M_1 > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < M_1, \quad \forall\, \mathbf{x} \in A. \tag{3.64}$$

Demonstraţie. Fie $A \subset V,\ A$ mulţime mărginită. Cum V este şi spaţiu metric, având metrica indusă de normă, folosind rezultatele din primul paragraf al acestui capitiol, deducem că există $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ astfel încât $A \subset B(\mathbf{y}_0, \varepsilon).$

Fie $M > 0$ cu proprietatea $M > \|\mathbf{y}_0\| + \varepsilon$ şi fie, de asemenea, $\mathbf{x} \in A,$ arbitrar. Atunci, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon),$ deci $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon,$ din care deducem

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon + \|\mathbf{y}_0\| < M.$$

Reciproc, dacă (3.63) are loc, aceasta înseamnă că $A \subset B(\mathbf{0}, M),$ deci $\mathrm{diam} A \leq \mathrm{diam} B(\mathbf{0}, M) \leq 2M$ şi, după Definiţia 3.1.5, rezultă că A este mărginită.

În mod asemănător se demonstrează şi (3.64). **q.e.d.**

Observaţia 3.5.7. *Toate rezultatele de la şiruri de puncte în spaţii metrice rămân valabile şi pentru şiruri de vectori dintr–un spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$. Există însă particularităţi caracteristice spaţiilor normate pe care le punctăm în continuare.*

Teorema 3.5.1. *Într-un spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$ au loc următoarele implicaţii:*

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}_0\|, \quad \textit{reciproc numai în cazul} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}; \tag{3.65}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \mathbf{x}_n + \mu \mathbf{y}_n \to \lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0, \quad \forall\, \lambda,\, \mu \in I\!R; \tag{3.66}$$

$$\forall (\lambda_n) \ \textit{şir mărginit şi} \ \forall \mathbf{x}_n \to \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_n \mathbf{x}_n \to \mathbf{0}; \tag{3.67}$$

$$\forall (\lambda_n) \to 0 \ \textit{şi} \ \forall \mathbf{x}_n \ \textit{şir mărginit} \ \Longrightarrow \lambda_n \mathbf{x}_n \to \mathbf{0}; \tag{3.68}$$

$$\forall (\lambda_n)_{n \geq 1} \ \textit{şi} \ \forall \mathbf{x}_n \ \textit{astfel încât} \ \lambda_n \to \lambda_0 \in I\!R \ \textit{şi} \ \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow \lambda_n \mathbf{x}_n \to \lambda_0 \mathbf{x}_0. \tag{3.69}$$

Demonstraţie. Implicaţia din (3.65) rezultă din inegalitatea (b) a Propoziţiei 3.5.1 scrisă pentru $\mathbf{x}_n$ şi $\mathbf{x}_0$, adica din $\Big|\, \|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}_0\| \,\Big| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|$.

Dacă $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!\!N$ astfel încât

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon, \;\; \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Din ultimele două inegalităţi, deducem

$$\Big|\, \|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}_0\| \,\Big| < \varepsilon, \;\; \forall\, n > N(\varepsilon),$$

care, după Teorema 2.1.1, arată că $\|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}_0\|$.

Faptul că reciproca primei afirmaţii din (3.65) nu este adevărată în general se vede din exemplul următor.

Se ia $V = I\!\!R, \|\cdot\| = |\cdot|$ şi şirul numeric cu termenul general $x_n = (-1)^n$. Şirul numeric (x_n) astfel ales nu este convergent, deşi $|x_n| \to 1$.

Implicaţia inversă este evidentă însă dacă $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Pentru demonstraţia implicaţiei (3.66) se porneşte de la inegaliatea evidentă

$$\|\lambda\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{y}_n - (\lambda\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{y}_0)\| \leq |\lambda|\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| + \mu\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\|.$$

Cum $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \to 0$ şi $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\| \to 0$, din inegalitatea de mai sus rezultă

$$\|\lambda\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{y}_n - (\lambda\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{y}_0)\| \to 0,$$

de unde, folosind reciproca lui (3.65), adevărată în cazul menţionat, deducem

$$\lambda\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{y}_n \to \lambda\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{y}_0.$$

În vederea demonstraţiei proprietăţilor (3.67) şi (3.68), remarcăm că avem fie

$$\|\lambda_n\mathbf{x}_n\| \leq M\|\mathbf{x}_n\|, \quad M > 0, \quad \forall n \in I\!\!N^*, \tag{3.70}$$

fie

$$\|\lambda_n\mathbf{x}_n\| \leq M|\lambda_n|, \quad \forall\, n \in I\!\!N^*, \tag{3.71}$$

după cum şirul numeric (λ_n) este mărginit sau şirul de vectori $(\mathbf{x}_n)$ este mărginit.

Dacă la (3.70) adăugăm şi cealaltă ipoteză, şi anume $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$, atunci deducem $\|\lambda_n\mathbf{x}_n\| \to 0$, care antrenează desigur $\lambda_n\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$.

La aceeaşi concluzie ajungem dacă pornim de la (3.71) la care adăugăm desigur ipoteza $\lambda_n \to 0$.

În sfârşit, pentru a dovedi (3.69), să observăm că

$$\|\lambda_n\mathbf{x}_n - \lambda_0\mathbf{x}_0\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)\mathbf{x}_n + \lambda_0(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)\| \leq |\lambda_n - \lambda_0| \cdot \|\mathbf{x}_n\| + |\lambda_0| \cdot \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|.$$

Dacă în această inegalitate ţinem cont că, $|\lambda_n - \lambda_0| \to 0$ şi $\|\mathbf{x}_n\| \leq M$ deoarece şirul $(\mathbf{x}_n)$, fiind convergent, este mărginit şi $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \to 0$, deducem $\|\lambda_n\mathbf{x}_n - \lambda_0\mathbf{x}_0\| \to 0$, din care rezultă desigur $\lambda_n\mathbf{x}_n \to \lambda_0\mathbf{x}_0$. **q.e.d.**

Definiţia 3.5.4. *Spaţiul normat* $(V, \|\cdot\|)$ *se numeşte* **spaţiu Banach**[4] *dacă* V *este spaţiu metric complet în metrica indusă de normă.*

[4] Banach, Stefan (1892–1945), renumit matematician polonez, fondatorul analizei funcţionale moderne.

Exemplul 3.5.1. (**Spaţiul normat** $\mathbb{R}^n$) *Spaţiul vectorial* $\mathbb{R}^n$ *este spaţiu Banach.*

Soluţie. Din Definiţia 3.2.3 şi Exerciţiul 3.2.2 ştim că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu liniar real $n-$dimensional.

Să demonstrăm că $\mathbb{R}^n$ este şi normat. Pentru aceasta, fie aplicaţia

$$\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad \|\mathbf{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2},\quad \forall\,\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{3.72}$$

Din modul cum este definită, se vede că această aplicaţie satisface proprietăţile (N_1) şi (N_2) din Definiţia 3.5.1.

Demonstrăm că este verificată şi proprietatea (N_3) a acestei definiţii. Pentru aceasta, pornim de la $(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|)^2$, unde $\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$, deci $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$. După (3.72), avem

$$(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2. \tag{3.73}$$

Ridicând la pătrat în membrul doi al lui (3.73) şi ţinând cont de inegalitatea (3.11), obţinem

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

din care, cu ajutorul lui (3.72), deducem că (N_3) din Definiţia 3.5.1 este satisfăcută, prin urmare $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ este spaţiu normat.

Pentru a demonstra că $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ este spaţiu Banach, arătăm că este spaţiu metric complet în metrica indusă de norma (3.72). Dar această metrică este tocmai metrica d din Exerciţiul 3.1.1. Folosind acum Teorema 3.4.1, deducem că $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ este spaţiu Banach. ■

Observaţia 3.5.8. *Norma* (3.72) *pe* $\mathbb{R}^n$ *poartă denumirea de* **normă Euclidiană**, *motivaţia acestei denumiri urmând să se dea mai târziu.*

Exerciţiul 3.5.1. *Să se arate că aplicaţiile:*

$$\|\cdot\|_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad \|\mathbf{x}\|_1=\max\{|x_k|:\ k\in\overline{1,n}\};$$

$$\|\cdot\|_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad \|\mathbf{x}\|_2=\sum_{k=1}^{n}|x_k|,$$

unde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, *sunt norme echivalente pe* $\mathbb{R}^n$.

Indicaţie. Se arată că aplicaţiile de mai sus satisfac proprietăţile normei. ■

Observaţia 3.5.9. *Metricile* d_1 *şi* d_2 *pe* $\mathbb{R}^n$, *introduse în Exemplul* 3.1.1, *sunt metrici induse de normele* $\|\cdot\|_1$ *şi* $\|\cdot\|_2$, *definite în Exerciţiul* 3.5.1.

Într-adevăr, se vede că

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1\quad \text{şi}\quad d_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2,$$

oricare ar fi vectorii $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. ■

Exemplul 3.5.2. *Funcţia*

$$d_3 : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R, \quad d_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}, \tag{3.74}$$

unde $\mathbf{x},\mathbf{y} \in I\!R^n$, *este o metrică pe* $I\!R^n$ *care nu provine dintr–o normă.*

Soluţie. Într-adevăr, din (3.74) se vede imediat că (M_1) şi (M_2) din Definiţia 3.1.1 sunt satisfăcute.

Pentru a demonstra (M_3), pornim de la implicaţia

$$b \geq 0,\ c \geq 0 \text{ şi } 0 \leq a \leq b + c \Longrightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}, \tag{3.75}$$

care se poate demonstra simplu.

Dacă în (3.75) luăm

$$a = |x_i - y_i|, \quad b = |x_i - z_i|, \quad c = |z_i - y_i|, \quad i \in \overline{1,n},$$

înmulţim ambii membri cu $\dfrac{1}{2^i}$ şi apoi sumăm după valorile lui i de la 1 până la n, obţinem

$$d_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d_3(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_3(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n,$$

ceea ce arată că şi proprietatea (M_3) din Definiţia 3.1.1 este satisfăcută.

Prin urmare, aplicaţia d_3 din (3.74) este distanţă pe $I\!R^n$.

Dacă d provine dintr–o normă, conform Observaţiei 3.5.2, aplicaţia

$$\|\cdot\|_3 : I\!R^n \to I\!R, \quad \|\mathbf{x}\|_3 = d_3(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k|}{1+|x_k|}, \quad \forall \mathbf{x} \in I\!R^n,$$

trebuie să fie o normă pe $I\!R^n$.

Se vede însă că această aplicaţie satisface (N_1) şi (N_3) din Definiţia 3.5.1, dar nu satisface (N_2), căci

$$\|\lambda\mathbf{x}\|_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\lambda| \cdot |x_k|}{1+|\lambda| \cdot |x_k|} \neq |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k|}{1+|x_k|} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_3.$$

Prin urmare, aplicaţia d_3 din (3.74) nu provine dintr–o normă. ■

Exemplul 3.5.3. **(Spaţiul normat $\mathcal{B}(A,V)$)** *Fie* $(V, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat,* A *o mulţimnevidă arbitrară şi* $\mathcal{F}(A,V)$ *spaţiul vectorial (vezi Exemplul 3.2.2) al funcţiilor vectoriale definite pe* A *cu valori în* V. *Mulţimea*

$$\mathcal{B}(A,V) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A,V) :\ \sup\{\|\mathbf{f}(x)\| :\ x \in A\} < +\infty\}$$

este subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $\mathcal{M}(A,V)$ *şi aplicaţia*

$$\|\cdot\|_{sup} : \mathcal{B}(A,V) \to I\!R; \quad \|\mathbf{f}\|_{sup} = \sup\{\|\mathbf{f}(x)\| :\ x \in A\}, \quad \forall\ \mathbf{f} \in \mathcal{B}(A,V), \tag{3.76}$$

este o normă pe $\mathcal{B}(A,V)$, *care se numeşte* **norma lui Cebâşev**, *sau* **norma convergenţei uniforme**, *deci perechea* $(\mathcal{B}(A,V), \|\cdot\|_{sup})$ *este spaţiu normat.*

Soluţie. Din definiţia lui $\mathcal{B}(A,V)$ rezultă că mulţimea $\mathbf{f}(A) = \operatorname{Im}\mathbf{f}$ este mărginită în spaţiul normat $(V, \|\cdot\|)$, cu alte cuvinte $\mathcal{B}(A,V)$ este submulţimea funcţiilor mărginite din spaţiul vectorial $\mathcal{F}(A,V)$. Folosind proprietăţile marginii superioare a unei mulţimi de numere reale se constată că dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(A,V)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{B}(A,V)$ şi $\alpha \in I\!R$, atunci $\alpha\,\mathbf{f}+\mathbf{g}\in\mathcal{B}(A,V)$, ceea ce, în baza Teoremei 3.2.2, arată că $\mathcal{B}(A,V)$ este subspaţiu liniar al spaţiului liniar $\mathcal{M}(A,V)$.

Verificăm axiomele normei (N_1)–(N_3) din Definiţia 3.5.1 pentru aplicaţia definită în (3.76). Faptul că (N_1) şi (N_2) sunt satisfăcute de către (3.76) este evident în baza definiţiei şi proprietăţilor marginii superioare a unei submulţimi din $I\!R$.

Pentru a arăta că (N_3) este satisfăcută să observăm că avem

$$\|(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)\|\leq\|\mathbf{f}\|_{sup}+\|\mathbf{g}\|_{sup},\ \forall\,x\in A\text{ şi }\forall\,(\mathbf{f},\mathbf{g})\in\mathcal{B}(A,V)\times\mathcal{B}(A,V).$$

Această inegalitate, fiind satisfăcută pentru orice $x\in A$, are loc şi pentru supremum, prin urmare:

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|_{sup}\leq\|\mathbf{f}\|_{sup}+\|\mathbf{g}\|_{sup},$$

ceea ce arată că (N_3) este satisfăcută. ■

Observaţia 3.5.10. *Dacă $(V,\|\cdot\|)$ este spaţiu Banach, atunci $(\mathcal{B}(A,V),\|\cdot\|_{sup})$ este, de asemenea, spaţiu Banach. În particular, $\mathcal{B}(A)$ şi $C([a,b])$ sunt spaţii Banach.*

Într-adevăr, afirmaţiile făcute pot fi demonstrate după un raţionament analog celui din Exerciţiul 3.4.1. A se vedea însă şi exemplul următor. ■

Exerciţiul 3.5.2. *Fie A o mulţime nevidă arbitrară şi $\mathcal{B}(A)$ totalitatea funcţiilor reale definite pe A, mărginite. Să se arate că:*

1^0 *mulţimea $\mathcal{B}(A)$ este subspaţiu liniar al spaţiului $\mathcal{M}(A)$;*

2^0 *aplicaţia*

$$\|\cdot\|:\mathcal{B}(A)\to I\!R,\ \ \|f\|=\sup\{|f(x)|:\ x\in A\}\tag{3.77}$$

este o normă pe $\mathcal{B}(A)$;

3^0 *perechea $(\mathcal{B}(A),\|\cdot\|)$ este spaţiu Banach.*

Soluţie. Fie $f\in\mathcal{B}(A)$. Atunci, $f:A\to I\!R$ şi f mărginită, ceea ce înseamnă că $\sup\{|f(x)|:x\in A\}<+\infty$.
1^0 Să arătăm că $\mathcal{B}(A)$ este subspaţiu liniar al spaţiului liniar $\mathcal{F}(A)$.

În acest sens, fie $f,\ g\in\mathcal{B}(A)$ şi $\lambda\in I\!R$. Avem

$$|(\lambda f+g)(x)|\leq|\lambda|\sup\{|f(x)|:x\in A\}+\sup\{|g(x)|:x\in A\},\ \forall\,x\in A,$$

de unde deducem

$$\sup\{|(\lambda f+g)(x)|\}\leq|\lambda|\sup\{|f(x)|:x\in A\}+\sup\{|g(x)|:x\in A\}.$$

Fiindcă f şi g sunt elemente ale lui $\mathcal{B}(A)$, rezultă că există M_1 şi M_2 din $I\!R_+^*$ astfel încât $M_1=\sup\{|f(x)|:x\in A\},M_2=\sup\{|g(x)|:x\in A\}$. Atunci, din inegalitatea de mai sus deducem $\sup\{|(\lambda f+g)(x)|:x\in A\}<|\lambda|M_1+M_2$, care spune că $(\lambda f+g)\in\mathcal{B}(A)$. Din Teorema 3.2.2 reiese acum că $\mathcal{B}(A)$ este subspaţiu liniar al spaţiului liniar $\mathcal{M}(A)$.
2^0 Faptul că funcţia (3.77) este normă pe $\mathcal{B}(A)$ se demonstrează simplu arătând că sunt satisface proprietăţile $(N_1)-(N_3)$.
3^0 Să arătăm că $\mathcal{B}(A)$ este spaţiu metric complet în metrica indusă de norma (3.77), care este funcţia reală definită pe $\mathcal{B}(A)\times\mathcal{B}(A)$ prin

$$\rho(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|:\ x\in A\},\ \forall f\in\mathcal{B}(A),\quad\forall\,g\in\mathcal{B}(A).\tag{3.78}$$

Aceasta revine la a arăta că orice şir de funcţii fundamental în spaţiul metric $(\mathcal{B}(A),\rho)$ este convergent.

Din faptul că şirul de funcţii reale de variabila reală $x \in A$, $(f_n)_{n\geq 1}$ este fundamental, deducem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$\rho(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, m > N(\varepsilon), \quad \forall n > N(\varepsilon). \tag{3.79}$$

Din (3.78) şi (3.79), obţinem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \rho(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, x \in A,\ \forall\, m,\ n > N(\varepsilon). \tag{3.80}$$

Inegalitatea (3.80) arată că şirul numeric $(f_n(x))_{n\geq 1}$, $x \in A$, este fundamental în spaţiul metric $(I\!R, |\cdot - \cdot|)$ despre care ştim că este spaţiu metric complet, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in I\!R$, $\forall\, x \in A$. În acest fel, putem defini funcţia

$$f : A \to I\!R, \ \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall\, x \in A, \tag{3.81}$$

pe care convenim să o numim *limita punctuală* a şirului de funcţii (f_n). Să arătăm acum că f definită prin (3.81) este element al lui $\mathcal{B}(A)$ şi că $\rho(f_n, f) \to 0$, adică şirul (f_n) este convergent în metrica ρ la f.

Dacă în (3.80) facem $m \to \infty$ şi ţinem cont de (3.81), deducem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, f \in A,\ \forall n > N(\varepsilon). \tag{3.82}$$

Să observăm acum că avem

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{N(\varepsilon)+1}(x)| + |f_{N(\varepsilon)+1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M, \quad \forall\, x \in A, \tag{3.83}$$

unde $M > 0$ provine din faptul că $f_{N(\varepsilon)+1} \in \mathcal{B}(A)$, adică

$$|f_{N(\varepsilon)+1}| \leq M,\ \forall\, x \in A.$$

Inegalitatea (3.83) arată că $f \in \mathcal{B}(A)$.

Trecând acum în (3.82) la supremum, deducem $\rho(f_n, f) < \varepsilon$, $\forall\, n > N(\varepsilon)$, ceea ce arată că şirul (f_n) este convergent în spaţiul metric $(\mathcal{B}(A), \rho)$.

Aşadar, $(\mathcal{B}(A), \rho)$ este spaţiu metric complet şi cum metrica ρ este indusă de o normă rezultă că $\mathcal{B}(A)$ este spaţiu Banach. ■

Definiţia 3.5.5. *Fie A este o mulţime nevidă oarecare.*

Se numeşte **şir de funcţii reale**, *aplicaţia $f \in \mathcal{F}(I\!N, \mathcal{F}(A))$, unde $\mathcal{F}(A)$ este spaţiul vectorial al funcţiilor reale definite pe mulţimea A.*

Dacă $A \subset I\!R$, atunci şirul $(f_n)_{n\geq 1}, f_n \in \mathcal{F}(A)$, se numeşte **şir de funcţii reale de variabilă reală**, *iar dacă $f \in \mathcal{F}\Big(I\!N, (\mathcal{B}(A), \rho)\Big)$, convergenţa unui şir de funcţii reale în $(\mathcal{B}(A), \rho)$ se numeşte* **convergenţă uniformă**.

Exemplul 3.5.4. *Spaţiul liniar $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ este spaţiu Banach.*

Soluţie În baza Exemplului 3.2.3, mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ este spaţiu vectorial real, iar un element oarecare al acestuia este o matrice A de forma $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$. Să consideram aplicaţia

$$tr : \mathcal{M}_{n,n}(I\!R) \to I\!R, \quad tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}, \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R), \tag{3.84}$$

numită *urmă*; numărul real $tr(A)$ se numeşte *urma matricei A*.

Să remarcăm că aplicaţia tr are proprietăţile:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \quad \forall\, A,\, B \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R); \tag{3.85}$$

$$tr(\lambda A) = \lambda tr(A), \quad \forall\, \lambda \in I\!R, \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R); \tag{3.86}$$

$$tr(A^\top) = tr(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R), \tag{3.87}$$

unde $A^\top \in \mathcal{M}_{n,n}(A)$ se numeşte *transpusa* matricei $A,$ cu elementele $a'_{ij}, i \in \overline{1,n}, j \in \overline{1,m},$ date de $a'_{ij} = a_{ji}.$

Proprietatea (3.85) se numeşte *aditivitate* a aplicaţiei $tr,$ în timp ce (3.86) este denumită *omogenitate*. Altfel spus, aplicaţia tr este *aditivă* şi *omogenă*.

După cum se observă uşor, matricele A şi $A^\top$ sunt *înlănţuite*, sau *conformabile*, adică se poate efectua produsul matricelor A şi $A^\top$, notat $AA^\top$, care este o matrice pătratică de ordinul $m,$ deci $AA^\top \in \mathcal{M}_{m,m}(I\!R),$ având elementul de pe linia i şi coloana j egal cu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}.$

Prin urmare, putem scrie

$$AA^\top = \|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}\|_{m\times m}. \tag{3.88}$$

De asemenea, se poate efectua produsul matricelor $A^\top$ şi $A,$ întrucât sunt înlănţuite.

Să introducem acum aplicaţia

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_{m,n}(I\!R) \to I\!R, \quad \|A\| = \sqrt{tr(AA^\top)}, \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R). \tag{3.89}$$

Dacă efectuăm calculul în membrul drept al egalităţii din (3.89) şi ţinem cont de (3.84) şi (3.88), constatăm că numărul real $\|A\|$ din (3.89) are expresia

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \tag{3.90}$$

ceea ce arată că $\|A\|$ este rădăcina pătrată din suma pătratelor tuturor elementelor matricei $A.$

Evident $\|A\| \ge 0,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ şi $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = O,$ deci (N_1) din Definiţia 3.5.1 este satisfăcută.

Apoi, folosindu–ne de (3.84) şi (3.89), găsim

$$\|\lambda A\| = \sqrt{tr\Big((\lambda A)(\lambda A)^\top\Big)} = \sqrt{tr(\lambda^2 AA^\top)} = |\lambda|\sqrt{tr(AA^\top)} = |\lambda|\cdot\|A\|,$$

oricare ar fi $\lambda \in I\!R$ şi oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R),$ adică (N_2) este satisfăcută.

Pentru a arăta că (N_3) este verificată pornim de la $\|A+B\|^2$ şi efectuăm calculele folosind (3.90) şi inegalitatea

$$|tr(AB^\top)| \le \sqrt{tr(AA^\top)}\sqrt{tr(BB^\top)}, \quad \forall\, A,\, B \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \tag{3.91}$$

care nu este altceva decât inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz ce se poate demonstra la fel ca (3.11) pornind însă de la funcţia

$$\varphi : I\!R \to I\!R,\ \ \varphi(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}t - b_{ij})^2,\ t \in I\!R.$$

Se ajunge la $\|A+B\|^2 \le (\|A\| + \|B\|)^2,$ de unde, după extragerea radicalului în ambii membri, constatăm că (N_3) este satisfăcută.

Prin urmare, $\Big(\mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \|\cdot\|\Big)$ este spaţiu normat.

Rămâne să mai arătăm că orice şir de matrice fundamental în metrica indusă de norma (3.89), sau (3.90) este convergent.

În acest scop, folosim inegalităţile evidente

$$|a_{kl}| \le \|A\| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \tag{3.92}$$

care au loc oricare ar fi matricea $A = \|a_{ij}\|_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ şi oricare ar fi perechea de numere naturale $(k,l) \in M \times N$, unde $M = \{1, 2, ..., m\}$, iar $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Considerăm un şir arbitrar de matrice

$$(A_p)_{p\geq 1}, \quad A_p = \|a_{p;ij}\|_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \tag{3.93}$$

care să fie fundamental în metrica indusă de norma (3.72).

Aceasta înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există numărul natural $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$\|A_{q+p} - A_q\| < \varepsilon, \quad \forall\, q > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.94}$$

Din (3.92) – (3.94) deducem că oricare ar fi perechea $(i,j) \in M \times N$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ aşa încât

$$|a_{q+p;ij} - a_{q;ij}| < \varepsilon, \quad \forall\, q > N(\varepsilon), \quad \forall p \in I\!N^*. \tag{3.95}$$

Relaţiile (3.95) arată că şirurile $(a_{p;ij})_{p\geq 1}$, $(i,j) \in M \times N$ sunt fundamentale în spaţiul metric complet $(I\!R, |\cdot - \cdot|)$, deci sunt convergente, aşa că există $a_{0;ij} \in I\!R$ astfel încât

$$\lim_{p\to\infty} a_{p;ij} = a_{0;ij}, \quad \forall\,(i,j) \in M \times N. \tag{3.96}$$

Din Teorema 2.1.1 şi (3.96) deducem că pentru orice pereche $(i,j) \in M \times N$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N_{ij}(\varepsilon) \in I\!N^*$ astfel încât

$$|a_{p;ij} - a_{0;ij}| < \frac{\varepsilon}{m\cdot n}, \quad \forall p > N(\varepsilon). \tag{3.97}$$

Fie A_0 matricea de tipul $m \times n$ care are elementele $a_{0;ij}$, $(i,j) \in M \times N$.

Din partea a doua a inegalităţii (3.92), scrisă pentru matricea diferenţă $A_p - A_0$ şi (3.97), obţinem

$$\|A_p - A_0\| < \varepsilon, \quad p > N_0(\varepsilon), \tag{3.98}$$

unde $N_0(\varepsilon) = \max\{N_{ij}(\varepsilon) :\ (i,j \in M \times N)\} \in I\!N^*$, care arată că şirul de matrice $(A_p)_{p\geq 1}$ este convergent la matricea A_0, cu alte cuvinte $(\mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \rho)$ este spaţiu Banach. ■

Exerciţiul 3.5.3. *Să se arate că aplicaţiile:*

$$A \mapsto \|A\|' = \max\{|a_{ij}| :\ i \in \overline{1,m};\ j \in \overline{1,n}\};$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| :\ i \in \overline{1,m}\};$$

$$A \mapsto \|A\|_2 = \max\{\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| :\ j \in \overline{1,n}\},$$

sunt norme echivalente pe $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$, iar perechile

$$\Big(\mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \|\cdot\|'\Big), \quad \Big(\mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \|\cdot\|_1\Big), \quad \Big(\mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \|\cdot\|_2\Big)$$

sunt spaţii Banach.

3.6 Serii în spaţii Banach. Serii de funcţii

Spaţiile Banach constituie cadrul natural al teoriei seriilor pentru că în astfel de spaţii se definesc atât sume finite de vectori cât şi limite de şiruri. Prima posibilitate se datorează structurii de spaţiu vectorial a unui spaţiu Banach în timp ce a doua situaţie se datorează structurii de spaţiu metric.

Până acum s–au studiat serii de numere reale, adică serii în spaţiul metric obişnuit $(I\!R, |\cdot - \cdot|)$. S–a demonstrat că $(I\!R, |\cdot - \cdot|)$ este spaţiu Banach şi aceasta pentru că metrica obişnuită $d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|$ provine din funcţia modul $|\cdot|$ care satisface proprietăţile $(N_1) - (N_3)$ ale normei şi orice şir numeric fundamental este convergent.

Ne propunem acum să extindem noţiunea de serie numerică la cazul când termenii seriei sunt vectori dintr–un spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$, uneori şi complet, deci dintr–un spaţiu Banach.

Definiţia 3.6.1. *Ansamblul* $\{(\mathbf{a}_n)_{n\geq 1}, (\mathbf{s}_n)_{n\geq 1}\}$, *unde* $(\mathbf{a}_n)_{n\geq 1}$ *este un şir arbitrar de vectori din spaţiul normat* $(V, \|\cdot\|)$, *iar* $(\mathbf{s}_n)_{n\geq 1}$ *este un şir de vectori cu termenul de rang* n *dat de*

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k, \tag{3.99}$$

se numeşte **serie de vectori**.

Pentru o serie de vectori se poate utiliza una din notaţiile:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_n + ...;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n. \tag{3.100}$$

Elementele care definesc seria de vectori (3.100) au aceleaşi denumiri şi semnificaţii ca la seriile numerice, şi anume:

– $(\mathbf{a}_n)$ se numeşte *şirul termenilor seriei*;
– $(\mathbf{s}_n)$ este *şirul sumelor parţiale*;
– $\mathbf{a}_n$ se numeşte *termenul general*, sau *termenul de rang* n al seriei date;
– $\mathbf{s}_n$ este *suma parţială de rang* n a seriei (3.100).

,

Observaţia 3.6.1. *Seria de vectori* (3.100) *determină în mod unic şirul* $(\mathbf{s}_n)$ *al sumelor parţiale. Reciproc, dat şirul de vectori* $(\mathbf{a}_n)$, *se poate determina o serie de vectori care să aibă drept şir al sumelor parţiale tocmai şirul dat. Aceasta este seria*

$$\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2) + ... + (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}) + ... = \mathbf{a}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}), \tag{3.101}$$

numită **seria telescopică** *a şirului* $(\mathbf{a}_n)$.

Definiţia 3.6.2. *Seria de vectori* (3.100) *se numeşte* **convergentă**, *are suma* $\mathbf{s}$ *şi scriem* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{s}$, *dacă şirul de vectori* $(\mathbf{s}_n)_{n\geq 1}$ *este convergent la* $\mathbf{s} \in V$. *Altfel spus* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{s} \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k = \mathbf{s}$.

Definiţia 3.6.3. *Seria de vectori* (3.100) *se numeşte* **divergentă** *dacă nu este convergentă.*

Observaţia 3.6.2. *Şirul de vectori* $(\mathbf{a}_n)$ *este convergent dacă şi numai dacă seria telescopică* (3.101) *este convergentă.*

Observaţia rezultă din Definiţia 3.6.2 şi Observaţia 3.6.1 aplicate seriei (3.101) pentru care avem $\mathbf{s}_n = \mathbf{a}_n$. ■

Teorema 3.6.1. (**Criteriul general al lui Cauchy**) *Seria de vectori* (3.100) *este convergentă dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există* $N(\varepsilon) \in I\!N$ *astfel încât*

$$\|\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + ... + \mathbf{a}_{n+p}\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.102}$$

Demonstraţie. Din Definiţia 3.6.2 avem că seria de vectori (3.100) este convergentă $\Longleftrightarrow$ şirul sumelor parţiale $(\mathbf{s}_n)$ este convergent $\Longleftrightarrow$ $(\mathbf{s}_n)$ este şir Cauchy $\Longleftrightarrow$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$\|\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n\| = \|\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + ... + \mathbf{a}_{n+p}\| < \varepsilon, \ \forall n > N(\varepsilon), \ \forall\, p \in I\!N^*.$$

În concluzie, seria de vectori (3.100) este convergentă dacă şi numai dacă (3.102) are loc. **q.e.d.**

Observaţia 3.6.3. *Analizând demonstraţia din Teorema 3.6.1 vedem că pentru necesitatea condiţiei enunţate este de ajuns ca spaţiul liniar* V *să fie normat.*

Corolarul 3.6.1. (**Condiţie necesară de convergenţă**) *Dacă o serie de vectori dintr–un spaţiu normat* V *este convergentă, atunci şirul termenilor seriei este convergent la vectorul nul* $\mathbf{0}$.

Demonstraţie. Dacă (3.100) este convergentă, atunci luând $p = 1$ în (3.102) avem că $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât $\|\mathbf{a}_{n+1}\| < \varepsilon, \ \forall\, n > N(\varepsilon)$, care exprimă faptul că şirul normelor $(\|\mathbf{a}_n\|)_{n\geq 1}$ este convergent la $0 \in I\!R$, de unde, folosind Teorema 3.5.1, mai precis reciproca din (3.65), deducem $\mathbf{a}_n \to \mathbf{0}$. **q.e.d.**

Corolarul 3.6.2. (**Condiţie suficientă de divergenţă**) *Dacă şirul termenilor unei serii de vectori dintr–un spaţiu normat* V *este divergent sau limita sa, dacă există, nu este vectorul nul, atunci seria respectivă este divergentă.*

Afirmaţia rezultă prin efectuarea negaţiei în Corolarul 3.6.1. ■

Definiţia 3.6.4. *Seria de vectori (3.100) din spaţiul Banach $(V, \|\cdot\|)$ se numeşte* **convergentă în normă**, *sau* **absolut convergentă** *dacă seria cu termeni nenegativi* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|$, *numită* **seria normelor**, *este convergentă.*

Observaţia 3.6.4. *Este evident că termenii egali cu vectorul nul din seria (3.100) pot fi înlăturaţi fără a schimba natura seriei şi nici suma sa în caz de convergenţă. În consecinţă, seria normelor se poate considera că este o serie cu termeni pozitivi.*

Teorema 3.6.2. *Dacă seria (3.100) este convergentă în normă, atunci ea este convergentă şi, în plus, avem*

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|. \tag{3.103}$$

Demonstraţie. Aplicând criteriul general al lui Cauchy seriei normelor, care este o serie cu termeni pozitivi, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$\|\mathbf{a}_{n+1}\| + \|\mathbf{a}_{n+2}\| + ... + \|\mathbf{a}_{n+p}\| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.104}$$

Pe de altă parte, avem

$$\|\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + ... + \mathbf{a}_{n+p}\| \leq \|\mathbf{a}_{n+1}\| + \|\mathbf{a}_{n+2}\| + ... + \|\mathbf{a}_{n+p}\|. \tag{3.105}$$

Din (3.104), (3.105) şi Teorema 3.6.1 rezultă că seria de vectori (3.100) este convergentă. Avem apoi

$$\|\mathbf{s}_n\| \leq \sigma_n, \tag{3.106}$$

unde $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{a}_k\|$.

Trecând la limită în (3.106) pentru $n \to \infty$ şi ţinând cont că limita normei este egală cu norma limitei, afirmaţie care se va demonstra riguros ulterior, deducem (3.103). **q.e.d.**

Observaţia 3.6.5. *Reciproca din Teorema 3.6.2 nu este în general adevărată.*

Există serii de vectori într-un spaţiu Banach pentru care seriile normelor corespunzătoare să fie convergente fără ca seriile iniţiale să fie convergente.

Este de ajuns să dăm ca exemplu seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ din spaţiul normat complet $(I\!R, |\cdot|)$.

Definiţia 3.6.5. *Seria de vectori* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n$ *din spaţiul normat $(V, \|\cdot\|)$ se numeşte* **semi–convergentă**, *sau* **simplu convergentă** *dacă este convergentă, iar seria normelor* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|$ *este divergentă.*

Teorema 3.6.3. (**Criteriul majorării**) *Dacă pentru seria de vectori (3.100) din spaţiul Banach $(V, \|\cdot\|)$ există seria numerică cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, cu proprietăţile:*

$$\|\mathbf{a}_n\| \leq \alpha_n, \quad \forall\, n \in I\!N^*; \tag{3.107}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \qquad \textit{convergentă,} \tag{3.108}$$

atunci seria de vectori (3.100) este convergentă în normă.

Demonstraţie. În primul rând, din (1.83), rezultă

$$\|\mathbf{a}_{n+1}\| + \|\mathbf{a}_{n+2}\| + \ldots + \|\mathbf{a}_{n+p}\| \leq \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}. \tag{3.109}$$

Din (1.84) şi criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru serii numerice rezultă că $\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p} < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),\; \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.110}$$

Atunci, din (3.109), (3.110) şi criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice rezultă că seria normelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|$ este convergentă. **q.e.d.**

Alte două criterii de convergenţă pentru serii de vectori dintr–un spaţiu Banach $(V, \|\cdot\|)$ se obţin din Teorema 3.6.1 aplicată seriilor de vectori de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n, \tag{3.111}$$

unde $\alpha_n \in I\!R$ şi $\mathbf{u}_n \in V,\; n \in I\!N^*$.

Pentru $(n, p) \in I\!N^* \times I\!N^*$ notăm

$$\boldsymbol{\sigma}_{n,p} = \alpha_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} + \alpha_{n+2}\mathbf{u}_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}\mathbf{u}_{n+p}, \tag{3.112}$$

o *parte*, sau o (*bucată* a seriei (3.111),

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k, \tag{3.113}$$

suma parţială de rang n a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{u}_n, \tag{3.114}$$

şi

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathbf{u}_k, \tag{3.115}$$

o bucată a seriei (3.114).

Propoziţia 3.6.1. (**Identitatea lui Abel**) *Pentru orice serie de vectori din $(V, \|\cdot\|)$ de forma (3.108) are loc egalitatea*

$$\boldsymbol{\sigma}_{n,p} = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1})\mathbf{S}_k + \alpha_{n+p}\mathbf{S}_p,\; \forall (n, p) \in I\!N^* \times I\!N^*. \tag{3.116}$$

Demonstraţie. Avem mai întâi

$$\boldsymbol{\sigma}_{n,p} = \alpha_{n+1}\mathbf{S}_1 + \alpha_{n+2}(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) + ... + \alpha_{n+p}(\mathbf{S}_p - \mathbf{S}_{p-1}). \tag{3.117}$$

Grupând convenabil termenii din (3.117), obţinem (3.116). **q.e.d.**

Propoziţia 3.6.2. (**Criteriul lui Abel**) *Fie seria de vectori* (3.111) *cu termeni din spaţiul Banach* $(V, \|\cdot\|)$. *Dacă*

(*i*) *seria de vectori* (3.114) *este convergentă;*

(*ii*) *şirul numeric* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *este monoton şi mărginit,*

atunci (3.111) *este convergentă.*

Demonstraţie. Din (*ii*) rezultă existenţa numărului real $K > 0$ astfel încât să avem

$$|\alpha_n| \leq K, \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{3.118}$$

Convergenţa seriei (3.114) implică, după Teorema 3.6.1, că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$\|\mathbf{S}_p\| = \|\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n\| < \frac{\varepsilon}{3K}, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.119}$$

Din (3.117) şi (3.119), obţinem $\|\boldsymbol{\sigma}_{n,p}\| \leq \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}| \|\mathbf{S}_k\| + |\alpha_{n+p}| \|\mathbf{S}_p\|$, din care, utilizând monotonia şirului $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ şi (3.119), deducem

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n,p}\| \leq \frac{\varepsilon}{3K}(|\alpha_{n+1}| + 2|\alpha_{n+p}|), \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.120}$$

Folosind acum (3.118) în (3.120), deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ exist ă $N(\varepsilon) \in$ astfel încât

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n,p}\| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.121}$$

Din (3.121) şi Teorema 3.6.1 rezultă că seria de vectori (3.111) este convergentă. **q.e.d.**

Propoziţia 3.6.3. (**Criteriul lui Dirichlet**) *Dacă :*

(*a*) *şirul sumelor parţiale* $(\mathbf{s}_n)$ *al seriei* (3.114) *este mărginit;*

(*b*) *şirul numeric* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *este monoton şi convergent la zero,*

atunci seria de vectori (3.111) *este convergentă.*

Demonstraţie. Din ipoteza (*a*) rezultă existenţa scalarului real $M > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{s}_n\| \leq M, \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{3.122}$$

Din (3.116), (3.115) şi (3.122), găsim

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\sigma}_{n,p}\| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}|(\|\mathbf{s}_{n+k}\| + \|\mathbf{s}_n\|) + |\alpha_{n+p}|(\|\mathbf{s}_{n+p}\| + \|\mathbf{s}_n\|) \leq \\
&\leq 2M(|\alpha_{n+1}| + 2|\alpha_{n+p}|).
\end{aligned} \tag{3.123}
$$

Din ipoteza (b) deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ este satisfăcută inegalitatea $|\alpha_n| < \varepsilon/(6M)$ care, folosită în (3.123), conduce la

$$
\|\boldsymbol{\sigma}_{n;p}\| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in I\!N^*. \tag{3.124}
$$

Rezultatul (3.124), împreună cu Teorema 3.6.1, demonstrează propoziţia. **q.e.d.**

Definiţia 3.6.6. *Se numeşte* **serie de funcţii vectoriale** *o serie de vectori în spaţiul liniar $\mathcal{F}(A, V)$, unde V este un spaţiu liniar arbitrar, iar A este o mulţime nevidă arbitrară. Dacă $V = I\!R$, seria de funcţii corespunzătoare se numeşte* **serie de funcţii reale**. *În plus, dacă $A \subset I\!R$, seria de funcţii se numeşte* **serii de funcţii reale de variabilă reală**.

Prin urmare, o serie de funcţii vectoriale are forma $\sum \mathbf{f}_n$, unde $\mathbf{f}_n \in \mathcal{F}(A, V)$.

Un caz particular de serii de funcţii reale de variabilă reală este cel al *seriilor de puteri* când $f_n(x) = a_n x^n$.

Dacă V este spaţiu normat cu norma $\|\cdot\|$ şi $\mathbf{f}_n \in \mathcal{B}(A, V)$, atunci convergenţa seriei de funcţii $\sum \mathbf{f}_n$, unde $\mathbf{f}_n \in \mathcal{B}(A, V)$, în metrica indusă de metrica lui Cebâşev se numeşte *convergenţă uniformă*.

Pe de altă parte, fiecărui $x \in A$ i se asociază seria de vectori $\sum \mathbf{f}_n(x)$ cu termeni din $(V, \|\cdot\|)$.

Dacă această serie de vectori este convergentă în punctul $x \in A$, atunci $x \in A$ se numeşte *punct de convergenţă* al seriei de funcţii.

Mulţimea punctelor de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum \mathbf{f}_n$ este o submulţime B a mulţimii A care poartă denumirea de *mulţimea de convergenţă* a seriei de funcţii respective.

În ipoteza că B este mulţime nevidă, fiecărui $x \in B$ i se poate pune în corespondenţă un vector din V prin $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k(x)$

Aplicaţia $\mathbf{f} : B \to V, \quad \mathbf{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k(x),$ se numeşte *suma punctuală* a seriei de funcţii $\sum \mathbf{f}_n$ pe mulţimea B şi se spune că seria de funcţii corespunzătoare este *punctual convergentă* pe mulţimea $B \subset A$ şi are suma $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(B, V)$.

Aşadar, la o serie de funcţii întâlnim două tipuri de convergenţă, una punctuală şi cealaltă uniformă.

3.7 Spaţii prehilbertiene. Spaţii Hilbert

Fie H un spaţiu vectorial real.

Definiţia 3.7.1. *Numim* **produs scalar**, *sau* **tensor metric** *pe H funcţia, aplicaţia $g : H \times H \to I\!R$ care* *satisface următoarele proprietăţi numite* **axiomele produsului scalar**:

$$(PS_1) \quad g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{y},\mathbf{x}), \;\; \forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in H \times H \;\; (\textit{simetrie});$$

$$(PS_2) \quad g(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) + g(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}), \;\; \forall\,(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) \in H \times H \times H;$$

$$(\textit{aditivitate în raport cu primul argument});$$

$$(PS_3) \quad g(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda g(\mathbf{x},\mathbf{y}), \;\; \forall \lambda \in I\!R \;\; \textit{şi} \;\; \forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in H \times H$$

$$(\textit{omogenitate în raport cu argumentul întâi});$$

$$(PS_4) \quad g(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0, \;\; \forall \mathbf{x} \in H; \;\; g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(\textit{pozitiva definire a funcţiei } g \textit{ când argumentele coincid}).$$

Definiţia 3.7.2. *Valoarea aplicaţiei* $g : H \times H \to I\!R$ *care satisface* $(PS_1)-(PS_4)$, *în perechea de vectori* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in H \times H$, *se numeşte* **produsul scalar** *al vectorilor* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$.

Definiţia 3.7.3. *Se numeşte* **spaţiu prehilbertian**, *sau* **spaţiu Euclidian** *perechea* (H,g), *unde* H *este un spaţiu vectorial real, iar* g *este un tensor metric pe* H. *Aplicaţia* $g : H \times H \to I\!R$, *care satisface* $(PS_1)-(PS_4)$, *defineşte o* **structură Euclidiană** *pe* H.

Propoziţia 3.7.1. *Dacă* (H,g) *este un spaţiu Euclidian, atunci pentru orice vectori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_m$, $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,...,\mathbf{y}_n \in H$ *şi orice scalari* $\lambda,\mu,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n \in I\!R$ *au loc egalităţile*:

$$\begin{gathered} g(\mathbf{x},\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x},\mathbf{y}_2), \\ (\textit{aplicaţia } g \textbf{ este aditivă în al doilea argument}); \end{gathered} \tag{3.125}$$

$$\begin{gathered} g(\mathbf{x},\mu\mathbf{y}) = \mu g(\mathbf{x},\mathbf{y}), \\ (\textit{aplicaţia } g \textbf{ este omogenă în argumentul al doilea}); \end{gathered} \tag{3.126}$$

$$g(\mathbf{x},\mathbf{0}) = 0; \tag{3.127}$$

$$\begin{gathered} g\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{y}_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j g(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_j) \\ (\textit{aplicaţia } g \textit{ este } \textbf{\textit{formă biliniară}} \textit{ pe } H). \end{gathered} \tag{3.128}$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra (3.125) şi (3.126) folosim $(PS_1),(PS_2)$ şi (PS_3). Avem: $g(\mathbf{x},\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) = g(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2,\mathbf{x})$, în baza lui (PS_1); apoi, $g(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2,\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}_1,\mathbf{x})+g(\mathbf{y}_2,\mathbf{x})$, conform lui (PS_2); în sfârşit, utilizând din nou (PS_1) ajungem la concluzia că (3.125) este adevărată.

Relaţia (3.126) rezultă din $g(\mathbf{x},\mu\mathbf{y}) = g(\mu\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mu g(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mu g(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Pentru a demonstra (3.127), vom scrie vectorul nul în forma $\mathbf{0} = \mathbf{y}+(-\mathbf{y}) = \mathbf{y}+(-1)\mathbf{y}$, $\forall\,\mathbf{y} \in H$. Atunci, $g(\mathbf{x},\mathbf{0}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}+(-1)\mathbf{y}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (-1)g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}) - g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, prin urmare (3.127) este adevărată.

Egalitatea (3.128) se demonstrează prin inducţie matematică după numerele naturale nenule m şi n folosindu–ne de axiomele $(PS_1)-(PS_4)$ şi de (3.125), (3.126). **q.e.d.**

Definiţia 3.7.4. *Funcţia* $g : H \times H \to I\!R$ *se numeşte* **formă biliniară** *pe spaţiul vectorial* H *dacă satisface* $(PS_2),(PS_3)$, (3.125) *şi* (3.126). *Forma biliniară* g *pe* H *se numeşte* **simetrică** *dacă este satisfăcută şi axioma* (PS_1).

Definiţia 3.7.5. *Aplicaţia* $h : H \to I\!R,\ \ h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x},\mathbf{x}),\ \forall\,\mathbf{x} \in H$, *unde* g *este o formă biliniară simetrică pe* H, *se numeşte* **formă pătratică** *pe* H *asociată lui* g.

Forma pătratică h *pe* H *se numeşte* **pozitiv definită** *dacă :*

$$h(\mathbf{x}) \geq 0,\ \forall\,\mathbf{x} \in I\!R;\ h(\mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Observaţia 3.7.1. *Un produs scalar pe* H *este o formă biliniară simetrică pe* H *cu proprietatea că forma pătratică asociată ei este pozitiv definită.*

Observaţia 3.7.2. *Pe un spaţiu vectorial se pot defini mai multe produse scalare. Dacă* g_1 *şi* g_2 *sunt doi tensori metrici pe* H, *atunci spaţiile Euclidiene* (H,g_1) *şi* (H,g_2) *sunt distincte, deci au proprietăţi diferite.*

Pentru produsul scalar al vectorilor $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ se obişnuiesc diverse notaţii cum ar fi:

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) =< \mathbf{x},\mathbf{y} >;\ g(\mathbf{x},\mathbf{y}) =< \mathbf{x}/\mathbf{y} >;\ g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y};\ \text{ etc.}$$

În continuare, pentru produsul scalar al vectorilor $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din H vom folosi notaţia $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, sau notaţia $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}$, iar pentru aplicaţia g vom utiliza un punct centrat.

Teorema 3.7.1. *Într-un spaţiu Euclidian* $(H,\cdot)$ *are loc inegalitatea:*

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}},\quad \forall\,\mathbf{x},\mathbf{y}) \in H, \tag{3.129}$$

cunoscută ca **inegalitatea lui Cauchy–Buniakowski–Schwarz**. *Egalitatea în* (3.129) *are loc dacă şi numai dacă vectorii* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$ *sunt liniar dependenţi, deci când există* $\alpha \in I\!R$ *astfel încât* $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$.

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sau $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, (3.129) are loc ca egalitate în baza lui (3.127). Dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ şi $\mathbf{y}$ sunt vectori arbitrari din H, dar fixaţi, iar $t \in I\!R$ este arbitrar, atunci din (PS_4) rezultă

$$(t\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(t\mathbf{x}-\mathbf{y}) \geq 0,\quad \forall t \in I\!R. \tag{3.130}$$

Folosind (3.128) şi (PS_1), din (3.130), obţinem

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})t^2 - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})t + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \geq 0,\quad \forall\,t \in I\!R. \tag{3.131}$$

Deoarece $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, din (PS_4) avem $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$, iar membrul întâi din (3.131) este un trinom de gradul al doilea.

Trinomul din (3.131) este nenegativ dacă şi numai dacă discriminantul său este negativ, cel mult egal cu zero, adică

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) \leq 0. \tag{3.132}$$

Inegalitatea (3.129) rezultă din (3.132) după trecerea în membrul doi al celui de–al doilea termen urmată de extragerea radicalului din ambii membri.

Dacă vectorii $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ sunt liniar dependenţi (coliniari), atunci $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}, \alpha \in I\!R$ şi cei doi membri din (3.129) devin egali cu $|\alpha|(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})$ şi prin urmare (3.129) funcţionează ca egalitate.

Reciproc, dacă ambii membri din (3.129) sunt nenuli şi egali între ei, atunci trinomul din membrul întâi al lui (3.131) are rădăcina dublă $t = \alpha.$ În acest caz, membrul întâi al lui (3.130) devine nul pentru $t = \alpha,$ adică

$$(\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y})\cdot(\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0. \tag{3.133}$$

Folosind acum (PS_4), din (3.133) deducem $\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, deci vectorii $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ sunt liniar dependenţi. **q.e.d.**

Corolarul 3.7.1. *Dacă $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ sunt vectori nenuli din H, atunci:*

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}} \leq 1;$$

există numărul real $\varphi \in [0, \pi]$ astfel încât să avem

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}}. \tag{3.134}$$

Definiţia 3.7.6. *Numărul real $\varphi \in [0, \pi]$ introdus prin (3.134) se numeşte* **unghi neorientat** *dintre vectorii nenuli $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din $(H, \cdot)$.*

Definiţia 3.7.7. *Vectorii $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din spaţiul Euclidian $(H, \cdot)$ se numesc* **ortogonali** *dacă $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.*

Observaţia 3.7.3. *Vectorul nul este ortogonal pe orice vector al spaţiului Euclidian H. Vectorii nenuli $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din spaţiul Euclidian H sunt ortogonali dacă şi numai dacă unghiul dintre ei este $\dfrac{\pi}{2}$.*

Într-adevăr, aceste afirmaţii rezultă din (3.127), Definiţia 3.7.6 şi (3.134). ■

Teorema 3.7.2. *Orice spaţiu prehilbertian $(H, \cdot)$ este spaţiu normat.*

Demonstraţie. Fie aplicaţia $\|\cdot\| : H \to I\!R$, definită prin

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in H. \tag{3.135}$$

În baza lui (PS_4), rezultă că axioma (N_1) din Definiţia 3.5.1 este satisfăcută de către aplicaţia (3.135). Apoi, şirul de egalităţi:

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{(\lambda\mathbf{x})\cdot(\lambda\mathbf{x})} = \sqrt{\lambda^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})} = |\lambda|\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|,$$

adevărate în baza egalităţilor (3.135), (PS_3), (3.126) şi din nou (3.135), arată că (3.135) verifică axioma (N_2) din Definiţia 3.5.1. Pentru a demonstra că este satisfăcută axioma (N_3) din aceeaşi definiţie, pornim de la expresia lui $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$. Folosind pe rând (3.135), (3.128), (PS_1), din nou (3.135), apoi (3.129) şi, la urmă iarăşi (3.135), constatăm:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}.$$

Luând în calcul simetria produsului scalar a doi vectori, deducem:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|.$$

Aplicând aici inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz, găsim:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2,$$

din care tragem concluzia

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|, \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y}\in H. \tag{3.136}$$

Inegalitatea (3.136) arată că aplicaţia definită de (3.135) satisface axioma (N_3). Prin urmare, funcţia (3.135) este normă pe spaţiul Euclidian H, indusă de produsul scalar, ceea ce atrage că $(H, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat. **q.e.d.**

Definiţia 3.7.8. *Fie spaţiul Euclidian $(H,\cdot)$. Norma indusă de produsul scalar, definită de (3.135), se numeşte* **normă Euclidiană** *pe H.*

Observaţia 3.7.4. *Deoarece orice normă pe un spaţiu vectorial H induce o metrică d pe mulţimea H definită prin $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, rezultă că norma Euclidiană pe H induce la rândul ei o metrică pe H dată de*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad \forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in H\times H. \tag{3.137}$$

Dacă norma care intervine în (3.136) este normă Euclidiană, atunci inegalitatea corespunzătoare se numeşte *inegalitatea lui Minkowski*[5].

Din (3.135) observăm că inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz se scrie în forma

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|, \quad \forall\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in H, \tag{3.138}$$

în care desigur norma din membrul al doilea este norma Euclidiană pe H.

Observaţia 3.7.5. *Dacă avem în vedere cazul în care inegalitatea (3.129) devine egalitate şi situaţia în care un număr real este egal cu modulul său, deducem că în inegalitatea lui Minkowski (3.136) egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$, cu $\alpha \ge 0$, adică cei doi vectori sunt coliniari şi de acelaşi* **sens**.

[5] Minkowski, Hermann (1864–1906), matematician polonez.

Definiţia 3.7.9. *Un sistem de vectori dintr–un spaţiu Euclidian se numeşte* **sistem ortogonal** *dacă oricare doi vectori ai sistemului sunt ortogonali; în plus, dacă fiecare vector este versor (are norma egală cu* 1*), sistemul se numeşte* **ortonormat**.

Observaţia 3.7.6. *Faptul că sistemul de vectori* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ *din spaţiul Euclidian* $(H, \cdot)$ *este ortonormat se exprimă prin*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \overline{1, n}, \tag{3.139}$$

unde δ_{ij} *sunt* **simbolii lui Kronecker**[6] *definiţi prin:* $\delta_{ij} = 0$, *dacă* $i \neq j$ *şi* $\delta_{ij} = 1$, *dacă* $i = j$, $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$.

Definiţia 3.7.10. *O bază* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ *a spaţiului Euclidian* $n-$*dimensional* $(H, \cdot)$ *se numeşte* **bază ortonormată** *dacă vectorii care o compun satisfac condiţiile (3.139).*

Observaţia 3.7.7. *Toate proprietăţile şirurilor de vectori din spaţii normate rămân valabile şi în cazul spaţiilor Euclidiene. Există totuşi proprietăţi specifice spaţiilor Euclidiene. Unele din ele le punem în evidenţă în continuare.*

Teorema 3.7.3. *Într-un spaţiu Euclidian* $(H, \cdot)$ *au loc următoarele implicaţii:*

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \quad \text{şi} \quad \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0 \Longrightarrow \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \to \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0; \tag{3.140}$$

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{0} \quad \text{şi} \quad \|\mathbf{y}_n\| \leq M, \ \forall n \in I\!N^* \Longrightarrow \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \to 0; \tag{3.141}$$

$$\|\mathbf{x}_n\| \leq M, \quad \forall\, n \in I\!N^* \quad \text{şi} \quad \mathbf{y}_n \to \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \to 0. \tag{3.142}$$

Demonstraţie. Implicaţia (3.140) se obţine evaluând diferenţa $\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0$. Adunând şi scăzând $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_n$, grupând apoi termenii convenabil şi aplicând inegalitatea lui Minkowski, găsim

$$|\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n\| + \|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\| \tag{3.143}$$

Şirul numeric $(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|)_{n \geq 1}$ este convergent la zero, iar $(\|\mathbf{y}_n\|)_{n \geq 1}$ este şir mărginit. Prin urmare, avem

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n\| \to 0. \tag{3.144}$$

De asemenea, avem

$$\|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\| \to 0. \tag{3.145}$$

Din (3.143) – (3.145) rezulă evident (3.140).

Relaţiile (3.141) şi (3.142) sunt consecinţe directe ale inegalităţii (3.138) aplicată vectorilor $\mathbf{x}_n$ şi $\mathbf{y}_n$. **q.e.d.**

[6] Kronecker, Leopold (1823–1891), matematician german.

Definiţia 3.7.11. *Un spaţiu Euclidian care este complet în metrica Euclidiană se numeşte* **spaţiu Hilbert**[7].

Ne interesează care este expresia unui produs scalar g pe un spaţiu vectorial $n-$dimensional H.

Pentru aceasta considerăm mai întâi o bază a spaţiului, fie aceasta $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, care nu este neapărat baza canonică. Dacă $g : H \times H \to I\!R$ este un produs scalar pe H atunci aplicaţia g este cunoscută dacă şi numai dacă se cunoaşte numărul real $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ în orice pereche de vectori $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$. Dar, după Teorema 3.2.3,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}Y, \tag{3.146}$$

unde $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in H^n$, iar X, şi Y, sunt matricele unicolonare cu n linii care au ca elemente coordonatele lui $\mathbf{x}$, respectiv $\mathbf{y}$, în baza $\mathcal{B}$.

Aplicând acum (3.128) vectorilor $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din (3.146), deducem

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j g_{ij} = X^{\top} G\, Y, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \tag{3.147}$$

unde s–a făcut notaţia

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i,\, j \in \overline{1, n}, \tag{3.148}$$

iar $G \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ este matricea pătratică de ordinul n care are ca elemente cantităţile g_{ij} din (3.148).

Relaţia (3.147) arată că $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este cunoscută dacă şi numai dacă sunt cunoscute numerele g_{ij}, $\forall\,(i, j) \in N \times N$, unde $N = \{1, 2, ..., n\}$, numere care sunt evident legate de baza $\mathcal{B}$.

Din (PS_1) şi (3.146) rezultă $g_{ij} = g_{ji}$, $\forall\,(i, j) \in N \times N$, ceea ce arată că $G = G^{\top}$, adică G este *matrice simetrică*.

Să vedem acum ce implicaţie are asupra lui G axioma (PS_4).

Forma pătratică $h : H \to I\!R$ din Definiţia 3.7.5 este

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j = X^{\top} G\, X, \quad \forall \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X \in H. \tag{3.149}$$

Axioma (PS_4) este verificată dacă h este pozitiv definită. Pentru a se întâmpla aceasta, trebuie ca prin *grupări convenabile* ale termenilor în membrul doi al relaţiei (3.149) să putem realiza, dacă este posibil, o sumă de n pătrate cu coeficienţi pozitivi. Dacă acest lucru se poate realiza, spunem că s–a adus forma pătratică la *expresie canonică* prin *metoda lui Gauss*.

Există şi alte condiţii, cum ar fi de exemplu cele ale lui Sylvester[8], pe care dacă matricea G le satisface, atunci pozitiva definire a lui h este asigurată.

Alteori este convenabil să stabilim dacă h este pozitiv definită analizând *valorile proprii* ale lui G. Acestea sunt rădăcinile *ecuaţiei caracteristice* ale matricei G, şi anume $\det\,(G - \lambda\, I_n) = 0$, unde $I_n = \|\delta_{ij}\| \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ este *matricea unitate* din $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$.

Se ştie că (vezi [9, p. 175]) valorile proprii ale matricei simetrice G sunt toate reale şi, dacă sunt toate pozitive, atunci h este formă pătratică pozitiv definită.

Reciproc, dacă $G \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ este o matrice simetrică cu toate valorile proprii pozitive, atunci aplicaţia $g : H \times H \to I\!R$ care în baza $\mathcal{B} \subset H$ are forma (7.23) satisface axiomele $(PS_1) - (PS_4)$, deci este un produs scalar pe H. În acest mod am demonstrat

Teorema 3.7.4. *Aplicaţia $g : H \times H \to I\!R$ este produs scalar pe spaţiul vectorial H dacă şi numai dacă într–o bază $\mathcal{B} \subset H$ există o matrice pătratică simetrică G, de ordinul n, care are toate valorile proprii pozitive, astfel încât g să aibă expresia (7.23).*

[7]Hilbert, David (1862)–(1943), remarcabil matematician german.

[8]Sylvester, James Joseph (1814–1897), matematician englez.

Definiţia 3.7.12. *Matricea pătratică simetrică G, de ordinul n, cu ajutorul căreia se exprimă în baza $\mathcal{B} \subset H$ forma biliniară simetrică g pe spaţiul vectorial H, se numeşte* **matricea formei biliniare simetrice** g, *sau* **matricea formei pătratice h asociate lui** g.

Am menţionat mai sus că pozitiva definire a formei pătratice h pe spaţiul liniar H poate fi precizată cu condiţiile lui Sylvester pe care le dăm fără demonstraţie în teorema de mai jos.

Teorema 3.7.5. (**Condiţiile lui Sylvester**) *Fie $g : H \times H \to I\!R$ un produs scalar pe spaţiul liniar H, $h : H \to I\!R$ forma pătratică asociată formei biliniare simetrice şi G matricea sa într-o bază $\mathcal{B} \subset H$. Atunci, forma pătratică h este pozitiv definită dacă sunt satisfăcute condiţiile lui Sylvester*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{vmatrix} > 0, \ \ \forall\, k \in \overline{1, n}. \tag{3.150}$$

Definiţia 3.7.13. *Numărul real Δ_k din (3.150) se numeşte* **minor principal de ordin** k *al matricei simetrice $G \in \mathcal{M}n, n(I\!R)$.*

3.8 Principiul contracţiei

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$ o aplicaţie definită pe mulţimea X cu valori în X.

Definiţia 3.8.1. *Elementul $x \in X$ se numeşte* **punct fix** *pentru aplicaţia (operatorul) T dacă*

$$T(x) = x. \tag{3.151}$$

Definiţia 3.8.2. *Aplicaţia $T : X \to X$ se numeşte* **contracţie** *pe X dacă există numărul nenegativ subunitar $0 \le q < 1$, numit* **factor de contracţie**, *astfel încât*

$$d(T(x), T(y)) \le q d(x, y), \quad \forall\, x,\, y \in X. \tag{3.152}$$

Importanţa spaţiilor metrice complete este pusă în evidenţă de următorul *principiu al contracţiei.*

Teorema 3.8.1. (**Picard**[9]**–Banach**) *Dacă $T : X \to X$ este o contracţie pe spaţiul metric complet (X, d), atunci T are un punct fix unic determinat.*

[9]Picard, Émile (1856–1941), matematician francez.

Demonstrație. Fixăm un punct x_0 arbitrar din X.

Dacă $T(x_0) = x_0$, atunci x_0 este punct fix al contracției T care vom vedea că este unic.

Dacă $T(x_0) \neq x_0$, atunci construim șirul de puncte $(x_n)_{n\geq 0}$, conform relației de recurență

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad x_0 \in X \quad \text{dat și} \quad n \in I\!N. \tag{3.153}$$

Arătăm că $(x_n)_{n\geq 0}$ este șir fundamental în spațiul metric complet (X, d).

Pentru aceasta să observăm că relația de recurență (3.153) și inegalitatea (3.152) conduc pe rând la:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq q d(x_n, x_{n-1});$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}), \quad n \in I\!N^*. \tag{3.154}$$

Folosind (3.154), găsim

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0), \quad \forall\, n \in I\!N. \tag{3.155}$$

Să calcuăm $d(x_{n+p}, x_n)$. Avem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \tag{3.156}$$

Folosind (3.155) în (3.156), obținem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (q^n + q^{n+1} + ... + q^{n+p-1})d(x_1, x_0). \tag{3.157}$$

După efectuarea sumei progresiei geometrice din membrul doi al inegalității (3.157), găsim

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq q^n \frac{1-q^p}{1-q} d(x_1, x_0) = kq^n(1-q^p), \tag{3.158}$$

unde am făcut notația $k = \dfrac{d(x_1, x_0)}{1-q}$. Având în vedere că factorul de contracție este nenegativ și subunitar, din (3.158), prin majorare, obținem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq kq^n, \quad \forall\, (n, p) \in I\!N \times I\!N. \tag{3.159}$$

Ținând cont că $q^n \to 0$, din (3.159), după trecerea la limită pentru $n \to \infty$, deducem

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+p}, x_n) = 0, \quad \forall\, n \in I\!N. \tag{3.160}$$

Rezultatul (3.160) demonstrează că $(x_n)_{n\geq 0}$ este șir fundamental în spațiul metric (X, d). Cum (X, d) este spațiu metric complet rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, deci există un punct $x \in\ X$, astfel încât

$$x_n \to x \Longleftrightarrow d(x_n, x) \to 0. \tag{3.161}$$

În baza axiomei (M_1) din Definiția 3.1.1 și a lui (3.152), deducem

$$0 \leq d(T(x_n), T(x)) \leq qd(x_n, x). \tag{3.162}$$

Trecând la limită în

$$T(x_n) \to T(x). \tag{3.163}$$

Din (3.161), (3.153), (3.163) și unicitatea limitei unui șir de puncte în spațiul metric (X, d), rezultă (3.151).

Unicitatea punctului fix găsit mai sus rezultă imediat, căci dacă există și un alt punct fix al opertorului T, atunci $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq q\, d(x, y)$, de unde rezultă

$$(1-q)d(x, y) \leq 0. \tag{3.164}$$

Cum $q < 1$, din (3.164), găsim

$$d(x, y) \leq 0. \tag{3.165}$$

Dacă la (3.165) adăugăm axioma (M_1) de nenegativitate a distanței, găsim $d(x, y) = 0$ de unde, folosind aceeași axiomă (M_1), vedem că $x = y$, ceea ce arată că punctul fix este unic determinat. **q.e.d.**

Metoda de demonstraţie a existenţei şi unicităţii punctului fix se numeşte *metoda aproximaţiilor succesive* şi a fost dezvoltată de matematicianul francez Émile Picard pentru a demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x,y)$ care satisface condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$.

Teorema 3.8.1 a fost formulată în anul 1932 de către matematicianul polonez Stephan Banach şi demonstrată după metoda sugerată de Picard, de aceea este cunoscută sub numele de *Teorema Picard–Banach*, însă este întâlnită şi sub denumirea *Teorema de punct fix a lui Banach*.

Şirul fundamental $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin (3.153) se numeşte *şirul aproximantelor* punctului fix, sau şirul *aproximaţiilor succesive* ale acestuia.

Calculul erorii metodei aproximaţiilor succesive. Săa evaluăm eroarea care se comite prin înlocuirea soluţiei ecuaţiei (3.151) cu o *aproximantă de ordinul* n, adică cu termenul x_n al şirului definit de (3.153), deci urmărim să evaluăm $d(x_n, x)$. În primul rând, din (3.159) şi axioma (M_3) din Definiţia 3.1.1, deducem

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \leq kq^n + d(x_{n+p}, x). \tag{3.166}$$

Dacă în (3.166) fixăm pe n, facem $p \to \infty$ şi ţinem cont de faptul că

$$\lim_{p\to\infty} x_{n+p} = x \Longleftrightarrow \lim_{p\to\infty} d(x_{n+p}, x) = 0,$$

obţinem

$$d(x_n, x) \leq k\, q^n, \quad \forall\, n \in I\!N. \tag{3.167}$$

Aşadar, *eroarea* care se face înlocuind punctul fix x al contracţiei T pe spaţiul metric complet (X, d) cu aproximanta de ordin n este mai mică decât q^n, şi dacă dorim că această eroare să fie mai mică decât un $\varepsilon > 0$ dat, atunci din (3.167) avem $k\, q^n < \varepsilon$, din care deducem

$$n > \log_q \frac{\varepsilon}{k} \geq [\log_q \frac{\varepsilon}{k}] = N(\varepsilon) \in I\!N. \tag{3.168}$$

Prin urmare, dacă înlocuim punctul fix cu aproximanta de ordin n, unde $n > N(\varepsilon)$, iar $N(\varepsilon)$ este partea întreagă a numărului real din (3.168), atunci eroarea care se înfăptuieşte când în locul punctului fix x al contracţiei T se ia aproximanta de ordinul n, unde n este astfel încât (3.168) să aibă loc, este mai mică decât ε.

Observaţia 3.8.1. *Pentru demonstraţia unicităţii punctului fix al contracţiei T nu este necesar ca spaţiul metric (X, d) să fie complet.*

3.9 Mulţimi închise şi mulţimi deschise într-un spaţiu metric

În acest paragraf se scot în evidenţă tipuri remarcabile de puncte şi de submulţimi de puncte ale unui spaţiu metric (X, d) care vor permite un studiu aprofundat al proprietăţilor locale şi globale ale funcţiilor, precum şi analiza trecerii la limită.

Fie în acest sens un spaţiu metric (X, d), A o submulţime nevidă a lui X, $\mathcal{V}(x)$ sistemul de vecinătăţi al unui punct $x \in X$ şi $B(x, \varepsilon)$ bila deschisă cu centrul în x şi rază egală cu $\varepsilon > 0$.

Definiţia 3.9.1. *Punctul $x \in X$ se numeşte* **punct aderent în** X, *sau* **punct de aderenţă în** X *pentru mulţimea A dacă orice vecinătate a punctului x conţine cel puţin un punct din A, adică*

$$V_x \cap A \neq \emptyset, \quad \forall\, V_x \in \mathcal{V}(x). \tag{3.169}$$

Observaţia 3.9.1. *Condiţia* (3.169) *este echivalentă cu*

$$A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.170}$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiţia 3.1.10, Propoziţia 3.1.7 şi Definiţia 3.9.1. ■

Observaţia 3.9.2. *Dacă $x \in X$ este punct aderent în X pentru mulţimea A, atunci poate exista o vecinătate $V_x \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V_x \cap A = \{x\}$.*

De exemplu, pentru mulţimea $A = \{-1\} \cup (0, 3)$ din spaţiul Euclidian $I\!R$, punctul $x = -1$ este punct aderent în $I\!R$ al lui A şi are proprietatea că există vecinătăţi ale sale astfel încât $V_{(-1)} \cap A = \{-1\}$. O asemenea vecinătate poate fi intervalul deschis $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ cu $0 < \varepsilon < 1$. ■

Observaţia 3.9.3. *Orice element a al mulţimii A este punct aderent în X pentru A deoarece intersecţia oricărei vecinătăţi a acelui element cu mulţimea A este nevidă.*

Într-adevăr, această intersecţie conţine cel puţin punctul a. ■

Observaţia 3.9.4. *Dacă $x \in X$ este punct aderent în X pentru mulţimea A, atunci putem avea fie $x \in A$, fie $x \notin A$.*

De exemplu, pentru mulţimea $A = \{1\} \cup (3, 5]$ din spaţiul Euclidian $I\!R$, punctul $x = 3$ este punct aderent în $I\!R$ al lui A şi $3 \notin A$. ■

Propoziţia următoare furnizează o definiţie echivalentă a punctului aderent în X.

Propoziţia 3.9.1. *Punctul $x \in X$ este punct aderent în X pentru mulţimea $A \subset X$ dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0. \tag{3.171}$$

Demonstraţie. Dacă x este punct aderent în X pentru mulţimea A, după Definiţia 3.9.1 există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât să aibă loc (3.169), deci mulţimea $V \cap A$ are cel puţin un element. Dacă $V \cap A = \{x\}$, având în vedere că $d(x, x) = 0$, rezultă că $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$. Dacă însă $V \cap A$ are şi alte elemente în afara lui x, de asemeni $\operatorname{dist}(x, A) = 0$. Dacă $x \notin A$, lucru posibil, după Observaţia 3.9.1, pentru orice $\varepsilon > 0\, \exists\, y \in A$ astfel încât $d(x, y) < \varepsilon$ adică $\operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon, \ \forall\, \varepsilon > 0$; ori aceasta înseamnă tocmai (3.171.

Reciproc, dacă (3.171 are loc, atunci $\inf\{d(x, y) : \ y \in A\} = 0$, ceea ce înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $z \in A$ astfel încât $d(x, z) < \varepsilon$, care arată că $z \in B(x, \varepsilon)$. Cu alte cuvinte, $z \in A \cap B(x, \varepsilon)$.

Luând $V = B(x, \varepsilon)$ deducem că are loc (3.169), deci elementul $x \in X$ este punct de aderenţă pentru mulţimea A. **q.e.d.**

Propoziţia 3.9.2. *Elementul $x \in X$ este punct aderent în X pentru mulţimea A dacă şi numai dacă există un şir de puncte (x_n), $x_n \in A$, astfel încât*
$$x_n \to x. \tag{3.172}$$

Demonstraţie. Dacă x este punct aderent în X pentru A, după Definiţia 3.9.1, luând $V = B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big)$, $n \in I\!N^*$ drept vecinătate arbitrară a punctului x, rezultă că $B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big) \cap A \neq \emptyset$.

Dacă se întâmplă ca indiferent de n, $B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big) \cap A = \{x\}$, atunci luând $x_n = x$, urmează că şirul de puncte (x_n) este un şir constant care după Teorema 3.3.2 este convergent la x. Dacă însă $B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big) \cap A$ are şi alte elemente, atunci luând $x_n \in B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big) \cap A$, deducem
$$d(x, x_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{3.173}$$
Folosind acum Propoziţia 2.1.1, din (3.173) deducem $d(x_n, x) \to 0$ de unde, după Teorema 3.3.1, rezultă (3.172).

Reciproc, dacă există $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in A$, $x_n \to x$, din Definiţia 3.3.3 rezultă că în afara oricărei vecinătăţi $V \in \mathcal{V}(x)$ rămân un număr finit de termeni ai şirului şi prin urmare $V \cap A \neq \emptyset$ ceea ce, după Definiţia 3.9.1, atrage că x este punct aderent în X al lui A. **q.e.d.**

Evident că şi Propoziţia 3.9.2 poate constitui o definiţie echivalentă a punctului aderent în X.

Definiţia 3.9.2. *Se numeşte* **închiderea în** X, *sau* **aderenţa în** X *mulţimii A totalitatea punctelor aderente în X ale sale. Închiderea în X a mulţimii A se notează cu $\overline{A}$, sau $cl\,A$.*

Din Propoziţia 3.9.1 şi Definiţia 3.9.2, avem

Teorema 3.9.1. *Dacă A şi B sunt două submulţimi oarecare ale spaţiului metric (X, d), atunci:*
$$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}; \tag{3.174}$$
$$A \subset \overline{A}; \tag{3.175}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \tag{3.176}$$
$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}; \tag{3.177}$$
$$A = \emptyset, \ \text{sau}\ A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \Longrightarrow \overline{A} = A. \tag{3.178}$$

Demonstraţie. Demonstrăm întâi (3.174). Pentru aceasta, considerăm x arbitrar din $\overline{A}$. După Propoziţia 3.9.2 există (x_n), $x_n \in A$ astfel încât $x_n \to x$. Cum $A \subset B$, vom avea şi $x_n \to x$, $x_n \in B$, ceea ce în baza aceleiaşi propoziţii conduce la $x \in \overline{B}$.

Incluziunea (3.175) rezultă din Observaţia 3.9.3.

Dacă $x \in \overline{A \cup B}$, din Proprietatea 3.1.3 avem $\text{dist}\,(x, A \cup B) = 0$. De aici, deducem $\text{dist}\,(x, A) = 0$, sau $\text{dist}\,(x, B) = 0$. Folosind Propoziţia 3.9.1, avem că $x \in \overline{A}$, sau $x \in \overline{B}$, adică $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, cu alte cuvinte $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Incluziunea $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ se demonstrează similar.

Din cele două incluziuni rezultă (3.176).

Aplicând (3.175) mulţimii $\overline{A}$ deducem $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$.

Să arătăm că are loc şi incluziunea inversă.

Considerând un element arbitrar $x \in \overline{\overline{A}}$, din Propoziţia 3.9.2, deducem că există $(x_n)_{n\geq 1}, x_n \in \overline{A}$ cu proprietatea $x_n \to x$. Din $x_n \in \overline{A}$ şi Propoziţia 3.9.1 rezultă $\text{dist}\,(x_n, A) = 0,\ \forall\, n \in I\!N^*$. Pe de altă parte, din $x_n \to x$ şi Teorema 3.3.3 avem

$$\text{dist}\,(x, A) = \lim_{n\to\infty} \text{dist}\,(x_n, A) = 0,$$

rezultat care, după Propoziţia 3.9.1, arată că $x \in \overline{A}$. Prin urmare, $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$.

Incluziunile demonstrate conduc la (3.177).

Demonstrăm acum (3.178). Dacă $A = \emptyset$, din Definiţia 3.1.6, avem

$$\text{dist}\,(x_0, \emptyset) = +\infty,\ \forall\, x_0 \in X,$$

ceea ce arată că nu există $x_0 \in X$ astfel încât să aibă loc (3.171) şi prin urmare $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Dacă $A = \{x_1\}$, singurul punct care satisface (3.171) este x_1, deci $\overline{A} = \{x_1\} = A$.

Demonstraţia se face similar când $A \neq \emptyset$, dar A are un număr finit de elemente, mai mult decât un element. **q.e.d.**

Definiţia 3.9.3. *Submulţimea A din spaţiul metric (X, d) se numeşte* **închisă în** X *dacă*

$$A = \overline{A}. \tag{3.179}$$

Observaţia 3.9.5. *Închiderea în X, $\overline{A}$, a oricărei mulţimi A din spaţiul metric (X, d) este mulţime închisă în X.*

Într-adevăr, aceasta rezultă din (3.177) şi (3.179). ■

Observaţia 3.9.6. *Orice mulţime finită de puncte din spaţiul metric (X, d) este mulţime închisă în X; mulţimea vidă este mulţime închisă în X.*

Afirmaţiile rezultă din (3.178). ■

Observaţia 3.9.7. *Spaţiul întreg X este mulţime închisă în X.*

Într-adevăr, din (3.175) avem $X \subset \mathbf{x}$; din Definiţia 3.9.1, Propoziţia 3.9.1 şi Propoziţia 3.9.2 rezultă că avem şi $\mathbf{x} \subset X$. Cele două incluziuni conduc la $X = \mathbf{x}$ şi, după Definiţia 3.9.3, rezultă că X este mulţime închisă în X.■

Teorema 3.9.2. *Mulţimea A din spaţiul metric (X, d) este închisă în X dacă şi numai dacă conţine limita oricărui şir de puncte convergent din A.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă simplu din (3.175) şi Propoziţia 3.9.2. **q.e.d.**

Teorema 3.9.3. *Dacă A şi B sunt mulţimi închise în mulţimea X din spaţiul metric (X, d), atunci $A \cup B$ este mulţime închisă în X.*

În consecinţă, reuniunea unui număr finit de mulţimi închise în X este mulţime închisă în X.

Intersecţia oricărui număr de mulţimi închise în X este mulţime închisă în X.

Demonstraţie. Dacă A şi B sunt mulţimi închise în X, atunci $A = \overline{A}$ şi $B = \overline{B}$. Pe de altă parte, din (3.176) avem $\overline{A \cup B} = A \cup B$ ceea ce, conform lui (3.179), arată că $A \cup B$ este mulţime închisă în X.

Demonstraţia este similară pentru un număr finit de mulţimi.

Fie acum $A = \bigcap\limits_{t \in T} A_t$, cu A_t mulţimi închise în X, adică

$$A_t = \overline{A_t}, \ \forall\, t \in T.$$

Deoarece $A \subset A_t$, conform lui (3.174) avem $\overline{A} \subset \overline{A_t}$. Deci

$$A \subset \overline{A} \subset \bigcap_{t \in T} A_t = A,$$

adică $\overline{A} = A$, ceea ce demonstrează ultima parte a teoremei. **q.e.d.**

Definiţia 3.9.4. *Punctul $a \in A$ se numeşte* **punct interior în** *X al mulţimii A dacă există o vecinătate $V_a \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât*

$$V_a \subset A. \tag{3.180}$$

Propoziţia 3.9.3. *Punctul $a \in A$ este punct interior în X al mulţimii A dacă şi numai dacă $\exists\, \varepsilon > 0$ astfel încât*

$$B(a, \varepsilon) \subset A. \tag{3.181}$$

Demonstraţie. Dacă $a \in A$ este punct interior în X al lui A, atunci din Definiţia 3.9.4 şi Definiţia 3.1.10 rezultă (3.181).

Reciproc, din (3.181) şi Propoziţia 3.1.7 rezultă că este îndeplinită condiţia din Definiţia 3.9.4, deci a este punct interior în X al mulţimii A. **q.e.d.**

Propoziţia 3.9.4. *Punctul* $a \in A$ *este punct interior în* X *al mulţimii* A *dacă şi numai dacă*

$$\text{dist}\,(a, C_X A) > 0, \tag{3.182}$$

unde $C_X A = X \setminus A$.

Demonstraţie. Dacă $a \in A$ este punct interior în X al mulţimii A, atunci are loc (3.181) care, pusă alături de Definiţia 3.1.7, conduce la concluzia (3.182).

Reciproc, dacă (3.182) are loc, atunci fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \text{dist}\,(a, C_X A)$. Se vede imediat că avem $B\Big(a, \dfrac{\varepsilon}{2}\Big) \subset A$, care, în baza lui (3.181), arată că a este punct interior în X al mulţimii A. **q.e.d.**

Definiţia 3.9.5. *Se numeşte* ***interiorul în*** X *al mulţimii* A *din spaţiul metric* (X, d), *totalitatea punctelor interioare în* X *ale sale.*

Interiorul în X *al mulţimii* A *se notează cu* $\overset{\circ}{A}$, *sau cu* $\mathit{Int}\ A$.

Dacă avem în vedere Propoziţia 3.9.4, putem scrie

$$\overset{\circ}{A} = \{a \in A : \ \text{dist}\,(a, C_X A) > 0\}. \tag{3.183}$$

Teorema 3.9.4. *Pentru orice submulţimi* A *şi* B *ale lui* X :

$$A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}; \tag{3.184}$$

$$\overset{\circ}{A} \subset A; \tag{3.185}$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}; \tag{3.186}$$

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}\,. \tag{3.187}$$

Demonstraţie. Teorema se demonstrează simplu folosind definiţiile şi propoziţiile acestui paragraf . **q.e.d.**

Teorema 3.9.5. *Pentru orice mulţime* A *din* (X, d), *au loc egalităţile*

$$C_X \overset{\circ}{A} = \overline{C_X A}\,, \qquad \overset{\circ}{A} = C_X(\overline{C_X A}), \tag{3.188}$$

$$C_X \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{C_X A}}\,, \quad \overline{A} = C_X(\overset{\circ}{\overbrace{C_X A}}). \tag{3.189}$$

Identităţile (3.188) şi (3.189) permit să deducem proprietăţile interiorului în X al unei mulţimi din acelea ale închiderii în X ale ei şi invers. De exemplu, proprietăţile interiorului în X a unei mulţimi prezentate în Teorema 3.9.4 pot rezulta din cele ale închiderii în X a mulţimii, demonstrate în Teorema 3.9.1, şi din (3.188), (3.189).

Definiţia 3.9.6. *Submulţimea A a spaţiului metric (X,d) se numeşte **deschisă în** X dacă*

$$A = \overset{\circ}{A}\,. \tag{3.190}$$

Propoziţia 3.9.5. *Mulţimea $A \subset X$ este deschisă în X dacă şi numai dacă orice punct al ei este punct interior în X sau, echivalent, $\forall\, a \in A\ \exists\, \varepsilon > 0$ astfel încât $B(a,\varepsilon) \subset A$.*

Demonstraţie. Se folosesc Definiţia 3.9.6, Definiţia 3.9.4 şi Propoziţia 3.9.3. **q.e.d.**

Observaţia 3.9.8. *Interiorul în X al unei mulţimi din X este mulţime deschisă în X.*

Într-adevăr, aceasta rezultă din (3.187) şi Definiţia 3.9.6.

Teorema 3.9.6. *Submulţimea A a spaţiului metric (X,d) este mulţime deschisă în X, respectiv închisă în X, dacă şi numai dacă complementara sa CA este mulţime închisă în X, respectiv deschisă în X.*

Demonstraţie. Să presupunem că $A \subset X$ este mulţime deschisă în X. Atunci, are loc (3.190), din care rezultă evident şi

$$C_X A = C_X\ \overset{\circ}{A}\,. \tag{3.191}$$

Din $(3.188)_1$ şi (3.191), obţinem

$$C_X A = \overline{C_X A}. \tag{3.192}$$

Egalitatea (3.192), împreună cu Definiţia 3.9.3, conduce la concluzia că mulţimea $C_X A$ este închisă în X.

Dacă A este mulţime închisă în X, atunci are loc (3.179), deci vom avea şi $C_X A = C_X \overline{A}$, din care, ţinând cont de $(3.189)_1$, găsim $C_X A = \overset{\circ}{\widehat{C_X A}}$, care exprimă că $C_X A$ este mulţime deschisă în X.

Reciproc, dacă $C_X A$ este mulţime închisă în X, atunci are loc (3.192) care, împreună cu $(3.188)_1$, duce la (3.191), din care deducem (3.190), ceea ce, după Definiţia 3.9.6, înseamnă A mulţime deschisă în X.

Dacă $C_X A$ este mulţime deschisă în X, atunci este egală cu interiorul ei de unde, folosind $(3.189)_1$, deducem $C_X A = C_X \overline{A}$, din care rezultă (3.179), ceea ce, după Definiţia 3.9.3, arată că A este mulţime închisă în X. **q.e.d.**

Observaţia 3.9.9. *În spaţiul metric (X,d), mulţimea vidă $\emptyset$ şi spaţiul întreg X sunt simultan mulţimi închise în X şi deschise în X.*

Într-adevăr, afirmaţiile rezultă din Teorema 3.9.6, Observaţia 3.9.6 şi Observaţia 3.9.7. ■

Teorema 3.9.7. *Dacă A şi B sunt mulţimi deschise în spaţiul metric (X, d), atunci $A \cap B$ este mulţime deschisă în X.*

În consecinţă, intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise în X este mulţime deschisă în X şi reuniunea oricărui număr de mulţimi deschise în X este mulţime deschisă în X.

Teorema 3.9.8. *Dacă A este mulţime deschisă în X, iar B este mulţime închisă în X, atunci $A \setminus B = C_A B$ este mulţime deschisă în X, iar $B \setminus A = C_B A$ este mulţime închisă în X.*

Demonstraţie. Folosind Teorema 3.9.6, Teorema 3.9.7, Teorema 3.9.3 şi identităţile evidente $A \setminus B = A \cap CB$, $B \setminus A = B \cap CA$, putem arăta cu uşurinţă că afirmaţiile de mai sus sunt adevărate. **q.e.d.**

Teorema 3.9.9. *Orice bilă deschisă cu centrul în $x_0 \in X$ şi de rază $\varepsilon > 0$ este mulţime deschisă în X.*

Bila închisă $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ este mulţime închisă în X.

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 3.9.5, trebuie arătat că $\forall\, y \in B(x_0, \varepsilon)$ este punct interior în X al mulţimii $B(x_0, \varepsilon)$. Pentru a dovedi aceasta folosim Propoziţia 3.9.3. Dacă alegem $\varepsilon' = \varepsilon - d(x_0, y) > 0$, atunci rezultă imediat că $B(y, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon)$ şi cu aceasta teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Definiţia 3.9.7. *Se numeşte* **frontiera în X** *a mulţimii A din spaţiul metric (X, d), mulţimea ∂A definită de*

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}\,. \tag{3.193}$$

Observaţia 3.9.10. *Din Teorema 3.9.8 rezultă $\partial A = \overline{\partial A}$, adică frontiera în X a unei mulţimi este mulţime închisă în X.*

Dacă A este mulţime deschisă în X, din (3.193) şi Definiţia 3.9.6 deducem că $\partial A = \overline{A} \setminus A$.

Dacă A este mulţime închisă în X, din Definiţia 3.9.3 şi aceeaşi relaţie (3.193) găsim $\partial A = A \setminus \overset{\circ}{A}$.

Vom ilustra acum noţiunile de mulţime închisă în X, mulţime deschisă în X şi frontiera în X a unei mulţimi, pe baza unor exemple de mulţimi din spaţiul Euclidian $p-$dimensional $I\!R^p$.

Fie în acest sens $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_p)$ şi $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_p)$ două puncte din $I\!R^p$ luate astfel încât să fie satisfăcute condiţiile $a_i < b_i,\ i \in \overline{1,p}$.

Definiţia 3.9.8. *Se numeşte* **interval $p-$dimensional deschis** *definit de punctele $\mathbf{a} \in I\!R^n$ şi $\mathbf{b} \in I\!R^n$, mulţimea*

$$J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) :\ a_i < x_i < b_i,\ i \in \overline{1,p}\} \subset I\!R^p.$$

Punctul $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ se numeşte **centrul** *intervalului $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.*

Definiţia 3.9.9. *Se numeşte* **interval** $p-$**dimensional închis** *mulţimea*

$$I_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) : \; a_i \le x_i \le b_i, \; i \in \overline{1,p}\} \subset I\!R^p.$$

Punctul $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ *se numeşte* **centrul** *intervalului* $I_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Teorema 3.9.10. *În spaţiul Euclidian* $I\!R^p$, *intervalele* $J_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *şi* $I_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *au proprietăţile*

$$\begin{array}{lllllll} J_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) & = & \overset{\circ}{J_p}(\mathbf{a},\mathbf{b}); & & I_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) & = & \overline{I_p(\mathbf{a},\mathbf{b})}; \\ J_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) & = & \overset{\circ}{I_p}(\mathbf{a},\mathbf{b}); & & I_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) & = & \overline{J_p(\mathbf{a},\mathbf{b})}; \\ J_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) & = & (a_1,b_1)\times ...\times (a_p,b_p); & & I_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) & = & [a_1,b_1]\times ...\times [a_p,b_p]. \end{array}$$

Intervalele bi–dimensionale sunt dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate din plan, iar intervalele tri–dimensionale sunt paralelipipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate ale spaţiului.

Definiţia 3.9.10. *Se numeşte* **faţă** $(p-1)-$**dimensională** *a intervalelor* $p-$*dimensionale* $I_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *şi* $J_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *mulţimea*

$$F^k_{p-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) : \; x_k = a_k \text{ sau } x_k = b_k\} \subset I\!R^p.$$

Observaţia 3.9.11. *Un interval* $p-$*dimensional are* $2p$ *feţe* $(p-1)-$*dimensionale.*

Observaţia 3.9.12. *Reuniunea tuturor feţelor* $(p-1)-$*dimensionale ale lui* $J_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *este frontiera lui* $J_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *care coincide cu frontiera lui* $I_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Dacă $a_i = b_i, \; i \in \overline{1,p}$ şi $a_j = b_j$ pentru cel puţin un indice j, *intervalul degenerat* $I_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ este o mulţime închisă în $I\!R^p$ şi interiorul ei este mulţimea vidă. Frontiera acestui interval este însuşi intervalul.

Teorema 3.9.11. *Dacă* $A \subset I\!R^p$ *este mulţime deschisă în* $I\!R^p$ *şi* $\mathbf{x}_0 \in A$, *există un interval* $p-$ *dimensional deschis* $J_p(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *cu centrul în* x_0 *astfel încât* $\mathbf{x}_0 \in J_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subset A$.

Demonstraţie. Deoarece A este mulţime deschisă în $I\!R^p$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(\mathbf{x}_0,\varepsilon) \subset A$.

Fie acum $\mathbf{a} = \mathbf{x}^0 - \varepsilon\mathbf{s}$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{x}^0 + \varepsilon\mathbf{s}$, unde $\mathbf{s} = (1,1,...,1) \in I\!R^p$. Atunci, intervalul $p-$dimensional deschis

$$J_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) : |x_i - x_{0i}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}, \; i \in \overline{1,p}\},$$

unde $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0p})$, este submulţime a lui $B(\mathbf{x}_0,\varepsilon)$ deci şi a lui A şi are centrul în punctul $\mathbf{x}_0$. **q.e.d.**

Definiţia 3.9.11. *Punctul* $x \in X$ *se numeşte* **punct de acumulare** *în* X *pentru submulţimea* A *din spaţiul metric* (X, d) *dacă orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x)$ *conţine cel puţin un punct din* A *diferit de* x*, adică*

$$V \cap A - x \neq \emptyset, \quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x). \tag{3.194}$$

Mulţimea punctelor de acumulare în X *ale mulţimii* A *se numeşte* **mulţime derivată în** X *şi se notează cu* A'.

Observaţia 3.9.13. $x \in A' \Longrightarrow x \in \mathbf{a}$. *Reciproc nu este adevărat. Aceasta arată că* $A' \subset \overline{A}$.

Într-adevăr, implicaţia rezultă din Definiţia 3.9.1 şi Definiţia 3.9.9.

Pentru a dovedi că reciproca afirmaţiei nu este adevărată considerăm submulţimea $A = \{-1\} \cup [0, 3] \subset I\!\!R$, metrica în $I\!\!R$ fiind cea obişnuită. Atunci, punctul $x = -1$ este punct aderent în $I\!\!R$ pentru A dar nu şi punct de acumulare în $I\!\!R$ al mulţimii A deoarece vecinătatea $V = \Big(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big) \in \mathcal{V}(-1)$ nu conţine nici un punct al lui A diferit de -1. ■

Observaţia 3.9.14. *Un punct de acumulare în* X *al unei mulţimi poate să aparţină, sau să nu aparţină acelei mulţimi.*

De exemplu, dacă $A = (0, 1) \subset I\!\!R$, atunci punctele $x = 0$ şi $x = 1$ sunt puncte de acumulare în $I\!\!R$ ale lui A care nu aparţin lui A în timp ce $x = \dfrac{1}{3}$, spre exemplu, este punct de acumulare în $I\!\!R$ al lui A şi aparţine lui A. ■

Definiţia 3.9.12. *Un punct* $x \in A$ *care nu este punct de acumulare în* X *al mulţimii* A *se numeşte* **punct izolat în** X *al lui* A *dacă există* $V \in \mathcal{V}(x)$ *astfel încât* $V \cap A = \{x\}$. *O mulţime formată numai din puncte izolate în* X *se numeşte* **mulţime discretă în** X.

Observaţia 3.9.15. *Dacă* $x \in \overline{A} \setminus A$, *atunci* x *este punct de acumulare în* X *pentru* A.

Afirmaţia se deduce combinând Definiţia 3.9.1 cu Definiţia 3.9.12. ■

Teorema 3.9.12. *Orice vecinătate a unui punct de acumulare în* X *al unei mulţimi conţine o infinitate de puncte ale acelei mulţimi.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd.

Presupunem că există $V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât

$$V_0 \cap A = \{x_1, x_2, ..., x_n\},\ n \in I\!\!N^*,$$

unde x este un punct de acumulare în X al mulţimii $A \subset (X, d)$, şi fie $\varepsilon = \min\{d(x, x_1), d(x, x_2), ..., d(x, x_n)\} > 0$.

Deoarece $B(x, \varepsilon) \cap A = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in A \\ \emptyset, & \text{dacă} \quad x \notin A, \end{cases}$ rezultă că $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ şi cum $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{V}(x)$ rezultă că x nu este punct de acumulare în X al mulţimii A ceea ce ar contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Observaţia 3.9.16. *O mulţime care are puncte de acumulare în X este o mulţime infinită, aceasta rezultând din Teorema 3.9.11, deci mulţimile finite nu au puncte de acumulare în X.*

Se poate însă ca A să fie mulţime infinită şi să nu aibă puncte de acumulare în X. De exemplu, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ este mulţime infinită care nu are puncte de acumulare în $\mathbb{R}$. Singurul punct de acumulare al lui n este $+\infty$ care nu aparţine lui $\mathbb{R}$, acesta aparţinând lui $\overline{\mathbb{R}}$).

La fel ca pentru puncte aderente în X putem demonstra cu uşurinţă

Teorema 3.9.13. *Punctul $x \in X$ este punct de acumulare în X al mulţimii $A \subset X$ dacă şi numai dacă $\forall\, \varepsilon > 0 \Longrightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.*

De asemenea, folosind Propoziţia 3.9.2 şi Observaţia 3.9.8, rezultă

Teorema 3.9.14. *Punctul $x \in X$ este punct de acumulare în X pentru mulţimea $A \subset (X, d)$ dacă şi numai dacă există un şir de puncte $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in A$ cu $x_n \neq x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n \to x$.*

Folosind acum Teorema 3.9.14 tragem concluzia că dacă x este punct de acumulare în X al mulţimii A, atunci există o infinitate de şiruri de puncte având proprietăţile din Teorema 3.9.14.

Rezultatele de mai sus conduc fără dificultate la următorul rezultat.

Teorema 3.9.15. *Dacă $A \subset (X, d)$, atunci*

$$\overline{A} = A \cup A'. \tag{3.195}$$

Demonstraţie. Din Observaţia 3.9.3, Definiţia 3.9.2 şi Observaţia 3.9.8, rezultă $A \subset \overline{A}$ şi $A' \subset \overline{A}$, din care deducem

$$A \cup A' \subset \overline{A} \tag{3.196}$$

Invers, dacă $x \in \overline{A}$, atunci $\forall\, \varepsilon > 0$ are loc (3.170). Pentru acest punct există două posibilităţi: fie $x \in A$, caz în care $x \in A \cup A'$; fie $x \notin A$ în care situaţie, dacă ţinem cont de (3.170), deducem $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, ceea ce arată că $x \in A'$, adică $x \in A \cup A'$.

În concluzie, în ambele cazuri $x \in A \cup A'$ de unde rezultă

$$\overline{A} \subset A \cup A'. \tag{3.197}$$

Incluziunile (3.196) şi (3.197) demonstrează (3.195). **q.e.d.**

Corolarul 3.9.1. *Submulţimea $A \subset (X, d)$ este mulţime închisă în X dacă şi numai dacă îşi conţine toate punctele de acumulare în X, adică*

$$A' \subset A. \tag{3.198}$$

Demonstrație. Fie A mulţime închisă în X. Atunci, $A = \overline{A}$ şi din rezultă $A = A \cup A'$ ceea ce evident antrenează (3.198).

Reciproc, să presupunem că $A' \subset A$. Deoarece $A \subset A$, rezultă că $A' \cup A \subset A$. Folosind Teorema 3.9.14, deducem $\overline{A} \subset A$. Pe de altă parte, avem şi $A \subset \overline{A}$. Deci $\overline{A} \subset A \subset \overline{A}$, din care rezultă $A = \overline{A}$, adică mulţimea A este închisă în X. **q.e.d.**

Să introducem o ultimă noţiune şi anume aceea de *spaţiu topologic.*

În acest sens, fie $\mathcal{P}(X)$ totalitatea submulţimilor mulţimii X şi $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, o parte din aceste mulţimi.

Definiţia 3.9.13. *Spunem că τ este o* **topologie** *pe X dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăţi numite axiomele topologiei:*

(T_1) *Reuniune de mulţimi din τ aparţine lui τ;*

(T_2) *Intersecţie finită de mulţimi din τ aparţine lui τ;*

(T_3) $X \in \tau,\ \emptyset \in \tau.$

Definiţia 3.9.14. *Perechea (X, τ) unde X este o mulţime nevidă oarecare, iar τ este o topologie pe X, se numeşte* **spaţiu topologic.**

Observaţia 3.9.17. *Un spaţiu metric (X, d) este spaţiu topologic.*

Într-adevăr, dacă considerăm $\tau_d \subset \mathcal{P}(X)$, unde $\tau_d = \{D \subset X :\ D = \overset{\circ}{D}\}$, adică τ_d este familia mulţimilor deschise în X, folosind Teorema 3.9.7 şi Observaţia 3.9.9, rezultă că τ_d satisface $(T_1) - (T_3)$. ■

Definiţia 3.9.15. *Topologia τ_d se numeşte* **topologia indusă de metrica** d.

În încheiere prezentăm o caracterizare a mulţimilor deschise în X cu ajutorul bilelor deschise din (X, d).

Teorema 3.9.16. *Mulţimea $D \subset X$ este mulţime deschisă în X dacă şi numai dacă D este reuniunea unei familii de bile deschise.*

Demonstraţie. Dacă D este mulţime deschisă în X, atunci $\forall\ x \in D\ \exists\ \varepsilon_x > 0$ astfel încât $B(x, \varepsilon_x) \subset D$. Fie familia de mulţimi deschise în X $\{B(x, \varepsilon_x) :\ x \in D\}$. După Teorema 3.9.7 rezultă că mulţimea $B = \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon_x)$ este mulţime deschisă în X. În plus, $B = D$ deoarece un punct arbitrar y aparţine lui B dacă şi numai dacă există $x \in D$ astfel încât $y \in B(x, \varepsilon_x)$ ceea ce este echivalent cu $y \in D$, adică avem simultan $B \subset D$ şi $D \subset B$.

Reciproc, dacă $D = \bigcup_{t \in T} B_t$, unde B_t sunt bile deschise, conform axiomei T_1, D este mulţime deschisă în X. **q.e.d.**

Observaţia 3.9.18. *O submulţime a lui $\mathbb{R}$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este reuniune de intervale deschise.*

Într-adevăr, aceasta rezultă din Teorema 3.9.16 aplicată spaţiului Euclidian $\mathbb{R}$ unde se ţine cont că bila deschisă cu centrul în $x_0 \in \mathbb{R}$ şi rază ε este intervalul deschis $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. ■

Exerciţiul 3.9.1. *Fie intervalele din spaţiul Euclidian $\mathbb{R}$*

$$D_n = \Big(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\Big), \quad \mathbb{F}_n = \Big[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\Big], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = [1,2]; \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = (1,3).$$

Soluţie. În primul rând se vede că mulţimea compactă $[1,2]$ este inclus în orice mulţime D_n. Prin urmare, $[1,2] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$.

Să arătăm că are loc şi incluziunea inversă.

Fie în acest sens $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$, arbitrar. Atunci, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ avem $x \in \Big(1 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\Big)$. Dacă $x \notin [1,2]$, atunci $x < 1$, sau $x > 2$. Oriunde s–ar plasa x în afara intervalului $[1,2]$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x \notin D_{n_0}$ care conduce la faptul că $x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$, ceea ce este fals.

Prin urmare, avem $1 \le x \le 2$, adică $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n \subset [1,2]$. Cele două incluziuni demonsrează egalitatea $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = [1,2]$.

În mod similar se arată că $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = (1,3)$.

Mai general, putem arăta că

$$\bigcap_{\varepsilon>0}(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = [a,b], \qquad \bigcup_{\varepsilon>0}[a-\varepsilon, a+\varepsilon] = (a,b)$$

adică, enunţând rezultatul într–un cadru general, putem afirma că într–un spaţiu metric (X,d), intersecţia de mulţimi deschise în X poate fi o mulţime închisă în X, iar reuniunea de mulţimi închise în X poate da ca rezultat o mulţimedeschisă în X. ■

3.10 Mulţimi compacte într–un spaţiu metric

Fie (X,d) un spaţiu metric şi $\mathcal{P}(X)$ mulţimea tuturor părţilor mulţimii X.

Definiţia 3.10.1. *O familie de mulţimi $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ se spune că este o* **acoperire** *pentru mulţimea $A \subset X$, sau că $\mathcal{F}$* **acoperă** *A dacă orice punct $x \in A$ este punct al cel puţin unei mulţimi din $\mathcal{F}$.*

Dacă $\mathcal{F}$ acoperă A şi $\mathcal{F}$ are un număr finit de elemente (mulţimi), atunci se spune că $\mathcal{F}$ constituie o **acoperire finită** *a mulţimii A. Dacă , în plus, elemente lui $\mathcal{F}$ sunt mulţimi deschise în X, atunci se spune că $\mathcal{F}$ este o* **acoperire finită deschisă** *în X a mulţimi A.*

Definiţia 3.10.2. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* A *o submulţime nevidă a lui* X *şi* $\varepsilon > 0$. *Mulţimea* $M \subset X$ *se numeşte* $\varepsilon-$**reţea** *pentru mulţimea* A *dacă* $\forall\, x \in A\, \exists\, y_x \in M$ *astfel încât* $d(x, y_x) < \varepsilon$. *Dacă* M, *o* $\varepsilon-$*reţea pentru mulţimea* A, *are un număr finit de elemente, atunci* M *se numeşte* $\varepsilon-$**reţea finită** *a mulţimii* A.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune $M \subset A$.

Propoziţia 3.10.1. *Mulţimea* $M \subset X$ *este* $\varepsilon-$*reţea pentru mulţimea* A *din spaţiul metric* (X, d) *dacă şi numai dacă*

$$A = \bigcup_{y \in M} B(y, \varepsilon). \tag{3.199}$$

Demonstraţie. Este evidentă dacă se foloseşte Definiţia 3.10.2. **q.e.d.**

Observaţia 3.10.1. *Incluziunea* (3.199) *arată că familia de bile* $\{B(y, \varepsilon) : y \in M\}$ *constituie o acoperire deschisă a mulţimii* A. *În plus, dacă* M *are un număr finit de elemente, familia de bile de mai sus este o acoperire deschisă finită a mulţimii* A.

Definiţia 3.10.3. *Mulţimea* A *din spaţiul metric* (X, d) *se numeşte* **compactă prin acoperire**, *sau simplu,* **compactă** *dacă din orice acoperire deschisă* $\mathcal{F}$ *a lui* A *se poate extrage o acoperire finită.*

Spaţiul metric (X, d) *se numeşte* **compact** *dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o acoperire finită.*

Definiţia 3.10.4. *Mulţimea* A *din spaţiul metric* (X, d) *se numeşte* **compactă prin şiruri**, *sau* **secvenţial compactă** *dacă orice şir de puncte* $(x_n)_{n \in I\!N}$, $x_n \in A$, *conţine cel puţin un subşir* $(x_{k_n})_{n \in I\!N}$ *convergent la un punct din* A.

Spaţiul metric (X, d) *se numeşte* **secvenţial compact** *sau* **compact prin şiruri** *dacă orice şir de puncte din* X *conţine un subşir convergent la un punct din* X.

Teorema 3.10.1. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* A *o submulţime nevidă a lui* X. *Dacă* A *este mulţime secvenţial compactă, atunci* A *este mărginită şi închisă în* X.

Demonstraţie. Întrucât incluziunea $A \subset \overline{A}$ este asigurată de Teorema 3.9.1, pentru a arăta egalitatea $A = \overline{A}$ mai trebuie demonstrat că $\overline{A} \subset A$. Vom arăta că un element arbitrar $x \in \overline{A}$ este element şi al mulţimii A. Dacă $x \in \overline{A}$, atunci, oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$, intersecţia $V \cap A$ este nevidă. Luăm $V = B(x, \dfrac{1}{n})$, $n \in I\!N^*$; intersecţia acestei bile cu mulţimea A fiind nevidă, conţine măcar un element; fie acesta x_n; acest element are evident proprietatea:

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}. \tag{3.200}$$

În acest mod putem defini un şir de puncte $(x_n)_{n \in I\!N^*}$, cu termenii din mulţimea A care, în baza lui (9.2), este convergent la $x \in \overline{A}$. Dar mulţimea A este compactă prin şiruri, deci şirul de puncte (x_n) construit mai sus are cel puţin un subşir convergent la un element al mulţimii A, element care nu poate fi altul decât x.

Prin urmare, am demonstrat că $\forall\, x \in \overline{A}$ este element şi al mulţimii A ceea ce în final atrage $A = \overline{A}$, adică A este mulţime închisă în X.

Să arătăm că A este mulţime mărginită.

Presupunem contrariul, şi anume că A este nemărginită. Atunci, există $x_0 \in X$ cu proprietatea că $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon \in A$ astfel încât $d(x_\varepsilon, x_0) \geq \varepsilon$ sau, echivalent, $x_\varepsilon \notin B(x_0, \varepsilon)$. Din acest rezultat deducem că pentru $\varepsilon_0 = 1$ există $x_1 \in A$ astfel încât $x_1 \notin B(x_0, 1)$. Notând $\varepsilon_1 = 1 + d(x_1, x_0)$, deducem că şi pentru această valoare a lui ε există $x_2 \in A$ astfel încât $x_2 \notin B(x_0, \varepsilon_1)$. Notăm acum $\varepsilon_2 = 1 + d(x_2, x_0)$. Atunci, există $x_3 \in A$ cu proprietatea $x_3 \notin B(x_0, \varepsilon_2)$. Presupunând ales x_n după procedeul de mai sus, notăm apoi $\varepsilon_n = 1 + d(x_n, x_0)$. Atunci, există $x_{n+1} \in A$ aşa încât $x_{n+1} \notin B(x_0, \varepsilon_n)$. În acest fel am construit şirul de puncte (x_n) din mulţimea A cu proprietatea

$$d(x_{n+1}, x_0) \geq 1 + d(x_n, x_0), \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{3.201}$$

Din inegalitatea (3.201) deducem

$$d(x_{n+p}, x_0) \geq 1 + d(x_n, x_0), \quad \forall\, (n,p) \in I\!N^* \times I\!N^*. \tag{3.202}$$

Şirul de puncte (x_n) fiind din mulţimea secvenţial compactă A are un subşir (x_{k_n}), convergent la un punct din A. Cum orice şir convergent este fundamental rezultă că (x_{k_n}) este şir fundamental şi prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{k_{n+p}}, x_{k_n}) = 0, \quad \forall\, p \in I\!N^*. \tag{3.203}$$

Dar din Propoziţia 3.1.1 avem

$$d(x_{k_{n+p}}, x_0) - d(x_{k_n}, x_0) \leq d(x_{k_{n+p}}, x_{k_n}). \tag{3.204}$$

Trecând la limită în (3.204) pentru $n \to \infty$ şi ţinând cont de (3.202) şi (3.203) ajungem la contradicţia $1 \leq 0$, care arată că presupunerea făcută este falsă.

Prin urmare,, mulţimea A este mărginită. **q.e.d.**

Corolarul 3.10.1. *Dacă mulţimea A din spaţiul metric (X, d) este compactă prin şiruri şi $A_1 \subset A$ este mulţime închisă în X, atunci A_1 este mulţime compactă prin şiruri.*

Teorema 3.10.2. *Submulţimea nevidă $A \subset I\!R^n$ este secvenţial compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă în $I\!R^n$.*

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din Teorema 3.10.1.

Partea a doua, care de fapt este reciproca teoremei amintite în cazul când $X = I\!R^n$, se demonstrează arătând că este îndeplinită Definiţia 3.10.4. Considerăm în acest sens un şir de puncte arbitrar $(\mathbf{x}_m)$ din mulţimea A. Fiindcă A este mărginită, există un interval închis $n-$dimensional

$$I_n = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

astfel încât $A \subset I_n$.

Fie acum $c_j = \dfrac{a_j + b_j}{2}$, mijlocul segmentului $[a_j, b_j]$, unde j ia toate valorile de la 1 până la n.

Notăm $I_n^{(1)} = [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \times ... \times [a_n^{(1)}, b_n^{(1)}] \subset I_n$ acel subinterval $n-$ dimensional închis în $I\!R^n$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului $(\mathbf{x}_n)$, unde $a_j^{(1)}$ poate fi a_j sau c_j, iar $b_j^{(1)}$ este fie c_j, fie b_j, cu $j \in \overline{1,n}$.

Continuând procedeul, găsim un şir de intervale $n-$dimensionale închise în $I\!R^n$, notat cu $(I_n^{(k)})_{k\in I\!N^*}$, care are următoarele proprietăţi:

$(a)\quad I_n \supset I_n^{(1)} \supset I_n^{(2)} \supset ... \supset I_n^{(k)} \supset ...;$

$(b)\quad I_n^{(k)}$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $(\mathbf{x}_m)_{m\in I\!N}$;

$(c)\quad \bigcap\limits_{k\in I\!N} I_n^{(k)} = \{\mathbf{x}\} \subset I\!R^n.$

Primele două proprietăţi sunt evidente din modul cum s–au construit intervalele $I_n^{(k)}$, $k \geq 1$, iar cea de a treia rezultă imediat din Teorema 2.1.6.

Alegem acum $\mathbf{x}_{k_1} \in I_n^{(1)}$, un termen oarecare al şirului $(\mathbf{x}_m)_{m\in I\!N^*}$, astfel încât $k_1 \geq 1$, lucru posibil deoarece $I_n^{(1)}$ conţine o infinitate de termeni ai şirului. Deoarece $I_n^{(2)}$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $(\mathbf{x}_m)_{m\in I\!N}$, există $k_2 \geq 2,\ k_2 > k_1$ astfel încât $\mathbf{x}_{k_2} \in I_n^{(2)}$.

Presupunem că , prin procedeul de mai sus, am ales $\mathbf{x}_{k_m} \in I_n^{(m)}$, unde $k_m \geq m$ şi $k_m > k_{m-1}$. Intervalul închis $n-$dimensional $I_n^{(m+1)}$ conţinând o infinitate de termeni ai şirului $(\mathbf{x}_m)$, conţine şi un termen de forma $\mathbf{x}_{k_{m+1}}$, unde $k_{m+1} > m+1$ şi $k_{m+1} \geq k_m$.

Şirul $(\mathbf{x}_{k_m})_{m\in I\!N}$ astfel construit este un subşir al şirului $(\mathbf{x}_m)_{m\in I\!N^*}$ şi are proprietatea

$$\mathbf{x}_{k_m} \in I_n^{(m)}, \quad \forall\, m \in I\!N^*. \tag{3.205}$$

Din (3.205) şi proprietatea (c) a şirului $(I_n^{(m)})_{m\in I\!N^*}$ rezultă $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_{k_m} = \mathbf{x}$, ceea ce arată că $\mathbf{x}$ este punct de acumulare în $I\!R^n$ al mulţimii A. Cum A este mulţime închisă în $I\!R^n$, ea îşi conţine toate punctele de acumulare în $I\!R^n$ (vezi Corolarul 3.9.1). Prin urmare, $\mathbf{x} \in A$.

Rezultatul stabilit şi Definiţia 3.10.4 arată că A este mulţime secvenţial compactă. **q.e.d.**

Teorema 3.10.3. *Fie (X,d) un spaţiu metric şi A o submulţime a lui X. Dacă A este mulţime compactă prin acoperire, sau mulţime compactă, atunci A este secvenţial compactă.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, că A nu ar fi compactă prin şiruri, adică există şirul de puncte $(x_n)_{n\geq 1},\ x_n \in I\!N^*$ care să nu admită subşiruri convergente la puncte din A. Aceasta înseamnă că $\forall\, x \in A\, \exists\, \varepsilon_x > 0$ astfel încât bila $B(x, \varepsilon_x)$ conţine un număr finit de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ căci, în caz contrar, există un punct de acumulare în X pentru mulţimea valorilor şirului, care după Teorema 3.9.14 conduce la existenţa unui subşir convergent la x, fapt ce am presupus că nu se întâmplă.

Deoarece A este compactă prin acoperire, toţi termenii şirului se află într–un număr finit de bile ceea ce conduce la concluzia că mulţimea valorilor şirului (x_n) are un număr finit de termeni. De aici tragem concluzia că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ ar avea cel puţin un subşir constant, adică convergent, fapt care ar contrazice presupunerea făcută. Prin urmare, neapărat şirul dat trebuie să admită un subşir convergent la un punct din A ceea ce, după Definiţia 3.10.4, arată că mulţimea A este secvenţial compactă. **q.e.d.**

Corolarul 3.10.2. *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$ o mulţime compactă. Atunci, A este închisă în X şi mărginită.*

Într-adevăr, dacă A este compactă, din Teorema 3.10.3 rezultă că A este compactă prin şiruri şi folosind Teorema 3.10.1, deducem că A este mulţime închisă în X şi mărginită. ■

Reciproca din Corolarul 3.10.2 este adevărată doar în $I\!R^n$.

Teorema 3.10.4. *Dacă A este mulţime compactă în spaţiul metric (X,d) şi $B \subset A$ este o mulţime închisă în X, atunci B este mulţime compactă.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{F} = \{D_i \,:\, i \in I,\ D_i = \overset{\circ}{D}_i,\ \forall i \in I\}$ o acoperire deschisă pentru mulţimea B. Notăm $D = C_X B$. Mulţimea B fiind închisă în X, complementara sa faţă de spaţiul întreg X, adica mulţimea D, este mulţime deschisă în X şi avem evident

$$A \subset D \cap \Big(\bigcup_{i\in I} D_i\Big).$$

Deoarece A este mulţime compactă, există $J \subset I$ finită astfel încât

$$A \subset D \cup \Big(\bigcup_{i\in J} D_i\Big)$$

şi cum $B \subset A$ vom avea şi

$$B \subset \bigcup_{i\in J} D_i,$$

ceea ce arată că B este mulţime compactă prin acoperire. **q.e.d.**

Teorema 3.10.5. *Dacă (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$ o mulţime compactă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o $\varepsilon-$reţea finită M pentru mulţimea A.*

Demonstraţie. Familia $\mathcal{U} = \{B(x,\varepsilon) \,:\, x \in A\}$ este o acoperire deschisă în X pentru mulţimea A. Cum A este mulţime compactă, există o subacoperire finită a sa, deci există mulţime finită de puncte $M = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ din A, astfel încât

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon).$$

Acum se vede că M este $\varepsilon-$reţea pentru mulţimea A. **q.e.d.**

Teorema 3.10.6. *Fie (X,d) un spaţiu metric, A o submulţime nevidă a lui X şi $\{F_i : i \in I, F_i = \mathbf{f}_i,\ \forall\, i \in I\}$ o familie oarecare de mulţimi închise în X. Afirmaţia şi implicaţiile de mai jos sunt echivalente:*

$$(i) \quad A \textit{ este mulţime compactă;}$$

$$(ii) \quad A \cap \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) = \emptyset \Longrightarrow \exists J \subset I,\ \ J \textit{ finită, astfel încât } A \cap \Big(\bigcap_{j\in J} F_j\Big) = \emptyset; \tag{3.206}$$

$$(iii) \quad A \cap \Big(\bigcap_{j\in J} F_j\Big) \neq \emptyset,\ \forall\, J \subset I, J \textit{ finită, } \Longrightarrow A \cap \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \neq \emptyset.$$

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că $(i) \Longrightarrow (ii)$. În primul rând avem că $A \subset C_X\Big(\bigcup_{i\in I} F_i\Big)$. Folosind una din relaţiile lui de Morgan (vezi Teorema 1.2.1), Teorema 3.9.6 şi Teorema 3.9.7, constatăm că familia $\mathcal{U} = \{C_X F_i : i \in I\}$ constituie o acoperire deschisă pentru mulţimea A. Cum A este compactă, din Definiţia 3.10.3 rezultă că există $J \subset I,\ J$ finită, astfel încât să aibă loc (3.206).

Arătăm acum că $(ii) \Longrightarrow (i)$.

Fie în acest sens o acoperire deschisă a mulţimii A de forma

$$\mathcal{D} = \{D_i : D_i = \overset{\circ}{D}_i,\ \forall\, i \in I\}$$

cu proprietatea $A \subset \bigcup_{i\in I} D_i$. Atunci, $A \cap C_X\Big(\bigcup_{i\in I} D_i\Big) = \emptyset$ care, după utilizarea relaţiei de Morgan adecvate, se poate scrie în forma $A \cap \Big(\bigcap_{i\in I}(C_X D_i)\Big) = \emptyset$. Însă familia de mulţimi $\{C_X D_i : i \in I\}$ este formată din mulţimi închise în X şi, folosind ipoteza, deducem că există $J \subset I,\ J$ mulţime finită, astfel încât $A \cap \Big(\bigcap_{j\in J}(C_X D_j)\Big) = \emptyset$, din care, în baza uneia dintre relaţiile lui de Morgan, rezultă $A \cap C_X\Big(\bigcup_{j\in J} D_j\Big) = \emptyset$. Ultimul rezultat arată că $A \subset \bigcup_{j\in J} D_j$ ceea ce, după Definiţia 3.10.3, demonstrează că A este mulţime compactă.

Implicaţiile $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ se demonstrează prin reducere la absurd. **q.e.d.**

Următoarea teoremă arată că pentru spaţiile metrice compactitatea prin acoperire şi compactitatea prin şiruri sunt echivalente.

Teorema 3.10.7. *Submulţimea nevidă A a spaţiului metric (X, d) este compactă prin acoperire dacă şi numai dacă este compactă prin şiruri.*

Demonstraţie. Dacă A este compactă prin acoperire, din Teorema 3.10.3, rezultă că A este secvenţial compactă.

Reciproc, demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem aşadar că A nu ar fi compactă, prin urmare din acoperirea deschisă $\mathcal{D}$, unde I este famile oarecare de indici, nu se poate extrage o acoperire finită. După Teorema 3.10.5, luând $\varepsilon_1 = 1$ putem determina o ε_1-reţea finită în care găsim o bilă deschisă $B(a_1, 1)$ astfel încât $A \cap \overline{\mathbf{A}}(a_1, 1)$ să nu fie acoperită finit de familia $\mathcal{D}$. Deoarece mulţimea $A \cap \overline{B}(a_1, 1)$ este compactă prin şiruri, putem construi o $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}-$reţea finită în care să existe bila $B\Big(a_2, \dfrac{1}{2}\Big)$ aşa încât $A \cap \overline{B}(a_1, 1) \cap \overline{B\Big(a_2, \dfrac{1}{2}\Big)}$ să nu fie acoperită finit de familia $\mathcal{D}$.

Prin acest procedeu obţinem un şir de mulţimi închise în X

$$(F_n)_{n\geq 1},\ F_n = A \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B}\Big(a_k, \frac{1}{k}\Big)\Big),\ n \geq 1$$

aflat în relaţia de incluziune $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ...$, din care rezultă că $A \cap \Big(\bigcup_{n\in I\!N^*} F_n\Big) \neq \emptyset$.

Din modul cum au fost construite mulţimile F_n rezultă că $A \cap \Big(\bigcap_{n\in I\!N^*} F_n\Big) = \{a\}$. Deoarece $a \in A$ există $i_0 \in I$ astfel încât $a \in D_{i_0}$. Întrucât D_{i_0} este mulţime deschisă în X, există $n_0 \in I\!N^*$ astfel încât $D_{i_0} \supset F_n,\ \forall\, n \geq n_0$, ceea ce constituie contradicţie. **q.e.d.**

Să considerăm acum două spaţii metrice (X, d_1) şi (Y, d_2). După Exerciţiul 3.1.2, aplicaţia

$$d : T \times T \to I\!R, \quad d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, \tag{3.207}$$

unde $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in T$, este o metrică pe T şi deci (T, d) este spaţiu metric.

Teorema 3.10.8. *Dacă* (X, d_1) *şi* (Y, d_2) *sunt două spaţii metrice compacte, atunci produsul cartezian* $T = X \times Y$ *înzestrat cu metrica* (3.207) *este spaţiu metric compact.*

Demonstraţie. Dacă avem în vedere Teorema 3.10.7, trebuie să arătăm că (T, d) este spaţiu secvenţial compact. În acest sens considerăm un şir de puncte arbitrar (z_n) din T. Însă $z_n = (x_n, y_n)$ şi ca urmare vom avea şirurile de puncte (x_n) şi (y_n) din (X, d_1) şi respectiv (Y, d_2). Cum (X, d_1) este spaţiu compact rezultă că există un subşir (x_{k_n}) al şirului (x_n) convergent la un punct $x \in X$. Considerând subşirul (y_{k_n}) al şirului (y_n) şi ţinând seama că (Y, d_2) este compact, rezultă că există un subşir al său $(y_{k_{m_n}})$ convergent la un punct $y \in Y$.

Fie acum $(z_{k_{m_n}})$, subşir al lui (z_n), care are termenul general $z_{k_{m_n}} = (x_{k_{m_n}}, y_{k_{m_n}})$. Se deduce imediat că $z_{k_{m_n}} \to (x, y) \in X \times Y = T$, ceea ce arată că (T, d) este secvenţial compact deci şi compact. **q.e.d.**

Rezultatul de mai sus se poate generaliza la un produs cartezian de mai mult de două spaţii.

Teorema 3.10.9. *Dacă* (X_i, d_i), $i \in \overline{1, n}$, *sunt* n *spaţii metrice compacte, atunci spaţiul metric produs* (X, d), *unde*

$$X = X_1 \times ... \times X_n = \{x |\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

şi

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

este de asemenea compact.

Demonstraţie. Este întru–totul analoagă celei din Teorema 3.10.8. **q.e.d.**

Corolarul 3.10.3. *Orice interval* $n-$*dimensional închis* $I_n \subset \mathbb{R}^n$ *este mulţime compactă.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că orice interval închis unidimensional $I_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$ este mulţime compactă în spaţiul metric obişnuit $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, dacă (x_n) este un şir numeric din $[a, b] \subset \mathbb{R}$ el este mărginit şi conform lemei lui Cesaro (Propoziţia 2.1.8), conţine un subşir (x_{k_n}) convergent la un punct $x \in \mathbb{R}$. Cum mulţimea $[a, b]$ este închisă în X, folosind Teorema 3.9.2, deducem că $x \in [a, b]$. Prin urmare, $[a, b]$ fiind mulţime secvenţial compactă în $\mathbb{R}$, este compactă.

Având în vedere că I_n este de fapt un produs cartezian finit de mulţimi compacte, din Teorema 3.10.9 rezultă că I_n este mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$. **q.e.d.**

Prezentăm acum unul din rezultatele fundamentale ale analizei matematice.

Teorema 3.10.10. *O submulţime* A *a lui* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă în* $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Afirmaţiile rezultă din Teorema 3.10.2 şi Teorema 3.10.3. **q.e.d.**

Observaţia 3.10.2. *Spaţiul metric obişnuit* $(\mathbb{R}, d)$ *şi spaţiul Euclidian* $n-$*dimensional* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *nu sunt mulţimi compacte, nefiind mulţimi mărginite.*

În schimb, elemente lui $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *posedă o proprietate de compactitate locală în sensul că, dat un element arbitrar* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *se poate indica o vecinătate compactă a sa de exemplu, un interval închis* $n-$*dimensional (vezi Corolarul 3.10.3), care sa–l conţină pe* $\mathbf{x}_0$.

Exemplul 3.10.1. *Mulţimea* $A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$ *din spaţiul Euclidian bi–dimensional* $\mathbb{R}^2$ *este compactă.*

Într-adevăr, mulţimea A este mărginită căci este inclusă, de exemplu, în bila $B(\mathbf{0}, 4))$ şi închisă în $\mathbb{R}^2$ pentru că îşi conţine toate punctele de acumulare în X. Prin urmare, din Teorema 3.10.10, rezultă că este compactă.■

Exemplul 3.10.2. *Intervalul* $(0, +\infty) = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$ *nu este mulţime compactă nefiind nici mulţime închisă în* $\mathbb{R}$ *nici mulţime mărginită.*

Exemplul 3.10.3. *Intervalul* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *nu este mulţime compactă deoarece nu este mulţime închisă în* $\mathbb{R}$.

Intervalele $(a, b]$ *şi* $[b, a)$, *din* $\mathbb{R}$, *nu sunt nici închise în* $\mathbb{R}$ *nici deschise în* $\mathbb{R}$.

În aceste exemple se consideră că $\mathbb{R}$ este spaţiu metric, metrica pe $\mathbb{R}$ fiind cea obişnuită, definită prin $d(x, y) = |x - y|$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

Teorema 3.10.11. *Dacă mulţimea* A *din spaţiul metric* (X, d) *este compactă, atunci perechea* $(A, d_{/A\times A})$, *unde* $d_{/A\times A}$ *este restricţia funcţiei* d *la mulţimea* $A \times A$, *este spaţiu metric complet.*

Demonstraţie. Faptul că $(A, d_{/A\times A})$ este spaţiu metric rezultă din Observaţia 3.1.4. Să arătăm că este complet. Fie în acest scop (x_n) un şir fundamental din $(A, d_{/A\times A})$. Cum A este mulţime compactă, din Teorema 3.10.7 rezultă că A este mulţime compactă prin şiruri în spaţiul metric (X, d), deci există subşirul (x_{k_n}) convergent la punctul $x \in A$. În baza axiomei (M_3) din Definiţia 3.1.1, avem $d_{/A\times A}(x, x_n) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_n)$. Primul termen din membrul al doilea al acestei inegalităţi tinde la zero când $n \to \infty$, deoarece şirul (x_{k_n}) este convergent la x în spaţiul metric $(A, d_{/A\times A})$, iar cel de-al doilea termen al inegalităţii tinde de asemenea la zero fiindcă şirul (x_n) este fundamental în acelaşi spaţiu metric. În concluzie, $d(x, x_n) \to 0 \Longleftrightarrow x_n \to x$, ceea ce arată că $(A, d_{/A\times A})$ este spaţiu metric complet. **q.e.d.**

3.11 Mulţimi conexe şi mulţimi convexe

Intuitiv, noţiunea de conexiune descrie faptul că o mulţime dată este formată dintr–o singură bucată, adică nu poate fi descompusă în două sau mai multe părţi separate. Astfel, anumite mulţimi întâlnite cum ar fi bilele deschise sau închise dintr–un spaţiu metric şi intervalele $n-$dimensionale din spaţiul Euclidian $\mathbb{R}^n$ pot fi considerate ca fiind formate dintr–o singură bucată în timp ce alte mulţimi dintr–un spaţiu metric, cum ar fi reuniunea a două bile fără puncte comune, sau complementara în spaţiul Euclidian bi–dimensional $I\!R^2$ a mulţimii $A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in I\!R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, sunt mulţimi compuse din mai multe bucăţi distincte.

În cele ce urmează vom prezenta noţiunea de *conexiune*.

Definiţia 3.11.1. *Spaţiul metric (X, d) se numeşte* **spaţiu conex** *dacă nu există mulţimile nevide şi disjuncte $D_1,\ D_2$, deschise în X, astfel încât să avem $X = D_1 \cup D_2$.*

Observaţia 3.11.1. *Întrucât $D_1 = X - D_2 = C_X D_2$ şi $D_2 = X - D_1 = C_X D_1$, rezultă că D_1 şi D_2 sunt simultan închise în X şi deschise în X.*

Teorema 3.11.1. *Într–un spaţiu metric (X, d) următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

- *(X, d) este spaţiu conex;*
- *Nu există două mulţimi închise în X F_1 şi F_2, nevide şi disjuncte, astfel încât $X = F_1 \cup F_2$;*
- *Singura mulţime nevidă din X simultan deschisă în X şi închisă în X este spaţiul întreg X.*

Demonstraţie. Rezultă din Definiţia 3.11.1 şi Observaţia 3.11.1. **q.e.d.**

Definiţia 3.11.2. *Spaţiul metric (X, d) se numeşte* **spaţiu neconex**, *sau* **spaţiu disconex** *dacă nu este spaţiu conexă*

Definiţia 3.11.3. *O parte A a unui spaţiu metric (X, d) se numeşte* **mulţime conexă** *dacă spaţiul metric $(A, d_{/A\times A})$ este spaţiu conex*

Observaţia 3.11.2. *Mulţimea A este conexă dacă nu există $D_1,\ D_2 \in \tau_d$ cu proprietăţile:*

(C_1) $\quad A \subset D_1 \cup D_2\,;$

(C_2) $\quad D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset\,;$

(C_3) $\quad D_1 \cap A \neq \emptyset,\quad$ *şi* $\quad D_2 \cap A \neq \emptyset.$

Definiţia 3.11.4. *Submulţimea A a spaţiului metric (X, d) se numeşte* **neconexă**, *sau disconexă dacă nu este conexă.*

Următoarea teoremă pune în evidenţă un exemplu important de mulţime conexă şi, totodată, dă o caracterizare a mulţimilor conexe din spaţiul metric $(I\!R, d)$, unde d este metrica obişnuită, Euclidiană, dată de $d(x, y) = |x - y|$, $x \in I\!R$, $y \in I\!R$.

Teorema 3.11.2. *Pentru orice submulţime nevidă a lui $I\!R$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(α) *A este interval, adică* $\forall\, a,\, b \in A, \quad a < b$ *şi* $c \in (a, b) \Longrightarrow c \in A$;

(β) *A este conexă.*

Demonstraţie. Să arătăm că $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$. Presupunem că A este un interval care nu este mulţime conexă. Atunci, există $D_1 \in \tau_d$ şi $D_2 \in \tau_d$ astfel încât $(C_1) - (C_3)$ să aibă loc. Din (C_3) rezultă că există $a_1 \in D_1 \cap A$ şi $a_2 \in D_2 \cap A$, iar din (C_2) rezultă că $a_1 \neq a_2$. Presupunem $a_1 < a_2$ şi, cum A este interval, obţinem

$$[a_1, a_2] \subset A. \tag{3.208}$$

Se observă că $a_1 \in D_1 \cap A \cap (-\infty, a_2)$, deci mulţimea $E = D_1 \cap A \cap (-\infty, a_2)$ este nevidă. Dar $E \subset (-\infty, a_2)$, deci E este majorată (de a_2 de exemplu), prin urmare, conform axiomei de existenţă a marginii superioare, are margine superioară în $I\!R$; fie aceasta

$$M = \sup E. \tag{3.209}$$

Din (3.209) rezultă

$$a_1 \leq M. \tag{3.210}$$

Având în vedere Definiţia 1.6.4, Propoziţia 1.6.1 şi Definiţia 3.9.1 deducem că $M \in \mathbf{e}$, adică M este punct aderent în $I\!R$ al mulţimii E. Rezultă apoi că

$$M \leq a_2. \tag{3.211}$$

Din (3.210), (3.211) şi definiţia intervalului din $I\!R$ rezultă că $M \in [a_1, a_2]$, iar din (3.208) deducem

$$M \in A. \tag{3.212}$$

Observăm că

$$M < a_2. \tag{3.213}$$

Într-adevăr, dacă $M = a_2 \in D_2 \in \tau_d$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(M - \varepsilon, M + \varepsilon) \subset D_2. \tag{3.214}$$

Din (3.209) rezultă că pentru ε de mai sus, există $x_0 \in E$ astfel încât

$$M - \varepsilon < x_0 < M < M + \varepsilon. \tag{3.215}$$

Din (3.215) şi (3.214) deducem $x_0 \in D_2$. Însă $x_0 \in E \subset D_1 \cap A$, deci $x_0 \in D_1 \cap D_2 \cap A$, care contrazice (C_2).

Să arătăm că $M \notin D_1 \cup D_2$. Presupunem prin absurd că $M \in D_1$ care, fiind mulţime deschisă în X, conduce la existenţa lui $r > 0$ astfel încât

$$(M - r, M + r) \subset D_1. \tag{3.216}$$

Din (3.213) rezultă că $(M, M + r) \cap (-\infty, a_2) \neq \emptyset$.

Fie $t \in (M, M + r) \cap (-\infty, a_2)$. Atunci, din (11.10) avem

$$t \in D_1 \cap (-\infty, a_2). \tag{3.217}$$

Deci $t < a_2$. Însă $a_1 \leq M < t$, ca urmare

$$t \in (a_1, a_2). \tag{3.218}$$

Din (3.217) şi (3.218) rezultă $t \in D_1 \cap A \cap (-\infty, a_2) = E$, deci $t \leq \sup E = M$, care contrazice faptul că $t \in (M, M + r)$. Aşadar, $M \notin D_1$.

Dacă M ar aparţine lui D_2, atunci repetând demonstraţia inegalităţii (3.213), s–ar ajunge la $D_1 \cap D_2 \cap A \neq 0$, care este în contradicţie cu (C_2), deci $M \in D_2$. Din $M \in A$ şi $M \notin D_1 \cup D_2$ rezultă că A nu este inclusă în $D_1 \cup D_2$, adică $A \not\subset D_1 \cup D_2$, care contrazice (C_1). Deci A este conexă.

Să arătăm că $(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$. Vom arăta că $\text{non}(\alpha) \Longrightarrow \text{non}(\beta)$. Fie $a = \inf A$ şi $b = \sup A$. Atunci, $A \subset [a, b]$. Dacă A nu este interval, atunci există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât

$$x_0 \notin A. \tag{3.219}$$

Punând

$$D_1 = (-\infty, x_0) \quad \text{şi} \quad D_2 = (x_0, +\infty), \tag{3.220}$$

rezultă că

$$a \in D_1, \quad b \in D_2, \quad D_1 \neq \emptyset, \quad D_2 \neq \emptyset,$$

iar D_1 şi D_2 verifică condiţiile $(C_1) - (C_3)$. Într-adevăr, (C_1) rezultă din (3.219) şi (3.220), iar (C_2) este evidentă. Dacă $D_1 \cap A = \emptyset$, atunci $A \subset C_{I\!R} D_1 = [x_0, +\infty)$, deci $x_0 < \inf A = a$ care contrazice faptul că $x_0 \in (a, b)$. Analog se arată că $D_2 \cap A = \emptyset$. **q.e.d.**

Corolarul 3.11.1. *Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale nu este conexă.*

Teorema 3.11.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $\{A_i : i \in I\}$ o familie de mulţimi conexe cu $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Atunci, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ este mulţime conexă.*

Demonstraţie. Să presupunem că $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ar fi neconexă. Atunci, există două mulţimi deschise şi nevide D_1 şi D_2 astfel încât să fie satisfăcute proprietăţile $(C_1) - (C_3)$. Cum $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ rezultă că există $a \in A_i, \ \forall\, i \in I$, deci $a \in A$. Să presupunem că $a \in D_1$. Întrucât $D_2 \cap A \neq \emptyset$ există $i_0 \in I$ astfel încât $D_2 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Deoarece $a \in A_{i_0}$ şi $a \in D_1$ obţinem că $a \in D_1 \cap A_{i_0}$, adică $D_1 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. De asemenea, să observăm că $D_1 \cap D_2 \cap A_{i_0} = \emptyset$, iar $D_1 \cup D_2 \supset A_{i_0}$. Prin urmare, avem

$$D_1 \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \quad D_2 \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \quad D_1 \cap D_2 \cap A_{i_0} = \emptyset, \quad D_1 \cup D_2 \supset A_{i_0},$$

adică A_{i_0} este neconexă. Contradicţia la care s–a ajuns demonstrează că mulţimea A este conexă. **q.e.d.**

Teorema 3.11.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Dacă A este mulţime conexă, atunci orice submulţime B care satisface $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ este conexă. În particular, $\overline{A}$ este mulţime conexă.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd. Presupunem că $\exists\, B$ neconexă astfel încât $A \subset B \subseteq \overline{A}$. Atunci, există mulţimile nevide D_1 şi D_2 din familia τ_d a mulţimilor deschise din spaţiul metric (X, d) care satisfac proprietăţile: $D_1 \cap B \neq \emptyset$; $\quad D_2 \cap B \neq \emptyset$; $\quad D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset$; $\quad B \subset D_1 \cup D_2$.

Deoarece $D_1 \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x_1 \in D_1$ şi $x_1 \in B$, iar din $D_1 \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x_2 \in D_2$ şi $x_2 \in B$. Cum $B \subset \overline{A}$ implică $x_1, x_2 \in \overline{A}$, din definiţia punctului aderent în X vom scoate că $D_1 \cap A \neq \emptyset$ şi $D_2 \cap A \neq \emptyset$. Apoi: $D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset$ şi $B \supset A \Longrightarrow D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$; $\ A \subset B \subset D_1 \cup D_2 \Longrightarrow A \subset D_1 \cup D_2$.

Rezultatele deduse referitoare la A arată că această mulţime este neconexă ceea ce ar contrazice ipoteza.

În concluzie, B este conexă şi, în particular, $\overline{A}$, este mulţime conexă. **q.e.d.**

Definiţia 3.11.5. *Fie vectorii* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I\!R^n$. *Se numeşte* **segment închis** *de extremităţi* $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$ *submulţimea* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset I\!R^n$ *definită prin*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in I\!R^n \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ t \in [0, 1]\}. \tag{3.221}$$

Observaţia 3.11.3. *Având în vedere Definiţia 3.9.9, segmentul închis* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *poate fi* **diagonala** *intervalului* $n-$*dimensional închis* $I_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$, *unde* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$.

Definiţia 3.11.6. *O submulţime* A *a lui* $I\!R^n$ *se numeşte* **convexă** *dacă*

$$\forall\, \mathbf{a} \in A \quad \text{şi} \quad \forall\, \mathbf{b} \in A \Longrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset A.$$

Observaţia 3.11.4. *O mulţime convexă din* $I\!R^n$ *este mulţime conexă.*

Într-adevăr, dacă mulţimea convexă A ar fi neconexă, ar exista două mulţimi deschise în $I\!R^n$ şi nevide D_1 şi D_2 astfel încât să fie îndeplinite condiţiile $(C_1) - (C_3)$ ceea ce ar însemna că A ar fi formată din două bucăţi. Considerând acum extremităţile segmentului $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ astfel încât $\mathbf{a} \in D_1 \cap A$ şi $\mathbf{b} \in D_2 \cap A$ din (C_2) deducem că segmentul considerat nu este conţinut în întregime în A fapt ce ar contrazice Definiţia 3.11.6. ■

Exemplul 3.11.1. *Bilele deschise şi închise din* $I\!R^n$ *sunt mulţimi convexe deci şi conexe.*

Soluţie. În adevăr, să considerăm bila deschisă de centru $\mathbf{x}_0 \in I\!R^n$ şi rază $\varepsilon > 0$ şi fie $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ Un punct oarecare al segmentului închis $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ are forma $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, unde $t \in [0, 1]$. Rezultă că $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$ deoarece

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|(1 - t)(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) + t(\mathbf{b} - \mathbf{x}_0)\| \leq$$
$$\leq |1 - t|\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0\| + |t|\|\mathbf{b} - \mathbf{x}_0\| < (1 - t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.$$

Acest rezultat arată că $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$, de unde deducem că bila deschisă cu centrul în $\mathbf{x}_0 \in I\!R^n$ şi rază $\varepsilon > 0$ este mulţime convexă deci şi conexă. ■

Exemplul 3.11.2. *Intervalele* $n-$*dimensionale deschise în* $I\!R^n$ *şi intervalele* $n-$*dimensionale închise în* $I\!R^n$ *sunt mulţimi convexe în* $I\!R^n$. *am*

Soluţie. Într-adevăr, din Definiţia 3.9.9 rezultă că un interval $n-$dimensional închis din $I\!R^n$ este mulţimea

$$I_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n],$$

unde

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in I\!R^n \quad \text{şi} \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in I\!R^n.$$

Dacă $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in I_n$ şi $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in I_n$, atunci segmentul închis $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ are elementele $\mathbf{x}$ de forma $\mathbf{x} = \mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, $t \in [0, 1]$. Deoarece $a_i \leq u_i \leq b_i$, $i \in \overline{1, n}$ şi $a_i \leq v_i \leq b_i$, $i \in \overline{1, n}$, deducem că expresiile componentelor x_i, $i \in \overline{1, n}$, ale lui $\mathbf{x}$, care sunt evident egale cu

$$x_i = u_i + t(v_i - u_i) = (1 - t)u_i + tv_i,$$

satisfac condiţiile $x_i \in [a_i, b_i], \ \forall\, i \in \overline{1,n}$, de unde va rezulta că $\mathbf{x} \in I_n$. ■

Exemplul 3.11.3. *În* $I\!R^2$, *mulţimea*

$$A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in I\!R^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$$

nu este convexă, dar este conexă.

Soluţie. Într-adevăr, segmentul închis $[-3\,\mathbf{e}_1, 3\,\mathbf{e}_1]$, unde $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, ce are extremităţile $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{e}_1 \in A$ şi $\mathbf{b} = 3\,\mathbf{e}_1 \in A$, nu este în întregime conţinut în A căci, de exemplu, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, element al acestui segment, nu aparţine lui A.

Mulţimea A este formată din toate punctele planului, raportat la reperul cartezian ortogonal Ox_1x_2, situate între cercurile concentrice de raze 1 şi respectiv 3 cu centrele în origine, inclusiv punctele acestor cercuri. Ca urmare, A este formată dintr–o singură bucată, deci A este mulţime conexă. ■

3.12 Spaţiul $I\!R^n$ şi spaţiul punctual $I\!E^n$

În cele ce urmează, sintetizăm rezultatele relative la mulţimea $I\!R^n$.

În primul rând, am constatat că $I\!R^n = \underbrace{I\!R \times I\!R \times ... I\!R}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad n \in I\!N^*.$

Folosind Definiţia 1.3.1 şi relaţia (1.27), deducem că $I\!R^n$ se scrie în forma

$$I\!R^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_i \in I\!R, \quad i \in \overline{1,n}\}.$$

În primul paragraf al Capitolului 3 s–a demonstrat că $I\!R^n$ este spaţiu metric în raport cu oricare din aplicaţiile:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{3.222}$$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|, \ i \in \overline{1,n}\}, \tag{3.223}$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \tag{3.224}$$

definite pe $I\!R^n \times I\!R^n$ cu valori în $I\!R$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sunt elemente arbitrare din $I\!R^n$.

Metricele d, d_1 şi d_2 pe $I\!R^n$ sunt echivalente deoarece, utilizând inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$$

şi inegalităţile evidente

$$|x_j - y_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \forall\, j \in \overline{1,n},$$

putem demonstra că:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}\, d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \ \forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in I\!R^n;$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \ \forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in I\!R^n;$$

$$\frac{1}{n} d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \ \forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in I\!R^n.$$

Întrucât oricare din perechile $(\mathbb{R}^n, d), (\mathbb{R}^n, d_1)$, şi $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este spaţiu metric, elementele lui $\mathbb{R}^n$ sunt numite *puncte* şi vor fi notate cu litere mari ale alfabetului latin. Un asemenea punct P corespunde unei $n-$uple din $\mathbb{R}^n$ de forma $(x_1, x_2, ..., x_n)$, fapt ce se va scrie în forma $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Mulţimea tuturor punctelor P se notează cu $\mathbb{E}^n$, deci

$$\mathbb{E}^n = \{P : \ P = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \overline{1,n}\}.$$

Punctul $O = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{E}^n$ se numeşte *originea* mulţimii $\mathbb{E}^n$.

Bilele deschise cu centrul în punctul $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ şi rază $r > 0$ în spaţiile metrice $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ sunt mulţimile:

$$\begin{array}{lcl} B(\mathbf{x}^0, r) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r\}; \\ B_1(\mathbf{x}^0, r) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r\} = J_n(\mathbf{x}^0 - r\mathbf{s}, \mathbf{x}^0 + r\mathbf{s}); \\ B_2(\mathbf{x}^0, r) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r\} = \{\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_n) : \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^0|\}. \end{array}$$

Din Definiţia 3.2.3 avem că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu vectorial real şi din Teorema 3.2.1 rezultă că adunarea în $\mathbb{R}^n$ este definită prin

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{3.225}$$

iar produsul vectorului $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ cu scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ este vectorul

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Mulţimea $\mathbb{R}^n$ este spaţiu vectorial $n-$dimensional, o bază în $\mathbb{R}^n$ fiind $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, unde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1). \tag{3.226}$$

Această bază este denumită baza canonică, baza standard, sau baza uzuală a lui $\mathbb{R}^n$ şi avem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbf{e}_k = \mathbf{e}X,$$

unde

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$$

şi $X = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)^\top \in \mathcal{F}_{n,1}(\mathbb{R})$ este matricea coloană cu n linii a coordonatelor vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}$. Să remarcăm că numerele reale $x_i,\ i \in \overline{1,n}$, care definesc pe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se numesc *componentele* lui $\mathbf{x}$ când considerăm că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu metric şi *coordonatele* lui $\mathbf{x}$ în baza canonică (3.226) când considerăm că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu vectorial real.

Din Exemplul 3.5.1 deducem că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu normat complet sau spaţiu Banach, o normă în $\mathbb{R}^n$ fiind dată de

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{3.227}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ este vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$. Această normă am numit–o *norma Euclidiană* pe $\mathbb{R}^n$. De asemeni, folosind Exerciţiul 3.5.1, constatăm că se pot defini încă normele:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; \tag{3.228}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{3.229}$$

care sunt echivalente între ele şi echivalente cu norma definită de (3.227) după cum rezultă din Exerciţiul 3.5.1. Mai mult, din Observaţia 3.5.9 avem că metricele d, d_1, d_2 definite respectiv de (3.222), (3.223), (3.224) sunt *metrici induse* de respectiv normele $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$, definite corespunzător de (3.227), (3.228) şi (3.229), deoarece avem:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|; \quad d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1; \quad d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2.$$

Totodată, cele trei norme pe $I\!R^n$ au următoarele interpretări:

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x},\mathbf{0}); \quad \|\mathbf{x}\|_1 = d_1(\mathbf{x},\mathbf{0}); \quad \|\mathbf{x}\|_2 = d_2(\mathbf{x},\mathbf{0}).$$

Aşadar, de acum, putem vorbi de spaţiile normate complete $(I\!R^n,\|\cdot\|), (I\!R^n,\|\cdot\|_1)$ şi $(I\!R^n,\|\cdot\|_2)$. În cazul $n=1$, aceste trei spaţii coincid cu spaţiul normat obişnuit în care norma este dată de funcţia modul.

Un produs scalar pe $I\!R^n$, numit *produsul scalar standard* sau *produsul scalar canonic*, este dat de

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^\top Y, \ \ \forall\,\mathbf{x} = \mathbf{e}\,X \in I\!R^n, \ \ \forall\,\mathbf{y} = \mathbf{e}\,Y \in I\!R^n. \tag{3.230}$$

Se poate demonstra că $(I\!R^n,\cdot)$ este spaţiu Hilbert.

Folosind acum (3.226) şi (3.230), deducem

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i\in\overline{1,n}, \quad j\in\overline{1,n}. \tag{3.231}$$

Relaţiile (3.231) arată că în spaţiul Euclidian $(I\!R^n,\cdot)$, baza canonică $\mathcal{B}$ este *bază ortonormată*.

Norma Euclidiană indusă de produsul scalar standard pe $I\!R^n$ este (3.227).

Aplicaţia $\boldsymbol{\varphi}: I\!E^n\times I\!E^n\to I\!R^n$, definită prin

$$\boldsymbol{\varphi}(A,B) = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2, ..., b_n-a_n) = \mathbf{b}-\mathbf{a}\in I\!R^n, \tag{3.232}$$

unde $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ şi $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ sunt două puncte arbitrare din $I\!E^n$, $\mathbf{a}\in I\!R^n$ şi $\mathbf{b}\in I\!R^n$, are evident proprietăţile:

$$\boldsymbol{\varphi}(A,B)+\boldsymbol{\varphi}(B,C) = \boldsymbol{\varphi}(A,C), \quad \forall\,A,\,B,\,C\in I\!E^n; \tag{3.233}$$

$$\forall\,A\in I\!E^n \text{ şi } \forall\,\mathbf{x}\in I\!R^n\,\exists P\in I\!E^n \text{ astfel încât } \mathbf{x} = \overrightarrow{AP}\,. \tag{3.234}$$

Deoarece aplicaţia $\boldsymbol{\varphi}$ din (3.232) are proprietăţile (3.233) şi (3.234), spunem că mulţimea $I\!E^n$ are structură de *spaţiu punctual afin* asociat lui $I\!R^n$.

Spaţiul liniar $I\!R^n$ se mai numeşte *spaţiul vectorial director* al spaţiului punctual afin $I\!E^n$. se numeşte *dimensiunea* spaţiului punctual afin $I\!E^n$, dimensiunea spaţiului său director.

Prin urmare, spaţiul punctual afin $I\!E^n$ are dimensiunea egală cu n.

Se vede, de asemenea, din (3.233) că aplicaţia φ are încă proprietăţile:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \iff A = B \iff a_i = b_i, \ i\in\overline{1,n};$$

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{0} \iff A = B;$$

$$\overrightarrow{AB} = -\,\overrightarrow{BA}, \quad \forall\,A,\,B\in I\!E^n;$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \forall\,A,\,B\in I\!E^n.$$

unde $O\in I\!E^n$ este punctul denumit mai sus origine în $I\!E^n$.

De asemenea, este evident că aplicaţia $\boldsymbol{\varphi}_0: I\!E^n\to I\!R^n$, definită prin

$$\boldsymbol{\varphi}_0(M) = \overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = (x_1,x_2,...,x_n)\in I\!R^n, \tag{3.235}$$

oricare ar fi $M = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!\!E^n$, este bijectivă.

Vectorul $\overrightarrow{OM}$ din (3.235) se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului $M \in I\!\!E^n$ faţă de originea $O \in I\!\!E^n$. Când $n = 2,\ n = 3,$ sau $n = 1$ acest vector se notează de regulă cu $\mathbf{r}$.

Datorită bijecţiei (3.235), spaţiile $I\!\!E^n$ şi $I\!\!R^n$ se identifică.

Proprietatea (3.233) permite interpretări geometrice a adunării în $I\!\!R^n$, definită de (3.225), numite *regula triunghiului* şi *regula paralelogramului* de adunare a doi vectori reprezentaţi în acelaşi punct al spaţiului afin Euclidian $I\!\!E^n$.

Dacă vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt reprezentaţi în punctul M al spaţiului afin Euclidian de către segmentele orientate $\overrightarrow{MM_1}$ şi $\overrightarrow{MM_2}$ şi M_3 este cel de al patrulea vârf al paralelogramului cu muchiile alăturate segmentele orientate $\overrightarrow{MM_1}$ şi $\overrightarrow{MM_2}$, atunci segmentul orientat $\overrightarrow{MM_3}$ este reprezentantul în M al vectorului sumă $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Fie p vectori $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2, ...,\ \mathbf{u}_p$ reprezentaţi în spaţiul afin Euclidian $I\!\!E^n$ respectiv în punctele $M_1,\ M_2, ..., M_p$.

Vectorul al cărui reprezentant în punctul M_p este segmentul orientat $\overrightarrow{M_pM_1}$ este, prin definiţie, vectorul sumă $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ... + \mathbf{u}_p$.

Acest mod de obţinere a sumei a p vectori este cunoscută sub numele de *regula poligonului.*

Ansamblul $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ unde $O = (0, 0, ..., 0) \in I\!\!E^n$ este originea în $I\!\!E^n$, iar $\mathcal{B}$ este o baza din $I\!\!R^n$ se numeşte *reper* în $I\!\!E^n$. Punctul O se numeşte *originea reperului*, iar vectorii bazei se numesc *vectorii reperului.* Dacă baza $\mathcal{B}$ este cea canonică, prezentată în (3.226), reperul corespunzător $\mathcal{R}$ se numeşte *reper ortogonal*, sau *reper cartezian*, vectorii reperului numindu–se în acest caz *versorii reperului.* În acest caz, numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ din (3.235) se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului $M \in I\!\!E^n$ şi se obişnuieşte să se scrie $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Folosind Observaţia 3.2.6, putem afirma că în $I\!\!E^n$ există o infinitate de repere. Mulţimea de puncte din $I\!\!E^n$

$$Ox_k = \{P \in I\!\!E^n :\ \mathbf{x} = \mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = t\mathbf{e}_k,\ t \in I\!\!R\},$$

se numeşte *axă de coordonate* a reperului cartezian $\mathcal{R}$. Există n asemenea axe de coordonate şi anume $Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n$, despre care spunem că sunt ortogonale deoarece baza care le defineşte este ortonormată.

Spaţiul punctual afin $I\!\!E^4$, de dimensiune 4, se numeşte *spaţiu-timp*, *spaţiul evenimentelor*, sau *spaţiul relativist.*

Faţă de punctul fix $O = (0, 0, ..., 0) \in I\!\!E^n$, ales ca origine a reperului cartezian $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, fiecărui punct $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!\!E^n$ îi corespunde vectorul său de poziţie $r = \mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbf{e}_k$ care este element al spaţiului Hilbert $(I\!\!R^n, \cdot)$.

Folosind acum (3.231), deducem $x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha_j = \mathrm{mapr}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{x},\ j \in \overline{1, n},$ unde α_j este unghiul dintre vectorul $\mathbf{x} = \mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ şi versorul $\mathbf{e}_j$, care arată că coordonata de rang j a punctului $M \in I\!\!E^n$ în reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ este produsul scalar al vectorului său de poziţie cu versorul $\mathbf{e}_j$ al axei Ox_j, adică este numărul real care reprezintă *mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale a vectorului* $\mathbf{x}$ *pe direcţia vectorului* $\mathbf{e}_j$.

În cazul planului punctual afin, numerele x_1, x_2 se numesc *abscisa* şi respectiv *ordonata* punctului $M \in I\!\!E^2$. De multe ori, coordonatele carteziene ale unui punct M din plan se notează cu x şi y, iar versorii reperului se notează cu $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$, axa Ox numindu–se *axa absciselor*, iar Oy–*axa ordonatelor.* În cazul $n = 3,\ x_1, x_2, x_3$ se numesc corespunzător *abscisa, ordonata* şi respectiv *cota* punctului M, iar axele de coordonate se numesc *axa absciselor, axa ordonatelor* şi *axa cotelor.* Tot în această figură se vede interpretarea algebrică dată mai sus pentru scalarii x_1, x_2, x_3, coordonatele punctului M în reperul cartezian $Ox_1x_2x_3$. Uneori, coordonatele spaţiale se notează cu x, y şi z, versorii reperului fiind notaţi în această situaţie cu $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, iar axele de coordonate se notează cu Ox, Oy şi Oz.

Pe spaţiul punctual afin $I\!\!E^n$ se pot introduce trei metrici echivalente, introducerea lor fiind sugerată de metricele $d,\ d_1$ şi d_2 pe $I\!\!R^n$.

Aceste trei metrici se definesc după cum urmează:

$$(A, B) \mapsto d(A, B) = \|\ \overrightarrow{AB}\ \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}; \tag{3.236}$$

$$(A, B) \mapsto d_1(A, B) = \|\ \overrightarrow{AB}\ \|_1 = \max\{|b_i - a_i|,\ i \in \overline{1, n}\};$$

$$(A,B)\mapsto d_2(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|_2=\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|,$$

unde $A(a_1,a_2,...,a_n)$ şi $B(b_1,b_2,...,b_n)$ sunt puncte arbitrare din $\mathbb{E}^n$.

În cazul $n=2$, $d(A,B)$ este lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic ACB, $d_1(A,B)$ este cea mai mare dintre lungimile catetelor AC, BC ale aceluiaşi triunghi, iar $d_2(A,B)$ reprezintă suma lungimilor catetelor triunghiului dreptunghic ACB.

În cazul $n=3$, cele trei distanţe se interpretează uşor dacă se construieşte paralelipipedul dreptunghic cu punctele A şi B ca vârfuri opuse, iar muchiile sale să fie paralele cu axele de coordonate ale reperului cartezian $Ox_1x_2x_3$.

În acest caz, $d(A,B)$ este lungimea muchiei AB a paralelipipedului, numărul $d_1(AB)$ este cea mai mare dintre muchiile AC, CD şi DB, iar $d_2(A,B)$ este suma acestor trei muchii.

Distanţa (3.236) în $\mathbb{E}^n$ se numeşte *distanţa Euclidiană*, iar spaţiul metric $(\mathbb{E}^n,d)$ se numeşte *spaţiul punctual Euclidian de dimensiune* n.

În cazul $n=1$, spaţiile metrice $(\mathbb{E}^1,d),(\mathbb{E}^1,d_1)$ şi (E^1,d_2) coincid şi se identifică cu axa reală.

Având în vedere identificarea lui $\mathbb{R}^2$ cu $\mathbb{E}^2$ şi a lui $\mathbb{R}^3$ cu $\mathbb{E}^3$, precum şi cele stabilite mai sus, putem reprezenta grafic bilele deschise şi închise cu centrul în $\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0)$ şi rază $r>0$. Acestea sunt *discuri.*

Bila deschisă $B(\mathbf{x}_0,r)$, în cazul $n=3$, este mulţimea punctelor interioare sferei cu centrul în punctul $C(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ şi rază $r>0$ din spaţiul fizic obişnuit raportat la reperul cartezian $Ox_1x_2x_3$

Bila deschisă $B_1(\mathbf{x}_0,r)$ din spaţiul metric $(\mathbb{E}^3,d_1)$ este mulţimea punctelor interioare cubului cu centrul de simetrie în punctul $C(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ şi muchiile paralele cu axele de coordonate ale reperului cartezian $Ox_1x_2x_3$ şi de lungime $2r$.

Întrucât metricile d,d_1,d_2 pe $\mathbb{R}^n$ sunt echivalente, rezultă ca au loc incluziunile de bile precizate în Definiţia 3.1.9, adică oricărei bile deschise $B(\mathbf{x}^0,r)$ i se poate înscrie şi circumscrie câte o bilă deschisă cu centrul în $\mathbf{x}^0$ din spaţiul metric $(\mathbb{R}^n,d_1)$ razele acestora fiind în ordine $\dfrac{1}{\sqrt{n}}r$ şi respectiv r. Totodată, bilei $B_1(\mathbf{x}^0,r)$ i se poate înscrie bila $B(\mathbf{x}^0,r)$ şi circumscrie bila $B(\mathbf{x}^0,\sqrt{n}r)$.

Afirmaţii asemănătoare se pot face şi atunci când se iau în discuţie metricile echivalente d şi d_2.

În cazul $n=1$, spaţiile Banach $(\mathbb{R},\|\cdot\|)$, $(\mathbb{R},\|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R},\|\cdot\|_2)$ coincid cu spaţiul Banach $(\mathbb{R},|\cdot|)$, iar bilele deschise $B(x_0,r)$, $B_1(x_0,r)$ şi $B_2(x_0,r)$ sunt identice cu intervalul (x_0-r,x_0+r).

Un şir de vectori din spaţiul normat $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$, sau totuna cu a spune un şir de puncte $(M_k)_{k\geq 1}$ din spaţiul punctual afin Euclidian $\mathbb{E}^n$ determină în mod unic n şiruri de numere reale $(x_{jk})_{k\geq 1}$, $j\in\overline{1,n}$, unde $\mathbf{x}_k=(x_{1k},x_{2k},...,x_{nk})$, care se numesc *şirurile componente*, sau *şirurile coordonate* ale şirului $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$.

Teorema 3.12.1. *Au loc următoarele echivalenţe:*

1^0. $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ *şir mărginit în* $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow(x_{jk})_{k\geq 1},\ j\in\overline{1,n},$ *sunt şiruri mărginite în* $(\mathbb{R},|\cdot|)$;

2^0. $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})\in\mathbb{R}^n\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{jk}=x_{j0}\in\mathbb{R},\ j\in\overline{1,n}$;

3^0. $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ *şir fundamental în* $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow(x_{jk})_{k\geq 1},\ j\in\overline{1,n},$ *sunt şiruri fundamentale în* $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Demonstraţie. Pentru demonstraţie se folosesc inegalităţile

$$|\lambda_i|\leq\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+...+\lambda_n^2}\leq|\lambda_1|+|\lambda_2|+...+|\lambda_n|,\quad i\in\overline{1,n},\tag{3.237}$$

Teorema 3.4.1, Teorema 3.4.2 şi unele rezultate stabilite în primele două paragrafe din Cap. 2. **q.e.d.**

Observaţia 3.12.1. *Studiul şirurilor de vectori din $I\!R^n$ se reduce la studiul şirurilor componente ale acestora.*

Observaţia 3.12.2. *Proprietăţile 2^0 şi 3^0 din Teorema 3.12.1 şi Teorema 2.2.2 conduc la afirmaţia că $I\!R^n$ este spaţiu metric complet.*

Mai mult, $(I\!R^n, \|\cdot\|)$, $(I\!R^n, \|\cdot\|_1)$ şi $(I\!R^n, \|\cdot\|_2)$ sunt spaţii Banach.

Observaţia 3.12.3. *Dacă unul din şirurile coordonate ale şirului $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ este nemărginit, atunci $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ este şir nemărginit în $I\!R^n$.*

Teorema 3.12.2. *Un şir mărginit din $I\!R^n$ conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie şirul mărginit $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$, unde $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk}) \in I\!R^n$. După Teorema 3.12.1, şirurile coordonate sunt mărginite. Din Propoziţia 2.1.8 avem că şirul $(x_{1k})_{k\geq 1}$ conţine un subşir convergent; fie acesta $(x_{1p_k^{(1)}})_{k\geq 1}$. Subşirul $(x_{2p_k^{(1)}})_{k\geq 1}$ este un şir mărginit, deci admite un subşir convergent; fie acesta $(x_{2p_k^{(2)}})_{k\geq 1}$. Este clar că şirul strict crescător de numere naturale $(p_k^{(2)})_{k\geq 1}$ satisface condiţiile $p_k^{(2)} \geq k$ şi este subşir al şirului de numere naturale $(p_k^{(1)})$. Şirul $(x_{1p_k^{(2)}})$ este subşir al şirului convergent $(x_{1p_k^{(1)}})$, deci şir convergent. Subşirul $(x_{3p_k^{(2)}})_{k\geq 1}$ este şir mărginit, deci admite un subşir convergent de forma $(x_{3p_k^{(3)}})_{k\geq 1}$, unde $(p_k^{(3)})_{k\geq 1}$ este , în cele din urmă, subşir al şirului $(p_k^{(1)})_{k\geq 1}$.

Procedeul continuă şi, în final, ajungem la concluzia că şirul $(x_{nk})_{k\geq 1}$ admite subşirul convergent $(x_{np_k^{(n)}})_{k\geq 1}$ unde $(p_k^{(n)})_{k\geq 1}$ este un subşir al şirului $(p_k^{(n-1)})_{k\geq 1}$ care la rându–i este subşir al şirului $(p_k^{(n-2)})_{k\geq 1}$ ş.a.m.d.

În felul acesta se obţine şirul convergent de vectori $(\mathbf{x}_{p_k^{(n)}})_{k\geq 1}$, unde

$$\mathbf{x}_{p_k^{(n)}} = (x_{1p_k^{(n)}}, x_{2p_k^{(n)}}, ..., x_{np_k^{(n)}}) \in I\!R^n,$$

care este subşir al şirului mărginit $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$. **q.e.d.**

Observaţia 3.12.4. *Folosind Corolarul 3.10.2 putem afirma că o mulţime compactă de numere reale A are un cel mai mic element şi un cel mai mare element care sunt în acelaşi timp $\inf A$ şi respectiv $\sup A$.*

O afirmaţie de genul $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in I\!R^{n+m}$, unde

$$I\!R^{n+m} = \{\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in I\!R^n, \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in I\!R^m\},$$

trebuie înţeleasă în sensul că $\mathbf{x} \in I\!R^n$ şi $\mathbf{y} \in I\!R^m$.

Dacă $A \subset I\!R^n$ şi $B \subset I\!R^m$, atunci $E = A \times B = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in I\!R^{n+m} : \ \mathbf{x} \in A, \ \mathbf{y} \in B\}$. Afirmaţia $\mathbf{z} \in E$ înseamnă $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, unde $\mathbf{x} \in A \subset I\!R^n$, iar $\mathbf{y} \in B \subset I\!R^m$.

Capitolul 4

Limite şi continuitate

4.1 Limita unei funcţii într-un punct

Fie (X, d) şi (Y, σ) două spaţii metrice, A o submulţime nevidă a lui $X,\ A' \subset X$ mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii $A,\ f \in \mathcal{F}(A, Y)$ o funcţie de la A în $Y,\ a \in A'$ şi $\ell \in Y$.

Definiţia 4.1.1. *Spunem că* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ **admite limita** ℓ *în punctul* a *şi scriem*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell, \quad \textit{sau} \quad f(x) \longrightarrow \ell, \quad \textit{pentru} \quad x \longrightarrow a, \tag{4.1}$$

dacă oricare ar fi vecinătatea $V \in \mathcal{V}(\ell)$, *există vecinătatea* $U \in \mathcal{V}(a)$, *astfel încât să fie satisfăcută condiţia*

$$f\Big((U \setminus \{a\}) \cap A\Big) \subset V. \tag{4.2}$$

Observaţia 4.1.1. *Condiţia* (4.2) *este echivalentă cu*

$$\forall\, x \in (U \setminus \{a\}) \cap A \Longrightarrow f(x) \in V. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1.1. *Funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ *are limita* $\ell \in Y$ *în punctul* $a \in A'$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *astfel încât*

$$\forall\, x \in A, \quad 0 < d(x, a) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f(x), \ell) < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Demonstraţie. Presupunem că (4.1) are loc şi fie $\varepsilon > 0$ dat.

Luăm $V = B(\ell, \varepsilon)$. Conform ipotezei, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f\Big((U \setminus \{a\}) \cap A\Big) \subset V$. Alegem apoi $\delta > 0$ astfel încât $B(a, \delta) \subset U$. Acum, dacă

$$x \in \Big(B(a, \delta) \setminus \{a\}\Big) \cap A, \tag{4.5}$$

din (4.3) rezultă
$$f(x) \in V = B(\ell, \varepsilon). \tag{4.6}$$
Condiţia (4.5) este echivalentă cu $0 < d(x, a) < \delta$, iar (4.6) cu $\sigma(f(x), \ell) < \varepsilon$. Prin urmare, putem scrie
$$0 < d(x, a) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Reciproc, să considerăm $\varepsilon > 0$ pentru care există $\delta > 0$ astfel încât să aibă loc (4.4) şi fie $V \in \mathcal{V}(\ell)$ o vecinătate arbitrară a punctului ℓ.

Din Definiţia 3.1.10 rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(\ell, \varepsilon) \subset V$. Pentru acest $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, care poate fi interpretat drept raza unei bile cu centrul în a din spaţiul metric (X, d).

Din Propoziţia 3.1.7 avem că $B(a, \delta) \in \mathcal{V}(a)$, deci putem lua pe U din Definiţia 4.1.1 chiar pe $B(a, \delta)$. Atunci, relaţia (4.4) se poate traduce prin (4.2), iar din Definiţia 4.1.1 rezultă că ℓ este limta funcţiei f în punctul de acumulare a al mulţimii A. **q.e.d.**

Observaţia 4.1.2. *Din Teorema 4.1.1 deducem că (4.4) poate fi luată ca definiţie a limitei unei funcţii într-un punct. Convenim ca această definiţie să se numească* **definiţia limitei unei funcţii într–un punct în limbajul "$\varepsilon - \delta$."**

Teorema 4.1.2. *Funcţia f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de puncte (x_n), $x_n \in A \setminus \{a\}$, convergent la punctul a, şirul valorilor funcţiei $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent la ℓ.*

Demonstraţie. Fie şirul arbitrar de puncte (x_n), unde $x_n \in A \setminus \{a\}$, considerat astfel încât $x_n \to a$.

Dorim să demonstrăm că $f(x_n) \to \ell$.

Fie în acest sens $\varepsilon > 0$, arbitrar. Din Teorema 4.1.1 rezultă că pentru acest εexistă $de = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ implicaţia (4.4) este adevărată. Cum $x_n \to a$, pentru $\delta = \delta(\varepsilon)$ de mai sus există $n_\delta \in I\!\!N$ aşa încât oricare ar fi $n > n_\delta$ să rezulte $d(x_n, a) < \delta$. Din (4.4) obţinem $\sigma(f(x_n), \ell) < \varepsilon$, $\forall\, n > n_\delta = n_{\delta(\varepsilon)} = n_\varepsilon$.

Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in I\!\!N$ astfel încât pentru $n > n_\varepsilon$ rezultă $\sigma(f(x_n), \ell) < \varepsilon$, adică $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

Reciproca teoremei o demonstrăm prin reducere la absurd.

Presupunem că există o vecinătate V a lui ℓ astfel încât oricare ar fi vecinătatea $U \in \mathcal{V}(a)$ să avem
$$f\Big((U \setminus \{a\}) \cap A\Big) \not\subset V. \tag{4.7}$$
Pentru $n \in I\!\!N^*$ să luăm drept $U = B\left(a, \dfrac{1}{n}\right)\cdot$ Atunci, (4.7) devine
$$f\left(\left(B\left(a, \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap A\right) \not\subset V. \tag{4.8}$$
Relaţia (4.8) arată că există $x_n \in B\left(a, \dfrac{1}{n}\right)$, $x_n \neq a$, astfel încât
$$f(x_n) \notin V. \tag{4.9}$$
Dar x_n fiind element al bilei $B\left(a, \dfrac{1}{n}\right)$ avem $d(x_n, a) < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in I\!\!N^*$, inegalitate care arată că $x_n \to a$. Conform ipotezei teoremei reciproce $f(x_n) \to \ell$. Prin urmare, există $N_v \in I\!\!N$ aşa încât pentru $n > N_v$ să avem $f(x_n) \in V$, ceea ce contrazice (4.9). **q.e.d.**

Observaţia 4.1.3. *Condiţia din Teorema 4.1.2 poate fi luată, de asemenea, ca definiţie a limitei funcţiei* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ *în punctul* $a \in A'$ *şi este numită* **definiţia cu şiruri a limitei funcţiei** f **în punctul** $a \in A'$.

Observaţia 4.1.4. *Definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într–un punct poate fi utilizată pentru a demonstra că funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ *nu are limită în punctul* $a \in A'$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că există două şiruri (x_n) şi (x'_n) în $A \setminus \{a\}$, ambele convergente la a, pentru care şirurile imaginilor $(f(x_n))$ şi $(f(x'_n))$ să aibă limite diferite în Y.

Exerciţiul 4.1.1. *Să se arate că* $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Soluţie. Pornim de la

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| = |x-2||(x-2)+4| \leq$$
$$\leq |x-2|(|x-2|+4) = |x-2|^2 + 4|x-2| < \delta^2 + 4\delta = \varepsilon.$$

Rezolvând ecuaţia $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$ găsim $\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$.

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$ cu proprietatea că oricare ar fi $x \in I\!\!R$, cu $|x-2| < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, unde $f(x) = x^2$ şi $\ell = 4$, ceea ce în baza Teoremei 4.1.1 arată că $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. ∎

Exemplul 4.1.1. *Funcţia* $f : I\!\!R \setminus \{0\} \to I\!\!R,\ f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, *nu are limită în* $x = 0$.

Soluţie. Considerăm şirurile (x_n) şi (x'_n) cu

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi},$$

ambele convergente la zero. Atunci,

$$f(x_n) = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = 1 \quad \text{şi} \quad f(x'_n) = \sin\frac{(4n-1)\pi}{2} = -1,$$

de unde avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = -1$.

Rezultatul stabilit, împreună cu Observaţia 4.1.4, arată că nu există limita funcţiei f în $x = 0$. ∎

Exemplul 4.1.2. *Funcţia* $f : I\!\!R^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0,0)\} \longrightarrow I\!\!R,\ f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *nu are limită în origine.*

Soluţie. Şirul $(\mathbf{z}_n)_{n\geq 1}$, $\mathbf{z}_n \in I\!\!R^2 \setminus \{0\}$, $\mathbf{z}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, $\lambda \in I\!\!R$, este evident convergent la $\mathbf{0} = (0,0)$. Şirul valorilor funcţiei are termenul general $f(\mathbf{z}_n) = f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right) = \dfrac{\dfrac{\lambda}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\lambda^2}{n^2}} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Se vede că $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{z}_n) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, deci limita şirului $(f(\mathbf{z}_n))$ depinde de λ. Într-adevăr, dacă $\lambda = 2$, adică $\mathbf{z}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$, atunci $f(\mathbf{z}_n) \to \dfrac{2}{5}$, iar dacă $\lambda = -1$, $\mathbf{z}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ şi $f(\mathbf{z}_n) \to -\dfrac{1}{2}\cdot$ Prin urmare, funcţia f nu are limită în origine. ∎

Teorema 4.1.3. *Dacă funcţia $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ are limită în punctul $a \in A'$, atunci limita este unică.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din Observaţia 4.1.3 şi Teorema 3.3.2. **q.e.d.**

Să considerăm acum cazul particular $X = I\!R^n$, $n \geq 1$ şi $Y = I\!R^m$, $m \geq 1$, iar metricele d şi σ sunt cele Euclidiane. Funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, unde $A \subset I\!R^n$, $n > 1$ şi $m > 1$, este echivalentă cu un sistem de m funcţii reale de variabilă vectorială. Într-adevăr, fie $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in I\!R^m$, imaginea lui $\mathbf{x} \in A$ prin $\mathbf{f}$. Deoarece $\mathbf{y} \in I\!R^m$, avem $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_m)$ cu $y_i \in I\!R$. Dacă pentru orice $i \in \overline{1, m}$ ataşăm fiecărui $\mathbf{x} \in A$ coordonata de pe locul i a vectorului $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, atunci $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1\mathbf{x}, f_2\mathbf{x}, ..., f_m\mathbf{x})$ pentru orice $x \in A$, unde $f_i : A \longrightarrow I\!R$, $f_i(\mathbf{x}) = y_i$, $\forall\, i \in \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă avem un sistem de m funcţii reale $f_i : A \longrightarrow I\!R$, $i \in \overline{1, m}$, putem defini funcţia $\mathbf{f} : A \longrightarrow I\!R^m$ astfel încât $\mathbf{fx} = (f_1\mathbf{x}, f_2\mathbf{x}, ..., f_m\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in A$.

Funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, unde $A \subset I\!R^n$, $n > 1$ şi $m > 1$, se numeşte *funcţie vectorială de argument vectorial*. În această situaţie funcţiile $f_i \in \mathcal{F}(A)$, $i \in \overline{1, m}$, se numesc *funcţiile componente*, sau *funcţiile coordonate* ale funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ şi scriem $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$. În cazul $n = 1$ şi $m \geq 2$, funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, $A \subset I\!R$, se numeşte *funcţie vectorială de argument real*, iar în cazul $m = 1$ şi $n \geq 2$ funcţia corespunzătoare, care acum este normal să se noteze cu f, se numeşte *funcţie reală de variabilă vectorială*, sau *funcţie reală de n variabile reale*. În sfârşit, dacă $m = n = 1$, funcţia corespunzătoare f se numeşte *funcţie reală de variabila reală* $x \in A$, sau $t \in A$.

Teorema 4.1.4. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, $A \subset I\!R^n$, $n \geq 1, m \geq 2$, *are limita* $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_m) \in I\!R^m$ *în punctul* $\mathbf{a} \in A'$ *dacă şi numai dacă există simultan* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{a}}} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i \in I\!R$, $i \in \overline{1, m}$.

Demonstraţie. Afirmaţiile se obţin din Observaţia 4.1.2 şi Teorema 3.12.1. **q.e.d.**

Observaţia 4.1.5. *Din Teorema 4.1.4 rezultă că studiul limitei unei funcţii vectoriale de argument vectorial poate fi redus la studiul limitelor funcţiilor componente, sau coordonate care sunt funcţii reale de variabilă vectorială.*

Teorema 4.1.5. **(Cauchy–Bolzano[1])** *Fie (X, d) spaţiu metric, (Y, σ) spaţiu metric complet, A submulţime nevidă a lui X, $a \in X$ un punct de acumulare al mulţimii A şi $f \in \mathcal{F}(A, Y)$.*

Funcţia f are limită în punctul $a \in A'$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi punctele $x', x'' \in A$ cu

$$\begin{cases} 0 < d(x', a) < \delta(\varepsilon) \\ 0 < d(x'', a) < \delta(\varepsilon) \end{cases} \implies \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \tag{4.10}$$

[1]Bolzano, Bernard (1781–1848), matematician italian.

Demonstraţie. Să presupunem că $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Folosind Teorema 4.1.2 deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât

$$\forall\, x \in A \quad \text{cu} \quad 0 < d(x,a) < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f(x),\ell) < \varepsilon/2. \tag{4.11}$$

Fie $x' \in A$ şi $x'' \in A$ care satisfac (4.11), adică

$$\sigma(f(x'),\ell) < \varepsilon/2 \text{ şi } \sigma(f(x''),\ell) < \varepsilon/2. \tag{4.12}$$

Din (4.12), utilizând inegalitatea triunghiulară, deducem

$$\sigma(f(x'),f(x'')) \le \sigma(f(x'),\ell) + \sigma(f(x''),\ell) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

adică (4.10) este satisfăcută.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ pentru care are loc (4.10) şi să arătăm existenţa limitei funcţiei f în punctul a.

Vom utiliza definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct.

Fie în acest sens $(x_n)_{n\ge 1},\ x_n \in A \setminus \{a\}$, un şir arbitrar convergent la a. Arătăm că şirul valorilor funcţiei $(f(x_n))_{n\ge1}$ este convergent în Y.

Cum $x_n \to a$, pentru $\delta(\varepsilon)$ care apare în (4.10), există $N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$, aşa fel încât

$$d(x_n,a) < \delta(\varepsilon),\ \forall\, n > N(\delta(\varepsilon)).$$

Dacă $n > N(\delta(\varepsilon))$ şi $m > N(\delta(\varepsilon))$ sunt numere naturale arbitrare, atunci interpretând x_n şi x_m drept x' şi respectiv x'' din (4.10), rezultă că

$$\begin{cases} 0 < d(x_n,a) < \delta(\varepsilon) \\ 0 < d(x_m,a) < \delta(\varepsilon) \end{cases} \Longrightarrow \ \sigma(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Ultima inegalitate din (4.13) arată că şirul $(f(x_n))$ este fundamental în (Y,σ). Cum (Y,σ) este spaţiu metric complet, rezultă că $(f(x_n))$ este convergent, deci există $\ell \in Y$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell. \tag{4.14}$$

Pentru a încheia demonstraţia trebuie să arătăm că ℓ din (4.14) nu depinde de şirul (x_n). Presupunem că n-ar fi aşa şi că şirurile (x'_n), (x''_n) cu termenii din $A \setminus \{a\}$, convergente fiecare la a, sunt astfel încât $f(x'_n) \to \ell'$, $f(x''_n) \to \ell''$, iar $\ell' \ne \ell''$.

Să formăm acum şirul

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, ..., x'_n, x''_n, ...,$$

care converge, de asemenea, la a.

Aplicând din nou cele demonstrate mai sus, rezultă că există $\ell \in Y$ astfel ca şirul valorilor

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), ..., f(x'_n), f(x''_n), ... \tag{4.15}$$

este convergent şi are limita $\ell \in Y$. Întrucât $(f(x'_n))$ şi $(f(x''_n))$ sunt subşiruri ale şirului (4.15) rezultă că $\ell' = \ell'' = \ell$ care contrazice presupunerea făcută că $\ell' \ne \ell''$ şi demonstraţia teoremei este încheiată. **q.e.d.**

Observaţia 4.1.6. *Dacă Y din Teorema 4.1.5 este $\mathbb{R}^m$ şi metrica din $\mathbb{R}^m$ este cea indusă de norma Euclidiană, iar A este o submulţime a spaţiului Euclidian $\mathbb{R}^n$, atunci Teorema 4.1.5 se poate adapta după cum urmează.*

Teorema 4.1.6. *Funcţia* $\mathbf{f}: A \longrightarrow I\!R^m$, *unde* $A \subset I\!R^n$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, *are limită în punctul* $\mathbf{a} \in A'$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta(\varepsilon) > 0$, *astfel încât*

$$\begin{cases} \forall\, \mathbf{x}' \in A, \;\; cu\; 0 < \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\|_{I\!R^n} < \delta \\ \forall\, \mathbf{x}'' \in A, \;\; cu\; 0 < \|\mathbf{x}'' - \mathbf{a}\|_{I\!R^n} < \delta \end{cases} \Longrightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\|_{I\!R^m} < \varepsilon. \tag{4.16}$$

În cazul $m = n = 1$, implicaţia (4.16) devine

$$\begin{cases} 0 < |x' - a| < \delta \\ 0 < |x'' - a| < \delta \end{cases} \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{4.17}$$

şi reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie reală de variabila reală să aibă limită finită într–un punct de acumulare $a \in I\!R$ al domeniului de definiţie al funcţiei.

În continuare, punem în evidenţă un rezultat important, cunoscut şi sub numele de *principiul substituţiei*, care permite calculul limitei unor funcţii compuse.

Teorema 4.1.7. (**Principiul substituţiei**) *Fie* $A \subset (X, d)$, $B \subset (Y, \sigma)$ *şi funcţiile* $f : B \to (Z, q)$, $g : A \to B \setminus \{y_0\}$.

Dacă $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = \ell$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell. \tag{4.18}$$

Demonstraţie. Deoarece $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = \ell$, din Definiţia 4.1.1 rezultă că pentru orice $W \in \mathcal{V}(\ell)$, există $U \in \mathcal{V}(y_0)$, astfel încât

$$y \in (U \setminus \{y_0\}) \cap B \Longrightarrow f(y) \in W. \tag{4.19}$$

Pe de altă parte, întrucât $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ şi g ia valori în $B \setminus \{y_0\}$, avem că există vecinătatea $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$x \in (V \setminus \{x_0\}) \cap A \Longrightarrow g(x) \in (U \setminus \{y_0\}) \cap B. \tag{4.20}$$

Din (4.19) şi (4.20) rezultă că oricare ar fi vecinătatea $W \in \mathcal{V}(\ell)$, există vecinătatea $V \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât

$$x \in (V \setminus \{x_0\}) \cap A \Longrightarrow f(g(x)) \in W. \tag{4.21}$$

Implicaţia (4.21) demonstrează că (4.18) are loc. **q.e.d.**

4.2 Funcţii continue

Fie spaţiile metrice (X, d) şi (Y, σ), $A \subset X$ o submulţime nevidă a lui X, $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ o funcţie de la A în Y şi $a \in A$ un punct oarecare al mulţimii A.

Definiţia 4.2.1. *Spunem că funcţia* $f : A \to Y$ *este* **continuă în punctul** $a \in A$ *dacă pentru orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}(f(a))$ *există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât*

$$f(U \cap A) \subset V. \tag{4.22}$$

Definiţia 4.2.2. *Dacă funcţia f nu este continuă în punctul $a \in A$, spunem că f este* **discontinuă în punctul** a, *sau că punctul a este* **punct de discontinuitate** *al funcţiei f.*

Observaţia 4.2.1. *Dacă admitem că noţiunea matematică de vecinătate traduce ideea intuitivă de* **apropiere**, *Definiţia 4.2.1 ne spune că $f(x)$ este oricât de* **aproape** *de $f(a)$ de îndată ce x este suficient de* **aproape** *de a.*

Observaţia 4.2.2. *Noţiunea de continuitate a unei funcţii nu are sens decât în punctele mulţimii de definiţie a funcţiei respective.*

Observaţia 4.2.3. *Continuitatea unei funcţii întrun punct depinde numai de valorile funcţiei dintr-o vecinătate a punctului, deci are* **caracter local**. *O funcţie poate fi continuă într-un punct $a \in A$ dar să nu fie continuă într-un alt punct vecin lui a.*

Observaţia 4.2.4. *Dacă $a \in A$ este un* **punct izolat** *al lui A, atunci f este* **continuă în** a, *deoarece, a fiind punct izolat există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel ca $U \cap A = \{a\}$ şi atunci oricare ar fi vecinătatea $V \in \mathcal{V}(f(a))$ are loc $f(U \cap A) = \{f(\{a\})\} \subset V$, ceea ce antrenează continuitatea lui f în a.*

Prin urmare, dacă domeniul de definiţie al unei funcţii are puncte izolate, în aceste puncte funcţia este continuă.

Teorema 4.2.1. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ este continuă în punctul $a \in A' \cap A$ dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ şi această limită este egală cu $f(a)$.*

Demonstraţie. Dacă f este continuă în $a \in A' \cap A$, din Definiţia 4.2.1 rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$ există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât să aibă loc (4.22) de unde, cu atât mai mult, are loc $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V$ care spune că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Reciproc, dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, din Definiţia 4.1.1 rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))\ \exists U \in \mathcal{V}(a)$ aşa încât $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V$. Cum şi pentru $x = a \in A$ avem $f(a) \in V$ rezultă că (2.1) are loc, ceea ce spune că f este continuă în $x = a$. **q.e.d.**

Ţinând seama de Observaţia 4.2.4 şi de Teorema 4.2.1, rezultă următoarea observaţie.

Teorema 4.2.2. *Fie $f : A \to Y$ şi $a \in A$. Atunci, f este continuă în $x = a$ dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

(i) *ori $a \in A'$ şi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;*

(ii) *ori a este punct izolat al lui A.*

Observaţia 4.2.5. *Dacă* $a \in A \cap A'$ *şi* $f : A \to Y$ *este continuă în punctul* a*, definiţia continuităţii lui* f *în* a *se scrie în forma*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right). \tag{4.23}$$

Egalitatea (4.23) arată că dacă f este continuă în punctul $a \in A \cap A'$, operaţia de trecere la limită este permutabilă cu funcţia f.

Teorema 4.2.3. (**Teoremă de caracterizare a continuităţii**) *Fie funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$*, unde* $A \subset (X, d)$*, şi* $a \in A$*. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(α) f *este continuă în* a*;*

(β) *oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in A$*, cu* $d(x, a) < \delta$*,* $\Longrightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$*;*

(γ) $\forall\, (x_n)$*,* $x_n \in A$*, cu* $x_n \to a$*,* $\Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$*.*

Demonstraţie. Rezultă din Teorema 4.1.1, Teorema 4.1.2 şi Teorema 4.2.2. **q.e.d.**

Din această teoremă rezultă că afirmaţiile (β) şi (γ) pot constitui, fiecare în parte, definiţii echivalente ale continuităţii unei funcţii într-un punct. Dacă Definiţiei 4.1.1 îi spunem *definiţia cu vecinătăţi* a limitei unei funcţii într-un punct, atunci lui (β) îi putem spune *definiţia continuităţii în limbajul* $\varepsilon - \delta$, iar (γ) poate fi numită *definiţia continuităţii cu şiruri.*

Definiţia 4.2.3. *Funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ *se numeşte* **funcţie continuă pe mulţimea** A*, sau* **continuă** *dacă* f *este funcţie continuă în orice punct* $x \in A$*.*

Observaţia 4.2.6. *Dacă o funcţie* $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ *este continuă pe* A*,* $B \subset A$ *şi* $f_{/B}$ *este restricţia funcţiei* f *la mulţimea* B*, atunci* $f_{/B}$ *este funcţie continuă.*

Teorema 4.2.4. *Fie* $f : A \to I\!R$*,* $A \subset (X, d)$ *o funcţie reală continuă în punctul* $a \in A \cap A'$ *şi* $f(a) > 0$ *(respectiv* $f(a) < 0$*). Atunci,* f *este pozitivă (respectiv negativă) pe intersecţia cu* A *a unei vecinătăţi a lui* a*.*

Demonstraţie. Fie $f(a) > 0$, $\varepsilon > 0$ ales astfel încât $\varepsilon < f(a)$ şi $V \in \mathcal{V}(f(a))$ de forma $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Conform Definiţiei 4.2.1, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap A) \subset V$, aceasta însemnând că pentru orice $x \in U \cap A$ avem $f(x) \in V$, deci $f(x) > f(a) - \varepsilon > 0$. Cazul $f(a) < 0$ se tratează analog. **q.e.d.**

Teorema 4.2.5. *Fiecare din condiţiile următoare este necesară şi suficientă pentru ca o funcţie* $f : A \subset X \to Y$ *să fie continuă:*

(a) $\forall\, B$*, mulţime închisă în* Y*, mulţimea* $f^{-1}(B)$ *este închisă în spaţiul metric* $(A, d_{/A})$*;*

(b) $\forall\, D$, *mulţime deschisă în* Y, *mulţimea* $f^{-1}(D)$ *este deschisă în spaţiul metric* $(A, d_{/A})$;

(c) $\forall\, A_1 \subset A \Longrightarrow f(\overline{A_1}^A) \subset \overline{f(A_1)}$, *unde* $\overline{A_1}^A$ *este închiderea în* A *a mulţimii* A_1.

Demonstraţie. Presupunem că f este continuă pe A şi fie B o mulţime închisă în Y, oarecare.

Dacă $B \cap f(A) = \emptyset$, atunci $f^{-1}(B) = \emptyset$, deci $f^{-1}(B)$ este mulţime închisă în A, chiar şi în X.

Dacă $B \cap f(A) \neq \emptyset$, putem considera un şir oarecare $(x_n)_{n\geq 0}$, din A, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in A$ şi $x_n \in f^{-1}(B)$, $n \in I\!N$. Deoarece f este continuă în $x \in A$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Cum B este închisă în Y şi $f(x_n) \in B$, $n \in I\!N$, după Teorema 3.9.2, rezultă $f(x) \in B$.

Prin urmare, $x \in f^{-1}(B)$ şi, conform Teoremei 3.9.2, $f^{-1}(B)$ este închisă în A, însă poate să nu fie închisă în X.

Să arătăm acum că (a) $\Longrightarrow$ (b).

Fie $D \subset Y$, mulţime deschisă. Complementara sa faţă de Y, adică $C_Y D$, este mulţime închisă în Y. După (a), mulţimea $f^{-1}(C_Y D)$ este închisă în $(A, d_{/A})$.

În consecinţă, $f^{-1}(D) = A \setminus f^{-1}(C_Y D)$ este mulţime deschisă în $(A, d_{/A})$.

Să presupunem că f are proprietatea (b) şi fie $x_0 \in A$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ mulţimea $f^{-1}\Big(B(f(x_0), \varepsilon)\Big)$ este deschisă în $(A, d_{/A})$, deoarece, conform Teoremei 3.9.8, o bilă deschisă este o mulţime deschisă. Această mulţime conţine x_0.

În consecinţă, există $\delta > 0$ aşa încât oricare ar fi $x \in A$, dacă $d_{/A}(x, x_0) < \delta$, atunci $x \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, adică $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, ceea ce după punctul (β) din Teorema 4.2.3, arată că f este continuă în punctul $x_0 \in A$.

Cum x_0 este arbitrar din A, rezultă că f este continuă.

Să arătăm că f continuă $\Longrightarrow (c)$.

Fie $A_1 \subset A$ şi $y \in f(\overline{A_1}^A)$. Atunci, există $x \in \overline{A_1}^A$ astfel încât $y = f(x)$. Deoarece $x \in A_1$ rezultă că există $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n \in A_1$ astfel încât $x_n \to x$. Funcţia f fiind continuă în x, avem $f(x_n) \to f(x) = y$, adică există şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ în mulţimea $f(A_1)$ astfel încât $f(x_n) \to y$, deci $y \in \overline{f(A_1)}$.

Cu aceasta incluziunea $f(\overline{A_1}^A) \subset \overline{f(A_1)}$ este demonstrată.

$(c) \Longrightarrow (a)$. Într-adevăr, dacă B este o mulţime închisă în Y, adică $B = \overline{B}$ şi $C = f^{-1}(B)$, atunci conform (c), avem

$$f(\overline{C}^A) \subset \overline{f(C)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B,$$

de unde

$$\overline{C} \subset f^{-1}(f(\overline{C})) \subset f^{-1}(B) = C$$

şi cum avem şi incluziunea $C \subset \overline{C}$ rezultă $C = \overline{C}$, ceea ce demonstrează că $C = f^{-1}(B)$ este mulţime închisă în $(A, d_{/A})$.

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Observaţia 4.2.7. *Se poate arăta că afirmaţia "f continuă" din Teorema 4.2.5 este echivalentă şi cu alte condiţii* ([22, p.200], [24, p.116], [5, p.106]).

În demonstraţia Teoremei 4.2.5 s–a afirmat că $f^{-1}(B)$ este închisă în A, însă poate să nu fie închisă în X. În sprijinul acestei afirmaţii prezentăm exemplul următor.

Exemplul 4.2.1. *Considerăm mulţimile* $A = (-1, 1) \subset X = I\!R$, $B = [0, +\infty) \subset Y = I\!R$ *şi funcţia reală de variabilă reală*

$$f : A \to I\!R, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in A.$$

Funcţia f este continuă pe A, mulţimea $B = f(A)$ este închisă în $I\!R$, mulţimea $f^{-1}(B)$ este deschisă în $I\!R$, dar închisă în A.

Exemplul 4.2.2. (**Aplicaţia de proiecţie**) *Funcţiile reale de variabilă vectorială*

$$\mathrm{pr}_i : I\!R^n \to I\!R, \quad \mathrm{pr}_i \mathbf{x} = x_i, \quad i \in \overline{1,n},$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n$, numite **aplicaţii de proiecţie**, *sau* **proiecţii ortogonale**, *sunt continue pe $I\!R^n$.*

Soluţie. Întradevăr, fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in I\!R^n$, arbitrar. Dacă $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$, $\mathbf{x}_k \in I\!R^n$ şi $\mathbf{x}_k \xrightarrow{I\!R^n} \mathbf{a}$, atunci $x_{i,k} \xrightarrow{I\!R} a_i$, $\forall\, i \in \overline{1,n}$, adică $\mathrm{pr}_i(\mathbf{x}_k) = x_{i,k} \xrightarrow{I\!R} a_i = \mathrm{pr}_i(\mathbf{a})$, $\forall\, i \in \overline{1,n}$, ceea ce spune că funcţia pr_i este continuă în $\mathbf{a} \in I\!R^n$, oricare ar fi $i \in \overline{1,n}$. ■

Teorema 4.2.6. *Funcţia $\mathbf{f} = (f_1,\ f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, $m \geq 2$, este continuă în $\mathbf{a} \in A \subset I\!R^n$, $n \geq 1$, dacă şi numai dacă funcţiile coordonate $f_i \in \mathcal{F}(A)$, $i \in \overline{1,m}$, sunt continue în $\mathbf{a}$.*

Demonstraţie. Conform Teoremei 4.2.3, continuitatea funcţiei vectoriale

$$\mathbf{f} = (f_1,\ f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$$

în $\mathbf{a} \in A$ este echivalentă cu condiţia (γ) care acum se scrie în forma:

$$\forall\,(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1},\ \mathbf{x}_k \in A,\ \text{ cu } \mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \Longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Pe de altă parte, din Teorema 3.12.1, avem:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{f}(\mathbf{a}) \Longleftrightarrow f_j(\mathbf{x}_k) \to f_j(\mathbf{a}),\ j \in \overline{1,n}$$

şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Teorema 4.2.7. (**Continuitatea funcţiei compuse**) *Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$, A, B, C fiind submulţimi ale unor anumite spaţii metrice. Dacă f este continuă în $x_0 \in A$ şi g este continuă în $f(x_0) \in B$, atunci funcţia compusă $g \circ f$ este continuă în x_0. Dacă f şi g sunt continue, $g \circ f$ este continuă pe A.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, atunci $f(x_n) \to f(x_0)$ şi, în consecinţă, $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, adică $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$, ceea ce arată că $g \circ f$ este continuă în x_0. Dacă x_0 este arbitrar din A, rezultă că $g \circ f$ este continuă pe A. **q.e.d.**

Fie (X, d), (Y, σ) două spaţii metrice, $A \subset X$ şi $a \in A \cap A'$. Dacă $f : A \setminus \{a\} \to Y$ este o funcţie definită pe $A \setminus \{a\}$, putem *prelungi* f la mulţimea A în diferite moduri, atribuindu-i lui f o valoare arbitrară în punctul a. Dacă însă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in Y$, putem considera funcţia

$$\tilde{f} : A \to Y, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\}, \\ \ell, & \text{dacă } x = a, \end{cases} \tag{4.24}$$

care, evident, este o *prelungire* a lui f la A.

Teorema 4.2.8. *Fie* $f : A \setminus \{a\} \to Y$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, *atunci funcţia* $\tilde{f} : A \to Y$, *definită prin* (4.24) *este continuă în punctul* a.

Demonstraţie. Întrucât pentru $x \in A \setminus \{a\}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, iar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, rezultă că $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \ell = \tilde{f}(a)$, adică f este continuă în a. **q.e.d.**

Definiţia 4.2.4. *Dacă* $f : A \setminus \{a\} \to Y$ *are limita* ℓ *în punctul* $a \in A' \cap A$, *atunci funcţia* $\tilde{f}$ *definită de* (4.24) *se numeşte* **prelungire a funcţiei f prin continuitate în punctul a** .

Exemplul 4.2.3. *Fie* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *definită pe* $\mathbb{R}^*$. *Cum* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, *putem prelungi funcţia* f *prin continuitate în* 0.

Prelungirea prin continuitate în origine a funcţiei f *este funcţia*

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Exemplul 4.2.4. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Aplicaţia*

$$d_1 : (X \times X) \times (X \times X) \to \mathbb{R}, \quad d_1((x, y), (x_0, y_0)) = d(x, x_0) + d(y, y_0)$$

este o metrică pe $X \times X$, *iar funcţia*

$$f : X \times X \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = d(x, y),$$

este continuă pe $X \times X$.

Soluţie. Fie (x_0, y_0) un punct arbitrar din $X \times X$. Dacă (x, y) este un alt punct al lui $X \times X$, atunci

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0),$$

inegalitatea fiind adevărată în baza lui (3.3) din Propoziţia 3.1.1.

Fie $\varepsilon > 0$. Luând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, atunci oricare ar fi $(x, y) \in X \times X$ cu $d_1((x, y), (x_0, y_0)) < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, adică f este continuă în punctul (x_0, y_0), arbitrar ales. Deci f este continuă pe spaţiul metric $(X \times X, \, d_1)$. ■

Exemplul 4.2.5. *Fie* $(H, \cdot)$ *un spaţiu prehilbertian. Aplicaţia*

$$f : H \times H \to \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

este funcţie continuă pe $H \times H$.

Soluţie. Aplicaţia

$$d_1 : (H \times H) \times (H \times H) \to I\!R, d_1((\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|,$$

unde $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar "$\cdot$", este o metrică pe $H \times H$, deci $(H \times H, d_1)$ este spaţiu metric.

Pentru orice $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$ şi pentru orice $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in H \times H$, avem

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0|,$$

din care deducem

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \|\mathbf{y}_0\|. \tag{4.25}$$

Fie $((\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n))_{n \geq 1}$ un şir de puncte din $(H \times H,\ d_1)$ convergent la $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Atunci, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0$. Şirurile $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ şi $(\mathbf{y}_n))_{n \geq 1}$ fiind convergente, sunt mărginite în metrica d_1. Din inegalitatea (4.25) rezultă $f(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \to f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, deci funcţia f este continuă în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Deoarece $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ este oriunde în domeniul de definiţie al funcţiei, rezultă că f este continuă pe $H \times H$. ■

Exemplul 4.2.6. *Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat.*
Funcţia $f : V \to I\!R$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, este continuă pe V.

Soluţie. Utilizând Propoziţia 3.5.1, avem

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Considerând $\varepsilon > 0$ şi luând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, constatăm că oricare ar fi $\mathbf{x} \in V$, astfel încât $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta(\varepsilon)$, implică $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, rezultat care arată că f este continuă în $\mathbf{x}_0$. Deoarece $\mathbf{x}_0$ este ales arbitrar din V rezultă că f este continuă pe V. ■

Exemplul 4.2.7. *Să se studieze continuitatea funcţiei*

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Soluţie. Restricţia funcţiei f la mulţimea $I\!R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ este funcţie continuă fiind un cât de două polinoame, ambele funcţii continue.

Studiem continuitatea funcţiei f în origine. Fie în acest sens şirul de puncte $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general $\mathbf{x}_n = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)$, care este convergent la punctul $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Şirul valorilor funcţiei are termenul general $f(\mathbf{x}_n) = f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$, de unde $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

Prin urmare, funcţia nu este continuă în origine. ■

4.3 Funcţii uniform continue

Definiţia 4.3.1. *O funcţie f de la o submulţime A a unui spaţiu metric (X, d) în spaţiul metric (Y, σ) se numeşte* **uniform continuă** *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$\forall\, x', x'' \in A \quad \text{cu} \quad d(x', x'') < \delta \Longrightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \tag{4.26}$$

Pentru a explica diferenţa dintre continuitatea obişnuită şi uniforma continuitate, să scriem mai întâi definiţia continuităţii utilizând limbajul "$\varepsilon - \delta$".

Funcţia f este continuă dacă

$$\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0 \text{ şi } \forall\, x \in A\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \text{ astfel încât} \\ &\forall\, y \in A,\ \text{cu } d(x,y) < \delta \Longrightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon \end{aligned} \tag{4.27}$$

Să scriem din nou (4.26), dar cu mici schimbări de notaţie.

Funcţia f este uniform continuă dacă

$$\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ astfel încât } \forall\, x \in A \text{ şi } \forall\, y \in A \\ &\text{cu } d(x,y) < \delta \Longrightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Din (4.27) şi (4.28) vedem în primul rând că cele două definiţii diferă prin schimbarea poziţiei cuantificatorilor $\forall\, x \in A$ şi $\exists\,\delta > 0$. Apoi, în definiţia continuităţii numărul δ depinde de ε şi de x pe când în definiţia uniformei continuităţi numărul δ depinde numai de ε.

Observaţia 4.3.1. *Continuitatea uniformă a unei funcţii pe o mulţime este o* **proprietate globală** *în timp ce continuitatea funcţiei pe mulţimea de definiţie, sau pe o submulţime a ei este o* **proprietate locală** *şi de aceea continuităţii pe o mulţime i se spune şi* **continuitate punctuală**.

Definiţia 4.3.2. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(A, Y)$, $A \subset (X, d)$,* **nu este uniform continuă** *dacă $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall\,\delta > 0$ există o pereche de puncte $(x'_\delta, x''_\delta) \in A \times A$ cu $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ care are proprietatea $\sigma(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon_0$.*

Observaţia 4.3.2. *Orice funcţie uniform continuă este continuă. Reciproc nu este în general adevărat.*

Întradevăr, fie $f \in \mathcal{F}(A, Y)$. Este suficient să fixăm $x'' = a$ în (4.26) şi obţinem Definiţia 4.2.2 a continuităţii lui f în a, punct arbitrar din A, deci f este continuă. ■

Exemplul care urmează ilustrează partea a doua a afirmaţiei din Observaţia 4.3.2.

Exemplul 4.3.1. *Funcţia continuă $f : (0, 1] \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, nu este uniform continuă.*

Soluţie. Într-adevăr, să considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, convergent la zero. Fiind convergent în $I\!R$, (x_n) este şir fundamental în $I\!R$. Prin urmare, $\forall\,\delta > 0$, $\exists\, N(\delta) \in I\!N$ cu proprietatea că pentru orice $n > N(\delta)$ şi $\forall\, p \in I\!N$ avem $|x_{n+p} - x_n| < \delta$.

Să luăm acum $\varepsilon_0 = p$, $x'_\delta = x_{n+p}$ şi $x''_\delta = x_n$. Observăm că

$$(\sigma(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) = |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = |n + p - n| = p.$$

După Definiţia 4.3.2, funcţia f nu este uniform continuă.

Rezultatul se explică prin faptul că mulţimea de definiţie $(0, 1]$ nu este compactă, nefiind închisă. ■

Definiţia 4.3.3. (**Funcţia Hölder**[2]) *Funcţia $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ se numeşte* **hölderiană**, *sau* **funcţie Hölder** *de ordin $\alpha \in (0, 1]$ pe mulţimea A dacă există $K > 0$, numită* **constanta lui Hölder**, *astfel încât*

$$\sigma(f(x'), f(x'')) \leq K(d(x', x''))^\alpha, \quad \forall\, x', x'' \in A. \tag{4.29}$$

Propoziţia 4.3.1. *Orice funcţie Hölder este uniform continuă.*

Demonstraţie. Dacă $\varepsilon > 0$ este arbitrar, atunci luând $\delta(\varepsilon) = \left(\dfrac{1}{K}\varepsilon\right)^{1/\alpha}$, din (4.29) obţinem

$$\sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon, \; \forall\, x', x'' \in A \text{ cu } d(x', x'') < \delta(\varepsilon)$$

care, în baza Definiţiei 4.3.1, arată că funcţia $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ care satisface (4.29) este funcţie uniform continuă. **q.e.d.**

Definiţia 4.3.4. (**Funcţia Lipschitz**[3]) *Funcţia hölderiană de ordin $\alpha = 1$ se numeşte* **funcţie lipschitziană** *sau* **funcţie Lipschitz**. *De obicei, constanta K se notează cu L şi se numeşte* **constanta lui Lipschitz**. *Prin urmare o funcţie Lipschitz satisface inegalitatea*

$$\sigma(f(x'), f(x'')) \leq L d(x', x''), \quad \forall\, x', x'' \in A, \tag{4.30}$$

unde $L > 0$.

Observaţia 4.3.3. *O funcţie Lipschitz este uniform continuă.*

Întradevăr, afirmaţia rezultă din 4.3.1 luând $\alpha = 1$ şi $K = L$. ■

Observaţia 4.3.4. *O contracţie pe spaţiul metric (X, d) (vezi Definiţia 3.8.2) este funcţie uniform continuă.*

Propoziţia 4.3.2. *Funcţia normă este funcţie Lipschitz.*

Demonstraţie. Întradevăr, dacă $(V, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, funcţia normă

$$f : V \to I\!R_+, \quad f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|,$$

este funcţie Lipschitz în care constanta lui Lipschitz este $L = 1$, aceasta rezultând din Propoziţia 3.5.1, punctul (b). **q.e.d.**

Teorema 4.3.1. (**Cantor**) *Dacă $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ este continuă şi A este mulţime compactă, atunci f este uniform continuă.*

[2] Hölder, Otto Ludwig (1859 – 1937), matematician german.
[3] Lipschitz, Rudolf (1832–1903), matematician german.

Demonstraţie. Fie $f : A \to Y$, o funcţie continuă pe mulţimea compactă A din spaţiul metric (X, d) cu valori în spaţiul metric (Y, σ). Presupunem prin absurd că f nu este uniform continuă. Folosind Definiţia 4.3.2 deducem că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât oricare ar fi $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in I\!N^*$, există $x'_n \in A$ şi $x''_n \in A$ care satisfac

$$d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n} \Longrightarrow \sigma(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{4.31}$$

În acest mod au apărut şirurile de puncte $(x'_n)_{n\geq 1}$ şi $(x''_n)_{n\geq 1}$ ale căror termeni satisfac (4.31).

Mulţimea A fiind compactă în spaţiul metric (X, d), există subşirul de puncte $(x'_{k_n})_{n\geq 1}$ al şirului de puncte $(x'_n)_{n\geq 1}$ convergent la un punct $x_0 \in A$, adică

$$\lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0 \in A \Longleftrightarrow d(x'_{k_n}, x_0) \to 0, \;\; n \to \infty. \tag{4.32}$$

Considerăm acum subşirul $(x''_{k_n})_{n\geq 1}$ al şirului $(x''_n)_{n\geq 1}$. Deoarece

$$d(x''_{k_n}, x_0) \leq d(x''_{k_n}, x'_{k_n}) + d(x'_{k_n}, x_0),$$

în baza lui (4.31) şi (4.32), deducem

$$d(x''_{k_n}, x_0) \to 0, \;\; n \to \infty \Longleftrightarrow x''_{k_n} \to x_0, \;\; n \to \infty. \tag{4.33}$$

Din continuitatea lu f în x_0 şi (4.32), (4.33), avem

$$f(x'_{k_n}) \to f(x_0), \;\; n \to \infty \;\; \text{şi} \;\; f(x''_{k_n}) \to f(x_0), \;\; n \to \infty,$$

rezultate care sunt echivalente cu

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f(x'_{k_n}), f(x_0)) = 0 \;\; \text{şi} \;\; \lim_{n\to\infty} \sigma(f(x''_{k_n}), f(x_0)) = 0. \tag{4.34}$$

Din (4.34) şi inegalitatea triunghiului din Definiţia 3.1.1, obţinem

$$\varepsilon_0 \leq \sigma(f(x'_{k_n}), f(x''_{k_n})) \leq \sigma(f(x'_{k_n}), f(x_0)) + \sigma(f(x''_{k_n}), f(x_0)). \tag{4.35}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ în (4.35) şi ţinând cont de (4.34), deducem $\varepsilon_0 \leq 0$, deci presupunerea făcută nu este posibilă, ca atare funcţia f este uniform continuă. **q.e.d.**

Observaţia 4.3.5. *Dacă $A \subset I\!R^n$, $n \geq 1$, este mulţime mărginită şi închisă şi dacă $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ este continuă, atunci f este uniform continuă.*

Într-adevăr, afirmaţia rezultă din Teorema 3.10.10 şi Teorema 4.3.1. ■

Observaţia 4.3.6. *Din Definiţia 4.3.1 şi comentariul făcut mai jos de aceasta, tragem concluzia că o funcţie continuă pe $A \subset (X, d)$ este uniform continuă dacă mulţimea $\{\delta(\varepsilon, x_0) : x_0 \in A\}$ are un infimum, notat cu $\delta(\varepsilon)$, strict pozitiv.*

Exemplul 4.3.2. *Funcţia $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = x^2$ este continuă în orice $x_0 \in I\!R$ dar nu este uniform continuă.*

Într-adevăr, $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0||x + x_0| = |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \leq$

$|x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta(\delta + 2|x_0|) = \delta^2 + 2|x_0|\delta = \varepsilon$, de unde $\delta(\varepsilon, x_0) = -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}$, deci f este continuă în orice punct $x_0 \in I\!R$.

Funcţia $h : [0, \infty) \to I\!R,\ h(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon} - t$ are valoarea $\sqrt{\varepsilon}$ în $t = 0$, este descrescătoare pentru că $h'(t) = \dfrac{t - \sqrt{t^2 + \varepsilon}}{\sqrt{t^2 + \varepsilon}}$, este negativă şi are limita egală cu zero când $t \to \infty$. Prin urmare, $\inf\{\delta(\varepsilon, x_0) : x_0 \in I\!R\} = 0$ şi, după Observaţia 4.3.6, deducem că funcţia $f(x) = x^2,\ x \in I\!R$, nu este uniform continuă. ■

4.4 Funcţii continue pe mulţimi compacte

Teorema 4.4.1. *Fie $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, unde (X, d) şi (Y, σ) sunt spaţii metrice. Dacă f este continuă şi $A \subset X$ este mulţime compactă, atunci $f(A) \subset Y$ este mulţime compactă.*

Demonstraţie. Fie $(y_n)_{n\geq 1}$ un şir de puncte arbitrar din $B = f(A)$. Atunci, există $x_n \in A$ astfel încât $y_n = f(x_n)$. Deoarece A este mulţime compactă, A este compactă prin şiruri, deci şirul de puncte (x_n) din A conţine un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 1}$, convergent la un punct $x_0 \in A$. Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0. \tag{4.36}$$

Din (4.36) şi continuitatea lui f în x_0, deducem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \in B. \tag{4.37}$$

Relaţia (4.37) arată că subşirul $(y_{k_n})_{n\geq 1}$, unde $y_{k_n} = f(x_{k_n})$, este convergent la punctul $y_0 = f(x_0) \in B$.
Prin urmare, $B = f(A) \subset Y$ este mulţime compactă prin şiruri.
Folosind Teorema 3.9.6 constatăm că B este mulţime compactă prin acoperire, sau mulţime compactă. **q.e.d.**

Corolarul 4.4.1. *Fie funcţia vectorială de argument vectorial*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n) : A \to I\!R^m, \quad A \subset I\!R^n.$$

Dacă A este mulţime mărginită şi închisă şi $\mathbf{f}$ este funcţie continuă, atunci mulţimea $\mathrm{Im}\,\mathbf{f} = \mathbf{f}(A) \subset I\!R^m$ este mărginită şi închisă.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $A \subset I\!R^n$ este mulţime mărginită şi închisă, atunci din Teorema 3.10.2 şi Teorema 3.10.7 deducem că A este mulţime compactă şi din Teorema 4.4.1 rezultă că $f(A)$ este compactă în $I\!R^m$. Folosind iarăşi Teorema 3.10.2 şi Teorema 3.10.7, deducem că $f(A)$ este mulţime mărginită şi închisă. **q.e.d.**

Definiţia 4.4.1. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ se numeşte* **mărginită** *dacă mulţimea $\mathrm{Im}\, f = f(X)$ este mărginită în spaţiul metric (Y, σ).*

Corolarul 4.4.2. *Dacă $f : X \to Y$ este o funcţie continuă definită pe spaţiul metric compact (X, d) cu valori în spaţiul metric (Y, σ), atunci f este mărginită.*

Demonstraţie. Din Teorema 4.4.1 rezultă că $f(X)$ este mulţime compactă în spaţiul metric (Y, σ), iar din Corolarul 3.10.2 rezultă că $f(X)$ este mărginită şi închisă. Folosind acum Definiţia 4.4.1, deducem că f este funcţie mărginită. **q.e.d.**

Definiţia 4.4.2. *Fie funcţia reală $f : X \to I\!R$ şi*

$$M = \sup\{f(x) : x \in X\} \in I\!R, \quad m = \inf\{f(x) : x \in X\} \in I\!R,$$

unde (X, d) este un spaţiu metric oarecare.

(i) Spunem că funcţia reală f **îşi atinge marginea superioară** *pe mulţimea X dacă există cel puţin un punct $x' \in X$ astfel încât*

$$M = f(x'); \tag{4.38}$$

(ii) Funcţia $f : X \to I\!R$ **îşi atinge marginea inferioară** *pe X dacă există cel puţin un punct $x'' \in X$ astfel încât*

$$m = f(x''); \tag{4.39}$$

(iii) Se spune că funcţia $f \in \mathcal{F}(X)$ **îşi atinge marginile** *dacă îşi atinge atât marginea superioară pe X, cât şi marginea inferioară pe X.*

Teorema 4.4.2. (**Weierstrass**) *Fie (X, d) spaţiu metric, $A \subset X$ mulţime compactă şi $f \in \mathcal{F}(A)$, o funcţie reală continuă. Atunci, f este funcţie mărginită şi îşi atinge marginile.*

Demonstraţie. Conform Corolarului 4.4.2, $f(A)$ este mulţime mărginită în spaţiul metric obişnuit $(I\!R, d)$. Întrucât M şi m sunt puncte aderente pentru $f(A)$ rezultă că $M \in \overline{f(A)}$ şi $m \in \overline{f(A)}$. Însă $f(A)$ fiind compactă, este mulţime închisă, deci $f(A) = \overline{f(A)}$ şi ca atare avem $M \in f(A)$, $m \in f(A)$.

Prin urmare, exist'u a x', $x'' \in A$ astfel încât $f(x') = M$ şi $f(x'') = m$, ceea ce arată că f îşi atinge marginile pe A. **q.e.d.**

Observaţia 4.4.1. *Un caz particular al Teoremei 4.4.2 este acela în care $X = I\!R$, iar A, fiind mulţime compactă, este de forma $A = [a, b]$, $a < b$, $a, b \in I\!R$. Putem afirma că dacă f este continuă, imaginea lui f, adică mulţimea $f([a, b])$, este compactul $[m,\, M] \subset I\!R$.*

Teorema 4.4.3. *Inversa f^{-1} a unei funcţii continue biunivoce $f \in \mathcal{F}(A, Y)$, definită pe o mulţimea compactă A, este funcţie continuă.*

Demonstraţie. Fie $B = f(A)$ şi $g = f^{-1} : B \to X.$ Din Teorema 4.4.1 şi Teorema 3.10.4, rezultă că pentru orice mulţime $C \subset X,$ închisă în $X,$ mulţimea $g^{-1}(C) = f(A \cap C)$ este compactă. Prin urmare, $g^{-1}(C)$ este mulţime înschisă în spaţiul metric $(B, \sigma_{/B}).$ După Teorema 4.2.5, punctul (a), rezultă că $g = f^{-1}$ este continuă. **q.e.d.**

4.5 Convergenţa unui şir de funcţii

Fie A o mulţime nevidă, (X, d) un spaţiu metric, $\mathcal{F}(A, X)$ mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în X şi $\mathcal{M}(A, X) \subset \mathcal{F}(A, X)$ submulţimea funcţiilor mărginite definite pe A cu valori în $X.$ S-a arătat că aplicaţia

$$\rho : \mathcal{M}(X, A) \times \mathcal{M}(A, X) \longrightarrow I\!\!R,$$

definită prin

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x) : x \in A\}, \quad \forall\, f,\, g \in \mathcal{M}(A, X), \tag{4.40}$$

este o metrică pe $\mathcal{M}(A, X)$ şi deci cuplul $(\mathcal{M}(A, X), \rho)$ este un spaţiu metric.

Definiţia 4.5.1. *Se numeşte* **şir de funcţii**, *definite pe mulţimea A cu valori în spaţiul metric $(X, d),$ aplicaţia $f \in \mathcal{F}(I\!\!N_k, \mathcal{F}(A, X)).$*

Un şir de funcţii definite pe mulţimea A cu valori în X se notează cu $(f_n)_{n \geq k}.$ Dacă avem $k = 1,$ atunci şirul $(f_n)_{n \geq 1}$ se notează simplu prin $(f_n).$

Observaţia 4.5.1. *Un şir de funcţii (f_n) este o mulţime de şiruri de puncte din spaţiul metric (X, d) de forma $(f_n(x)),$ unde x este un element arbitrar din $A.$ Deci $(f_n) = \{(f_n(x))_{n \geq 1} : x \in A\}.$*

Definiţia 4.5.2. *Spunem că şirul de funcţii $(f_n),$ unde $f_n \in \mathcal{F}(A, X),$ este* **convergent** *în $x_0 \in A,$ sau că x_0 este* **punct de convergenţă** *al şirului, dacă şirul de puncte $(f_n(x_0))$ este convergent în spaţiul metric $(X, d).$*

Putem vorbi de *mulţimea de convergenţă* a şirului $(f_n),$ care este o submulţime a lui $A.$ Mai mult, fără să restrângem generalitatea, putem presupune că mulţimea de convergenţă este chiar $A.$

Fiecărui $x \in A$ îi asociem punctul $f(x)$ din $(X, d),$ definit de

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Evident, corespondenţa $x \mapsto f(x)$ este o funcţie $f \in \mathcal{F}(A, X).$

Definiţia 4.5.3. *Spunem că şirul $(f_n),$ unde $f_n \in \mathcal{F}(A, X),$ este* **convergent** *la funcţia $f \in \mathcal{F}(A, X),$ sau că f este* **limita şirului** *$(f_n),$ şi scriem*

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n, \quad \textit{sau} \quad f_n \longrightarrow f, \tag{4.41}$$

dacă pentru fiecare $x \in A,$ şirul de puncte $(f_n(x)),$ din spaţiul metric $(X, d),$ este convergent la punctul $f(x) \in X.$

Ţinând cont de caracterizarea şirurilor de puncte convergente, deducem că (4.41) are loc dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $x \in A,$ există $N = N(\varepsilon, x) \in I\!\!N$ astfel încât

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon, x). \tag{4.42}$$

Convergenţa introdusă în Definiţia 4.5.3 se numeşte *convergenţă punctuală*. Funcţia f din (4.41) se numeşte *limită punctuală* a şirului de funcţii (f_n), iar în locul lui (4.41) se pot utiliza una din notaţiile:

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{(punctual pe } A); \quad f_n \xrightarrow[A]{p} f.$$

Observaţia 4.5.2. *Un şir de funcţii poate fi interpretat ca un* **procedeu de descriere aproximativă** *a unei funcţii care este limita acelui şir de funcţii în cazul când el este punctual convergent.*

Dacă avem un şir de funcţii (f_n), $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$, punctual convergent pe mulţimea A la o funcţie $f \in \mathcal{F}(A, X)$ şi fiecare din termenii şirului posedă o proprietate P, este natural să ne punem problema dacă aceeaşi proprietate o are şi funcţia limită f.

Proprietatea P ar putea fi oricare din proprietăţile care pot furniza informaţii despre comportarea locală, sau globală a funcţiilor, precum: mărginirea, existenţa limitei într-un punct, continuitatea, etc.

În cazul în care A este un interval I din $I\!R$ şi (X, d) este spaţiul metric $(I\!R, |\cdot - \cdot|)$, proprietatea P poate fi: derivabilitatea funcţiei limită într-un punct $x_0 \in I$, sau pe întreg intervalul I; integrabilitatea Riemann a funcţiei limită pe un compact $[a, b] \subset I$.

Un exemplu simplu dat mai jos arătă că o proprietate$P$ pe care o are termenii unui şir de funcţii nu se transmite întotdeauna şi funcţiei limită.

Exemplul 4.5.1. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{F}([0, 1])$, $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$. *Acest şir de funcţii este punctual convergent pe* $[0, 1]$ *la o funcţie* f, *ce urmează a se determina, care nu este continuă deşi termenii şirului sunt funcţii continue pe* $[0, 1]$.

Într-adevăr, continuitatea oricărei funcţii f_n, $n \in I\!N^*$ fiind evidentă şi fiindcă $A = [0, 1]$ rezultă că că funcţia limita punctuală a şirului dat este

$$f : [0, 1] \longrightarrow I\!R, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Observăm că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$ şi deci f nu este funcţie continuă.

Aşadar proprietatea de continuitate pe care o are fiecare termen f_n al şirului de funcţii considerat nu se transmite şi funcţiei limita punctuală a şirului. ∎

Exemplul dat motivează introducerea altui tip de convergenţă care să conserve anumite proprietăţi ale termenilor şirului de funcţii prin trecere la limită.

Definiţia 4.5.4. *Şirul de funcţii* $(f_n))_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$, **converge uniform** *la funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, X)$, *numită* **limita uniformă a şirului de funcţii** $(f_n)_{n\geq 1}$, *şi scriem* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $N = N(\varepsilon) \in I\!N$ *astfel încât*

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in A \quad \text{şi} \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Observaţia 4.5.3. *Convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă ale unui şir de funcţii definite pe mulţimea* A *diferă prin transpoziţia cuantificatorilor* $\forall\, x \in A$ *şi* $\exists\, N$. *În definiţia convergenţei punctuale numărul natural* N *depinde de* ε *şi* x, *pe când, în definiţia convergenţei uniforme,* N *este ales numai pentru un* ε *dat, el nedepinzând de elementul* $x \in A$, *ceea ce înseamnă că la un acelaşi* ε, *numărul natural* N *este acelaşi pentru toate elementele* $x \in A$, *acesta modificându–se doar când se schimbă* ε.

Observaţia 4.5.4. *Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii implică convergenţa punctuală a acestuia. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. Vezi în acest sens Exemplul 4.5.2.*

Observaţia 4.5.5. *În cazul când $A \subset I\!R$ şi $(X, d) = (I\!R, |\cdot - \cdot|)$, funcţia reală de variabilă reală $f : A \to I\!R$ este limita şirului de funcţii uniform convergent (f_n), unde $f_n \in \mathcal{F}(A)$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon) \in I\!N$, astfel încât*

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \tag{4.43}$$

şi poate fi interpretată geometric în sensul că pentru $n > N(\varepsilon)$ graficele funcţiilor f_n sunt cuprinse între graficele funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$.

Totalitatea funcţiilor $\{f_n : n > N(\varepsilon)\}$, care satisface (4.43), se numeşte *tub de funcţii*.

Propoziţia 4.5.1. *Fie (f_n), $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ un şir de funcţii convergent punctual la $f \in \mathcal{F}(A, X)$. Atunci, $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ mulţimea $\{N(\varepsilon, x) : x \in A\}$ este mărginită în $I\!R$.*

Demonstraţie. Întradevăr, dacă $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, atunci mulţimea $\{N(\varepsilon, x) : x \in A\}$ are un singur element şi anume pe $N(\varepsilon)$, deci este mărginită superior.

Reciproc, dacă mulţimea $\{N(\varepsilon, x) : x \in A\}$ este mărginită, atunci există marginea superioară a acestei mulţimi în $I\!R$ pe care s-o notăm cu $\alpha(\varepsilon)$. Fie $N(\varepsilon) = [\alpha(\varepsilon)]$, partea întreagă a lui $\alpha(\varepsilon)$. Atunci, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, $\forall\, x \in A$, deci $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. **q.e.d.**

Propoziţia 4.5.2. *Fie (f_n), $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$. Atunci, $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{d(f_n(x), f(x)) : \; x \in A\} = 0. \tag{4.44}$$

Demonstraţie. Dacă $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, atunci din Definiţia 4.5.4 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) \in I\!N$, astfel încât oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice $x \in A$, să rezulte $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$, de unde avem

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in A\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ceea ce arată că (4.44) are loc.

Reciproc, dacă (4.44) are loc, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) \in I\!N$, astfel încât

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in A\} < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon),$$

de unde deducem

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in A \quad \text{şi} \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Acest rezultat şi Definiţia 4.5.4 conduce la concluzia că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. **q.e.d.**

Observaţia 4.5.6. *Dacă termenii şirului de funcţii (f_n) sunt din $\mathcal{M}(A, X)$, atunci din Exemplul 3.1.2 şi Definiţia 4.5.4 observăm că de fapt convergenţa uniformă a şirului de funcţii dat la funcţia $f \in \mathcal{F}(A, X)$ este convergenţa în metrica ρ, adică convergenţa şirului de puncte (f_n) în spaţiul metric $(\mathcal{M}(A, X), \rho)$ şi rezultatul demonstrat mai sus îndreptăţeşte denumirea de* **metrica convergenţei uniforme** *pentru ρ.*

Observaţia 4.5.7. *Propoziţia 4.5.2 este deosebit de importantă în practică deoarece, după determinarea funcţiei limita punctuală a unui şir de funcţii, cu ajutorul ei se poate preciza dacă convergenţa punctuală este sau nu uniformă.*

Exemplul 4.5.2. *Şirul de funcţii*

$$(f_n)_{n\geq 1}, \quad f_n \in \mathcal{F}([0,1]), \quad f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$$

converge uniform la funcţia $f \in \mathcal{F}([0,1])$, $f(x) = 1$, $\forall\, x \in [0,1]$, în timp ce şirul $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{F}(I\!\!R)$, $f_n(x) = \dfrac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$ nu este uniform convergent la funcţia sa limită.

Într-adevăr, pentru a aplica Propoziţia 4.5.2 trebuie să determinăm variaţia funcţiei

$$d(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in [0,1].$$

Avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} - 1 \right| = \frac{nx}{x^2 + n^2} = \varphi(x).$$

Derivata funcţiei φ este

$$\varphi'(x) = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2 + n^2)^2},$$

de unde deducem că valorile extreme ale sale se realizează când $x = \pm n$.

Dacă $n > 1$, punctele $x = \pm n$ nu aparţin segmentului $[0,1]$ şi deci valoarea maximă eset atinsă în extremităţile segmentului $[0,1]$. Dar $f(0) = 0$, iar $f(1) = \dfrac{n}{1 + n^2}$, deci (4.44) este satisfăcută.

În baza Propoziţiei 4.5.2, rezultă că $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} f$.

În cazul celui de-al doilea şir de funcţii, limita punctuală este funcţia reală de variabilă reală

$$f : I\!\!R \to I\!\!R, \quad f(x) = 1, \quad \forall\, x \in I\!\!R,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $\forall\, x \in I\!\!R$. Avem

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : \; x \in I\!\!R\} = \max\{f_n(-n), f_n(n)\} = \max\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{d(f_n(x), f(x)) : \; x \in I\!\!R\} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$ şi prin urmare convergenţa punctuală evidentă $f_n \xrightarrow[I\!\!R]{p} f$ nu este uniformă. ■

Situaţia în care se plasează cel de al doilea şir de funcţii din exemplul justifică partea a doua a Observaţiei 4.5.4.

Exemplul 4.5.3. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{F}(I\!R)$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $x \in I\!R$. *Observăm că* $f_n \xrightarrow[I\!R]{p} f$ *unde* $f(x) = 0$, $\forall\, x \in I\!R$. *Convergenţa punctuală este şi uniformă.*

Soluţie. Determinăm, la fel ca în exemplul de mai sus, valorile extreme ale funcţiei $\varphi(x) = f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}\cdot$ Avem $\varphi'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}\cdot$ De aici se vede că $\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - nx^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot$ Întrucât $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = 0$ valoarea maximă a funcţiei $|\varphi|$ este $\left|\varphi\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$

Prin urmare, $\rho(f_n, f) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, f) = 0$, în baza Propoziţiei 4.5.2 şi Observaţiei 4.5.6, rezultă că $f_n \xrightarrow[I\!R]{u} f$. ■

Teorema 4.5.1. (**Criteriul general al lui Cauchy**) *Şirul de funcţii* (f_n), *unde* $f_n \in \mathcal{M}(A, X)$, *iar* (X, d) *este un spaţiu metric complet, converge uniform la funcţia* $f \in \mathcal{F}(A, X)$ *dacă şi numai dacă este satisfăcută următoarea* **condiţie a lui Cauchy**: *pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $N(\varepsilon) \in I\!N$, *astfel încât*

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon, \quad \forall\, m, n > N(\varepsilon), \quad \forall\, x \in A. \tag{4.45}$$

Demonstraţie. Presupunem că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Atunci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \qquad \forall\, x \in A. \tag{4.46}$$

De asemeni, putem scrie

$$d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, x \in A, \qquad \forall\, m > N(\varepsilon). \tag{4.47}$$

Din inegalităţile (4.46), (4.47) şi axioma (M_3) din definiţia metricei, rezultă că $\forall\, x \in A$ şi $\forall\, m,\, n > N(\varepsilon)$,

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f(x)) + d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică condiţia lui Cauchy (4.45) are loc.

Reciproc, să presupunem că (f_n) satisface condiţia lui Cauchy. Atunci, pentru orice $x \in A$ şirul de puncte $(f_n(x))_{n\geq 1}$ din spaţiul metric (X, d) este şir fundamental.

Deoarece (X, d) este spaţiu metric complet, şirul de puncte $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge la un punct din X pe care convenim să-l notăm cu $f(x)$. Se vede imediat că funcţia $f \in \mathcal{F}(A, X)$ definită prin

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in A \tag{4.48}$$

este de fapt limita punctuală a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, adică $f_n \xrightarrow[A]{p} f$.

Să arătăm că, mai mult, convergenţa este uniformă.

În acest scop, transcriem condiţia (4.45), dar pentru $\varepsilon/2$, adică

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, m > N(\varepsilon), \quad \forall\, n > N(\varepsilon. \tag{4.49}$$

Trecând la limită în (4.49) pentru $m \to \infty$ şi ţinând cont de Teorema 3.3.1, sau de Exemplul 4.2.4, şi de (4.48), obţinem $d(f_n(x), f(x)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall\, n > N(\varepsilon)$, $\forall\, x \in A$, ceea ce arată că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. **q.e.d.**

Observaţia 4.5.8. *Condiţia lui Cauchy (4.45) este echivalentă cu*

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,N(\varepsilon)\in I\!N,\quad \textit{astfel încât}\quad \rho(f_n,f_m)<\varepsilon,\quad \forall\,m>N(\varepsilon)\quad \textit{şi}\quad \forall\,n>N(\varepsilon). \tag{4.50}$$

Relaţiile din (4.50) exprimă faptul că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$ este şir fundamental sau şir Cauchy în spaţiul metric $(\mathcal{F}(A,X),\rho)$.

Teorema 4.5.2. (**Criteriul majorării, sau criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă**) *Fie $f_n\in\mathcal{F}(A,X)$, $f\in\mathcal{F}(A,X)$, A mulţime oarecare şi (X,d) spaţiu metric.*

Dacă $f_n\ \xrightarrow[A]{p}\ f$ şi există şirul de numere pozitive $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, convergent la zero, cu proprietatea

$$d(f_n(x),f(x))\leq\alpha_n,\quad \forall\,n\in I\!N\quad \textit{şi}\quad \forall x\in A, \tag{4.51}$$

atunci

$$f_n\ \xrightarrow[A]{u}\ f. \tag{4.52}$$

Demonstraţie. Întradevăr, din $\alpha_n\to 0$ rezultă că $\forall\varepsilon>0\ \exists\,N(\varepsilon)\in I\!N$ astfel încât (avem că $\alpha_n\geq 0$)

$$\alpha_n<\varepsilon,\quad \forall\,n>N(\varepsilon). \tag{4.53}$$

Atunci, din (4.51), (4.53) şi Definiţia 4.5.4, deducem (4.52). **q.e.d.**

Teorema 4.5.3. (**Transfer de existenţă a limitei în punct**) *Fie $A\subset(X,d)$, (Y,σ) spaţiu metric complet şi $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n\in\mathcal{M}(A,Y)$, un şir de funcţii uniform convergent la funcţia $f\in\mathcal{F}(A,Y)$. Dacă $x_0\in A'$ şi există $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ pentru fiecare $n\in I\!N$, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ şi, în plus, are loc egalitatea*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Demonstraţie. Deoarece $f_n\ \xrightarrow[A]{u}\ f$ rezultă că oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $N(\varepsilon)\in I\!N$ astfel încât pentru orice $n>N(\varepsilon)$ să avem

$$\sigma(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall\,x\in A. \tag{4.54}$$

Pe de altă parte, întrucât pentru orice număr natural $n\in I\!N$ există $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$, aplicând lui f_m teorema Bolzano–Cauchy de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct (Teorema 4.1.5), unde $m>N(\varepsilon)$, m fixat, rezultă că există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât oricare ar fi punctele x', $x''\in A$, cu

$$0<d(x',x_0)<\delta(\varepsilon)\quad \text{şi}\quad 0<d(x'',x_0)<\delta(\varepsilon) \tag{4.55}$$

să rezulte

$$\sigma(f_m(x'),f_m(x''))<\varepsilon/3. \tag{4.56}$$

Din (4.54) şi (4.56) rezultă că, $\forall\, x',\, x'' \in A$, care satisfac (4.55), avem

$$\begin{aligned}\sigma(f(x'), f(x'')) \le \sigma(f(x'), f_m(x')) + \sigma(f_m(x'), f_m(x''))+\\ +\sigma(f_m(x''), f(x'')) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Aşadar, din (4.55), (4.57) şi Teorema 4.1.5 rezultă că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Dacă în (4.54) facem $x \to x_0$ şi ţinem cont că $\sigma(\cdot,\cdot)$ este funcţie continuă în cele două argumente (a se vedea în acest sens şi Exemplul 4.2.4), obţinem $\sigma\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x),\, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right) < \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon)$ adică

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Teorema 4.5.4. (**Transfer de mărginire**) *Fie* $(f_n)_{n\ge 1}$, $f_n \in \mathcal{M}(A, X)$. *Dacă avem* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, *atunci* $f \in \mathcal{M}(A, X)$.

Demonstraţie. Deoarece f_n este funcţie mărginită rezultă că pentru $y_0 \in X$ există $M > 0$ astfel încât

$$d(f_n(x), y_o) \le M, \quad \forall\, x \in A \quad \text{şi} \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{4.58}$$

Să calculăm $d(f(x), y_0)$. Avem

$$d(f(x), y_0) \le d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), y_0),\ \forall\, x \in A, \forall n \in I\!N^*. \tag{4.59}$$

Din (4.58) şi (4.59), deducem

$$d(f(x), y_0) \le d(f_n(x), f(x)) + M, \quad \forall\, x \in A, \quad \forall n \in I\!N^*. \tag{4.60}$$

Trecând la limită în (4.60) pentru $n \to \infty$ şi ţinând cont că

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0,\ \forall\, x \in A,$$

deducem $d(f(x), y_0) \le M,\ \forall\, x \in A$, ceea ce demonstrează teorema. **q.e.d.**

Teorema 4.5.5. (**Transferul de continuitate**) *Fie* (f_n), $f_n \in \mathcal{M}(A, Y)$, $A \subset X$ *şi* (X, d), (Y, σ) *spaţii metrice. Daca* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ *şi* f_n, $n \in I\!N^*$, *sunt funcţii continue în* x_0, *atunci funcţia* f *este continuă în* x_0. *În consecinţă, limita uniformă a unui şir de funcţii continue este o funcţie continuă.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $N = N(\varepsilon)$ numărul natural cu proprietatea

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in A \quad \text{şi} \quad \forall\, n \in N(\varepsilon). \tag{4.61}$$

În particular, (4.61) are loc pentru $n_0 > N(\varepsilon)$, n_0 fixat, adică

$$\sigma(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in A. \tag{4.62}$$

Deoarece f_{n_0} este continuă în x_0, rezultă că pentru ε ales mai sus, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.63}$$

Din (4.61) – (4.63) deducem că dacă $x \in A$ este astfel încât $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$\sigma(f(x), f(x_0)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \\ + \sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează continuitatea lui f în baza Teoremei 4.2.3, punctul (β).

Dacă $f_n,\ n \in I\!N$, sunt continue pe A, atunci funcţiile f_n sunt continue în orice punct $x_0 \in A$. În consecinţă, f este continuă în orice punct $x_0 \in A$. **q.e.d.**

Teorema 4.5.6. *Dacă şirul de funcţii (f_n), $f_n \in \mathcal{M}(A, Y)$, $A \subset X$, unde (X, d) şi (Y, σ) sunt spaţii metrice, converge uniform la funcţia continuă $f : A \to Y$, mulţimea A este compactă în (X, d), iar g este funcţie continuă pe Y, atunci*

$$g \circ f_n \xrightarrow[Y]{u} g \circ f.$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 4.4.1, mulţimea $f(A)$ este compactă în (Y, σ). Din această teoremă rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, dacă $y \in f(A)$, $y_1 \in Y$ şi

$$\sigma(y, y_1) < \delta, \tag{4.64}$$

atunci $\sigma(g(y_1), g(y)) < \varepsilon$.

Pentru δ de mai sus, există $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) \in I\!N$ încât

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \delta,\ \forall\, n > N(\varepsilon) \text{ şi } \forall\, x \in A.$$

Socotind acum că $y_1 = f_n(x)$ şi $y = f(x)$, lucru posibil, din (4.64) deducem

$$\sigma(g(f_n(x), g(f(x))) < \varepsilon, \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \forall\, x \in A,$$

care arată că şirul $g \circ f_n$ converge uniform pe Y la funcţia $g \circ f$. **q.e.d.**

Teorema 4.5.7. (**Criteriul lui Dini**[4]) *Fie (f_n) un şir de funcţii reale continue definite pe mulţimea compactă A din spaţiul metric (X, d), punctual convergent la funcţia continuă $f \in \mathcal{F}(A, X)$. Dacă*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq \quad ..., \quad \forall\, x \in A,$$

atunci $f_n \xrightarrow[A]{u} f$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că (f_n) nu este uniform convergent la funcţia f. Negând Definiţia 4.5.4, deducem că există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi $N \in I\!N$ există $n > N$ şi $x \in A$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_o$.

[4] Dini, Ulisse (1845–1918), matematician italian.

Să notăm cu x_{n_N} punctele astfel obţinute şi să ţinem cont de faptul că $f(x) \geq f_n(x),\ \forall\, x \in A$. În acest mod s-a obţinut şirul de puncte $(x_{n_N})_{N\geq 1}$ din A cu proprietatea $f(x_{n_N}) - f_{n_N}(x_{n_N}) \geq \varepsilon_0$.

Deoarece A este mulţime compactă în (X, d), şirul $(x_{n_N})_{N\geq 1}$ admite un subşir $(x_{n_{m_N}})_{N\geq 1}$ convergent la un punct $x_0 \in A$.

Să alegem acum $p \in I\!\!N$ arbitrar.

Funcţia $f - f_p$ este continuă în x_0, deci pentru ε_0 de mai sus există $N_0 \in I\!\!N$ astfel încât $\forall\, N \in I\!\!N,\ N > N_0$, avem

$$\varepsilon_0 - (f(x_0) - f_p(x_0)) \leq [f(x_{n_{m_N}}) - f_p(x_{n_{m_N}})] - [f(x_0) - f_p(x_0)] < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Pe de altă parte, putem lua $N \in I\!\!N$ astfel încât $n_{m_N} > p$, ceea ce în baza monotoniei şirului numeric $(f_n(x))_{n\geq 1},\ x \in A$, conduce la $f_{n_{m_N}}(x) \geq f_p(x),\ x \in A$.

În felul acesta, deducem

$$f(x_{n_{m_N}}) - f_p(x_{n_{m_N}}) \geq f(x_{n_{m_N}}) - f_{n_{m_N}}(x_{n_{m_N}}) \geq \varepsilon_0.$$

În acest ultim rezultat facem $N \to \infty$, ţinem cont că $x_{n_{m_N}} \to x_0$ şi că f şi f_p sunt funcţii continue. Atunci, avem

$$f(x_0) - f_p(x_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \forall\, p \in I\!\!N,$$

care contrazice faptul că şirul numeric $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ este convergent la $f(x_0)$.

Contradicţia la care s-a ajuns demonstrează teorema. **q.e.d.**

Să considerăm în încheiere că $X = I\!\!R^m,\ m \geq 1$ şi fie $(\mathbf{f}_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii vectoriale din $\mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$. Şirul de funcţii considerat este echivalent cu şirurile de funcţii reale $(f_{kn})_{n\geq 1}$, $k \in \overline{1,m}$, $f_{kn} \in \mathcal{F}(A)$, unde f_{1n}, f_{2n}, ..., f_{mn} sunt coordonatele în baza canonică din $I\!\!R^m$ ale funcţiei vectoriale $\mathbf{f}_n$.

Teorema 4.5.8. *Şirul $(\mathbf{f}_n)_{n\geq 1}$, $\mathbf{f}_n = (f_{1n}, f_{2n}, ..., f_{mn}) \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$, converge uniform pe mulţimea A la funcţia $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$ dacă şi numai dacă*

$$f_{kn} \xrightarrow[A]{u} f_k.$$

Demonstraţie. Folosind inegalităţile evidente

$$|\alpha_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2} \leq \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|, \quad \forall\, i \in \overline{1,m},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ sunt numere reale arbitrare, şi definiţia uniformei convergenţe a unui şir de funcţii, concluzia teoremei rezultă imediat. **q.e.d.**

4.6 Homeomorfisme

Definiţia 4.6.1. *O transformare (aplicaţie, funcţie, operator) f a submulţimii A dintrun spaţiu metric (X, d) pe submulţimea B a spaţiului metric (Y, σ) se numeşte* **homeomorfism** *dacă f este aplicaţie bijectivă şi atât f cât şi f^{-1} sunt funcţii continue.*

Observaţia 4.6.1. *Deoarece* $(f^{-1})^{-1} = f$ *rezultă că dacă* $f : A \to B$ *este homeomorfism, atunci* f^{-1} *este, de asemenea, homeomorfism.*

Definiţia 4.6.2. *Două mulţimi* A, B *se zic că sunt* **homeomorfe** *dacă există un homeomorfism de la* A *la* B*.*

Observaţia 4.6.2. *Orice funcţie bijectivă continuă definită pe o mulţime compactă este un homeomorfism.*

Întradevăr, aceasta rezultă din Teorema 4.4.3 şi din Definiţia 4.6.1. ■

Observaţia 4.6.3. *Dacă* f *este un homeomorfism de la* A *pe* B *şi* g *este un homeomorfism de la* B *pe* C*, atunci* $g \circ f$ *este un homeomorfism de la* A *pe* C*.*

Afirmaţia este evidentă în baza Teoremei 4.2.7, Teoremei 4.4.3, Observaţiei 1.4.5 şi Definiţiei 4.6.1. ■

Teorema 4.6.1. *Fiecare din condiţiile de mai jos este necesară şi suficientă pentru ca o transformare bijectivă a unui spaţiu metric* (X, d) *pe un spaţiu metric* (Y, σ) *să fie homeomorfism:*

(a) $\forall$ *şir de puncte* $(x_n)_{n\geq 1}$ *din* X, $x_n \xrightarrow{d} x \Longleftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$;

(b) $\forall A \subset X,\ \ A = \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow f(A) = \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$;

(c) $\forall A \subset X,\ \ A = \overline{A} \Longleftrightarrow f(A) = \overline{f(A)}$;

(d) $\forall A \subset X,\ \ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$;

(e) $\forall A \subset X,\ \ f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$.

Demonstraţie. Dacă f este un homeomorfism de la X pe Y, atunci implicaţia

$$x_n \xrightarrow{d} x \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$$

rezultă din continuitatea lui f conform Teoremei 4.2.3, punctul (γ).

Implicaţia inversă: $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x) \Longrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$ rezultă în mod similar din continuitatea lui f^{-1}.

Prin urmare, (a) are loc.

(a) implică (d). Întradevăr, din (a) rezultă că $x \in \overline{A}$ (adică x este limita unui şir de puncte din A) dacă şi numai dacă $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(d) implică (c) deoarece, în baza lui (d), $A = \overline{A}$ dacă şi numai dacă $f(A) = \overline{f(A)}$.

Dacă (c) are loc, atunci f este homeomorfism. Într-adevăr, dacă A este o submulţime închisă a lui X, atunci $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ este o submulţime închisă a lui Y, care demonstrează că transformarea f^{-1} este continuă. În mod similar, dacă $B \subset Y$ este închisă, deci $B = \overline{B}$, atunci mulţimea $A = f^{-1}(B)$ este închisă, deoarece $f(A) = B$. Acest rezultat, împreună cu Teorema 4.2.5, punctul (a), demonstrează că f este continuă.

Pentru ca demonstraţia să fie completă, să mai observăm că condiţia (b) este echivalentă cu condiţia (c) în baza Teoremei 3.9.6, iar condiţia (d) este echivalentă cu condiţia (e) în baza Teoremei 3.9.5. **q.e.d.**

Definiţia 4.6.3. *Submulţimile* A, B *ale respectiv spaţiilor metrice* (X, d) *şi* (Y, σ) *se numesc* **izometrice** *dacă există o transformare* $f : A \to B$ *astfel încât*

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in A. \tag{4.65}$$

Orice aplicaţie $f : A \to B$ *cu proprietatea* (4.65) *se numeşte* **izometrie**.

Observaţia 4.6.4. *Orice izometrie este un homeomorfism. Mulţimile izometrice sunt homemorfe.*

Întradevăr, aceasta rezultă din condiţia (a) a Teoremei 4.6.1 şi (4.65).

De exemplu, $\mathbb{E}^p$ ca spaţiu de puncte este izometric cu spaţiul liniar real $\mathbb{R}^p$, izometria fiind aplicaţia care pune în corespondenţă un punct din $\mathbb{E}^p$, deci o p-uplă ordonată de numere reale, $(x_1, x_2, ..., x_p)$, cu vectorul său de poziţie $\mathbf{x}$ din $\mathbb{R}^p$, care, în baza canonică din $\mathbb{R}^p$, are coordonatele $x_1, x_2, ..., x_p$, adică $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}\, X$. ■

Definiţia 4.6.4. *Proprietăţile mulţimilor şi spaţiilor care sunt* **invariante la homeomorfisme**, *în sensul că dacă una din cele două mulţimi homeomorfe are o proprietate, atunci aceeaşi proprietate o are şi cealaltă mulţime, se numesc* **proprietăţi topologice**. *Proprietăţile invariante la izometrii sunt numite* **proprietăţi metrice.**

Observaţia 4.6.5. *Orice proprietate topologică este şi proprietate metrică. Reciproc nu este, în general, adevărat.*

4.7 Conexiune prin arce. Funcţii continue pe mulţimi conexe şi pe mulţimi convexe

Definiţia 4.7.1. *Se numeşte* **drum**, *sau* **arc** *care uneşte punctul* a *cu punctul* b, *ambele din spaţiul metric* (X, d), *orice funcţie continuă definită pe un interval compact* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *cu valori în* X *astfel încât* $f(\alpha) = a$ *şi* $f(\beta) = b$, *sau invers, adica* $f(\alpha) = b$ *şi* $f(\beta) = a$. *Mulţimea* $\operatorname{Im} f = f([\alpha, \beta]) \subset X$ *se numeşte* **imaginea** *drumului, iar* a *şi* b *sunt* **extremităţile** *sale.*

Definiţia 4.7.2. *Spaţiul metric* (X, d) *se numeşte* **conex prin arce** *dacă orice două puncte ale sale pot fi unite printr-un arc a cărui imagine este inclusă în* X. *O submulţime* A *a spaţiului metric* (X, d) *se numeşte* **conexă prin arce** *dacă subspaţiul metric* $(A, d_{/A \times A})$ *este conex prin arce.*

Exemplul 4.7.1. *Mulţimea* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$ *este conexă prin arce deoarece orice două puncte din* A *pot fi unite printr-un drum inclus în* A.

Teorema 4.7.1. *Imaginea printr-o aplicaţie continuă a unei mulţimi conexe dintr-un spaţiu metric este o mulţime conexă.*

Demonstraţie. Fie funcţia continuă $f \in \mathcal{F}(A, Y)$, $A \subset X$, A mulţime conexă, unde (X, d) şi (Y, σ) sunt spaţii metrice. Să arătăm că $f(A)$ este mulţime conexă în (Y, σ). Presupunem contrariul. Atunci, există două mulţimi deschise nevide $D_1, D_2 \in \tau_\sigma$ (deci mulţimi deschise în (Y, σ)) astfel încât

$$D_1 \cap D_2 \cap f(A) = \emptyset,\ D_1 \cap f(A) \neq \emptyset,\ D_2 \cap f(A) \neq \emptyset \text{ şi } f(A) \subset D_1 \cup D_2.$$

Întrucât f este continuă, în baza Teoremei 4.2.5, mulţimile $\tilde{D}_1 = f^{-1}(D_1)$ şi $\tilde{D}_2 = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în A. În plus, $\tilde{D}_1 \neq \emptyset$, $\tilde{D}_2 \neq \emptyset$, $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 \cap A = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap A = f^{-1}(D_1 \cap D_2) \cap A = \emptyset$, $\tilde{D}_1 \cap A \neq \emptyset$, $\tilde{D}_2 \cap A \neq \emptyset$, iar $A \subset \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$. Din aceste rezultate şi Definiţia 3.11.4 şi Definiţia 3.11.3 deducem că A este neconexă, ceea ce este absurd. Prin urmare $f(A)$ este conexă. **q.e.d.**

Corolarul 4.7.1. *Fie $f : [a, b] \to X$, unde $[a, b]$ este un interval din $\mathbb{R}$ şi (X, d) un spaţiu metric. Dacă f este continuă, atunci $\operatorname{Im} f = f([\alpha, \beta])$ este mulţime conexă în (X, d).*

Demonstraţie. Într-adevăr, din Exemplul 3.11.2 deducem că $[\alpha, \beta]$ este mulţime conexă, iar din Teorema 4.7.1 rezultă concluzia corolarului. **q.e.d.**

Corolarul 4.7.2. (Teorema valorii intermediare) *Fie $f \in \mathcal{F}(A)$, unde A este submulţime conexă a spaţiului metric (X, d). Dacă f este continuă, $a \in A$, $b \in A$ şi dacă $f(a) < f(b)$, atunci pentru orice $\lambda \in (f(a), f(b))$ există $c \in A$ astfel încât $f(c) = \lambda$.*

Demonstraţie. Din Teorema 4.7.1 rezultă că $f(A) \subset \mathbb{R}$ este mulţime conexă. Conform Teoremei 3.11.2, rezultă că $f(A)$ este interval din $\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că dacă $f(a) \in f(A)$ şi $f(b) \in f(A)$, intervalul $(f(a), f(b)) \subset f(A)$, de unde rezultă afirmaţia corolarului. **q.e.d.**

Din Corolarul 4.7.2, obţinem:

Corolarul 4.7.3. *Dacă I este un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe I, atunci mulţimea $f(I)$ este un interval.*

Teorema 4.7.2. *Orice spaţiu metric conex prin arce este conExemplul*

Demonstraţie. Fie (X, d) un spaţiu metric conex prin arce şi fie $a \in X$, fixat. Pentru orice $x \in X$ există un drum conţinut în X care uneşte a cu x, adică o funcţie continuă $f : [\alpha, \beta] \to X$ astfel încât $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = x$, $f(t) \in X$, $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$. Fie $A_x = \operatorname{Im} f = f([\alpha, \beta])$. Din Corolarul 4.7.1 deducem că A_x este o mulţime conexă în (X, d).

Vedem imediat că $X = \bigcup\limits_{x\in X} A_x$. Atunci, în baza Teoremei 3.10.3, rezultă că X este mulţime conexă. **q.e.d.**

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată după cum rezultă din

Exemplul 4.7.2. *Fie submulţimea* $A = \left\{\left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) : x \in (0,1]\right\} \subset I\!R^2$ *care este evident graficul funcţiei* $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ *pentru* $x \in (0,1]$. *Aderenţa mulţimii* A, *adică mulţimea* $\overline{A} = A \cup \{(0,y) \in I\!R^2; -1 \le y \le 1\}$, *este conexă dar nu este conexă prin arce.*

Într-adevăr, întrucât A este conexă prin arce deoarece funcţia f este continuă, rezultă că A este conexă, iar conform Teoremei 3.10.4 3.10.4, $\overline{A}$ este conexă. Pe de altă parte, se observă că pentru orice punct aparţinând mulţimii $A \subset \overline{A}$ nu există nici un arc care să-l unească cu originea şi să fie conţinut în $\overline{A}$, adică $\overline{A}$ nu este conexă prin arce. ■

Definiţia 4.7.3. *Fie* $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ *unde* (X,d) *şi* (Y,σ) *sunt spaţii metrice. Funcţia* f *are* **proprietatea lui Darboux**[5] *dacă transformă orice submulţime conexă a lui* X *într-o submulţime conexă a lui* Y.

Observaţia 4.7.1. *O funcţie continuă* $f \in \mathcal{F}(A,Y)$, *unde* $A \subset X$, *iar* (X,d) *şi* (Y,σ) *sunt spaţii metrice, are proprietatea lui Darboux.*

În adevăr, afirmaţia rezultă din Teorema 4.7.1 şi Definiţia 4.7.3. ■

Observaţia 4.7.2. *Ca un caz particular al Corolarului 4.7.2 şi Corolarului 4.7.3, dacă* $f : I\!R \to I\!R$ *este continuă, deci are proprietatea lui Darboux, atunci pentru orice pereche de puncte* $a, b \in I\!R$ *cu* $a < b$ *şi pentru orice* $\lambda \in (f(a), f(b))$ *(sau* $\lambda \in (f(b), f(a))$*) există un element* $c \in (a,b)$ *astfel încât* $f(c) = \lambda$.

Observaţia 4.7.3. *Reciproca Teoremei 4.7.1 nu este adevărată adică există funcţii care au proprietatea lui Darboux şi nu sunt funcţii continue. În acest sens dăm următorul exemplu.*

Exemplul 4.7.3. *Funcţia*

$$f : [0,1] \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0,1]. \end{cases}$$

nu este continuă dar are proprietatea lui Darboux.

Soluţie. Funcţia f nu este continuă în $x = 0$ deoarece nu există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Arătăm că f are proprietatea lui Darboux. Fie $[a,b] \subset [0,1]$. Dacă $a > 0$, atunci pe $[a,b]$ f fiind continuă, are proprietatea lui Darboux. Dacă

[5] Darboux, Jean Gaston (1842–1917), matematician francez.

$a = 0$ şi $b \in (0,1]$ se observă că pentru orice $x \neq 0,\ f(x) \leq 1 = f(0)$, deci $f(b) < f(a) = f(0) = 1$. Să arătăm că $\forall\,\lambda \in [f(b), f(0)]\ \exists\,c \in [0,b]$ astfel încât $f(c) = \lambda$. Se vede mai întâi că $f(x) = 1 \Longleftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{x} = 1$, adică $x = \dfrac{2}{4k+1}$ şi $f(x) = -1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{2}{4k+3}$. Prin urmare oricât ar fi b de mic se poate indica un interval de forma $\left[\dfrac{2}{4k+3}, \dfrac{2}{4k+1}\right] \subset [0,b]$. Atunci, $\forall\,\lambda \in [-1,1]$ şi, cu atât mai mult, $\forall\,\lambda \in [f(b), f(0)]$ există $c \in \left[\dfrac{2}{4k+3}, \dfrac{2}{4k+1}\right] \subset [0,b]$ astfel încât $f(c) = \lambda$. În concluzie, f are proprietatea lui Darboux. ■

Definiţia 4.7.4. *Submulţimea A a spaţiului metric (X,d) se numeşte* **domeniu** *dacă A este mulţime deschisă şi conexă. Un domeniu D împreună cu frontiera lui ∂D, adică $\overline{D} = D \cup \partial D$, se numeşte* **domeniu închis**, *sau* **continuu**.

Teorema 4.7.3. *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $I\!R^n$ $(n \geq 1)$. Mulţimea D este conexă (deci domeniu) dacă şi numai dacă D este conexă prin arce.*

Demonstraţie. Fie D un domeniu din $I\!R^n$, $\mathbf{a} \in D$ un punct arbitrar fixat şi A mulţimea tuturor punctelor $\mathbf{x} \in D$ ce pot fi unite cu $\mathbf{a}$ printr-un arc conţinut în D. Observăm că $A \neq \emptyset$ deoarece $D = \overset{\circ}{D}$, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\exists\,B(\mathbf{a},\varepsilon) \subset D$, iar orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\varepsilon)$ se poate uni cu $\mathbf{a}$ printr-un segment închis fiindcă $B(\mathbf{a},\varepsilon)$ este mulţime convexă.

Să arătăm că $A = \overset{\circ}{A}$. Pentru aceasta fie $x \in A$. Cum D este deschisă există o bilă deschisă $B(\mathbf{x},\varepsilon_1) \subset D$. Dacă $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x},\varepsilon_1)$, segmentul $[\mathbf{y},\mathbf{x}] \subset B(\mathbf{x},\varepsilon_1)$, deoarece $\overline{B(\mathbf{x},\varepsilon_1)}$ este mulţime convexă (Exemplul 3.11.1). Prin urmare există funcţia continuă $f : [\alpha,\beta] \to D$ astfel încât $f(\alpha) = \mathbf{y}$ şi $f(\beta) = \mathbf{x}$. De exemplu, putem lua $[\alpha,\beta] = [0,1]$ şi $f(t) = \mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Pe de altă parte, $\mathbf{x} \in A$ se poate uni cu $\mathbf{a}$ printr-un segment $[\mathbf{x},\mathbf{a}] \subset A$ adică $\exists\,g : [\beta,\gamma] \to A$ astfel încât $g(\beta) = \mathbf{x}$ şi $g(\gamma) = \mathbf{a}$; prin urmare $\exists\,h : [\alpha,\gamma] \to A$, continuă, astfel încât $h(\alpha) = \mathbf{y}$ şi $h(\gamma) = \mathbf{a}$, adică punctul $\mathbf{y}$ poate fi unit cu $\mathbf{a}$ printr-un arc conţinut în D, deci $\mathbf{y} \in A$. Aceasta dovedeşte că $B(\mathbf{x},\varepsilon_1) \subset A$, din care tragem concluzia că A este mulţime deschisă.

Să arătăm acum că A este în acelaşi timp şi mulţime închisă în D. Pentru aceasta vom arăta că $C_D A$ este mulţime deschisă în D. Fie $B = C_D A$. Dacă $\mathbf{x} \in B$, atunci $\mathbf{x} \in D$ şi $\mathbf{x} \notin A$. Cum $\mathbf{x} \in D$, $\exists\,B(\mathbf{x},\varepsilon) \subset D$. Urmărim să demonstrăm că $B(\mathbf{x},\varepsilon) \subset B$. Să presupunem că n-ar fi astfel, deci ar exista $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x},\varepsilon)$ cu proprietatea $\mathbf{y} \notin B$. Rezultă că $\mathbf{y}$ poate fi unit cu $\mathbf{x}$ printr-un segment şi $\mathbf{y} \in A$. Deci $\mathbf{y}$ poate fi unit cu $\mathbf{a}$ printr-un arc. Cum $\mathbf{x}$ poate fi unit cu $\mathbf{y}$ printr-un segment şi $\mathbf{y}$ se uneşte cu $\mathbf{a}$ printr-un arc rezultă că $\mathbf{x}$ poate fi unit cu $\mathbf{a}$ printr-un arc, deci $\mathbf{x} \in A$, ceea ce este absurd.

Aşadar mulţimea nevidă $A \neq \emptyset$ este simultan închisă şi deschisă în spaţiul metric $(D, d_{/D\times D})$ şi cum singurile submulţimi ale lui D simultan închise şi deschise în $(D, d_{/D\times D})$ sunt mulţimea vidă şi mulţimea însăşi D rezultă că $A = D$, ceea ce spune că punctul fixat $\mathbf{a} \in D$ se poate uni cu orice punct din D.

Deoarece $\mathbf{a}$ este arbitrar din D rezultă că orice două puncte din D pot fi unite printr-un arc conţinut în D, deci D este conexă prin arce.

Reciproc, dacă D este conexă prin arce, atunci conform Teoremei 4.7.2 rezultă că D este mulţime conexă. **q.e.d.**

Teorema 4.7.4. *Fie E o mulţime convexă din spaţiul normat $(V, \|\cdot\|)$ şi $f \in \mathcal{F}(E)$ o funcţie reală continuă. Atunci, $\forall\,\mathbf{a} \in E$, $\forall\,\mathbf{b} \in E$ şi $\lambda \in (f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}))\exists\,\mathbf{c}_\lambda \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ astfel încât $f(\mathbf{c}_\lambda) = \lambda$.*

Demonstraţie. Fie funcţia $F:[0,\,1]\to I\!\!R,\;\; F(t)=f\Big((1-t)\,\mathbf{a}+t\,\mathbf{b}\Big),\;\; t\in[0,\,1]$. Deoarece funcţia f este continuă, iar F este rezultatul compunerii funcţiei f cu funcţia continuă $\boldsymbol{\varphi}:[0,1]\to[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $\boldsymbol{\varphi}(t)=(1-t)\,\mathbf{a}+t\,\mathbf{b},\;\; t\in[0,1]$, deducem că funcţia F este continuă pe $[0,1]$ şi satisface condiţiile: $F(0)=f(\mathbf{a})$; $F(1)=f(\mathbf{b})$. Din Corolarul 4.7.2 rezultă că există $t_\lambda\in(0,1)$ astfel încât să avem

$$\lambda=F(t_\lambda)=f\Big((1-t_\lambda)\,\mathbf{a}+t_\lambda\,\mathbf{b}\Big)=f(\mathbf{c}_\lambda),\quad \text{unde}\;\; \mathbf{c}_\lambda=(1-t_\lambda)\,\mathbf{a}+t_\lambda\,\mathbf{b}\in(\mathbf{a},\,\mathbf{b})$$

şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Exerciţiul 4.7.1. *Se consideră funcţia*

$$f:I\!\!R^3\setminus\{\mathbf{0}\}\to I\!\!R,\quad f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_1^2+5x_2^2+9x_3^2}$$

pentru care se cere întâi să se studieze:

(a) *uniforma continuitate a funcţiei* f;

(b) *continuitatea uniformă a restricţiei funcţiei* f *la mulţimea* A_1, *unde*

$$A_1=\overline{B\Big((1,0,0),3\Big)}\setminus B\,(\mathbf{0},1/2)\,,$$

apoi să se arate că următoarele mulţimi au proprietăţile indicate alăturat:

(c) $B=f(A_1)$ *este mulţime compactă;*

(d) $B=f(A_2)$, *unde* $A_2=\{\mathbf{x}\in I\!\!R^3:x_3>x_1^2+x_2^2\}$, *este mulţime conexă;*

(e) $A_3=\{\mathbf{x}\in I\!\!R^3:1<f(\mathbf{x})<5\}$ *este mulţime deschisă în* $I\!\!R^3$;

(f) $A_4=\{\mathbf{x}\in I\!\!R^3:f(\mathbf{x})\le 2\}$ *este mulţime închisă în* $I\!\!R^3$.

Soluţie. Remarcăm mai întâi că din Teorema 3.9.1 şi Teorema 3.9.6 rezultă că domeniul de definiţie al funcţiei f este mulţime deschisă în $I\!\!R^3$ fiindcă complementara sa faţă de $I\!\!R^3$ este mulţimea formată dintr-un singur punct, originea reperului, care este mulţime închisă în $I\!\!R^3$.

(a) Considerăm şirul de vectori $\mathbf{x}_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},0,0\right)\in I\!\!R^3\setminus\mathbf{0}$.

Avem $\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}},0,0\right)=(x_{1\,n+1}-x_{1n},0,0)$.

Şirul absciselor acestui şir este

$$x_{1\,n+1}-x_{1n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}=-\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}.$$

Observăm că $\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n\to\mathbf{0}$.

Prin urmare, oricare ar fi $\delta>0$, există $N(\delta)\in I\!\!N$, astfel încât pentru orice număr natural $n>N(\delta)$, avem $\|\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n\|<\delta$.

Dacă alegem $\mathbf{x}'_\delta=\mathbf{x}_{n+1}$ şi $\mathbf{x}''_\delta=\mathbf{x}_n$, unde $n>N(\delta)$, atunci

$$d(\mathbf{x}'_\delta,\mathbf{x}''_\delta)=\|\mathbf{x}'_\delta-\mathbf{x}''_\delta\|=\|\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n\|<\delta.$$

Calculând apoi $\sigma(f(\mathbf{x}'_\delta),f(\mathbf{x}''_\delta))$, găsim

$$\sigma(f(\mathbf{x}'_\delta),f(\mathbf{x}''_\delta))=|f(\mathbf{x}'_\delta)-f(\mathbf{x}''_\delta)|=\frac{1}{\dfrac{1}{n+1}}-\frac{1}{\dfrac{1}{n}}=1\ge 1.$$

Prin urmare, există $\varepsilon_0 = 1$ cu proprietatea că oricare ar fi $\delta > 0$, există vectorii $\mathbf{x}'_\delta$, $\mathbf{x}''_\delta \in I\!R^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ pentru care $d(\mathbf{x}'_\delta, \mathbf{x}''_\delta) < \delta$, iar $\sigma(f(\mathbf{x}'), f(\mathbf{x}'')) \geq \varepsilon_0$.

După Definiţia 4.3.2, rezultă că funcţia f *nu este uniform continuă.*

(b) Funcţia f este funcţie continuă deoarece raportul dintre funcţia constantă 1 şi funcţia polinom omogen de gradul doi $x_1^2+5x_2^2+9x_3^2$, ambele funcţii continue, iar mulţimea A_1 se poate scrie în forma $A_1 = \overline{B\Big((1,0,0),3\Big)} \cap C_{I\!R^3} B\Big(\mathbf{0}, 1/2\Big)$. Conform Teoremei 3.9.9, mulţimea $\overline{B\Big((1,0,0),3\Big)}$ este închisă în $I\!R^3$, mulţimea $B\Big(\mathbf{0}, \dfrac{1}{2}\Big)$ este deschisă în $I\!R^3$, iar complementara acesteia din urmă este mulţime închisă în $I\!R^3$.

Rezultă că mulţimea A_1 este intersecţia a două mulţimi închise în $I\!R^3$.

Conform Teoremei 3.9.7, A_1 este mulţime închisă.

Totodată, A_1 este mulţime mărginită fiindcă este inclusă, de exemplu, în bila deschisă $B(\mathbf{0}, 6)$.

După Teorema 3.10.2 şi Teorema 3.10.7, o mulţime mărginită şi închisă în $I\!R^3$ este mulţime compactă în $I\!R^3$.

Conform Teoremei 4.3.1, f fiind funcţie continuă şi A_1 mulţime compactă în $I\!R^3$, restricţia funcţiei f la mulţimea A_1 *este o funcţie uniform continuă.*

(c) Deoarece A_1 este mulţime compactă, iar f este funcţie continuă, din Teorema 4.4.1 deducem că $f(A_1)$ este mulţime compactă, deci $f(A_1)$ este un interval de forma $[a, b]$, cu $a < b$.

În plus, $a > 0$ pentru că $f(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(d) Determinăm mai întâi mulţimea A_2. În acest scop, folosim *metoda secţiunilor* pentru determinarea frontierei sale, care este mulţimea

$$\partial A_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\},$$

numită *suprafaţă.*

Intersecţia suprafeţei ∂A_2 cu planul $x_2 = 0$, adică cu planul de coordonate Ox_1x_3, este mulţimea de puncte ale căror coordonate satisfac simultan ecuaţiile $x_2 = 0$ şi $x_3 = x_1^2$, în care recunoaştem o *parabolă.*

Intersecţia mulţimii ∂A_2 cu planul Ox_2x_3 este mulţimea

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : \quad x_1 = 0, \quad x_3 = x_2^2\}$$

care este, de asemenea, o parabolă.

Intersecţia mulţimii ∂A_2 cu planul $x_3 = r^2$ este mulţimea

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 : \quad x_3 = r^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$$

care este un *cerc de rază* $r > 0$, *situat în planul* $x_3 = r^2$, *cu centrul în punctul* $(0, 0, r^2)$ de pe axa Ox_3.

Avem, în acest fel, o descriere completă a suprafeţei ∂A_2.

Putem afirma că ∂A_2 este suprafaţa *generată* de familia de cercuri cu centrele pe Ox_3, aflate în plane paralele cu planul Ox_1x_2, care se *sprijină* fie pe parabola din planul Ox_1x_3, fie pe cea din planul Ox_2x_3.

Această suprafaţă se numeşte *paraboloid de revoluţie*, sau *paraboloid de rotaţie* pentru că provine din rotaţia parabolei

$$\begin{cases} x_3 &= x_1^2, \\ x_2 &= 0, \end{cases}$$

din planul Ox_1x_3, în jurul axei Ox_3.

Mulţimea A_2 este deschisă în $I\!R^3$ deoarece este formată numai din puncte interioare.

Deoarece orice două puncte din A_2 se pot uni printr-un drum conţinut în mulţime, rezultă că A_2 este mulţime conexă în $I\!R^3$.

În plus, A_2 este şi mulţime convexă deoarece drumul care uneşte două puncte ale sale poate fi chiar segmentul care le uneşte.

Prin urmare, A_2 este mulţime conexă, iar f este funcţie continuă. Conform Teoremei 4.7.1 rezultă că $f(A_2)$ este mulţime conexă.

(e) Se constată că $A_3 = f^{-1}((1, 5))$. Dar mulţimea $(1, 5) \subset I\!R$ este mulţime deschisă. Conform Teoremei 4.2.5, rezultă că $A_3 \subset I\!R^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ este mulţime deschisă în $I\!R^3$.

(f) Mulţimea A_4 este contraimaginea prin funcţia continuă f a mulţimii $(-\infty, 2] \subset I\!R$ care este mulţime închisă în $I\!R$, fiind complementara mulţimii deschise $(2, \infty)$.

Conform Teoremei 4.2.5, rezultă că $A_4 = \overline{A}_4$, adică A_4 este mulţime închisă. ■

Exemplul 4.7.4. *Se consideră funcţia* $\mathbf{f} : I\!R^n \to I\!R^3$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}},\ \|\mathbf{x}\| \sin \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|},\ \|\mathbf{x}\|^{x_1}\right), & \text{dacă } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ (0,\ 0,\ 1), & \text{dacă } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n$ *şi mulţimile*

$$\begin{cases} A &= \{\mathbf{x} \in I\!R^n :\ |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq 1\}; \\ B &= \left\{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in I\!R^3 :\ \dfrac{y_1^2}{9} + \dfrac{y_2^2}{4} + y_3^2 \leq 1\right\}. \end{cases} \tag{4.66}$$

Să se arate că :

(a) A *şi* B *sunt mulţimi închise în* $I\!R^n$ *şi respectiv* $I\!R^3$*;*

(b) *mulţimea* $\mathbf{f}(A) \subset I\!R^3$ *este compactă şi conexă;*

(c) $\mathbf{f}^{-1}(B) \subset I\!R^n$ *este mulţime închisă în* $I\!R^n$.

Soluţie. Funcţia $\mathbf{f}$ este o funcţie vectorială de n variabile reale. Funcţiile coordonate f_1, f_2, f_3 sunt funcţii reale de n variabile reale şi au expresiile

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \sin \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ f_3(x_1, x_2, ..., x_n) &= \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{x_1}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Aici $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ este norma Euclidiană pe $I\!R^n$.

Este simplu de arătat că funcţiile f_1, f_2, f_3 sunt continue pe $I\!R^n$. În baza Teoremei 4.2.6, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ este funcţie continuă .

(a) Mulţimea A din (4.66) este bila închisă, cu centrul în origine şi rază 2, din spaţiul metric $(I\!R^n, d_2)$, unde

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

După Teorema 3.9.9, orice bilă închisă este mulţime închisă. Prin urmare, A este mulţime închisă în $I\!R^n$.

Pentru a vedea natura topologică a mulţimii B din (4.66), considerăm funcţia reală

$$\varphi : I\!R^3 \to I\!R,\ \ \varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2,$$

care evident este continuă. Atunci, $B = \varphi^{-1}([0, 1])$, adică B este contraimaginea prin funcţia continuă φ a compactului $[0, 1]$ care, conform Teoremei 4.2.5, este mulţime închisă.

(b) Mulţimea A, fiind o bilă închisă, este mulţime compactă în $I\!R^n$. Mulţimea A este, de asemenea, mărginită şi închisă în $I\!R^n$, dar şi conexă.

Întrucât f este funcţie continuă, după Teorema 4.4.1 şi Teorema 4.7.1 rezultă că $f(A)$ este compactă şi conexă.

(c) Mulţimea B fiind închisă şi f fiind funcţie continuă, din Teorema 4.2.5 rezultă că $f^{-1}(B)$ este mulţime închisă. ∎

Exemplul 4.7.5. *Fie* $\mathbf{f} : I\!\!R^3 \to I\!\!R^2$ *definită prin*

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{cases} \Big((x^2+y^2+z^2)\ln(x^2+y^2+z^2),\ \sqrt{2-x^2-y^2-z^2}\Big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y,z) \in A, \\ (0,\ \sqrt{2}), \quad \text{dacă} \ \ (x,\,y,\,z) = (0,\,0,\,0), \\ (0,\ 1), \quad \text{dacă} \ \ (x,\,y,\,z) \in I\!\!R^3 \setminus \overline{B(\mathbf{0},1)}, \end{cases}$$

unde $A = \overline{B(\mathbf{0},1)} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiei $\mathbf{f}$ *pe mulţimea*

$$A_1 = \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1\}.$$

Soluţie. Să remarcăm mai întâi că funcţia $\mathbf{f}_{/A}$, restricţia funcţiei $\mathbf{f}$ la mulţimea A, este funcţie compusă. Într-adevăr, $\mathbf{f}_{/A} = \mathbf{g} \circ \varphi$, unde

$$\begin{aligned} &\mathbf{g} : (0,\ 1] \longrightarrow I\!\!R^2, \quad \mathbf{g}(t) = (t\ln t, \sqrt{2-t^2}) \\ &\varphi : A \longrightarrow I\!\!R, \qquad\quad \varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2. \end{aligned}$$

Atât φ cât şi $\mathbf{g}$ sunt funcţii continue deci, după Teorema 4.2.7, rezultă că $\mathbf{f}_{/A}$ este funcţie continuă.

Restricţia funcţiei $\mathbf{f}$ la mulţimea $I\!\!R^3 \setminus \overline{B(\mathbf{0},1)}$ este funcţie constantă, deci continuă.

Rămâne să studiem continuitatea lui $\mathbf{f}$ în origine şi în punctele frontieră ale mulţimii $\overline{B(\mathbf{0},1)}$.

Avem

$$\lim_{(x,y,z)\in A \to (0,0,0)} \mathbf{f}(x,y,z) = \lim_{t\to 0}(t\ln t, \sqrt{2-t^2}) = (0,\ \sqrt{2}),$$

deci $\mathbf{f}$ este continuă în origine.

Continuitatea lui $\mathbf{f}$ pe $\partial\overline{B(\mathbf{0},1)}$ este echivalentă cu continuitatea în $t = 1$ a funcţiei

$$\mathbf{h} : [0,+\infty) \longrightarrow I\!\!R^2, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{cases} (t\ln t,\ \sqrt{2-t^2}), & \text{dacă } 0 < t \le 1 \\ (0,\ \sqrt{2}), & \text{dacă } t = 0 \\ (0,\ 1), & \text{dacă } t > 1. \end{cases}$$

Funcţia $\mathbf{h}$ este continuă pe $[0,\infty)$, deci este continuă şi în $t = 1$.

Să remarcăm că $\mathbf{f} = \mathbf{h} \circ \psi$, unde

$$\psi : I\!\!R^3 \longrightarrow I\!\!R, \quad \psi(x,\,y,\,z) = x^2+y^2+z^2.$$

Deoarece ψ este funcţie continuă pe $I\!\!R^3$, iar h este funcţie continuă pe $[0,+\infty)$ rezultă că $\mathbf{f}$ este funcţie continuă pe $I\!\!R^3$.

Mulţimea A_1 este mărginită pentru că punctele sale aparţin de exemplu, bilei $B(\mathbf{0},4)$, sau intervalulului tri–dimensional închis $I_3 = [-2,2] \times [-3,3] \times [-1,1]$.

Trebuie să mai arătăm că A_1 este mulţime închisă. În acest scop să considerăm un şir arbitrar de puncte din A_1 de forma $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$, convergent la (x_0, y_0, z_0). Arătam că limita aparţine lui A_1. Avem

$$\frac{x_n^2}{4} + \frac{y_n^2}{9} + z_n^2 \le 1.$$

Trecând la limită în inegalitatea de mai sus, obţinem

$$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{9}+z_0^2\le 1\Longrightarrow \mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)\in A_1.$$

Conform Teoremei 3.9.2, rezultă că $A_1=\overline{A_1}$.

Folosind Teorema 3.10.2 şi Teorema 3.10.7, deducem că A_1 este mulţime mărginită şi închisă în $I\!R^3$, deci compactă.

În sfârşit, din Teorema 4.3.1 rezultă că f este funcţie uniform continuă. ■

4.8 Aplicaţii liniare între spaţii vectoriale reale. Izomorfism

Fie V şi W două spaţii vectoriale reale.

Definiţia 4.8.1. *Funcţia* $\mathbf{T}:V\to W$ *se numeşte* **aplicaţie liniară** *dacă satisface condiţiile:*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{T}(\mathbf{x}_1)+\mathbf{T}(\mathbf{x}_2),\quad \forall\,\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2\in V\quad (\textbf{aditivitate}),\tag{4.67}$$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathbf{T}(\mathbf{x}),\quad \forall\alpha\in I\!R,\quad \forall\mathbf{x}\in V\quad (\textbf{omogenitate}).\tag{4.68}$$

Pentru o aplicaţie liniară se folosesc şi alte denumiri cum ar fi *operator liniar*, ori *transformare liniară*, sau *homomorfism*.

Dacă $V=W$, aplicaţia $\mathbf{T}:V\to W$ care satisface (4.67) şi (4.68) se numeşte *endomorfism*.

Propoziţia 4.8.1. *Aplicaţia* $\mathbf{T}:V\to W$ *este operator liniar dacă şi numai dacă pentru orice scalari* $\alpha_1,\,\alpha_2\in I\!R$ *şi oricare ar fi vectorii* $\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2\in V$ *are loc relaţia*

$$\mathbf{T}(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2)=\alpha_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1)+\alpha_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2).\tag{4.69}$$

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{T}$ este operator liniar, aplicarea combinată a lui (4.67) şi (4.68) conduce la (4.69).

Întradevăr,

$$\mathbf{T}(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2)=\mathbf{T}(\alpha_1\mathbf{x}_1)+\mathbf{T}(\alpha_2\mathbf{x}_2)=\alpha_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1)+\alpha_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_2).$$

Reciproc, dacă (4.69) este adevărată pentru orice scalari $\alpha_1,\,\alpha_2\in I\!R$ şi orice vectori $\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2\in V$, atunci rămâne adevărată şi pentru $\alpha_1=\alpha_2=1$.

Ştiind că $1\cdot\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_1$ şi $1\cdot\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2$, din (4.69), obţinem (4.67).

Luând acum în (4.69) $\alpha_1=\alpha$, $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}$, $\alpha_2=0$ şi având în vedere că $0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$, obţinem (4.68). **q.e.d.**

Propoziţia 4.8.2. *Dacă* $\mathbf{T}:V\to W$ *este operator liniar dacă şi numai dacă oricare ar fi scalarii* $\lambda_i\in I\!R$, $i\in\overline{1,p}$, *vectorii* $\mathbf{x}_i\in V$, $i\in\overline{1,p}$ *şi* $p\in I\!N^*$ *este atisfăcută egalitatea*

$$\mathbf{T}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\mathbf{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\mathbf{T}(\mathbf{x}_i).\tag{4.70}$$

Demonstraţie. Întradevăr, pentru $p = 1$, (4.70) este tocmai (4.68), pentru $p = 2$, (4.70) este identică cu (4.69), iar pentru $p \geq 2$, demonstraţia că (4.70) are loc se face prin inducţie matematică.

Reciproc, dacă (4.70) are loc în condiţiile precizate, atunci are loc si pentru $p = 2$, de unde după Propoziţia 4.8.1 rezultă că aplicaţia $\mathbf{T} : V \to W$ este operator liniar. **q.e.d.**

Teorema 4.8.1. *Dacă $\mathbf{T} : V \to W$ este operator liniar, atunci:*

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W, \\ \mathbf{T}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{y}), \ \forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in V; \end{cases} \tag{4.71}$$

mulţimea

$$\operatorname{Im} \mathbf{T} = \mathbf{T}(V) = \{\mathbf{y} \in W : \exists\, \mathbf{x} \in V \text{ astfel încât } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\},$$

numită **imaginea operatorului liniar** $\mathbf{T}$*, este subspaţiu liniar al lui* W*;*

mulţimea

$$\operatorname{Ker} \mathbf{T} = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W\},$$

numită **nucleul operatorului liniar** $\mathbf{T}$*, este subspaţiu liniar al lui* V*.*

Demonstraţie. Luând în (4.69) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ şi $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, obţinem

$$\mathbf{T}(1 \cdot \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}((-1)\mathbf{x}) =$$
$$= \mathbf{T}(\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + (-\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}_W,$$

de unde rezultă prima din egalităţile (4.71).

Asemănător se demonstrează şi celelalte două identităţi din (4.71).

Fie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{T}(V)$. Atunci, există $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ astfel încât $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, 2$. Dacă $\lambda_1,\ \lambda_2 \in I\!\!R$ sunt scalari reali arbitrari, atunci se vede imediat că

$$\mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2,$$

ceea ce arată că $\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im} \mathbf{T}$.

Aplicând acum Teorema 3.2.2, deducem că $\operatorname{Im} \mathbf{T}$ este subspaţiu liniar al lui W.

Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sunt vectori arbitrari din $\operatorname{Ker} T$ şi λ_1, λ_2 reprezintă scalari reali arbitrari, în baza lui (4.69), deducem

$$\mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{0} + \lambda_2 \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de unde, conform Teoremei 3.2.2, rezultă că $\operatorname{Ker} \mathbf{T}$ este subspaţiu liniar al lui V. **q.e.d.**

Teorema 4.8.2. *Operatorul $\mathbf{T} : V \to W$ este funcţie injectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} \mathbf{T} = \{\mathbf{0}\}$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\mathbf{T}$ este aplicaţie injectivă, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ implică $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{T}(\mathbf{0})$ şi, în baza lui (4.71), avem că $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

Prin urmare, singurul element al lui $\operatorname{Ker} \mathbf{T}$ este vectorul nul din V.

Reciproc, dacă $\operatorname{Ker} \mathbf{T} = \{\mathbf{0}\}$, atunci $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$ impliă $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$ şi $\mathbf{T}$ este aplicaţie injectivă deoarece $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ implică $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ şi $\mathbf{T}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \neq T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, adică $\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{T}(\mathbf{x}_2)$. **q.e.d.**

Definiţia 4.8.2. *Spaţiile vectoriale V şi W se numesc* **izomorfe** *dacă există o aplicaţie liniară bijectivă $\mathbf{T} : V \to W$ care se numeşte* **izomorfism**.

Teorema 4.8.3. *Condiţia necesară şi suficientă ca spaţiile liniare reale V şi W să fie izomorfe este ca $\dim V = \dim W$.*

Demonstraţie. **Suficienţa.** Fie V şi W spaţii liniare reale cu bazele $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ *cardinal echivalente* (vezi Observaţia 3.2.8) şi $\mathbf{f} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ o aplicaţie biunivocă a lui $\mathcal{B}_1$ pe $\mathcal{B}_2$. Prelungim $\mathbf{f}$ la tot spaţiul V astfel încât prin definiţie să avem $\mathbf{f}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, iar dacă $\mathbf{x} = \sum\limits_{\mathbf{x}_i = \mathcal{B}_1} \lambda_i \mathbf{x}_i$ este reprezentarea unică a lui $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}_1$, punem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{x_i \in \mathcal{B}_1} \lambda_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$.

Se verifică uşor că $\mathbf{f}$ astfel definit realizează un izomorfism între V şi W.

Necesitatea. Fie spaţiile liniare V şi W algebric izomorfe prin operatorul liniar bijectiv $\mathbf{T} : V \to W$ şi $\mathcal{B}$ o bază a lui V.

Arătăm că $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ este bază în W.

Într-adevăr, să considerăm elementele distincte $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ ale lui $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ cu

$$\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{y}_n = \mathbf{0}, \tag{4.72}$$

fără ca toţi scalarii reali λ_i să fie nuli.

Deoarece $\mathbf{T}$ este izomorfism, există vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n \in V$ astfel încât

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i, \quad i \in \overline{1, n}$$

şi relaţia (4.72) se scrie în forma

$$\lambda_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + ... + \lambda_n \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}_W,$$

sau, pentru că $\mathbf{T}$ este operator liniar, în forma

$$\mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Deoarece $\mathbf{T}$ este aplicaţie bijectivă rezultă

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}_V,$$

care contrazice faptul că $\mathcal{B}$ este bază în V.

Se vede acum că orice element $\mathbf{y} \in W$ se exprimă ca o combinaţie liniară de elementele lui $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ deoarece pentru fiecare $\mathbf{y} \in W$ există un singur $\mathbf{x} \in V$ cu $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ care se scrie unic în forma

$$\mathbf{x} = \sum_{x_i \in \mathcal{B}} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

de unde

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \sum_{\mathbf{y}_i \in \mathbf{T}(\mathcal{B})} \lambda_i \mathbf{y}_i$$

unde am notat $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$.

Aceste rezultate arată că $\mathcal{B}' = \mathbf{T}(\mathcal{B})$ este bază în W.

În plus, $\mathcal{B}$ şi $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ au acelaşi număr de element ceea ce arată că $\dim V = \dim W$. **q.e.d.**

Corolarul 4.8.1. *Două spaţii liniare reale de dimensiune finită n sunt izomorfe şi în particular izomorfe cu $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.8.4. *Dacă $\mathbf{T} : V \to W$ este aplicaţie liniară injectivă, atunci funcţia inversă $\mathbf{T}^{-1} : \operatorname{Im} T \to V$ este operator liniar.*

Demonstraţie. Se arată că $\mathbf{T}^{-1}$ satisface (4.67) şi (4.68). **q.e.d.**

Fie $L_a(V, W)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare definite pe spaţiul vectorial real V cu valori în spaţiul vectorial real W. Evident, $L_a(V, W) \subset \mathcal{F}(V, W)$.

Teorema 4.8.5. *Mulţimea $L_a(V, W)$ este subspaţiu liniar al spaţiului liniar $\mathcal{F}(V, W)$.*

Demonstraţie. În Exemplul 3.2.2 am demonstrat că $\mathcal{F}(A, V)$, unde A este mulţime oarecare, iar V un spaţiu vectorial, este spaţiu liniar. În particular, dacă $A = V$ şi V din $\mathcal{F}(A, V)$ trece în W rezultă că $\mathcal{F}(V, W)$ este , de asemenea, spaţiu vectorial.

Pentru a demonstra propoziţia, aplicăm Teorema 3.2.2, deci trebuie să arătăm că dacă $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in L_a(V, W)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt element arbitrare, atunci $\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \in L_a(V, W)$.

Într-adevăr, $(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = (\alpha\mathbf{T}_1)(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) + \mathbf{T}_2(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{T}_1(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) + \lambda_1\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_2) = \alpha(\lambda_1\mathbf{T}_1(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_2)) + \lambda_1\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_2)$, de unde extragem egalitatea

$$(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_2),$$

care arată că $\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \in L_a(V, W)$. **q.e.d.**

Dacă $V \equiv W$, spaţiul $L_a(V, V)$ se notează cu $L_a(V)$.

4.9 Aplicaţii liniare şi continue între spaţii normate

În acest paragraf considerăm că spaţiile vectoriale reale din paragraful precedentă sunt, în plus, normate, norma din fiecare spaţiu fiind notată cu acelaşi simbol $\|\cdot\|$.

În acest caz, pentru o aplicaţie $\mathbf{T} \in L_a\Big((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\Big)$ se poate introduce noţiunea de *mărginire*.

Definiţia 4.9.1. *Aplicaţia $\mathbf{T} \in L_a\Big((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\Big)$ se numeşte* **mărginită** *dacă există $M > 0$ astfel încât*

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \le M\|\mathbf{x}\|, \quad \forall\, \mathbf{x} \in V. \tag{4.73}$$

În legătură cu aplicaţiile liniare definite pe un spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$ cu valori într-un alt spaţiu normat $(W, \|\cdot\|)$ avem următorul rezultat fundamental.

Teorema 4.9.1. *Fie* $\mathbf{T}: V \to W$ *o aplicaţie liniară arbitrară definită pe spaţiul normat* $(V, \|\cdot\|)$ *cu valori în spaţiul normat* $(W, \|\cdot\|)$. *Atunci, afirmaţiile:*

(i) $\mathbf{T}$ *este continuă pe* V;

(ii) $\mathbf{T}$ *este continuă în* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_V$;

(iii) $\mathbf{T}$ *este aplicaţie mărginită,*

sunt echivalente.

Demonstraţie. Afirmaţia (i)→(ii) este evidentă.

Să arătăm că (ii)→(iii). Din continuitatea lui $\mathbf{T}$ în $\mathbf{0}_V$, conform Teoremei 4.4.3, punctul (β), rezultă că pentru $\varepsilon = 1$ există $\delta > 0$ astfel încât $\forall\, \mathbf{x}' \in V$ cu $\|\mathbf{x}' - \mathbf{0}_V\| = \|\mathbf{x}'\| < \delta$ implică

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x}') - \mathbf{T}(\mathbf{0}_V)\| = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}')\| < 1. \tag{4.74}$$

Considerăm că $M = 1/\delta'$, unde $0 < \delta' < \delta$; $\mathbf{x} \in V$, arbitrar, cu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$; $\mathbf{x}' \in V$, legat de $\mathbf{x}$ prin

$$\mathbf{x}' = \frac{\delta'}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}. \tag{4.75}$$

Din (4.75) deducem imediat

$$\|\mathbf{x}'\| = \frac{\delta'}{\|\mathbf{x}\|}\|\mathbf{x}\| = \delta' < \delta. \tag{4.76}$$

Întrucât $\mathbf{x}' \in V$ definit de (4.75) satisface (4.76), rezultă că are loc (4.74).

Având în vedere (4.74) şi (4.75), deducem că pentru orice $\forall\, \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ are loc (4.73) cu $M = \dfrac{1}{\delta'}$, unde $0 < \delta' < \delta$. Pentru $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$ inegalitatea (4.73) este verificată ca egalitate şi cu aceasta implicaţia (ii)→(iii) este demonstrată.

Să arătăm că (iii)→(i). Fie $\mathbf{x} \in V$, arbitrar dar fixat şi $(\mathbf{x}_n)$ un şir de vectori din $(V, \|\cdot\|)$ convergent la $\mathbf{x} \in V$. Atunci, în baza lui (4.71), avem

$$0 \leq \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{T}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|. \tag{4.77}$$

Trecând la limită în (4.77) pentru $n \to \infty$, deducem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

care arată că $\mathbf{T}$ este continuă pe V. **q.e.d.**

Corolarul 4.9.1. *Aplicaţia* $\mathbf{T} \in L_a\Big((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\Big)$ *este un homeomorfism dacă şi numai dacă* $\mathbf{T}$ *este aplicaţie surjectivă şi există numerele pozitive* m *şi* M *astfel încât*

$$m\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \forall\, \mathbf{x} \in V. \tag{4.78}$$

Demonstraţie. Să presupunem mai întâi că $\mathbf{T} \in L_a\Big((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\Big)$ este un homeomorfism. Atunci, din Definiţia 4.6.1 şi Teorema 4.8.4, rezultă că $\mathbf{T}$ şi $\mathbf{T}^{-1}$ sunt aplicaţii liniare şi continue, iar din Teorema 4.9.1 avem că $\mathbf{T}$ şi $\mathbf{T}^{-1}$ sunt aplicaţii liniare mărginite, prin urmare, după Definiţia 4.9.1, $\exists\, m > 0$, $\exists\, M > 0$ astfel încât să aibă loc (4.73) şi

$$\|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})\| \leq \frac{1}{m}\|\mathbf{y}\|, \ \forall\, \mathbf{y} \in \operatorname{Im}\mathbf{T} = \mathbf{T}(V) = W. \tag{4.79}$$

Dacă $\forall \mathbf{x} \in V$ punem $\mathbf{y} \in \mathbf{T}(\mathbf{x})$, din (4.73) şi (4.79) obţinem (4.78).

Reciproc, dacă are loc dubla inegalitate (4.78), în baza Definiţiei 4.9.1 şi Teoremei 4.9.1, rezultă că $\mathbf{T}$ este aplicaţie continuă. Din prima inegalitate (4.78) rezultă că $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$ implică $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$ şi, deci, cum $\mathbf{T}(V) = W$, căci aplicaţia $\mathbf{T}$ este surjectivă, din Teorema 4.8.2 deducem că $\mathbf{T}$ este bijecţie.

Mai avem de demonstrat că $\mathbf{T}^{-1}$ este aplicaţie continuă. Fie în acest sens $\mathbf{y} \in W$ şi $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}) \in V$. Folosind aceşti vectori în prima din inegalităţile (4.78) găsim

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}) \leq \frac{1}{m}\|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{y} \in W. \tag{4.80}$$

Aplicând iarăşi Teorema 4.9.1, din (4.80) deducem că $\mathbf{T}^{-1}$ este aplicaţie continuă pe W şi afirmaţiile corolarului sunt complet demonstrate. **q.e.d.**

Propoziţia 4.9.1. *Mulţimea $L(V,W)$ a tuturor operatorilor liniari mărginiţi, definiţi pe spaţiul normat $(V, \|\cdot\|)$ şi cu valori în spaţiul normat $(W, \|\cdot\|)$, este subspaţiu liniar al spaţiului liniar $L_a\Big((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\Big)$.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ operatori liniar mărginiţi definiţi pe $(V, \|\cdot\|)$ cu valori în $(W, \|\cdot\|)$. După Definiţia 4.9.1 avem că $\exists\, M_1 > 0,\ M_2 > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{T}_1(\mathbf{x})\| \leq M_1\|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{T}_2(\mathbf{x})\| \leq M_2\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \tag{4.81}$$

Atunci, $\alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2$ este mai întâi operator liniar, în baza Teoremei 4.8.5, şi apoi aplicaţie mărginită, deoarece, din (4.81), deducem imediat

$$\|(\alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2)(\mathbf{x})\| \leq (|\alpha_1|M_1 + |\alpha_2|M_2)\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

care arată că operatorul liniar $\alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2$ este, într-adevăr, mărginit.

În baza Teoremei 3.2.2, rezultă că $L_a\Big((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\Big)$. **q.e.d.**

Propoziţia 4.9.2. *$L(V,W)$ este spaţiu normat.*

Demonstraţie. În adevăr, se dovedeşte uşor că aplicaţia $\|\cdot\| : L(V,W) \to I\!R_+$ definită prin

$$\|\mathbf{T}\| = \inf\{M : \|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V\} \tag{4.82}$$

este o normă pe $L(V,W)$ întrucât satisface axiomele (N_1)-(N_3) din Definiţia 3.4.1. **q.e.d.**

Să remarcăm că numărul nenegativ $\|\mathbf{T}\|$ definit de (4.82) are proprietatea

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{T}\| \cdot \|\mathbf{x}\|, \ \forall \mathbf{x} \in V. \tag{4.83}$$

De asemenea, să observăm că dacă V este spaţiu vectorial nenul, egalitatea (4.82) este echivalentă cu

$$\|\mathbf{T}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V} \frac{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{4.84}$$

Mai mult, au loc egalităţile

$$\|\mathbf{T}\| = \sup\{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{x}\| = 1, \quad \mathbf{x} \in V\} \tag{4.85}$$

$$\|\mathbf{T}\| = \sup\{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}. \tag{4.86}$$

În paragraful care urmează focalizăm pe aplicaţiile liniare definite pe spaţii normate, finit dimensionale, cu valori în spaţii normate.

În acest scop, considerăm spaţiile vectoriale V şi W finit dimensionale cu $\dim V = n,\ \dim W = m$ unde $n, m \in I\!N^*$.

Din 4.8.1 rezultă că V este izomorf cu $I\!R^n$, iar W este izomorf cu $I\!R^m$.

Normele pe spaţiile liniare $I\!R^n$ şi $I\!R^m$ se notează cu acelaşi simbol $\|\cdot\|$, cu precizarea că atunci când una din aceste norme este oricare din cele definite anterior, se menţionează în mod expres.

4.10 Aplicaţii liniare şi continue între spaţii normate finit dimensionale

În primul rând avem $L_a(I\!R^n, I\!R^m) = \underbrace{L_a(I\!R^n, I\!R) \times L_a(I\!R^n, I\!R) \times ... \times L_a(I\!R^n, I\!R)}_{m \text{ ori}}$ deoarece $\forall \mathbf{T} \in L_a(I\!R^n, I\!R^m)$ se scrie în forma $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_m)$, unde, evident, $T_i \in L_a(I\!R^n, I\!R),\ i \in \overline{1, m}$. Aplicaţiile T_i se numesc *forme liniare*.

Teorema 4.10.1. *Aplicaţia $\mathbf{T} : I\!R^n \to I\!R^m$ este operator liniar de la $I\!R^n$ în $I\!R^m$ dacă şi numai dacă într-o pereche de baze $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$ există o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ astfel încât*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'(AX), \tag{4.87}$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in I\!R^n$ cu

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}X, \tag{4.88}$$

unde

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!R^n, \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\}$$
$$subset I\!R^m,$$

sunt baze în respectiv spaţiile liniare $I\!R^n$ şi $I\!R^m$,

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in (I\!R^n)^n, \quad \mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m) \in (I\!R^m)^m, \tag{4.89}$$

iar X este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_m)$ este un operator liniar de la $I\!R^n$ în $I\!R^m$, atunci $\mathbf{T}$ este cunoscut dacă şi numai dacă se cunoaşte imaginea prin $\mathbf{T}$ a oricărui vector $\mathbf{x} \in I\!R^n$. Din Propoziţia 4.8.2 şi (4.88), obţinem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{T}(\mathbf{e}_j), \tag{4.90}$$

din care vedem că vectorul $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ este cunoscut dacă şi numai dacă se cunosc vectorii $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) \in I\!R^m,\ j \in \overline{1, n}$. Aceşti vectori din $I\!R^m$ sunt cunoscuţi dacă şi numai dacă se cunosc coordonatele lor în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\}$ din $I\!R^m$. Dacă notăm cu $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ coordonatele vectorului $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ în baza $\mathcal{B}'$, atunci

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{e}_{\ i},\ j \in \overline{1, n}. \tag{4.91}$$

Introducerea lui (4.91) în (4.90) conduce la

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\mathbf{e}'_i\Big)x_j=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)\mathbf{e}'_i. \tag{4.92}$$

În felul acesta ajungem la expresia finală pentru $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ şi anume

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})=\mathbf{e}'(AX), \tag{4.93}$$

unde $\mathbf{e}'$ este un vector din $(I\!R^m)^m=\underbrace{I\!R^m\times I\!R^m\times\ldots\times I\!R^m}_{m \text{ ori}}$ a cărui expresie este dată în (4.89), iar $A=\|a_{ij}\|\in\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$.

Dacă coordonatele vectorului $\mathbf{y}=\mathbf{T}(\mathbf{x})$ în baza $\mathcal{B}'$ sunt $y_1,y_2,...,y_m$, atunci

$$\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{m}y_i\mathbf{e}'_i=\mathbf{e}'Y, \tag{4.94}$$

unde Y este matricea unicolonară cu m linii ce are ca elemente coordonatele lui $\mathbf{y}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Din unicitatea scrierii unui vector într-o bază şi (4.92), (4.94), deducem

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\;\; i\in\overline{1,m}, \tag{4.95}$$

care reprezintă *ecuaţiile analitice* ale operatorului liniar $\mathbf{T}$ în perechea de baze $\mathcal{B}\subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}'\subset I\!R^m$. Aceste ecuaţii dau coordonatele vectorului $\mathbf{y}=\mathbf{T}(\mathbf{x})$ în baza $\mathcal{B}'$ ca expresii liniare şi omogene de coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}$, coeficienţii expresiilor din membrul drept ale lui (4.95) fiind elementele matrice A.

Tot din (4.94) şi (4.93), sau direct din (4.95), vedem că

$$Y=AX, \tag{4.96}$$

pe care o vom numi *ecuaţia matriceală* a operatorului liniar $\mathbf{T}:I\!R^n\to I\!R^m$ în perechea de baze $\mathcal{B}\subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}'\subset I\!R^m$.

Să presupunem că în locul lui $\mathbf{x}$ în (4.92) luăm unul din vectorii bazei $\mathcal{B}$. Atunci, obţinem corespunzător

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\mathbf{e}'_i=\mathbf{e}'A_j,\quad 1\le j\le n, \tag{4.97}$$

ocazie cu care constatăm că elementele coloanei j a matricei A reprezintă coordonatele vectorului $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ în baza $\mathcal{B}'$.

Pe de altă parte, avem

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)=\Big(T_1(\mathbf{e}_j),\,T_2(\mathbf{e}_j),\,\ldots,T_m(\mathbf{e}_j)\Big), \tag{4.98}$$

unde $T_1,T_2,...,T_m$ sunt coordonatele lui $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ în baza $\mathcal{B}'$. Atunci, din (4.97), (4.98) şi (4.88), deducem

$$T_i(\mathbf{e}_j)\;=\;a_{ij},\quad 1\le i\le m,\quad 1\le j\le n; \tag{4.99}$$

$$T_i(\mathbf{x})\;=\;\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\quad 1\le i\le m, \tag{4.100}$$

ceea ce arată că elementul de pe linia i şi coloana j al matricei A este valoarea formei liniare T_i în vectorul $\mathbf{e}_j$ al bazei $\mathcal{B}$.

Reciproc, să arătăm că orice aplicaţie $\mathbf{T}:I\!R^n\to I\!R^m$ care în perechea de baze $\mathcal{B}\subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}'\subset I\!R^m$ se scrie în forma (4.93), este liniară.

Într-adevăr, se arată cu uşurinţă că o astfel de aplicaţie satisface (4.67) şi (4.68), prin urmare, $\mathbf{T}$ este aplicaţie liniară de la $I\!R^n$ în $I\!R^m$. **q.e.d.**

Propoziţia 4.10.1. *Subspaţiul liniar $L(I\!R^n, I\!R^m)$ coincide cu $L_a(I\!R^n, I\!R^m)$.*

Demonstraţie. Afirmaţia de mai sus este echivalentă cu afirmaţia următoare. *Orice aplicaţie liniară* $\mathbf{T}$ *de la* $I\!R^n$ *în* $I\!R^m$ *este mărginită.*

Să arătăm afirmaţia este adevărată.

Dacă $\mathbf{T} \in L_a(I\!R^n, I\!R^m)$, atunci într-o pereche de baze $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$ aplicaţia $\mathbf{T}$ are expresia (4.93) sau, echivalent, (4.96). Dacă norma $\|\cdot\|$ pe $I\!R^m$ este indusă de produsul scalar $g : I\!R^m \times I\!R^m \to I\!R$, atunci

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} = \sqrt{Y^\top G Y}, \quad \forall\, \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i\, \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' Y, \tag{4.101}$$

unde $G = \|g_{ij}\|_{m\times m}$ este tensorul metric şi are elementele date de

$$g_{ij} \;=\; g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j). \tag{4.102}$$

Pentru simplificarea calculelor să presupunem că produsele scalare din $I\!R^n$ şi $I\!R^m$ sunt cele standard, adică bazele $\mathcal{B}$ din $I\!R^n$ şi $\mathcal{B}'$ din $I\!R^m$ sunt bazele canonice. Atunci, g_{ij} din (4.102) este δ_{ij}, deci $G = I_m$ şi pentru $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'\,(A\,X)$, (4.101) devine

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| = \sqrt{X^\top (A^\top A) X}, \tag{4.103}$$

ceea ce este identic cu

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (T_i(\mathbf{x}))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^2}. \tag{4.104}$$

Însă, din inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz, avem

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} {a_{ij}}^2\right) \|\mathbf{x}\|^2. \tag{4.105}$$

Folosind (4.105) în (4.104), obţinem

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2}\; \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)}\; \|\mathbf{x}\|$$

de unde, ţinând cont de Exemplul 3.5.4, deducem

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \le \|A\|\, \|\mathbf{x}\| \tag{4.106}$$

care, în baza Definiţiei 4.9.1, arată că $\mathbf{T}$ este aplicaţie mărginită. Mai mult, din (4.106) şi expresia (4.106)(9.12) pentru $\|\mathbf{T}\|$, deducem

$$\|\mathbf{T}\| = \|A\|. \tag{4.107}$$

q.e.d.

Corolarul 4.10.1. *Orice aplicaţie liniară* $\mathbf{T} : I\!R^n \to I\!R^m$ *este continuă.*

Demonstraţie. Într-adevăr, aceasta rezultă din Propoziţia 4.10.1 şi Teorema 4.9.1. **q.e.d.**

Teorema 4.10.2. *Spaţiile liniare* $L(I\!R^n, I\!R^m)$ *şi* $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ *sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Fie funcţia $\boldsymbol{\varphi} : L(I\!R^n, I\!R^m) \to \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ care asociază fiecărui operator liniar $\mathbf{T} \in L(I\!R^n, I\!R^m)$ matricea sa A_T într-o pereche de baze $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$, deci

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{T}) = A_{\mathbf{T}} \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R), \quad \forall \mathbf{T} \in L(I\!R^n, I\!R^m), \tag{4.108}$$

unde $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'(A_{\mathbf{T}}X)$, iar $\mathbf{x} = \mathbf{e}X$.

Din (4.108) deducem că oricare ar fi scalarii $\alpha_1 \in I\!R$, $\alpha_2 \in I\!R$ şi pentru orice operator liniari $\mathbf{T}_1 \in L(I\!R^n, I\!R^m)$, $\forall\, \mathbf{T}_2 \in L(I\!R^n, I\!R^m)$, are loc relaţia

$$\boldsymbol{\varphi}(\alpha_1 \mathbf{T}_1 + \alpha_2 \mathbf{T}_2) = \alpha_1 \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{T}_1) + \alpha_2 \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{T}_2),$$

din care deducem că $\boldsymbol{\varphi} \in L\Big(L(I\!R^n, I\!R^m), \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)\Big)$.

Aplicaţia $\boldsymbol{\varphi}$ este în plus bijectivă, deci $\boldsymbol{\varphi}$ este un izomorfism între spaţiile liniare $L(I\!R^n, I\!R^m)$ şi $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$. **q.e.d.**

Observaţia 4.10.1. *Orice aplicaţie* $\mathbf{T} \in L(I\!R^n, I\!R^m)$ *poate fi identificată cu matricea sa* $A_{\mathbf{T}}$ *într-o pereche de baze* $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ *şi* $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$*.*

Într-adevăr, aceasta rezultă din Teorema 4.10.2. ■

Observaţia 4.10.2. *Spaţiul liniar* $L(I\!R^n, I\!R^m)$ *este finit dimensional şi dimensiunea sa este:* $\dim L(I\!R^n, I\!R^m) = m \cdot n$*.*

Într-adevăr, afirmaţia este adevărată în baza Teoremei 4.10.2, a Corolarului 4.10.1 şi a Exerciţiului 3.2.2. În particular, $\dim L(I\!R^n) = n^2$, iar $\dim(I\!R^n)^* = n$, unde $(I\!R^n)^* = L(I\!R^n, I\!R)$ este spaţiul liniar al formelor liniare pe $I\!R^n$, sau *spaţiul dual* al spaţiului liniar real n-dimensional $I\!R^n$. ■

Teorema 4.10.3. *Dacă* $\mathbf{T} \in L(I\!R^n, I\!R^m)$ *şi* $\mathbf{S} \in L(I\!R^m, I\!R^p)$*, atunci aplicaţia produs* $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \in L(I\!R^n, I\!R^p)$ *şi matricea sa* $A_{\mathbf{S}\circ\mathbf{T}}$ *în perechea de baze* $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ *şi* $\mathcal{B}'' \subset I\!R^p$ *este*

$$A_{\mathbf{S}\circ\mathbf{T}} = A_{\mathbf{S}} \cdot A_{\mathbf{T}}, \tag{4.109}$$

unde $A_{\mathbf{S}}$ *este matricea lui* $\mathbf{S}$ *în perechea de baze* $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$ *şi* $\mathcal{B}'' \subset I\!R^p$*, iar* $A_{\mathbf{T}}$ *este matricea lui* $\mathbf{T}$ *în bazele* $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ *şi* $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$*.*

Demonstraţie. În primul rând aplicaţia compusă

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{T} : I\!R^n \to I\!R^p, \quad (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{T}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in I\!R^n, \tag{4.110}$$

este liniară, deoarece

$$(\mathbf{S}\circ\mathbf{T})(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1(\mathbf{S}\circ\mathbf{T})(\mathbf{x}_1)+\alpha_2(\mathbf{S}\circ\mathbf{T})(\mathbf{x}_2),$$

oricare ar fi scalarii α_1, α_2 din $I\!R$ şi oricare ar fi vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ din $I\!R^n$.

Dacă $A_{\mathbf{S}} = \|b_{jk}\|_{p\times m}$ este matricea lui $\mathbf{S}$ în perechea de baze $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$ şi $\mathcal{B}'' \subset I\!R^p$ atunci, în baza lui (4.99), avem

$$b_{ij} = S_i(\mathbf{e}'_j), \quad 1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le m, \tag{4.111}$$

unde $\mathbf{S} = (S_1, S_2, ..., S_p)_{\mathcal{B}''}$.

Elementele a_{jk} ale matricei $A_{\mathbf{T}}$ sunt date evident de

$$a_{jk} = T_j(\mathbf{e}_k), \quad 1 \le j \le m, \quad 1 \le k \le n, \tag{4.112}$$

unde $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_m)_{\mathcal{B}'} \in L(I\!R^n, I\!R^m)$.

Fie c_{ik} elementul de pe linia i şi coloana k al matricei operatorului liniar $\mathbf{S}\circ\mathbf{T}$ în perechea de baze $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}'' \subset I\!R^p$. Atunci, din (4.99), avem

$$c_{ik} = (\mathbf{S}\circ\mathbf{T})_i(\mathbf{e}_k). \tag{4.113}$$

Folosind acum (4.110) – (4.113) şi (4.91), găsim

$$c_{ik} = S_i(\mathbf{T}(\mathbf{e}_k)) = S_i\left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\mathbf{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^m a_{jk}S_i(\mathbf{e}'_j) = \sum_{j=1}^m a_{jk}b_{ij} = \sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk},$$

de unde rezultă (4.109). **q.e.d.**

Observaţia 4.10.3. *În baza izomorfismului spaţiilor liniare $L(I\!R^n, I\!R^m)$ şi $\mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$ şi a Teoremei 4.10.3, tragem concluzia că proprietăţile produsului între matrice se transmit întocmai şi aplicaţiilor liniare de la $I\!R^n$ în $I\!R^m$.*

De exemplu, în cazul $m = n$, operatorii $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in L(I\!R^n)$ se pot compune, iar operatorul rezultat $\mathbf{T}_1\circ\mathbf{T}_2$ putem spune că este *produsul* operatorilor liniari $\mathbf{T}_1$ şi $\mathbf{T}_2$ care este, de asemenea, element al lui $L(I\!R^n)$. Se verifică uşor că au loc proprietăţile:

$$(\mathbf{T}_1\circ\mathbf{T}_2)\circ\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1\circ(\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_3); \qquad \mathbf{T}_1\circ(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3) = \mathbf{T}_1\circ\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_1\circ\mathbf{T}_3;$$

$$(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2)\circ\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1\circ\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_3; \quad (\alpha_1\mathbf{T}_1)\circ(\alpha_2\mathbf{T}_2) = (\alpha_1\cdot\alpha_2)(\mathbf{T}_1\circ\mathbf{T}_2),$$

oricare ar fi $\mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_2,\ \mathbf{T}_3 \in L(I\!R^n)$ şi oricare ar fi scalarii α_1, α_2 din $I\!R$.

În acest fel, spaţiul liniar $L(I\!R^n)$ devine o *algebră* pe care o vom numi *algebra operatorilor liniari* definiţi pe $I\!R^n$. Această algebră are element unitate, acesta fiind operatorul identic

$$\mathbf{I} : I\!R^n \to I\!R^n, \quad I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \ \forall \mathbf{x} \in I\!R^n$$

care, evident, are proprietatea $\mathbf{I}\circ\mathbf{T} = \mathbf{T}\circ\mathbf{I} = \mathbf{T},\ \forall\mathbf{T} \in L(I\!R^n)$. Algebra $L(I\!R^n)$ este necomutativă deoarece produsul a două matrice nu este comutativ. Dacă însă $n = 1$, algebra corespunzătoare este comutativă.

Teorema 4.10.4. *Aplicaţia $\mathbf{T} \in L(I\!R^n)$ este izomorfism liniar dacă şi numai dacă matricea sa $A_{\mathbf{T}}$ într-o bază $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ este nesingulară* $(\det A_{\mathbf{T}} \ne 0)$.

Demonstraţie. Aplicaţia $\mathbf{T} \in L(I\!R^n)$ este o bijecţie pe $I\!R^n$ dacă şi numai dacă ecuaţia $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, unde $\mathbf{y} \in I\!R^n$ este arbitrar, dar fixat, are soluţie unică. Această ecuaţie conduce la sistemul liniar de n ecuaţii cu n necunoscute

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{4.114}$$

sau matriceal

$$A_{\mathbf{T}}X = Y. \tag{4.115}$$

Sistemul (4.114), sau ecuaţia matriceală (4.115) are soluţie unică dacă şi numai dacă $A_{\mathbf{T}}$ este nesingulară.**q.e.d.**

4.11 Forme multiliniare şi de gradul m pe $I\!R^n$

Definiţia 4.11.1. *Funcţia reală $F \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ se numeşte* **omogenă de grad** m *dacă*

$$F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^m F(\mathbf{x}), \quad \forall\mathbf{x} \in I\!R^n, \quad \forall\lambda \in I\!R. \tag{4.116}$$

Definiţia 4.11.2. *Funcţia reală $F \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ se numeşte* **aditivă** *dacă*

$$F(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = F(\mathbf{x}_1) + F(\mathbf{x}_2), \quad \forall\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in I\!R^n. \tag{4.117}$$

Definiţia 4.11.3. *Funcţia $F \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ se numeşte* **omogenă** *dacă este omogenă de grad* 1.

Observaţia 4.11.1. *Aplicaţia $F \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ este formă liniară pe $I\!R^n$, adică $F \in L_a(I\!R^n, I\!R)$, dacă F este aditivă şi omogenă.*

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiţia 4.11.4, Definiţia 4.11.5 şi Definiţia 4.8.1. ■

Observaţia 4.11.2. *Dacă $F \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ este formă liniară pe $I\!R^n$, atunci au loc următoarele identităţi:*

$$F(-\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x}), \quad \forall\mathbf{x}\in I\!R^n; \tag{4.118}$$

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}), \quad \forall\mathbf{x}, \mathbf{y}\in I\!R^n; \tag{4.119}$$

$$F(\mathbf{0}) = 0; \tag{4.120}$$

$$F\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i F(\mathbf{x}_i), \quad \forall p\in I\!N, \forall\lambda_i\in I\!R \text{ şi } \forall\,\mathbf{x}_i\in I\!R^n. \tag{4.121}$$

Într-adevăr, identităţile (4.118)−(4.121) rezultă din Teorema 4.8.1 şi Propoziţia 4.8.2 pentru cazul particular $m = 1$. ■

Observaţia 4.11.3. *Funcţia reală $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este formă liniară pe $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă într-o bază $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ există $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$F(\mathbf{x}) = AX, \quad \forall\, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}\, X \in \mathbb{R}^n, \tag{4.122}$$

unde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ sunt vectorii bazei $\mathcal{B}$, iar X este matricea unicolonară cu n linii a coordonatelor vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}$.

Aceste afirmaţii rezultă din Teorema 4.10.1, în cazul particular $m = 1$, şi $\mathcal{B}' = \{1\}$. Evident, elementele matricei A sunt $a_i = F(\mathbf{e}_i),\ i \in \overline{1,n}$. ■

Observaţia 4.11.4. *Dacă $F \in L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, atunci $F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$, deci F este continuă pe $\mathbb{R}^n$.*

Într-adevăr, dacă presupunem că $\mathcal{B}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^n$, atunci norma vectorului $\mathbf{x}$ este $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{X^t X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ şi din (4.122) şi inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz, avem

$$|F(\mathbf{x})| \le \sqrt{\sum a_i^2}\ \sqrt{\sum x_i^2} = \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

unde $\|A\| = \sqrt{A^t A} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, deci F este aplicaţie mărginită, adică $F \in (\mathbb{R}^n)^*$ ceea ce atrage că F este continuă. În plus, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ este spaţiu normat şi $\|F\| = \|A\| = \sqrt{A^\top A}$. ■

În Definiţia 3.7.4 am introdus noţiunea de formă biliniară pe spaţiul vectorial $H^2 = H \times H$. În cazul $H = \mathbb{R}^n$, folosind $(3.116) - (3.118)$, deducem că $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este formă biliniară pe $(\mathbb{R}^n)^2$ dacă şi numai dacă într-o bază

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

există o matrice $G \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = X^\top G Y, \tag{4.123}$$

unde

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}\,Y, \quad G = \|g_{ij}\,|_{n\times n},$$

iar

$$g_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j \in \overline{1,n}. \tag{4.124}$$

Matricea $G \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, ale cărei elemente sunt date de (4.124), se numeşte *matricea aplicaţiei* (*formei*) *biliniare* F în baza $\mathcal{B}$.

Observaţia 4.11.5. *$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este formă biliniară pe $(\mathbb{R}^n)^2$ dacă aplicaţiile $F(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $F(\mathbf{x}, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ arbitrari dar fixaţi, sunt forme liniare pe $\mathbb{R}^n$.*

Această observaţie permite generalizarea noţiunilor de formă liniară şi formă biliniară.

Definiţia 4.11.4. *Funcţia reală* $F : \underbrace{I\!\!R^n \times I\!\!R^n \times ... \times I\!\!R^n}_{m \text{ ori}} \to I\!\!R$ *se numeşte* ***formă*** m***-liniară*** *pe* $(I\!\!R^n)^m$*, sau* ***formă multiliniară*** *pe* $(I\!\!R^n)^m$*, dacă pentru orice vectori fixaţi* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m$*, aplicaţia*

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \,\cdot\,, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m) : I\!\!R^n \to I\!\!R,$$

este formă liniară pe $I\!\!R^n$.

Teorema 4.11.1. *Aplicaţia* $F : (I\!\!R^n)^m \to I\!\!R$ *este formă* m*-liniară pe* $(I\!\!R^n)^m$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi scalarii* $\alpha_{i1} \in I\!\!R$*,* $\alpha_{i2} \in I\!\!R$ *şi pentru orice vectori* $\mathbf{x}_{i1} \in I\!\!R^n$*,* $\mathbf{x}_{i2} \in I\!\!R^n$*,* $i \in \overline{1,m}$ *este satisfăcută egalitatea*

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \alpha_{i1}\mathbf{x}_{i1} + \alpha_{i2}\mathbf{x}_{i2}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m) = \\ &= \alpha_{i1} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m) + \\ &+ \alpha_{i2} F(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i2}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m), \end{aligned} \tag{4.125}$$

unde vectorii $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m$ *sunt consideraţi fixaţi, însă arbitrari din* $I\!\!R^n$.

Demonstraţie. Identitatea (4.125) rezultă din Definiţia 4.11.4 şi Propoziţia 4.8.1. **q.e.d.**

Corolarul 4.11.1. *Dacă* $F : (I\!\!R^n)^m \to I\!\!R$ *este formă* m*-liniară pe* $(I\!\!R^n)^m$*, atunci:*

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, -\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m) = \\ &= -F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m); \end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i, ..., \mathbf{x}_m) = \\ &= F(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m) - F(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m); \end{aligned} \tag{4.127}$$

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_m) = 0 \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned} &F\left(\sum_{i_1=1}^{\ell_1} \alpha_{1i_1}\mathbf{x}_{1i_1}, \sum_{i_2=1}^{\ell_2} \alpha_{2i_2}\mathbf{x}_{2i_2}, ..., \sum_{i_m=1}^{\ell_m} \alpha_{mi_m}\mathbf{x}_{mi_m}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{\ell_1}\sum_{i_2=1}^{\ell_2} ... \sum_{i_m=1}^{\ell_m} F(\mathbf{x}_{1i_1}, \mathbf{x}_{2i_2}, ..., \mathbf{x}_{mi_m})\alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}...\alpha_{mi_m}. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Demonstraţie. Toate aceste egalităţi sunt consecinţe imediate ale relaţiei (4.125). **q.e.d.**

Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!\!R^n$ o bază în $I\!\!R^n$.

Dacă F este o formă m-liniară pe $(I\!\!R^n)^m$, atunci pentru orice vectori $\mathbf{x}_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} x_{ji_j}\mathbf{e}_{i_j} \in I\!\!R^n$, $1 \leq j \leq m$, avem

$$F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_m)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_m=1}^{n}F(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},...,\mathbf{e}_{i_m})x_{1i_1}x_{2i_2}...x_{mi_m}. \tag{4.130}$$

Reciproc, date numerele reale $F_{i_1i_2...i_m}$, unde $1\le i_k\le n,\ k\in\overline{1,m},$ funcţia

$$F:(I\!R^n)^m\to I\!R$$

definită prin

$$F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_m)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_m=1}^{n}F_{i_1i_2...i_m}x_{1i_1}x_{2i_2}...x_{mi_m}, \tag{4.131}$$

unde $x_{ji_j},\ 1\le i_j\le n,$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}_j$ într-o bază $\mathcal{B}$, reprezintă o formă $m-$liniară pe $(I\!R^n)^m$ deoarece, după cum se constată simplu, F din (4.131) satisface (4.125).

În consecinţă, putem enunţa

Teorema 4.11.2. *Funcţia $F:(I\!R^n)^m\to I\!R$ este formă m-liniară pe $(I\!R^n)^m$ dacă şi numai dacă într–o bază $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ ...,\ \mathbf{e}_n\}\subset I\!R^n$ F are expresia (4.131) unde*

$$F_{i_1i_2...i_m}=F(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},...,\mathbf{e}_{i_m}), \tag{4.132}$$

iar x_{ji_j} cu $1\le i_j\le n,$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}_j$ în baza $\mathcal{B}$ şi $1\le j\le m.$

Definiţia 4.11.5. *Fie numerele naturale $k_1,k_2,...,k_m$. Fiecărei m-uple de numere naturale $i_1,i_2,...,i_m$ astfel încât*

$$1\le i_1\le k_1,1\le i_2\le k_2,...,1\le i_m\le k_m,$$

îi asociem numărul real $F_{i_1i_2...i_m}$.

În această situaţie, spunem că am definit o **matrice m-indexată***, sau o* **matrice de tipul** $k_1,k_2,...,k_m$*, şi convenim să scriem această matrice în forma*

$$\|F_{i_1i_2...i_m}\|_{1\le i_1\le k_1,1\le i_2\le k_2,...,1\le i_m\le k_m} \tag{4.133}$$

Numerele $F_{i_1i_2...i_m}$ se numesc **elementele (coordonatele)** *matricei m-indexate. În cazul în care $k_1=k_2=...=k_m=n$ vom spune că matricea m-indexată este* **n-dimensională**.

Numărul natural m este numărul indicilor matricei (4.133).

Produsul $k_1\cdot k_2...k_m$ reprezintă numărul elementelor matricei (4.133).

Din Teorema 4.11.2 rezultă că există o corespondenţă biunivocă între formele m-liniare pe $(I\!R^n)^m$ şi matricele m-indexate n-dimensionale. În general vorbind, ambele noţiuni exprimă acelaşi conţinut matematic. Elementele matricei din (4.133) sunt unic determinate de forma m-liniară F prin (4.132) şi de aceea ele pot fi numite *coordonatele* lui F. Matricea (4.133) se numeşte *matricea coordonatelor* formei multiliniare F, sau simplu, *matricea* lui F.

Definiţia 4.11.6. *O formă m-liniară F pe $(I\!R^n)^m$ se numeşte* **simetrică** *dacă*

$$F(\mathbf{x}_{i_1},\mathbf{x}_{i_2},...,\mathbf{x}_{i_m})=F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_m) \tag{4.134}$$

pentru orice permutare $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&...&m\\ i_1&i_2&...&i_m\end{pmatrix}$ şi pentru orice vectori

$$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_m$$

din spaţiul vectorial $I\!R^n$.

Se verifică uşor că o formă m-liniară pe $(I\!R^n)^m$ este simetrică dacă şi numai dacă matricea (11.18) este *simetrică* adică este o matrice m-indexată n-dimensională care satisface condiţia

$$F_{i_1 i_2 \dots i_m} = F_{12\dots m}, \tag{4.135}$$

oricare ar fi permutarea σ din Definiţia 4.11.6.

Definiţia 4.11.7. *O funcţie $h : I\!R^n \to I\!R$ se numeşte* **formă de gradul** m *pe spaţiul liniar $I\!R^n$ dacă există o formă m-liniară simetrică pe $(I\!R^n)^m$ astfel încât*

$$h(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in I\!R^n. \tag{4.136}$$

Cu alte cuvinte, h este o formă de gradul m pe $I\!R^n$ dacă şi numai dacă într-o bază $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ există o matrice simetrică m-indexată şi n-dimensională de forma (4.133) în care $k_1 = k_2 = \dots = k_m = n$ astfel încât să avem

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} F_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \tag{4.137}$$

oricare ar fi $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \in I\!R^n$.

Observaţia 4.11.6. *O formă de gradul m pe $I\!R^n$ este funcţie omogenă de grad m deoarece din (11.22) deducem*

$$h(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^m h(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in I\!R^n, \quad \forall \lambda \in I\!R. \tag{4.138}$$

De asemenea, $h(\mathbf{0}) = 0$.

Formele de gradul 1 coincid cu formele liniare, iar formele de gradul 2 sunt formele pătratice introduse în Definiţia 3.7.5. O formă de grad m pe $I\!R$ este $h(\mathbf{x}) = ax^m$, $\forall\, x \in I\!R$.

Se poate demonstra uşor următorul rezultat.

Teorema 4.11.3. *Forma de gradul m pe $I\!R^n$ este identic nulă dacă şi numai dacă matricea sa simetrică m-indexată n-dimensională într-o bază oarecare este identic nulă.*

Din această teoremă rezultă că pentru o formă h de gradul m, într–o bază dată $\mathcal{B}$, există o singură matrice $\|F_{i_1 i_2 \dots i_m}\|$ simetrică astfel încât (4.137) să aibă loc, căci dacă ar mai exista o altă matrice $\|F'_{i_1 i_2 \dots i_m}\|$ încât să avem

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} F'_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots i_{i_m},\ \forall \mathbf{x} \in I\!R^n, \tag{4.139}$$

atunci din (4.137) şi (4.139), obţinem

$$0 = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} (F_{i_1 i_2 \dots i_m} - F'_{i_1 i_2 \dots i_m}) x_{i_1} x_{i_2} \dots i_{i_m},$$

şi din Teorema 4.11.3 găsim că $F_{i_1 i_2 \dots i_m} = F'_{i_1 i_2 \dots i_m}$, deci matricea formei h de grad m într-o bază dată este unică.

Definiţia 4.11.8. *Fie $h : I\!R^n \to I\!R$ o formă de grad m pe $I\!R^n$. Se spune că forma h este:*

(i) **pozitiv definită** *dacă* $h(\mathbf{x}) > 0, \ \forall \mathbf{x} \in I\!\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$;

(ii) **negativ definită** *dacă* $h(\mathbf{x}) < 0, \ \forall \mathbf{x} \in I\!\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$;

(iii) **ne–negativă**, *sau pozitiv semi–definită dacă* $h(\mathbf{x}) \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in I\!\!R^n$;

(iii) **ne–pozitivă**, *sau negativ semi–definită dacă* $h(\mathbf{x}) \leq 0, \ \forall \mathbf{x} \in I\!\!R^n$;

(v) **nedefinită** *dacă există vectorii* $\mathbf{x}_1$ *şi* $\mathbf{x}_2$ *astfel încât* $h(\mathbf{x}_1) > 0$ *şi* $h(\mathbf{x}_2) < 0$.

Observaţia 4.11.7. *Din (4.138), luând* $\lambda = -1$*, rezultă că dacă* m *este număr impar şi* h *este formă de grad* m *neidentic nulă, atunci* h *este nedefinită.*

Observaţia 4.11.8. *Dacă* m *este număr natural par, atunci matricea* m*-indexată* n*-dimensională* $\|F_{i_1 i_2 \ldots i_m}\|$ *care intră în (4.137) se spune că este* **pozitiv definită**, **negativ definită**, **ne–negativă** (**pozitiv semi–definită**), *sau* **ne–pozitivă** (**negativ semi–definită**) *ori de câte ori forma corespunzătoare de grad* m *(4.137) este pozitiv definită, negativ definită, pozitiv semi–definită, sau negativ semi–definită, respectiv. În mod similar, matricea formei* h *de grad* m *se spune că este nedefinită dacă* h *este nedefinită.*

O formă de grad m pe $I\!\!R$ are expresia $h(x) = ax^m$. Dacă m este par, atunci h este pozitiv definită, ori negativ definită, după cum $a > 0$, sau $a > 0$. Interpretarea lui a este $a = h(1)$.

Capitolul 5

Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă reală

În acest capitol se consideră funcţii de o variabilă reală cu valori într–un spaţiu Hilbert $m-$dimensional care, în baza izomorfismului spaţiilor liniare finit dimensionale, poate fi considerat că este $I\!R^m$.

5.1 Derivabilitatea funcţiilor vectoriale de argument real

Elementele spaţiului Hilbert $I\!R^m$ pot fi interpretate ca puncte în mulţimea $I\!E^m$ care are structură de *spaţiu afin Euclidian*. Spaţiul $I\!E^m$ îl considerăm raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O,\, \mathcal{B}'\}$, unde O este un punct fixat al spaţiului afin $I\!E^m$, numit *originea* reperului, iar

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\},$$

este baza canonică a spaţiului Hilbert $I\!R^m$ şi

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 & = & (1, 0, 0, ..., 0, 0), \\ \mathbf{e}'_2 & = & (0, 1, 0, ..., 0, 0), \\ ... & ... & ... \\ \mathbf{e}'_m & = & (0, 0, 0, ..., 0, 1). \end{cases}$$

Un sistem de vectori directori corespunzători *axelor* reperului $\mathcal{R}$, notate cu $Ox_1,\, Ox_2,\, ...,\, Ox_n$, este sistemul format din versorii $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m$.

Dacă $M = (x_1, x_2, ..., x_m)$ este un punct arbitrar din $I\!E^m$, atunci vectorul

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = \mathbf{r} = (x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' X \in I\!R^m,$$

este *vectorul de poziţie* al punctului $M \in I\!E^m$. Această relaţie stabileşte un izomorfism între $I\!R^m$ şi $I\!E^m$ ceea ce face ca aceste două spaţii să fie practic confundate.

Structura de spaţiu Euclidian a spaţiului liniar $I\!R^m$ este indusă de produsul scalar standard

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} y_i z_i = Y^\top Z, \tag{5.1}$$

oricare ar fi vectorii $\mathbf{y} \in I\!R^m$ şi $\mathbf{z} \in I\!R^m$ care în baza canonică din $I\!R^m$ au expresiile

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' Y, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m) = \sum_{i=1}^{m} z_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' Z,$$

unde

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m) \in (I\!R^m)^m, \;\; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \;\; Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(I\!R).$$

Vom considera că norma pe $I\!R^m$ este cea indusă de produsul scalar (5.1), adică norma Euclidiană

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2} = \sqrt{Y^\top Y}. \tag{5.2}$$

De asemenea, considerăm că metrica d pe $I\!R^m$ este cea Euclidiană, deci

$$d(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i - z_i)^2} = \sqrt{\Big(Y^\top - Z^\top\Big)\Big(Y - Z\Big)}. \tag{5.3}$$

În cazul $m = 3,$ se introduc în plus două operaţii între vectori şi anume *produsul vectorial* a doi vectori din $I\!R^3$ şi *produsul mixt* a trei vectori.

Definiţia 5.1.1. *Se numeşte* **produs vectorial** *al vectorilor*

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}'_1 + y_2\mathbf{e}'_2 + y_3\mathbf{e}'_3 \quad \text{şi} \quad \mathbf{z} = z_1\mathbf{e}'_1 + z_2\mathbf{e}'_2 + z_3\mathbf{e}'_3,$$

luaţi în această ordine, vectorul $\mathbf{y}\times\mathbf{z} \in \mathbf{R^3}$ *definit de*

$$\mathbf{y}\times\mathbf{z} = (y_2z_3 - y_3z_2)\mathbf{e}'_1 + (y_3z_1 - y_1z_3)\mathbf{e}'_2 + (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{e}'_3. \tag{5.4}$$

Dacă introducem *simbolurile de alternanţă*

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = \;\;1, & \text{dacă permutarea} \;\; \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \;\; \text{este pară;} \\ \varepsilon_{ijk} = -1, & \text{dacă permutarea} \;\; \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \;\; \text{este impară;} \\ \varepsilon_{ijk} = \;\;0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

atunci (5.4) se scrie în forma

$$\mathbf{y}\times\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}y_jz_k\mathbf{e}'_i. \tag{5.5}$$

Membrul al doilea din (5.5) este un determinant simbolic de ordinul trei având pe prima linie versorii reperului $Ox_1x_2x_3,$ iar pe liniile a doua şi a treia, coordonatele vectorului $\mathbf{y}$ şi respectiv $\mathbf{z}.$ Aşadar, produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{y}$ şi $\mathbf{z}$ se poate scrie în forma echivalentă

$$\mathbf{y}\times\mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

Dacă interpretăm $I\!R^2$ ca un subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $I\!R^3$ cu elementele $\mathbf{y}$ şi $\mathbf{z}$ de forma

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0) = y_1\mathbf{e}'_1 + y_2\mathbf{e}'_2 + 0\cdot\mathbf{e}'_3, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, 0) = z_1\mathbf{e}'_1 + z_2\mathbf{e}'_2 + 0\cdot\mathbf{e}'_3,$$

atunci din (5.4) – (5.6) rezultă că produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in I\!R^2$ este un vector din $I\!R^3$, coliniar cu $\mathbf{e}'_3$, care are expresia analitică

$$\mathbf{y}\times\mathbf{z} = (0,\, 0,\, y_1z_2 - y_2z_1) = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{e}'_3.$$

Fie acum şi un al treilea vector $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3) \in I\!R^3$.

Definiţia 5.1.2. *Se numeşte* **produsul mixt** *al vectorilor* $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *şi* $\mathbf{u}$, *luaţi în această ordine, numărul real notat prin* $(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ *definit de*

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = (\mathbf{y}\times\mathbf{z})\cdot\mathbf{u}. \tag{5.7}$$

Observaţia 5.1.1. *Din* (5.1), (5.4) *sau* (5.5) *şi* (5.7) *se vede că expresia analitică a produsului mixt* (5.7) *este*

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}y_jz_ku_i = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Fie $A \subset I\!R$ o mulţime deschisă în $I\!R$, $t_0 \in A$ un punct de acumulare al mulţimii A şi $\mathbf{f} \in \mathcal{F}\Big(A, I\!R^m\Big)$ o funcţie vectorială de argument real. Oricărui $t \in A$ îi corespunde un vector unic $\mathbf{f}(t) \in I\!R^m$ care poate fi interpretat ca punct al spaţiului afin $I\!E^m$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}'\}$.

Deoarece $\mathbf{f}(t)$ este un vector din $I\!R^m$, în baza $\mathcal{B}'$ se scrie în forma

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t)\mathbf{e}'_i.$$

Introducem funcţiile reale de variabilă reală $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathcal{F}(A)$ după procedeul: fiecărui $t \in A$ îi asociem coordonata i a vectorului $\mathbf{f}(t)$. Funcţiile f_i se numesc *coordonatele* funcţiei $\mathbf{f}$ şi convenim să scriem

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m).$$

Când considerăm că $\mathbf{f}(t) \in I\!E^m$, funcţiile f_i, $i \in \overline{1,m}$, se numesc *componentele* lui $\mathbf{f}$.

Dacă vectorul de poziţie al unui punct curent al spaţiului afin Euclidian $I\!E^m$ este notat cu $\mathbf{x}$, sau cu $\mathbf{r}$, funcţia $\mathbf{f}$ se prezintă în una din formele:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \tag{5.8}$$

unde $t \in A$ şi $\mathbf{x} = \mathbf{r} \in I\!R^m$. E

Oricare din egalităţile (5.8) sunt echivalente cu sistemul de m funcţiii reale de variabila reală t cu domeniul de definiţie A

$$x_i = f_i(t), \quad t \in A, \quad x_i \in I\!R, \quad i \in \overline{1,m}. \tag{5.9}$$

Definiţia 5.1.3. *Mulţimea,*

$$G_{\mathbf{f}} = \{M : \ \exists t \in A \quad \textit{astfel încât} \quad \overrightarrow{OM} = \mathbf{f}(t)\} \subset I\!E^m,$$

se numeşte **graficul**, *sau* **hodograful** *funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$.

Definiţia 5.1.4. *Fie* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$. *Egalitatea* (5.8) *se numeşte* **ecuaţie vectorială** *a graficului funcţiei* $\mathbf{f}$, *iar egalităţile* (5.9) *se numesc* **ecuaţii parametrice** *ale graficului lui* $\mathbf{f}$.

Observaţia 5.1.2. *Dacă variabila* $t \in A$ *are ca interpretare timpul, atunci* $G_{\mathbf{f}}$ *se numeşte* **traiectoria** *unui punct material din* $I\!R^m$ *aflat în mişcare după legea* (5.8), *sau* (5.9). *Când* $m = 2$, *mişcarea punctului material se numeşte* **plană**, *iar când* $m = 3$ *mişcarea se numeşte* **spaţială**.

Observaţia 5.1.3. *Hodograful funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *poate fi interpretat şi ca mulţime de vectori din* $I\!R^m$.

Observaţia 5.1.4. *În baza relaţiilor* (5.1), (5.2), (5.3), *din Definiţia 5.1.1 şi Definiţia 5.1.2 rezultă că, date funcţiile* $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ *şi funcţiile* $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, *putem introduce funcţiile* $\varphi\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} \in \mathcal{F}(A)$, $\|\mathbf{f}\| \in \mathcal{F}(A)$ *şi* $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{F}(A)$, *respectiv prin:*

$$(\varphi\mathbf{f})(t) = \varphi(t)\mathbf{f}(t) = (\varphi(t)f_1(t), \varphi(t)f_2(t), ..., \varphi(t)f_m(t)), \ \ t \in A;$$

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t)g_i(t), \ \ t \in A; \tag{5.10}$$

$$\|\mathbf{f}\|(t) = \|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i^2(t)}, \ \ t \in A;$$

$$(d(\mathbf{f}, \mathbf{g}))(t) = d(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Big(f_i(t) - g_i(t)\Big)^2}, \ \ t \in A,$$

numite corespunzător: funcţia **produs** *al funcţiei vectoriale* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *cu funcţia scalară* $\varphi \in \mathcal{F}(A)$; *funcţia* **produs scalar** *al funcţiilor vectoriale* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{g}$; *funcţia* **norma** *lui* $\mathbf{f}$; *funcţia* **distanţa** *între funcţiile* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{g}$.

Observaţia 5.1.5. *În cazul* $m = 3$, *definim în plus funcţia* **produs vectorial** *al funcţiilor* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(A, I\!R^3)$ *şi* $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) \in \mathcal{F}(A, I\!R^3)$, *notată cu* $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$, *definită prin*

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} f_j(t) g_k(t)\mathbf{e}'_i, \ t \in A.$$

Definiţia 5.1.5. *Funcţia reală de variabilă reală* $(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h})\in\mathcal{F}(A)$*, cu valorile date de relaţia*

$$(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h})(t)=(\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t),\mathbf{h}(t))=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}f_i(t)g_j(t)h_k(t),\;\; t\in A,$$

se numeşte **produs mixt** *al funcţiilor vectoriale de variabilă reală* $\mathbf{f},\mathbf{g}$ *şi* $\mathbf{h}$*, luate în această ordine.*

Definiţia 5.1.6. *Dacă* $\mathbf{f}=(f_1 f_2,...,f_m)\in\mathcal{F}(A,I\!R^m)$*, atunci funcţia care asociază oricărui* $t\in A$ *punctul* $M=(f_1(t),f_2(t),...,f_m(t))\in I\!E^m$ *se numeşte* **câmp de vectori***, sau* **câmp vectorial** *pe* A*.*

Definiţia 5.1.7. *Funcţia* $\mathbf{R}(\cdot,t_0,\mathbf{f})\in\mathcal{F}(A\setminus\{t_0\},I\!R^m)$ *definită prin*

$$\mathbf{R}(t,t_0,\mathbf{f})=\frac{1}{t-t_0}\Big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)\Big)=\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0},\;\; t\in A\setminus\{t_0\}, \tag{5.11}$$

se numeşte **raportul incrementar al funcţiei** $\mathbf{f}$ **în punctul** t_0*.*

Observaţia 5.1.6. *Din* (5.11) *şi* (5.5) *deducem*

$$\mathbf{R}(t,t_0,\mathbf{f})=\Big(R_1(t,t_0,\mathbf{f}),R_2(t,t_0,\mathbf{f}),...,R_m(t,t_0,\mathbf{f})\Big), \tag{5.12}$$

unde

$$R_i(t,t_0,\mathbf{f})=\frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0},\qquad t\in A\setminus\{t_0\},\qquad i\in\overline{1,m}$$

sunt rapoartele incrementare ale funcţiilor reale de variabilă reală f_i*,* $i\in\overline{1,m}$*.*

Definiţia 5.1.8. *Funcţia* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(A,I\!R^m)$ *este* **derivabilă** *în punctul* $t_0\in A$ *dacă funcţia raport incrementar* $\mathbf{R}(\cdot,t_0,\mathbf{f})\in\mathcal{F}(A\setminus\{t_0\},I\!R^m)$ *are limită în* t_0 *şi această limită aparţine lui* $I\!R^m$*.*

Definiţia 5.1.9. *Dacă funcţia* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(A,I\!R^m)$ *este derivabilă în* t_0*, atunci limita în* t_0 *a raportului incrementar* (5.11) *se numeşte* **derivata** *funcţiei vectoriale* $\mathbf{f}$ *de varibilă reală* t *în punctul* t_0 *şi se notează cu unul din simbolurile:*

$$\mathbf{f}'(t_0);\quad \dot{\mathbf{f}}(t_0);\quad \frac{d\mathbf{f}}{dt}(t_0).$$

Prin urmare

$$\mathbf{f}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\mathbf{R}(t,t_0,\mathbf{f})=\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}. \tag{5.13}$$

Teorema 5.1.1. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$ *este derivabilă în* $t_0 \in A$ *dacă şi numai dacă există vectorul* $\dot{\mathbf{f}}(t_0) \in I\!\!R^m$ *cu proprietatea:* $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0,$ *astfel încât dacă* $t \in A$ *şi* $0 < \|t - t_0\| < \delta(\varepsilon),$ *atunci*

$$\|\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} - \dot{\mathbf{f}}(t_0)\| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, aceste afirmaţii rezultă din Definiţia 5.1.8 şi Teorema 4.1.1. **q.e.d.**

Teorema 5.1.2. *Dacă funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$ *este derivabilă în* $t_0 \in A,$ *atunci* $\mathbf{f}$ *este continuă în* $t_0.$

Demonstraţie. Din (5.13) deducem că există funcţia $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}(A \setminus \{t_0\}, I\!\!R^m)$ cu proprietatea $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{0}$ astfel încât să avem

$$\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\mathbf{f}}(t_0) + \boldsymbol{\alpha}(t), \qquad t \in A \setminus \{t_0\},$$

din care obţinem $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\dot{\mathbf{f}}(t_0) + (t - t_0)\boldsymbol{\alpha}(t), \quad t \in A \setminus \{t_0\}.$ Trecând la limită în această egalitate pentru $t \to t_0$ şi ţinând cont de faptul că $\boldsymbol{\alpha}(t) \to 0$ atunci când $t \to t_0,$ găsim $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0).$ Această relaţie demonstrează teorema. **q.e.d.**

Definiţia 5.1.10. *Spunem că funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$ *este* **derivabilă pe submulţimea de puncte** $B \subset A,$ *dacă* $\mathbf{f}$ *este derivabilă în orice punct din* $B.$ *Dacă* $B = A,$ *atunci* $\mathbf{f}$ *se numeşte* **derivabilă**.

Definiţia 5.1.11. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$ *este derivabilă, atunci funcţia*

$$\dot{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m), \;\; \dot{\mathbf{f}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\mathbf{f}(t + h) - \mathbf{f}(t)\Big)$$

se numeşte **derivata de ordinul întâi** *a funcţiei* $\mathbf{f}.$

Pentru derivata de ordinul întâi a funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^m)$ pot fi utilizate şi notaţiile:

$$\mathbf{f}'; \;\; \mathbf{f}'(\cdot); \;\; \frac{d}{dt}\mathbf{f}; \;\; \frac{d\mathbf{f}}{dt}; \;\; \frac{d\mathbf{f}}{dt}(\cdot).$$

Observaţia 5.1.7. *Vectorul* $\mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$ *are direcţia secantei (dreptei) care trece prin punctele* M_0 *şi* M *de pe hodograful funcţiei* $\mathbf{f},$ *corespunzătoare valorilor* t_0 *şi* $t.$

Când $t \to t_0,$ punctul M *se apropie* de M_0 pe hodograful lui $\mathbf{f},$ iar secanta (M_0M) tinde să ocupe poziţia limită (T) numită *tangenta* în M_0 la hodograful lui $\mathbf{f}$ şi, la limită pentru $t \to t_8,$ vectorul $\mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$ devine $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$ care are ca direcţie tangenta $(T).$

Sensul vectorului $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$ este sensul creşterii variabilei t. Creşterea variabilei t imprimă un sens de parcurs pe hodograf numit *sens pozitiv*.

Sensul invers de parcurs al hodografului lui $\mathbf{f}$ se numeşte *sens negativ*.

Hodograful funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ se numeşte *orientat* dacă este precizat un sens de parcurs al acestuia.

Din punct de vedere cinematic $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$ este *vectorul viteză* la momentul t_0 (şi nu *viteza*, care este $\|\dot{\mathbf{f}}(t_0)\|$) al unui punct material care se mişcă după legea (5.8).

Definiţia 5.1.12. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *se numeşte* **funcţie constantă** *dacă*

$$\mathbf{f}(A) = Im\mathbf{f} = \{\mathbf{c}\}, \quad \mathbf{c} \in I\!R^m.$$

Teorema 5.1.3. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *este derivabilă în* $t_0 \in A$ *dacă şi numai dacă funcţiile coordonate* $f_i \in \mathcal{F}(A)$, $i \in \overline{1,m}$ *sunt derivabile în* t_0. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *este derivabilă în* t_0, *atunci*

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), ..., f_m'(t_0)).$$

Demonstraţie. Rezultă din Definiţia 5.1.8, relaţiile (5.12), (5.13) şi Teorema 4.1.4. **q.e.d.**

Din Teorema 5.1.3, Observaţia 5.1.3 şi proprietăţile funcţiilor de variabilă reală derivabile se pot demonstra cu uşurinţă următoarele două teoreme (exerciţiu!).

Teorema 5.1.4. *Dacă* $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ *şi* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *sunt funcţii derivabile în punctul* $t_0 \in A$, *iar* $\alpha, \beta \in I\!R$ *scalari arbitrari, atunci funcţiile*:

$$\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}, \quad \varphi\mathbf{f}, \quad \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}, \quad \|\mathbf{f}\|, \quad d(\mathbf{f}, \mathbf{g});$$

sunt derivabile în t_0 *şi au loc următoarele egalităţi*:

$$(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})'(t_0) = \alpha\mathbf{f}'(t_0) + \beta\mathbf{g}'(t_0);$$

$$(\varphi\mathbf{f})'(t_0) = \varphi'(t_0)\mathbf{f}(t_0) + \varphi(t_0)\mathbf{f}'(t_0);$$

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)\cdot\mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0)\cdot\mathbf{g}'(t_0);$$

$$\|\mathbf{f}\|'(t_0) = \frac{\mathbf{f}'(t_0)\cdot\mathbf{f}(t_0)}{\|\mathbf{f}(t_0)\|}, \quad \textit{dacă} \;\; \mathbf{f}(t_0) \neq \mathbf{0};$$

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g})'(t_0) = \frac{(\mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{g}'(t_0))\cdot(\mathbf{f}(t_0) - \mathbf{g}(t_0))}{d(\mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0))}, \quad \textit{dacă} \;\; \mathbf{f}(t_0) \neq \mathbf{g}(t_0);$$

Teorema 5.1.5. *Dacă* $\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h} \in \mathcal{F}(A, I\!R^3)$ *sunt funcţii derivabile în* $t_0 \in A$, *atunci funcţiile* $\mathbf{f}\times\mathbf{g} \in \mathcal{F}(A, I\!R^3)$ *şi* $(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}) \in \mathcal{F}(A)$ *sunt derivabile în* t_0 *şi au loc egalităţile*:

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)\times\mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}'(t_0);$$

$$(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h})'(t_0) = (\mathbf{f}'(t_0),\mathbf{g}(t_0),\mathbf{h}(t_0)) + (\mathbf{f}(t_0),\mathbf{g}'(t_0),\mathbf{h}(t_0)) + (\mathbf{f}(t_0),\mathbf{g}(t_0),\mathbf{h}'(t_0)).$$

Observaţia 5.1.8. *Dacă ipotezele din Teorema 5.1.4 şi Teorema 5.1.2 au loc pe mulţimea* A, *sau pe submulţimea deschisă* $B \subset A$, *atunci identităţile teoremelor sunt adevărate pe mulţimea* A, *respectiv pe* B.

Observaţia 5.1.9. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este funcţia constantă şi* $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ *este funcţie derivabilă, atunci* $(\varphi\mathbf{f})'$ *este funcţie coliniară cu* $\varphi\mathbf{f}$ *deoarece în acest caz* $(\varphi\mathbf{c})'(t) = \varphi'(t)\mathbf{c},\ \forall\, t \in A$. *Dacă* $\|\mathbf{f}\|$ *este funcţie reală de o variabilă reală, constantă, atunci funcţiile* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *şi* $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *sunt* **ortogonale** *în sensul că pentru orice* $t \in A$ *vectorii* $\mathbf{f}(t)$ *şi* $\mathbf{f}'(t)$ *sunt ortogonali în spaţiul Hilbert* $I\!R^m$ *(produsul lor scalar este nul).*

5.2 Derivabilitate laterală şi derivate laterale ale funcţiilor vectoriale de variabilă reală

Pentru funcţiile vectoriale de argument real se introduce noţiunea de *derivabilitate laterală*. Pentru aceasta introducem mai întâi noţiunile: *punct de acumulare la stânga*; *punct de acumulare la dreapta*; *punct de acumulare bilateral* ale mulţimii $A \subset I\!R$, presupusă a fi un interval, sau o reuniune de intervale din $I\!R$.

Definiţia 5.2.1. (i) *Punctul* $t_0 \in I\!R$ *se numeşte* **punct de acumulare la stânga** *al mulţimii* $A \subset I\!R$ *dacă* $t_0 \in ((-\infty, t_0) \cap A)'$;
(ii) $t_0 \in I\!R$ *se numeşte* **punct de acumulare la dreapta** *al mulţimii* A *dacă* $t_0 \in (A \cap (t_0, +\infty))'$;
(iii) $t_0 \in I\!R$ *se numeşte* **punct de acumulare bilateral** *al mulţimii* A *dacă* t_0 *este atât punct de acumulare la stânga cât şi punct de acumulare la dreapta.*

Observaţia 5.2.1. *Punctul* $t_0 \in I\!R$ *este punct de acumulare la stânga (respectiv, la dreapta) pentru mulţimea* $A \subset I\!R$ *dacă şi numai dacă există un şir numeric* $(t_n)_{n\geq 1},\ t_n \in A,:\ t_n < t_0$ *(respectiv,* $t_n > t_0$*) astfel încât* $t_n \to t_0$.

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiţia 5.2.1 şi Teorema 3.9.14. ■

Observaţia 5.2.2. *Un punct de acumulare la stânga, sau la dreapta al mulţimii* $A \subset I\!R$ *este punct de acumulare al lui* A. *Prin urmare, un punct de acumulare al mulţimii* A *este fie punct de acumulare la stânga, fie punct de acumulare la dreapta, fie punct de acumulare bilateral al lui* A.

Definiţia 5.2.2. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, $A \subset I\!R$, *se numeşte* **derivabilă la stânga** *(respectiv,* **derivabilă la dreapta***) în* $t_0 \in A$, *dacă* t_0 *este punct de acumulare la stânga (respectiv, la dreapta) al mulţimii* A *şi funcţia* $\mathbf{R}(\cdot, t_0, \mathbf{f})$ *are limită la stânga (respectiv, la dreapta) în* t_0.

Definiţia 5.2.3. *Dacă funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *este derivabilă la stânga, (respectiv, la dreapta) în* t_0*, atunci* $\mathbf{f}'_s(t_0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$ *(respectiv,* $\mathbf{f}'_s(t_0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$*) se numeşte* **derivata la stânga** *(respectiv,* **derivata la dreapta***) în punctul* t_0 *a funcţiei* $\mathbf{f}$*. Derivatele la stânga şi la dreapta în* t_0 *ale unei funcţii* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *se numesc* **derivate laterale** *în* t_0 *ale funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$*.*

Teorema 5.2.1. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$*,* $A \subset I\!R$*, este derivabilă în punctul de acumulare bilateral* $t_0 \in A$ *dacă şi numai dacă funcţia* $\mathbf{f}$ *este derivabilă la stânga şi la dreapta în* t_0 *şi derivatele laterale ale sale în* t_0 *sunt egale.*

Demonstraţie. Afirmaţia de mai sus se demonstrează simplu dacă se foloseşte Definiţia 5.1.9, Definiţia 5.2.2 şi rezultatele referitoare la limite laterale. **q.e.d.**

Definiţia 5.2.4. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], I\!R^m)$*,* $[a,b] \subset I\!R$*,* $a < b$*, se numeşte* **derivabilă** *în* a*, respectiv în* b*, dacă* $\mathbf{f}$ *este derivabilă la dreapta în* a*, respectiv la stânga în* b*.*

Dacă funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], I\!R^m)$ este derivabilă în punctele a şi b, atunci $\mathbf{f}'(a) = \mathbf{f}'_d(a)$ şi $\mathbf{f}'(b) = \mathbf{f}'_s(b)$.

Teorema 5.2.2. *Fie* $A = [a,b] \subset I\!R$ *şi* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], I\!R^m)$*,* $\varphi \in \mathcal{F}([a,b], I\!R)$ *funcţii continue pe* $[a,b]$*. Dacă* $\mathbf{f}$ *şi* φ *sunt derivabile la dreapta în orice punct* $t \in [a,b)$ *şi*

$$\|\mathbf{f}'_d(t)\| \le \varphi'_d(t), \quad t \in [a,b), \tag{5.14}$$

atunci

$$\|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\| \le \varphi(b) - \varphi(a). \tag{5.15}$$

Demonstraţie. Arătăm că $\forall\, \varepsilon > 0$ şi $\forall\, t \in [a,b]$ avem

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)\| < \varepsilon(t-a) + \varphi(t) - \varphi(a), \tag{5.16}$$

din care, în cazul $t = b$, ţinând cont că ε este arbitrar, rezultă (5.15).

Pentru aceasta, să considerăm mulţimea I_ε formată din toate punctele $u \in [a,b]$ cu proprietatea că $\forall\, t \in [a,u]$ inegalitatea (5.16) este satisfăcută. Mulţimea I_ε este nevidă întrucât conţine cel puţin punctul $u = a$. În plus, I_ε este un interval cu extremitatea stângă în punctul a. Mai mult, din continuitatea funcţiilor $\mathbf{f}$ şi φ rezultă $I_\varepsilon = [a,c]$ cu $c \le b$. Rămâne să mai arătăm că $c = b$.

Dacă, prin absurd, $c < b$, atunci există $h > 0$ astfel încât pentru $c < t \le c + h$ să avem

$$\Big\|\frac{1}{t-c}(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(c)) - \mathbf{f}'_d(c)\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Big|\frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t-c} - \varphi'_d(c)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folosind Propoziţia 2.5.1, relaţia (5.14) şi aceste inegalităţi, deducem

$$\frac{\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(c)\|}{t-c} < \|\mathbf{f}'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \le \varphi'_d(c) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t-c} + \varepsilon,$$

din care găsim apoi $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(c)\| < \varepsilon(t-c) + \varphi(t) - \varphi(c)$, $\forall\, t \in [c, c+h]$. Datorită faptului că $c \in I_\varepsilon$, rezultă că este îndeplinită şi inegalitatea $\|\mathbf{f}(c) - \mathbf{f}(a)\| < \varepsilon(c-a) + \varphi(c) - \varphi(a)$.

Din ultimele două inegalităţi deducem

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)\| < \varepsilon(t-a) + \varphi(t) - \varphi(a), \quad t \in [c, c+h].$$

Această inegalitate arată că $c + h \in I_\varepsilon$, ceea ce contrazice faptul că $I_\varepsilon = [a, c]$. Aşadar $c = b$ şi inegalitatea (5.16) este demonstrată. **q.e.d.**

Corolarul 5.2.1. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], I\!R^m)$ *o funcţie continuă şi derivabilă la dreapta oricărui punct* $t \in [a,b)$, *pentru care există* $M > 0$ *cu proprietatea*

$$\|\mathbf{f}'_d(t)\| \leq M, \quad \forall\, t \in (a,b).$$

Atunci

$$\|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\| \leq M(b-a).$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 5.2.2 în care $\varphi(t) = Mt, \;\; t \in [a,b]$. **q.e.d.**

5.3 Derivabilitate şi derivate de ordin superior ale unei funcţii vectoriale de variabilă reală

Definiţia 5.3.1. *Fie* $A \subset I\!R$ *o mulţime deschisă în* $I\!R$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *o funcţie derivabilă şi fie* $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *funcţia derivata lui* $\mathbf{f}$. *Funcţia* $\mathbf{f}$ *se numeşte* **de două ori derivabilă** *în punctul* $t_0 \in A$ *dacă funcţia* $\mathbf{f}'$ *este derivabilă în* t_0.

Definiţia 5.3.2. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *o funcţie de două ori derivabilă în punctul* $t_0 \in A$. *Vectorul* $(\mathbf{f}')'(t_0) \in I\!R^m$ *se numeşte* **derivata de ordinul al doilea**, *sau* **derivata secundă** *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *în* t_0 *şi se notează cu unul din simbolurile:*

$$\mathbf{f}''(t_0); \qquad \frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}(t_0); \qquad \ddot{\mathbf{f}}(t_0).$$

Prin urmare,

$$\mathbf{f}''(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)}{t - t_0}.$$

Definiţia 5.3.3. *Fie* $A = [a,b) \subset I\!R$ *şi* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b), I\!R^m)$ *o funcţie derivabilă. Funcţia* $\mathbf{f}$ *este de două ori derivabilă în* $t_0 = a$ *dacă funcţia* $\mathbf{f}'$ *este derivabilă la dreapta în* $t_0 = a$.

Se poate da o definiţie asemănătoare derivabilităţii de două ori în extremitatea dreaptă b a intervalului de definiţie al funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^n)$, cu condiţia ca $b \in A$.

Observaţia 5.3.1. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este de două ori derivabilă în* t_0, *atunci funcţia* $\mathbf{f}'$ *este continuă în* t_0.

Într-adevăr, aceasta rezultă aplicând Teorema 5.1.2 funcţiei $\mathbf{f}'$. ■

Observaţia 5.3.2. *Dacă* $A = [a, b]$ *şi* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], I\!R^m)$ *este derivabilă, atunci prin definiţie* $\mathbf{f}$ *este de două ori derivabilă în* $t_0 = a$ *dacă* $\mathbf{f}'$ *este derivabilă la dreapta în punctul* $t_0 = a$.

O observaţie analoagă, din care rezultă cine este $\mathbf{f}''(b)$, are loc pentru extremitatea dreaptă a intervalului $A = [a, b]$.

Definiţia 5.3.4. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *se numeşte* **de două ori derivabilă**, *dacă* $\mathbf{f}$ *si* $\mathbf{f}'$ *sunt derivabile. Funcţia* $\mathbf{f}'' \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, *definită de*

$$\mathbf{f}''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}'(t+h) - \mathbf{f}'(t)}{h}, \quad t \in A,$$

se numeşte **derivata de ordinul al doilea** *a funcţiei* $\mathbf{f}$.

Teorema 5.3.1. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *este de două ori derivabilă dacă şi numai dacă funcţiile coordonate* $f_i \in \mathcal{F}(A)$, $i \in \overline{1, m}$, *sunt derivabile de două ori. Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *este de două ori derivabilă, atunci*

$$\mathbf{f}''(t) = (f_1''(t), f_2''(t), ..., f_m''(t)), \ \ t \in A. \tag{5.17}$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 5.1.3 funcţiei $\mathbf{f}' = (f_1', f_2'..., f_m) \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ folosindu–se totodată Definiţia 5.1.7 şi Teorema 4.1.4. **q.e.d.**

Observaţia 5.3.3. *Din punct de vedere cinematic,* $\mathbf{f}''(t)$ *este* **vectorul acceleraţie**, *iar* $\|\mathbf{f}''(t)\|$ *este* **acceleraţia** *la momentul* t *ale unui punct material în mişcare după legea* (5.8).

Definiţia 5.3.5. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *se numeşte* **de** k **ori derivabilă** *în* $t_0 \in A$ *dacă* $\mathbf{f}$ *este de* $k-1$ *ori derivabilă pe* $V \cap A$, $V \in \mathcal{V}(t_0)$, *iar derivata de ordinul* $k-1$ *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *este derivabilă în* t_0.

Definiţia 5.3.6. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ *este de* k *ori derivabilă în* t_0, *atunci limita în* t_0 *a raportului incrementar al funcţiei* $\mathbf{f}^{(k-1)} \in \mathcal{F}(V \cap A, I\!R^m)$,

$$\mathbf{R}^{k-1}(t, t_0, \mathbf{f}) = \frac{\mathbf{f}^{(k-1)}(t) - \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0)}{t - t_0}, \ \ t \in V \cap A \setminus \{t_0\}, \tag{5.18}$$

se numeşte **derivata de ordinul** k *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *în* $t_0 \in A' \cap A$.

Derivata de ordinul k a funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ în punctul $t_0 \in A$ se notează cu unul din simbolurile:

$$\mathbf{f}^{(k)}(t_0); \qquad \frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k}(t_0).$$

Observaţia 5.3.4. *Din Definiţia 5.3.5 avem*

$$\mathbf{f}^{(k)}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \mathbf{R}^{k-1}(t, t_0, \mathbf{f}) = \lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{f}^{(k-1)}(t) - \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0)}{t - t_0}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Derivata de ordinul zero a funcţiei $\mathbf{f}$ *este, prin convenţie, însăşi funcţia* $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}^{(0)}(t) = \mathbf{f}(t), \quad t \in A,$$

iar raportul incrementar de ordinul zero $\mathbf{R}^0(t, t_0, \mathbf{f})$, *obţinut luând* $k = 1$ *în* (5.18), *este raportul incrementar* (5.11).

Generalizând acum Teorema 5.1.3 şi Teorema 5.3.1, obţinem

Teorema 5.3.2. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ *este de* k *ori derivabilă dacă şi numai dacă funcţiile coordonate* $f_i \in \mathcal{F}(A)$, $i \in \overline{1,m}$, *sunt de* $k - 1$ *ori derivabile. Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ *este de* k *ori derivabilă, atunci*

$$\mathbf{f}^{(k)}(t) = (f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), ..., f_m^{(k)}(t)), \quad t \in A.$$

Definiţia 5.3.7. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ *se numeşte* **de clasă** C^k *pe intervalul* $I \subset \mathbb{R}$ *şi scriem* $\mathbf{f} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$, *dacă pentru* $k = 0$, $\mathbf{f}$ *este continuă şi pentru* $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, *funcţia* $\mathbf{f}^{(k-1)} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ *este derivabilă, iar derivata* $\mathbf{f}^{(k)} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ *este funcţie continuă pe* I.

Funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ *se numeşte* **indefinit derivabilă** *dacă* $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$. *În acest caz se scrie* $\mathbf{f} \in C^\infty(I, \mathbb{R}^m)$.

Dacă I nu este un interval deschis, atunci drept derivate de ordin k ale funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ în extremităţile intervalului se consideră derivatele laterale corespunzătoare ale funcţiei.

Observaţia 5.3.5. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$ *dacă şi numai dacă* $f_j \in C^k(I)$, $j \in \overline{1,m}$.

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiţia 5.3.7 şi Teorema 5.3.2. ■

Teorema 5.3.3. *Dacă* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$, *unde* $I \subset \mathbb{R}$ *este un interval, atunci funcţia* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \in C^k(I, \mathbb{R})$ *şi*

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})^{(k)} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \mathbf{f}^{(k-s)}(t) \cdot \mathbf{g}^{(s)}(t), \quad t \in I, \tag{5.19}$$

unde C_k^s *înseamnă combinări de* k *elemente luate câte* s.

Demonstraţie. Aplicăm metoda inducţiei matematice în raport cu k. Demonstraţia este identică cu cea din algebra elementară referitoare la puterea k a binomului $a+b$,

$$(a+b)^k=\sum_{s=1}^{k}C_k^s a^{k-s}b^s,\ a\in I\!R,\ b\in I\!R,\ k\in I\!N^*,$$

cu deosebirile că a şi b trec respectiv în în $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$, a^{k-s} trece în $\mathbf{f}^{(k-s)}$ şi b^s trece în $\mathbf{f}^{(s)}$. Din această demonstraţie rezultă că (5.19) are loc oricare ar fi $k\in I\!N^*$. **q.e.d.**

Relaţia (5.19) este cunoscută sub numele de *formula lui Leibniz de derivare a produsului de funcţii.* În cazul $m\geq 2$, produsul care apare în Teorema 5.3.3 este produsul scalar standard (5.10) al funcţiilor $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$. Dacă $m=1$, produsul din Teorema 5.3.3 este produsul obişnuit al funcţiilor reale f şi g.

5.4 Derivabilitatea funcţiilor vectoriale compuse de variabilă reală

Fie I, J intervale din $I\!R$, $\varphi : I\to J$ şi $\mathbf{f}=(f_1,f_2,...,f_m)\in\mathcal{F}(J,I\!R^m)$.

Definiţia 5.4.1. *Funcţia*

$$\mathbf{F}\in\mathcal{F}(I,I\!R^m),\quad \mathbf{F}(t)=(\mathbf{f}\circ\varphi)(t)\quad =(f_1(\varphi(t)),f_2(\varphi(t)),...,f_m(\varphi(t))),\tag{5.20}$$

se numeşte **funcţia compusă** *a funcţiilor* $\mathbf{f}$ *şi* φ.

În teorema care urmează se precizează condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţiile $\mathbf{f}$ şi φ pentru ca funcţia compusă $\mathbf{F}$ să fie derivabilă.

Teorema 5.4.1. (**Regula lanţului**) *Dacă* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(J,I\!R^m)$ *şi* $\varphi\in\mathcal{F}(I,J)$ *sunt funcţii derivabile, atunci funcţia compusă* $\mathbf{F}=\mathbf{f}\circ\varphi$ *este derivabilă şi*

$$\mathbf{F}'(t)=(\mathbf{f}\circ\varphi)'(t)=\mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi'(t),\ \ t\in I.\tag{5.21}$$

Demonstraţie. Trebuie calculată limita în punctul $h=0$ a raportului incrementar

$$\frac{\mathbf{F}(t+h)-\mathbf{F}(t)}{h},\quad h\in I\!R,\quad t+h\in I.$$

Pentru aceasta să observăm mai întâi că, folosind (5.20), acesta se poate scrie în forma

$$\frac{\mathbf{F}(t+h)-\mathbf{F}(t)}{h}=\frac{\mathbf{f}(\varphi(t+h))-\mathbf{f}(\varphi(t))}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}\cdot\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}.\tag{5.22}$$

Deoarece funcţia φ este derivabilă în punctul $t\in I$, din Teorema 5.1.2 rezultă că φ este continuă în t. Prin urmare, există funcţia reală $\tilde{h}$ de variabila reală h definită într–o vecinătate $V\in\mathcal{V}(0)$ cu proprietatea $\tilde{h}\to 0$ când $h\to 0$, astfel încât să avem $\varphi(t+h)=\varphi(t)+\tilde{h},\ \forall\, h\in V,\ \forall\, t\in I,\ t+h\in I$. Folosind această relaţie în (5.22), obţinem $\dfrac{\mathbf{F}(t+h)-\mathbf{F}(t)}{h}=\dfrac{\mathbf{f}(\varphi(t)+\tilde{h})-\mathbf{f}(\varphi(t))}{\tilde{h}}\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$. Prima fracţie din membrul al doilea este raportul incrementar al funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $\varphi(t)\in J$. Trecând la limită pentru $h\to 0$ şi ţinând cont că $h\to 0$ antrenează $\tilde{h}\to 0$, obţinem (5.21). **q.e.d.**

Observaţia 5.4.1. *Dacă avem în vedere că coordonatele lui* $\mathbf{F}$ *sunt*

$$F_i = (f_i \circ \varphi)(t) = f_i(\varphi(t))$$

şi ţinem cont de Teorema 5.1.3, din (5.21) obţinem egalitatea

$$F_i'(t) = (f_i \circ \varphi)'(t) = f_i'(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I, \quad i \in \overline{1,m},$$

care se numeşte **regula lanţului** *de derivare a funcţiilor reale compuse de o variabilă reală.*

Teorema 5.4.2. *Dacă funcţiile* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(J, I\!\!R^m)$ *şi* $\varphi \in \mathcal{F}(I, J)$ *sunt de două ori derivabile, atunci funcţia compusă* $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *este de două ori derivabilă şi*

$$\mathbf{F}''(t) = \mathbf{f}''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + \mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi''(t), \quad t \in I. \tag{5.23}$$

Demonstraţie. La fel ca în Teorema 5.4.1 vom calcula limita în punctul $h = 0$ a raportului incrementar al funcţiei $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$,

$$\frac{\mathbf{F}'(t+h) - \mathbf{F}'(t)}{h},$$

definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(0)$ care are proprietatea $t + h \in I, \ \forall\, h \in V$. Se foloseşte (5.21), Teorema 5.1.2, Observaţia 5.3.1 şi după trecerea la limită pentru $t \to 0$ se obţine (5.23). **q.e.d.**

5.5 Diferenţiabilitatea unei funcţii vectoriale de o variabilă reală

Noţiunea de diferenţiabilitate a unei funcţii vectoriale de argument real $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$, într–un punct t_0 al intervalului $I \subset I\!\!R$, are ca punct de plecare problema aproximării vectorului $\mathbf{f}(t) \in I\!\!R^m$, $t \in V \cap I$, $V \in \mathcal{V}(t_0)$, printr–o *funcţie afină* $\mathbf{A}$ care să aibă proprietăţile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t_0) &= \mathbf{f}(t_0); \\ \lim_{t \to t_0} \mathbf{A}(t) &= \lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ţinând cont că funcţia afină $\mathbf{A} \in \mathcal{F}(I\!\!R, I\!\!R^m)$ are forma

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{T}(t) + \mathbf{c}, \quad t \in I\!\!R, \tag{5.25}$$

unde $\mathbf{T} \in L(I\!\!R, I\!\!R^m)$, iar $\mathbf{c} \in I\!\!R^m$ este un vector constant, din (5.24) şi (5.25) deducem

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(t_0).$$

Folosirea acestei relaţii în (5.25) conduce la concluzia că funcţia afină (5.25) este

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{T}(t - t_0) + \mathbf{f}(t_0), \quad t \in I\!\!R. \tag{5.26}$$

Dacă se doreşte ca valorile funcţiei afine (5.26) să aproximeze pe cele ale funcţiei $\mathbf{f}$ în apropierea punctului t_0, atunci trebuie să avem

$$\lim_{t \to t_0} (\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}(t)) = \mathbf{0}. \tag{5.27}$$

Din (5.26), (5.27), continuitatea aplicaţiei liniare $\mathbf{T}$ în origine şi $\mathbf{T}(0) = \mathbf{0} \in I\!R^m$, obţinem

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0),$$

rezultat care arată că aproximarea lui $\mathbf{f}(t)$ printr–o funcţie afină implică, în mod necesar, continuitatea funcţiei $\mathbf{f}$ în t_0.

Aplicaţia liniară $\mathbf{T}$ care intră în componenţa funcţiei afine $\mathbf{A}$ este încă nedeterminată, deci pentru determinarea matricei sale în baza canonică $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$ trebuie să mai impunem o condiţie.

Condiţia pe care o vom impune este ca $\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}(t)$ să se *apropie* de de $\mathbf{0}$ *mai repede* decât se apropie t de t_0. Matematic, această condiţie se exprimă prin

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}(t)}{|t - t_0|} = \lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(t - t_0)}{|t - t_0|} = \mathbf{0}.$$

Analizând această egalitate, vedem că ea este echivalentă cu existenţa funcţiei vectoriale de variabilă reală $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$, cu proprietatea

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t_0) = \mathbf{0}, \tag{5.28}$$

astfel încât să aibă loc egalitatea

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{T}(t - t_0) + \boldsymbol{\alpha}(t)|t - t_0|, \quad t \in V \cap I.$$

Dacă aproximarea este realizabilă, se spune că funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ este *diferenţiabilă* în t_0, iar aplicaţia liniară $\mathbf{T} \in L(I\!R, I\!R^m)$ este *diferenţiala* funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul t_0.

Cu aceste consideraţii putem da definiţii riguroase pentru diferenţiabilitatea şi diferenţiala unei funcţiii vectoriale de argument real într–un punct de acumulare ce aparţine domeniului de definiţie al funcţiei.

Definiţia 5.5.1. *Spunem că funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *este* **diferenţiabilă** *în punctul de acumulare* $t_0 \in I \subset I\!R$, *dacă există aplicaţia liniară*

$$\mathbf{T} = d\mathbf{f}(t_0) = d\mathbf{f}(t_0)(\cdot) = d\mathbf{f}(t_0, \cdot) \in L(I\!R, I\!R^m) \tag{5.29}$$

şi funcţia $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *cu proprietatea* (5.28) *astfel încât să aibă loc egalitatea*

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0)(t - t_0) + \boldsymbol{\alpha}(t)|t - t_0|, \quad \forall\, t \in I \tag{5.30}$$

sau, echivalent,

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0; h) + \boldsymbol{\alpha}(t_0 + h)|h|, \quad \forall\, h \in I\!R,\ t_0 + h \in I, \tag{5.31}$$

unde

$$\lim_{h\to 0} \boldsymbol{\alpha}(t_0 + h) = \boldsymbol{\alpha}(t_0) = \mathbf{0}. \tag{5.32}$$

Definiţia 5.5.2. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *funcţie diferenţiabilă în* $t_0 \in I' \cap I$. *Aplicaţia liniară* (5.29) *se numeşte* **diferenţiala** *funcţiei* $\mathbf{f}$ *în punctul* t_0.

Teorema 5.5.1. (**Unicitatea diferenţialei**) *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *este funcţie diferenţiabilă în* $t_0 \in I' \cap I$, *atunci diferenţiala sa în* t_0 *este unică.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că (5.30) şi (5.28) sunt echivalente cu

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)-\mathbf{T}(t-t_0)}{|t-t_0|}=\mathbf{0},$$

iar (5.31) şi (5.32) se mai pot scrie în forma

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(t_0+h)-\mathbf{f}(t_0)-\mathbf{T}(h)}{|h|}=\mathbf{0},\tag{5.33}$$

unde $\mathbf{T}=d\mathbf{f}(t_0)$ este diferenţiala funcţiei $\mathbf{f}$ în t_0.

Să presupunem că aplicaţia $\mathbf{T}$ nu este unică deci, pe lângă (5.33), există egalitatea

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(t_0+h)-\mathbf{f}(t_0)-\mathbf{S}(h)}{|h|}=\mathbf{0},\quad \mathbf{S}\in L(I\!R,I\!R^m).\tag{5.34}$$

Cum pentru orice $h\neq 0$ au loc relaţiile

$$\frac{\|\mathbf{S}(h)-\mathbf{T}(h)\|}{|h|}=\frac{\|\mathbf{S}(h)-\mathbf{f}(t_0+h)+\mathbf{f}(t_0)+\mathbf{f}(t_0+h)-\mathbf{f}(t_0)-\mathbf{T}(h)\|}{|h|}\leq$$

$$\frac{\|\mathbf{f}(t_0+h)-\mathbf{f}(t_0)-\mathbf{S}(h)\|}{|h|}+\frac{\|\mathbf{f}(t_0+h)-\mathbf{f}(t_0)-\mathbf{T}(h)\|}{|h|},$$

făcând $h\to 0$ şi ţinând cont de (5.33) şi (5.34), obţinem

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\mathbf{S}(h)-\mathbf{T}(h)\|}{|h|}=0.$$

Înlocuind în această ultimă relaţie pe h cu tu unde u este arbitrar din $I\!R^*$, dar fixat, iar $t>0$, luând în consideraţie faptul că $h\to 0\Longrightarrow t\to 0$ şi având în vedere că $\mathbf{S}$ şi $\mathbf{T}$ sunt aplicaţii liniare, obţinem

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\|\mathbf{S}(tu)-\mathbf{T}(tu)\|}{|tu|}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\|t\mathbf{S}(u)-t\overline{T}(u)\|}{t|u|}=\frac{\|\mathbf{S}(u)-\mathbf{T}(u)\|}{|u|}=0,$$

de unde rezultă $\|\mathbf{S}(u)-\mathbf{T}(u)\|=0,\ \forall\, u\in I\!R^*$. Adăugând faptul că $\mathbf{S}(0)=\mathbf{T}(0)$ deducem că $\mathbf{S}(u)=\mathbf{T}(u),\ \forall\, u\in I\!R$, deci $\mathbf{S}=\mathbf{T}$. **q.e.d.**

Deoarece $\mathbf{T}=d\mathbf{f}(t_0)\in L(I\!R,I\!R^m)$, din Teorema 4.10.1 deducem că diferenţiala funcţiei $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(I,I\!R^m)$ în punctul $t_0\in I$ este cunoscută dacă şi numai dacă se cunoaşte matricea sa în perechea de baze $1\subset I\!R$ şi $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,...,\mathbf{e}'_m\}\subset I\!R^m$, căci atunci

$$d\mathbf{f}(t_0;h)=\mathbf{e}'(Ah)=(\mathbf{e}'A)h=h\sum_{j=1}^{m}a_j\mathbf{e}'_j,\ \forall\, h\in I\!R,$$

unde $\mathbf{e}'=(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,...,\mathbf{e}'_m)\in(I\!R^m)^m$.

Teorema de mai jos urmeazsă precizeze cine sunt elementele $a_1,a_2,...,a_m$ ale matricei coloană A a aplicaţiei $d\mathbf{f}(t_0)\in L(I\!R,I\!R^m)$ în perechea de baze $\{1\}\subset I\!R$ şi $\mathcal{B}'\subset I\!R^m$.

Teorema 5.5.2. *Funcţia* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(I,I\!R^m)$ *este diferenţiabilă în* $t_0\in I'\cap I$ *dacă şi numai dacă* $\mathbf{f}$ *este derivabilă în* t_0.

Dacă $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* t_0, *atunci matricea* A *a diferenţialei lui* $\mathbf{f}$ *în punctul* t_0, *în perechea de baze*

$\{1\} \subset I\!R$ *şi* $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$*, este*

$$A = \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ f_2'(t_0) \\ \vdots \\ f_m'(t_0) \end{pmatrix},$$

adică

$$\mathbf{e}'A = \mathbf{f}'(t_0),$$

şi, prin urmare,

$$d\mathbf{f}(t_0)(h) = d\mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{f}'(t_0)h, \ \forall\, h \in I\!R. \tag{5.35}$$

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă în t_0, atunci are loc (5.31), din care, pentru $t \neq t_0$, deducem

$$\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = d\mathbf{f}(t_0)(1) + \boldsymbol{\alpha}(t)\frac{|t - t_0|}{t - t_0}, \quad \forall\, t \in I \setminus \{t_0\}. \tag{5.36}$$

Cum mulţimea $\left\{\dfrac{|t - t_0|}{t - t_0} : \ t \in I \setminus \{t_0\}\right\}$ este mărginită şi $\boldsymbol{\alpha}$ are proprietatea (5.28), din (5.36) deducem

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = d\mathbf{f}(t_0)(1) = d\mathbf{f}(t_0; 1). \tag{5.37}$$

Comparând (5.37) cu (5.13) şi folosind unicitatea limitei unei funcţii într–un punct, obţinem

$$d\mathbf{f}(t_0; 1) = \mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), ..., f_m'(t_0)) = \mathbf{e}'A \in I\!R^m,$$

unde A este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{f}'(t_0)$ în baza canonică din $I\!R^m$ şi are ca elemente derivatele în t_0 ale componentelor funcţiei $\mathbf{f}$. Din acest rezultat şi liniaritatea lui $d\mathbf{f}(t_0)$ rezultă (5.35).

Reciproc, să arătăm că derivabilitatea lui $\mathbf{f}$ în t_0 implică diferenţiabilitatea lui $\mathbf{f}$ în t_0 şi egalitatea (5.35). Pentru aceasta considerăm funcţia

$$t \mapsto \boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{f}'(t_0), & t \in I \setminus \{t_0\}, \\ \mathbf{0}, & t = t_0. \end{cases} \tag{5.38}$$

Din faptul că $\mathbf{f}$ este derivabilă în t_0, din (5.38) obţinem (5.28) şi, tot din (5.38), avem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0) + \boldsymbol{\beta}(t)|t - t_0|, \tag{5.39}$$

unde

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}(t)\dfrac{|t - t_0|}{t - t_0}, & t \neq t_0, \\ \mathbf{0}, & t = t_0. \end{cases}$$

Din definiţia lui $\boldsymbol{\beta}$ rezultă

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}(t_0) = \mathbf{0}.$$

Folosind acest rezultat în (5.39), conform Definiţiei 5.5.1 rezultă că $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă în t_0 şi are loc (5.35). **q.e.d.**

Observaţia 5.5.1. *Teorema 5.5.2 arată că pentru funcţiile vectoriale de variabilă reală noţiunile de diferenţiabilitate şi derivabilitate coincid. Deosebirea între aceste noţiuni apare când discutăm efectele lor, diferenţiala şi derivata în punct a funcţiei considerate. Mai precis, diferenţiala funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *în punctul* $t_0 \in I' \cap I$ *este un operator liniar* $d\mathbf{f}(t_0) \in L(I\!R, I\!R^m)$, *iar* $\mathbf{f}'(t_0)$ *este un vector din* $I\!R^m$, *între acestea existând legătura* (5.35).

Definiţia 5.5.3. *Numim* **creşterea** *funcţiei* $\mathbf{f}$ *în* t_0, *corespunzătoare* **creşterii** $t - t_0$ *a variabilei independente, vectorul*

$$\Delta\mathbf{f}(t_0; t - t_0) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) \in I\!R^m, \;\; t \in I,$$

sau echivalent,

$$\Delta\mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0), \;\; h \in I\!R, \;\; t_0 + h \in I.$$

Observaţia 5.5.2. *Din Definiţia 5.5.1 şi Definiţia 5.5.3 rezultă* $\Delta\mathbf{f}(t_0; t-t_0) = d\mathbf{f}(t_0; t-t_0) + \boldsymbol{\alpha}(t)|t-t_0|, \; t \in I$, *sau echivalent,* $\Delta\mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{f}'(t_0)h + \boldsymbol{\alpha}(t_0 + h)|h|, \; h \in I\!R, \; t_0 + h \in I$.

Observaţia 5.5.3. *Deoarece* $\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)|h|$ *tinde la zero* **mai repede** *decât* $d\mathbf{f}(t_0; h)$, *atunci când* $h \to t_0$, *rezultă că pentru valori* **mici** *ale lui* $h = t - t_0$ *creşterea corespunzătoare funcţiei* $\mathbf{f}$ *în* t_0 *este* **suficient de bine aproximată** *prin partea ei principală* $d\mathbf{f}(t_0; h)$. *Deci*

$$\Delta\mathbf{f}(t_0; h) \stackrel{\sim}{=} d\mathbf{f}(t_0; h), \tag{5.40}$$

sau echivalent,

$$\mathbf{f}(t_0 + h) \stackrel{\sim}{=} \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0; h) \tag{5.41}$$

şi prin urmare funcţia afină $\mathbf{A}(\cdot)$ *are forma finală*

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0; t - t_0) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0).$$

Relaţia (5.40), sau echivalenta ei (5.41), se numeşte *formula fundamentală de aproximare a valorilor funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *într–o vecinătate* $V_0 \in \mathcal{V}(t_0)$, sau *lema fundamentală a calculului diferenţial.*

Expresia din membrul drept al relaţiei (5.41) se numeşte *aproximaţia liniară* a funcţiei $\mathbf{f}$.

Observaţia 5.5.4. *Toate consideraţiile de mai sus rămân evident valabile când* $m = 1$, *caz în care obţinem diferenţiabilitatea şi diferenţiala unei funcţii reale de o variabilă reală. Dacă* $f \in \mathcal{F}(I)$, $I \subset I\!R$, I *interval, este derivabilă în* $t_0 \in I' \cap I$, *atunci* f *este diferenţiabilă în* t_0 (*este valabilă şi reciproca*) *şi avem*

$$f(t) = f(t_0) + df(t_0)(h) + \alpha(t_0 + h)|h|, \;\; h \in I\!R, \;\; t_0 + h \in I, \tag{5.42}$$

unde

$$df(t_0; h) = df(t_0)(h) = f'(t_0)h, \;\; h \in I\!R. \tag{5.43}$$

În acest caz particular mărimile introduse mai sus pot fi interpretate geometric.

În primul rând $df(t_0) \in L(I\!R, I\!R)$ este o funcţie reală de variabilă reală, liniară. Graficul acestei funcţii este o dreaptă care trece prin originea reperului cartezian din plan având panta egală cu $f'(t_0)$, adică $\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(t_0)$.

Pentru a vedea legătura (5.43) direct pe graficul funcţiei $f \in \mathcal{F}(I)$ în reperul cartezian tOx cât şi aproximarea (5.41), care în acest caz particular devine

$$f(t_0 + h) \overset{\sim}{=} f(t_0) + f'(t_0)h, \ \ h \in I\!R, \tag{5.44}$$

să observăm mai întâi că tangenta (T) la graficul funcţiei f în punctul $M_0(t_0, f(t_0))$ are ecuaţia

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in I\!R.$$

Această tangentă intersectează paralela la axa Ox, de ecuaţie $t = t_0 + h$, în punctul $P(t_0 + h, f(t_0) + f'(t_0)h)$. Paralela $t = t_0 + h$ intersectează graficul funcţiei f în punctul $M(t_0 + h, f(t_0 + h))$ şi paralela prin M_0 la axa Ot în punctul $Q(t_0 + h, f(t_0))$. În sfârşit, aceeaşi paralelă la axa Ox intersectează axa Ot în punctul $M'(t_0 + h, 0)$.

Acum, avem toate elementele pentru a interpreta geometric mărimile introduse mai sus, şi anume:

- mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\overrightarrow{M'Q}$ pe direcţia versorului $\mathbf{e}'_2 = (0, 1)$ este $f(t_0)$;
- mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\overrightarrow{QP}$ pe direcţia lui $\mathbf{e}'_2$ este $df(t_0; h)$, valoarea în h a diferenţialei lui f în t_0;
- mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\overrightarrow{PM}$ pe direcţia lui $\mathbf{e}'_2$ este cantitatea $\alpha(t_0 + h)|h| = \alpha(t)|t - t_0|$;
- mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $M'P$ pe direcţia lui $\mathbf{e}'_2$ este $f(t_0 + h)$;
- mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\overrightarrow{M'M}$ pe $\mathbf{e}'_2$ este $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$.

Când h este *foarte mic*, numărul $\| \overrightarrow{PM} \|$ este, de asemenea, foarte mic. Prin urmare, mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $M'P$ pe direcţia lui $\mathbf{e}'_2$ se poate aproxima cu mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\overrightarrow{M'M}$ pe $\mathbf{e}'_2$ şi deci (5.44) este justificată.

Să considerăm acum funcţia identică

$$i_{I\!R} : I\!R \to I\!R, \ \ i_{I\!R}(t) = t, \ t \in I\!R.$$

Pentru orice $t_0 \in I\!R$ are loc identitatea

$$i_{I\!R}(t) = i_{I\!R}(t_0) + 1 \cdot (t - t_0) + 0 \cdot |t - t_0|, \ \forall\, t \in I\!R.$$

Dacă comparăm această egalitate cu (5.42) şi (5.43) constatăm că funcţia (5.44) este diferenţiabilă în orice punct $t_0 \in I\!R$ şi

$$di_{I\!R}(t_0; h) = di_{I\!R}(t_0)(h) = 1 \cdot h = h, \ \ \forall\, h \in I\!R,$$

adică, indiferent de t_0, graficul diferenţialei lui $i_{I\!R}$ este prima bisectoare a reperului cartezian din plan. Fiindcă această diferenţială este aceeaşi în orice punct $t_0 \in I\!R$ ea se notează prin

$$di_{I\!R}(t) = dt.$$

Prin urmare $dt \in L(I\!R, I\!R)$. De acum, lui dt îi vom spune *diferenţiala variabilei independente*. Valorile sale se calculează după regula

$$dt(h) = h, \ \ \forall\, h \in I\!R. \tag{5.45}$$

care arată că matricea operatorului liniar dt în baza canonică din $I\!R$, formată dintr–un singur versor, este egală cu 1.

Folosind acum (5.45) constatăm că (5.35) se scrie în forma

$$d\mathbf{f}(t_0)(h) = \mathbf{f}'(t_0)dt(h), \ \ \forall\, h \in I\!R,$$

de unde, renunţând la variabila h, observăm că aplicaţia liniară $d\mathbf{f}(t_0) \in L(I\!R, I\!R^m)$ se exprimă cu ajutorul aplicaţiei liniare $dt \in L(I\!R, I\!R)$ prin

$$d\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)dt.$$

În particular, în cazul $m = 1$, avem

$$df(t_0) = f'(t_0)dt.$$

Teorema 5.5.3. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *este diferenţiabilă în punctul* $t_0 \in I' \cap I$ *dacă şi numai dacă funcţiile componente sunt diferenţiabile în* t_0. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* t_0, *atunci are loc*

$$d\mathbf{f}(t_0) = (df_1(t_0), df_2(t_0), ..., df_m(t_0)). \tag{5.46}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat folosind Teorema 5.1.3 şi Teorema 5.5.2. **q.e.d.**

Observaţia 5.5.5. *Membrul doi din* (5.46) *nu este vector din* $I\!\!R^m$ *deoarece coordonatele* $df_i(t_0)$, $i \in \overline{1, m}$, *sunt aplicaţii liniare de la* $I\!\!R$ *la* $I\!\!R$, *prin urmare*

$$d\mathbf{f}(t_0) \in \underbrace{L(I\!\!R, I\!\!R) \times L(I\!\!R, I\!\!R) \times ... \times L(I\!\!R, I\!\!R)}_{de\ m\ ori} = (L(I\!\!R, I\!\!R))^m, \tag{5.47}$$

deci componenta de pe locul k *este diferenţiala funcţiei* f_k *în punctul* t_0

$$df_k(t_0) = f_k'(t_0)dt, \quad k \in \overline{1, m}.$$

Relaţia de apartenenţă (5.47) *afirmă că*

$$L(I\!\!R, I\!\!R^m) = \underbrace{L(I\!\!R, I\!\!R) \times L(I\!\!R, I\!\!R) \times ... \times L(I\!\!R, I\!\!R)}_{de\ m\ ori}.$$

Definiţia 5.5.4. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *este* **diferenţiabilă**, *dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în orice punct* $t \in I$.

Definiţia 5.5.5. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *funcţie diferenţiabilă. Aplicaţia* $t \in I \mapsto d\mathbf{f}(t) \in L(I\!\!R, I\!\!R^m)$ *se numeşte* **diferenţiala de ordinul întâi** *a funcţiei* $\mathbf{f}$.

Funcţia din Definiţia 5.5.5 are următoarele proprietăţi imediate:

$$d\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}'(t)dt;$$

$$d\mathbf{f}(t) = (df_1(t), df_2(t), ..., df_m(t)) \in (L(I\!\!R, I\!\!R))^m,$$

unde diferenţialele funcţiilor coordonate f_k ale funcţiei $\mathbf{f}$ sunt $df_k(t) = f_k'(t)dt \in L(I\!\!R, I\!\!R)$, $k \in \overline{1, m}$.

Utilizând rezultatele din această secţiune, cât şi pe cele din prima secţiune a acestui capitol, putem lesne demonstra

Teorema 5.5.4. (**Reguli de diferenţiere**) *Fie funcţiile scalare $\varphi \in \mathcal{F}(I)$ şi $\psi \in \mathcal{F}(J, I)$, unde I şi J sunt intervale din $I\!R$, funcţiile vectoriale $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ din $\mathcal{F}(I, I\!R^m)$ şi constantele reale arbitrare λ şi μ. Dacă aceste funcţii sunt diferenţiabile, atunci funcţiile: $\varphi\mathbf{f}$; $\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}$; $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$; $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ şi $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ (în cazul $m = 3$); $\mathbf{f}\circ\psi$; şi funcţia pozitivă $\|\mathbf{f}\|$ sunt diferenţiabile şi, pentru orice $t \in I$, au loc următoarele proprietăţi:*

$$d(\varphi\mathbf{f})(t) = \varphi(t)d\mathbf{f}(t) + \mathbf{f}(t)d\varphi(t);$$

$$d(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})(t) = \lambda\, d\mathbf{f}(t) + \mu\, d\mathbf{g}(t)$$

$$d(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t) = \mathbf{g}(t)\cdot d\mathbf{f}(t) + \mathbf{f}(t)\cdot d\mathbf{g}(t), ;$$

$$d(\mathbf{f}\times\mathbf{g})(t) = (d\mathbf{f}(t))\cdot\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)\cdot d(\mathbf{g}(t));$$

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})(t) = (d\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{f}(t), d\mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), d\mathbf{h}(t));$$

$$d(\mathbf{f}\circ\psi)(\tau) = \mathbf{f}'(\psi(\tau))d\psi(\tau),\ \ \forall\, \tau \in J;$$

$$d\|\mathbf{f}\|(t) = \frac{1}{\|\mathbf{f}(t)\|}\mathbf{f}(t)\cdot d\mathbf{f}(t)$$

Corolarul 5.5.1. *Dacă funcţia $\mathbf{h} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ are direcţie fixă, adica $\mathbf{h}(t) = \varphi(t)\mathbf{c}$, unde $\mathbf{c}$ este vector constant din $I\!R^m$, iar funcţia φ este funcţie diferenţiabilă, atunci $\mathbf{h}$ este diferenţiabilă şi $d\mathbf{h}(t) = (d\varphi(t))\mathbf{c},\ t \in I$.*

Demonstraţie. Se foloseşte prima regulă de diferenţiere din Teorema 5.5.4 şi se ţine cont că diferenţiala funcţiei constante este identic nulă. **q.e.d.**

Corolarul 5.5.2. *Fie funcţia diferenţiabilă $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$. Dacă funcţia reală de variabilă reală $\|\mathbf{f}\|$ este funcţia constantă, atunci*

$$\mathbf{f}(t)\cdot d\mathbf{f}(t) = 0,\ \ \forall\, t \in I.$$

Demonstraţie. Identitatea de demonstrat rezultă imediat din ultima egalitate a Teoremei 5.5.4, ţinându–se totodată cont de faptul că diferenţiala funcţiei constante este nulă şi că spaţiul dual $(L(I\!R))^m$ este izomorf cu spaţiul vectorial $I\!R^m$ deoarece au aceeaşi dimensiune. **q.e.d.**

În ipotezele Corolarului 5.5.2, identitatea menţionată în concluzia acestuia arată că vectorul $\mathbf{f}(t) \in I\!R^m$ este ortogonal pe vectorul $d\mathbf{f}(t) \in I\!R^m$.

5.6 Diferenţiabilitate şi diferenţiale de ordin superior ale funcţiilor vectoriale de argument real

Dacă funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ este diferenţiabilă pe intervalul deschis $I \in I\!R$, există funcţia

$$d\mathbf{f} : I \to L(I\!R, I\!R^m),$$

numită diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei $\mathbf{f}$ pe intervalul I, a cărei valoare în punctul $t \in I$, $(d\mathbf{f})(t)$ sau, simplu, $d\mathbf{f}(t)$, este diferenţiala funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul t. Evident

$$(d\mathbf{f})(t) \in L(I\!R, I\!R^m), \ \forall\, t \in I$$

şi

$$((d\mathbf{f})(t))(h) = d\mathbf{f}(t)(h) = d\mathbf{f}(t;h) \in I\!R^m, \ \forall\, h \in I\!R.$$

Vectorul $(d\mathbf{f})(t;h) = ((d\mathbf{f})(t))(h) = d\mathbf{f}(t;h) = d\mathbf{f}(t)(h) \in I\!R^m$ se calculează după legea

$$(d\mathbf{f})(t;h) = \mathbf{f}'(t)(h), \quad \forall\, h \in I\!R. \tag{5.48}$$

Această formulă se mai poate scrie în forma

$$(d\mathbf{f})(\,\cdot\,;\, h) = (d\mathbf{f})(\cdot)(h) = \mathbf{f}'(\cdot)\, h, \qquad \forall\, h \in I\!R, \tag{5.49}$$

în care trebuie să înţelegem că punctul dintre paranteze urmează a fi ocupat, atunci când se impune precizat, de o valoare a lui t din intervalul deschis I.

Definiţia 5.6.1. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *se numeşte* **de două ori diferenţiabilă în** $t_0 \in I$ *dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă pe intervalul deschis* I *şi funcţia diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* t_0.

Conform acestei definiţii există diferenţiala în punctul t_0 a funcţiei df,

$$(d(d\mathbf{f}))(t_0) \in L(I\!R, L(I\!R, I\!R^m)),$$

funcţie liniară continuă de la $I\!R$ în $L(I\!R, I\!R^m)$. Convenim să notăm această diferenţială cu $(d^2\mathbf{f})(t_0)$, sau $d^2\mathbf{f}(t_0)$. Deci

$$d^2\mathbf{f}(t_0) \in L(I\!R, L(I\!R, I\!R^m)); \quad (d^2\mathbf{f}(t_0))(h) \in L(I\!R, I\!R^m), \ \forall\, h \in I\!R,$$

aceasta însemnând că

$$((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k) \in I\!R^m, \ \ \forall\, (h,k) \in I\!R \times I\!R.$$

Deoarece spaţiul liniar $L(I\!R, L(I\!R, I\!R^m))$ este izomorf cu $L(I\!R \times I\!R, I\!R^m)$, vectorul $((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k) \in I\!R^m$ se poate identifica cu vectorul $(d^2\mathbf{f}(t_0))(h,k) \in I\!R^m$, unde

$$((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k) \equiv (d^2\mathbf{f}(t_0))(h,k), \qquad \forall\, (h,k) \in I\!R \times I\!R.$$

Deci, $d^2\mathbf{f}(t_0)$ este o funcţie biliniară continuă pe $I\!R \times I\!R$ şi simetrică deoarece

$$d^2\mathbf{f}(t_0))(h,k) = d^2\mathbf{f}(t_0))(k,h), \qquad \forall\, (h,k) \in I\!R \times I\!R.$$

Pentru determinarea expresiei diferenţialei de ordinul al doilea a funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul t_0, $d^2\mathbf{f}(t_0)$, folosim Definiţia 5.6.1 şi relaţiile (5.48), (5.49). Conform acestora, avem

$$((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k)(\mathbf{f}''(t_0)h)(k).$$

Putem scrie $(\mathbf{f}''(t_0) \cdot h)(k)$ căci se poate identifica vectorul $\mathbf{f}''(t_0)\, h \in I\!R^m$ cu funcţia liniară $h \mapsto \mathbf{f}''(t_0)\, h$ prin izomorfismul natural care există între spaţiile vectoriale $L(I\!R, I\!R^m)$ şi $I\!R^m$. Având în vedere expresia unei aplicaţii liniare din $L(I\!R, I\!R^m)$, putem scrie

$$(\mathbf{f}''(t_0)\, h)(k) = \mathbf{f}''(t_0)hk, \qquad \forall\, (h,k) \in I\!R \times I\!R.$$

Deci

$$d^2\mathbf{f}(t_0)(h,k) = \mathbf{f}''(t_0)hk, \qquad \forall\, (h,k) \in I\!R \times I\!R. \tag{5.50}$$

Definiţia 5.6.2. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *funcţie de două ori diferenţiabilă în* $t_0 \in I$. *Aplicaţia biliniară simetrică*

$$d^2\mathbf{f}(t_0) = d^2\mathbf{f}(t_0; \cdot, \cdot) = d^2\mathbf{f}(t_0)(\cdot, \cdot) : I\!R \times I\!R \to I\!R^m,$$

$$d^2\mathbf{f}(t_0)(h, k) = d^2\mathbf{f}(t_0; h, k) = d(d\mathbf{f}(\cdot; h)(t_0)(k)) = (\mathbf{f}(\cdot)h)'(t_0)k = \mathbf{f}''(t_0)hk,$$

se numeşte **diferenţiala a doua** *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *în punctul* $t_0 \in I$.

Având în vedere (5.45), cu ajutorul căreia putem scrie:

$$dt(h) = h, \quad \forall\, h \in I\!R; \quad dt(k) = k, \qquad \forall\, k \in I\!R,$$

rezultă că (5.50) se mai poate scrie în forma

$$d^2\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}''(t_0)(dt)^2 = \mathbf{f}''(t_0)dt^2. \tag{5.51}$$

Definiţia 5.6.3. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *se numeşte de două ori diferenţiabilă dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în orice punct* $t \in I$.

Definiţia 5.6.4. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *funcţie de două ori diferenţiabilă. Aplicaţia biliniară simetrică*

$$d^2\mathbf{f} = d(d\mathbf{f}) : I \to L(I\!R, L(I\!R, I\!R^m)) \simeq L(I\!R \times I\!R, I\!R^m),$$

se numeşte **diferenţiala a doua** *a câmpului vectorial* $\mathbf{f}$ *dacă*

$$t \in I \mapsto d^2\mathbf{f}(t) \in L(I\!R \times I\!R, I\!R^m),$$

unde

$$d^2\mathbf{f}(t)(h, k) = d^2\mathbf{f}(t; h, k) = \mathbf{f}''(t)hk, \qquad \forall\,(h, k) \in I\!R \times I\!R.$$

Având în vedere relaţia (5.51) putem, de asemenea, să scriem

$$t \in I \mapsto d^2\mathbf{f}(t), \;\; d^2\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}''(t)dt^2. \tag{5.52}$$

Remarcăm că în cazul $m = 1$, (5.50) devine

$$d^2 f(t_0; h, k) = f''(t_0)\, hk, \qquad \forall\,(h, k) \in I\!R \times I\!R, \tag{5.53}$$

care arată că diferenţiala a doua a unei funcţii reale de o variabilă reală este o formă biliniară simetrică pe $I\!R$, în timp ce (5.52), în acest caz particular, devine $d^2 f(t) = f''(t)dt^2$.

Teorema 5.6.1. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$, I *interval din* $I\!R$, *este de două ori diferenţiabilă în* $t_0 \in I$ *dacă şi numai dacă funcţiile componente* f_j, $j \in \overline{1, m}$, *sunt de două ori diferenţiabile în* t_0. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *este de două ori diferenţiabilă în* t_0, *atunci are loc egalitatea*

$$d^2\mathbf{f}(t_0) = (d^2 f_1(t_0), d^2 f_2(t_0), ..., d^2 f_m(t_0)),$$

unde

$$d^2 f_j(t_0) = f_j''(t_0)dt^2, \;\; j \in \overline{1, m}.$$

Demonstraţie. Aceste egalităţi rezultă din (5.50), (5.17), (5.53) şi (5.45). **q.e.d.**

Aşadar, diferenţiala a doua a funcţiei vectoriale de argument real $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ în punctul $t_0 \in I$ este o $m-$uplă ordonată de diferenţiale de ordinul al doilea ale funcţiilor coordonate.

Observaţia 5.6.1. *Aplicând funcţiei diferenţiala de ordinul $k-1$ a funcţiei $\mathbf{f}$ procedeul care ne-a condus la diferenţiabilitatea şi diferenţiala de ordinul al doilea pentru funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$, vom fi conduşi la noţiunile de diferenţiabilite şi diferenţială de ordinul k a funcţiei $\mathbf{f}$ într–un punct $t_0 \in I$.*

Definiţia 5.6.5. *Funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ se numeşte* **de k ori diferenţiabilă în** $t_0 \in I$ *dacă $\mathbf{f}$ este de $k-1$ ori diferenţiabilă pe intervalul deschis I şi funcţia diferenţiala de ordinul $k-1$ a funcţiei $\mathbf{f}$*

$$d^{k-1}\mathbf{f}(\cdot; h_1, ..., h_{k-1}) : I \to L(\underbrace{I\!R \times ... \times I\!R}_{k-1 \ ori}, I\!R^m),$$

$$d^{k-1}\mathbf{f}(t; h_1, ..., h_{k-1}) = \mathbf{f}^{(k-1)}(t)h_1...h_{k-1}, \quad \forall\, (h_1, h_2, ..., h_{k-1}) \in I\!R^{k-1}$$

este diferenţiabilă în t_0.

Definiţia 5.6.6. *Dacă funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ este de k ori diferenţiabilă în punctul t_0 din intervalul deschis $I \subset I\!R$, atunci aplicaţia k liniară*

$$d^k\mathbf{f}(t_0) = d^k\mathbf{f}(t_0)(\cdot, \cdot, ..., \cdot) = d^k\mathbf{f}(t_0; \cdot, \cdot, ..., \cdot) : \underbrace{I\!R \times ... \times I\!R}_{k \ ori} \to I\!R^m,$$

ale cărei valori sunt date de

$$d^k\mathbf{f}(t_0)(h_1, h_2, ..., h_k) = \mathbf{f}^{(k)}(t_0)h_1h_2...h_k, \quad \forall\, (h_1, h_2, ..., h_k) \in I\!R^k, \tag{5.54}$$

se numeşte **diferenţiala de ordinul k** *a funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul t_0.*

Definiţia 5.6.7. *Funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ se numeşte* **diferenţiabilă de k ori** *pe o submulţime deschisă a intervalului deschis $I \subset I\!R$ dacă $\mathbf{f}$ este de k ori diferenţiabilă în orice punct din acea submulţime. Funcţia $\mathbf{f}$ este* **diferenţiabilă de k ori** *dacă ea este de k ori diferenţiabilă în orice punct din I.*

Definiţia 5.6.8. *Dacă funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ este de k ori diferenţiabilă, atunci funcţia k–liniară*

$$d^k\mathbf{f} = d(d^{k-1}\mathbf{f}) : I \to L(I\!R, L(I\!R^{k-1}, I\!R^m)) \simeq L(I\!R^k, I\!R^m),$$

se numeşte **diferenţiala de ordinul k** *a câmpului vectorial $\mathbf{f}$ dacă*

$$t \in I \mapsto d^k\mathbf{f}(t) \in L(I\!R^k, I\!R^m),$$

unde

$$d^k\mathbf{f}(t)(h_1, h_2, ..., h_k) = d^k\mathbf{f}(t; h_1, h_2, ..., h_k) = \mathbf{f}^k(t)h_1h_2...h_k.$$

Având în vedere (5.45), din ultima egalitate obţinem

$$d^k\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}^{(k)}(t)dt^k,$$

sau echivalent,

$$d^k\mathbf{f}(t) = \Big(d^k f_1(t), d^k f_2(t), ..., d^k f_m(t)\Big),$$

unde $d^k f_j(t_0) = f_j^{(k)}(t_0)dt^k, \;\; j \in \overline{1,m}.$

Teorema 5.6.2. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *este de* k *ori diferenţiabilă dacă şi numai dacă* $\mathbf{f} \in C^k(I, I\!R^m)$*, sau echivalent,* $f_j \in C^k(I), j \in \overline{1,m}.$

Dacă $\mathbf{f}$ *este de* k *ori diferenţiabilă, atunci*

$$d^k\mathbf{f}(t) = (d^k f_1(t), d^k f_2(t), ..., d^k f_m(t)), \quad t \in I,$$

unde $d^k f_j(t) = f_j^{(k)}(t)dt^k, \qquad t \in I.$

Demonstraţie. Concluziile acestei teoreme rezultă direct din rezultatele demonstrate anterior. **q.e.d.**

5.7 Formula lui Taylor

Presupunem că funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ este astfel încât există derivatele sale până la ordinul $k-1$ inclusiv pe mulţimea $V \cap I$, unde $V \in \mathcal{V}(t_0)$, iar t_0 este un punct fixat din intervalul real I. Presupunem în plus că derivata de ordinul $k-1$ a funcţiei $\mathbf{f}$ este derivabilă în t_0. Prin urmare, există vectorii

$$\mathbf{f}(t_0), \quad \mathbf{f}'(t_0), \quad ..., \quad \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0), \quad \mathbf{f}^{(k)}(t_0) \quad \in \quad I\!R^m.$$

Definiţia 5.7.1. *Funcţia polinomială* $\mathbf{P}_k(\,\cdot\,; t_0, \mathbf{f}) : I\!R \to I\!R^m$*, definită prin*

$$\mathbf{P}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + ... + \frac{\mathbf{f}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k, \tag{5.55}$$

se numeşte **polinomul lui Taylor**[1] *de grad* k*, asociat funcţiei* f*, centrat în* t_0*.*

Coeficienţii polinomului Taylor sunt vectori din $I\!R^m$.

Din (5.55) observăm că funcţia polinomială $\mathbf{P}_k(\,\cdot\,; t_0, \mathbf{f})$ are aceleaşi derivate cu $\mathbf{f}$ în punctul t_0, până la ordinul k inclusiv

$$\mathbf{P}_k(t_0; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t_0), \qquad \mathbf{P}_k'(t_0; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}'(t_0), \quad ..., \quad \mathbf{P}_k^{(k)}(t_0; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}^{(k)}(t_0).$$

Definiţia 5.7.2. *Funcţia vectorială de argument real*

$$\mathbf{R}_k(\,\cdot\,; t_0, \mathbf{f}) : I \to I\!R^m, \qquad \mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{P}_k(t; t_0, \mathbf{f}), \quad t \in I, \tag{5.56}$$

se numeşte **rest de ordin** k *al funcţiei* $\mathbf{f}$*.*

[1] Taylor, Brook (1685–1731), matematician englez.

Ţinând cont că funcţia $\mathbf{f}$ este continuă în t_0, din 5.55 şi (5.56) obţinem

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{R}_k(t;t_0,\mathbf{f}) = \mathbf{0}. \tag{5.57}$$

Apoi, din (5.56) mai rezultă

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}_k(t;t_0,\mathbf{f}) + \mathbf{R}_k(t;t_0,\mathbf{f}),\ \forall\, t \in I. \tag{5.58}$$

Definiţia 5.7.3. *Egalitatea (5.58) se numeşte* **formula lui Taylor** *pentru funcţia* $\mathbf{f}$ *cu rest de ordin* k.

Observaţia 5.7.1. *Având în vedere (5.57), din (5.58) constatăm că pentru valori ale lui t suficient de apropiate de t_0 avem $\mathbf{f}(t) \cong \mathbf{P}_k(t;t_0,\mathbf{f})$. Această relaţie constituie o formulă aproximativă de calcul a valorilor funcţiei $\mathbf{f}$ într–o vecinătate a punctului t_0, eroarea absolută care se comite când se foloseşte această aproximare este dată de norma vectorului $\mathbf{R}_k(t;t_0,\mathbf{f})$.*

Teorema de mai jos dă o evaluare a erorii care se comite când se utilizează aproximarea de mai sus.

Teorema 5.7.1. *Fie $\mathbf{f} \in C^k\Big([a,b],\mathbb{R}^m\Big)$ cu proprietatea că funcţia vectorială de variabilă reală $\mathbf{f}^{(k)} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}^m)$ este derivabilă pe intervalul deschis (a,b).*

Dacă există $\lambda > 0$ astfel încât să avem

$$\|\mathbf{f}^{(k+1)}(t)\| \leq \lambda,\ \forall\, t \in (a,b), \tag{5.59}$$

atunci are loc estimarea

$$\|\mathbf{R}_k(b;a,\mathbf{f})\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{5.60}$$

Demonstraţie. Să definim funcţia

$$\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(t) - \sum_{s=1}^{k} \frac{(b-t)^s}{s!}\mathbf{f}^{(s)}(t),\ t \in [a,b]. \tag{5.61}$$

Din (5.58), (5.61) şi ipotezele teoremei rezultă că $\boldsymbol{\varphi}$ este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\boldsymbol{\varphi}(b) = \mathbf{0},\quad \boldsymbol{\varphi}(a) = \mathbf{R}_k(b;a,\mathbf{f}). \tag{5.62}$$

În plus, $\boldsymbol{\varphi}$ este derivabilă pe (a,b) şi

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}\mathbf{f}^{(k+1)}(t),\ \forall\, t \in (a,b). \tag{5.63}$$

Să considerăm acum funcţia reală de variabilă reală

$$g : [a,b] \to \mathbb{R},\quad g(t) = -\lambda\, \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!},\ \forall\, t \in [a,b]. \tag{5.64}$$

Evident, din (5.64) şi definiţia derivatelor laterale rezultă că

$$g'(t) = \lambda \frac{(b-t)^k}{k!} = g'_d(t),\quad \forall\, t \in [a,b]. \tag{5.65}$$

Din (5.59), (5.63) şi (5.65) observăm că $\|\boldsymbol{\varphi}'_d(t)\| \leq g'_d(t),\ \forall\, t \in (a,b)$. Prin urmare, funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ din (5.61) şi funcţia g din (5.64) satisfac ipotezele Teoremei 5.2.2, deci

$$\|\boldsymbol{\varphi}(b) - \boldsymbol{\varphi}(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Înlocuind în această relaţie pe $\boldsymbol{\varphi}(b)$ şi $\boldsymbol{\varphi}(a)$ cu valorile lor date în (5.62) şi ţinând cont de expresia lui g din (5.64), deducem (5.60). **q.e.d.**

Pentru a exprima restul de ordin k din formula lui Taylor (5.58) să remarcăm că procedând prin inducţie matematică după k şi folosind (5.60) putem demonstra că

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \displaystyle\sum_{s=1}^{k} \frac{(t-t_0)^s}{s!}\mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{(t-t_0)^k} = \mathbf{0}. \tag{5.66}$$

Se observă că pentru $k = 1$ se obţine definiţia derivatei în t_0 a funcţiei $\mathbf{f}$.

Să introducem acum funcţia

$$\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}(I \setminus \{t_0\}, I\!\!R^m), \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = k!\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \displaystyle\sum_{s=1}^{k} \frac{(t-t_0)^s}{s!}\mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{(t-t_0)^k}. \tag{5.67}$$

Din (5.66) şi (5.67) deducem

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{0}. \tag{5.68}$$

Aceasta arată că funcţia $\boldsymbol{\alpha}$ din (5.67) poate fi prelungită prin continuitate în t_0.

Atunci, din (5.67) obţinem

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^{k} \frac{\mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{s!}(t-t_0)^s + \frac{(t-t_0)^k}{k!}\boldsymbol{\alpha}(t), \quad t \in I. \tag{5.69}$$

Comparând (5.69) cu (5.58) deducem că (5.67) este formula lui Taylor, restul de ordin k fiind

$$\mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \frac{(t-t_0)^k}{k!}\boldsymbol{\alpha}(t), \quad t \in I. \tag{5.70}$$

Din (5.70) şi (5.68) obţinem $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{1}{|t-t_0|^k}\mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{0}$. Această relaţie arată că fiecare din coordonatele funcţiei $\mathbf{R}_k(\cdot; t_0, \mathbf{f})$ este *infinit mic* în raport cu $|t-t_0|^k$ pentru $t \to t_0$ [3, p. 141], fapt ce poate fi scris în forma

$$\mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{o}(|t-t_0|^k),\ t \to t_0.$$

Dacă folosim această exprimare a restului de ordin n în (5.58) putem da o altă exprimare pentru formula lui Taylor şi anume

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^{k} \frac{\mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{s!}(t-t_0)^s + \mathbf{o}(|t-t_0|^k),\ t \to t_0.$$

Restul dedus în (5.70) se numeşte *restul lui Peano*[2], iar formula (5.69) este cunoscută sub numele de *formula lui Taylor–Young* [13, p. 100].

În cazul $m = 1$, rezultatele deduse mai sus se păstrează. În plus, într–un paragraf ulterior, vom arăta că putem da şi alte expresii restului de ordin n din formula lui Taylor.

[2] Peano, Giuseppe (1858–1932), matematician, logician şi lingvist italian.

Observaţia 5.7.2. *Dacă în formula* (5.69) *considerăm* $k = 1$, *obţinem*

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\boldsymbol{\alpha}(t), \quad t \in I, \tag{5.71}$$

care defineşte diferenţiabilitatea funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *în punctul* $t_0 \in I$ (*vezi Definiţia* 5.5.1). *Deci formula lui Taylor* (5.58) *generalizează noţiunea de diferenţiabilitate a unei funcţii vectoriale de argument real.*

Observaţia 5.7.3. *Dacă folosim* (5.54) *constatăm că* (5.69) *se poate scrie în* **forma diferenţială**

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} d^s\mathbf{f}(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, ..., t - t_0}_{s-ori}) + \frac{(t - t_0)^k}{k!}\boldsymbol{\alpha}(t), \tag{5.72}$$

sau în forma

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} d^s\mathbf{f}(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, ..., t - t_0}_{s-ori}) + \mathbf{o}(|t - t_0|^k), \quad t \to t_0,$$

în care termenul corespunzător lui $k = 0$ *este* $\mathbf{f}(t_0)$, *iar* $0! = 1$.

5.8 Drumuri parametrizate în $I\!R^m$

Fie I un interval din $I\!R$ şi $I\!R^m$ spaţiul Euclidian $m-$dimensional, unde $m \geq 2$.

Definiţia 5.8.1. *Se numeşte* **drum parametrizat** *definit pe* I *cu valori în* $I\!R^m$, *sau simplu* **drum în** $I\!R^m$, *orice aplicaţie continuă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$.

Definiţia 5.8.2. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *este un drum în* $I\!R^m$, *atunci mulţimea* $\mathbf{f}(I)$ *se numeşte* **traiectoria, imaginea**, *sau* **hodograful** *drumului* $\mathbf{f}$.

Definiţia 5.8.3. *Dacă* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ *este un drum în* $I\!R^m$, *atunci ecuaţiile*

$$x_i = f_i(t), \quad t \in I, \quad x_i \in I\!R, \tag{5.73}$$

se numesc **ecuaţii parametrice** *ale drumului* $\mathbf{f}$ *în* $I\!R^m$, *iar ecuaţia*

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \quad t \in I, \quad \mathbf{x} \in I\!R^m \tag{5.74}$$

se numeşte **ecuaţia vectorială** *a drumului* $\mathbf{f}$ *în* $I\!R^m$. *Variabila* t *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *se numeşte* **parametru**.

Exemplul 5.8.1. *Un* **drum parametrizat în plan** *este o aplicaţie continuă de forma* $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I, I\!R^2)$. **Ecuaţiile parametrice** *ale drumului parametrizat în plan* $\mathbf{f}$ *sunt* $\begin{cases} x = f_1(t), & \\ y = f_2(t), & t \in I, \end{cases}$ *în care am notat* $(x_1, x_2) = (x, y)$. **Ecuaţia vectorială** *a aceluiaşi drum este*

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad t \in I, \tag{5.75}$$

unde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ *este vectorul de poziţie al punctului* $M \in \mathbb{E}^2$ *care are coordonatele* x *şi* y*, iar* $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$. **Traiectoria** *drumului în plan* (5.75) *este*

$$\{M(x,y) \in \mathbb{E}^2 : \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad t \in I\}.$$

Exemplul 5.8.2. *Un* **drum parametrizat în spaţiu** *este o funcţie vectorială de variabilă reală, continuă, de forma* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$*, unde* $I \subset \mathbb{R}$ *este interval.* **Ecuaţiile parametrice** *ale drumului* $\mathbf{f}$ *sunt*

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

traiectoria *drumului este submulţimea lui* $\mathbb{E}^3$ *definită prin*

$$\{M(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 : \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad t \in I\},$$

iar **ecuaţia vectorială** *a sa este*

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad t \in I, \tag{5.76}$$

unde

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \qquad t \in I.$$

Exemplul 5.8.3. *Fie* $\mathbf{f} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ *care, în baza Definiţiei* 5.8.1*, este un drum parametrizat în plan. Traiectoria acestui drum este mulţimea punctelor din planul Euclidian raportat la reperul cartezian* xOy *ale căror coordonate* x *şi* y *verifică condiţiile* $x^2 + y^2 = 1$ *şi* $y \geq 0$*. Se vede imediat că traiectoria acestui drum este semicercul din semiplanul* $y \geq 0$ *care are centrul în origine şi raza egală cu* 1.

Exemplul 5.8.4. *Drumul* $\mathbf{h} : [-1, +1] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{h}(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2})$ *are ca traiectorie aceeaşi mulţime de puncte ca şi traiectoria drumului din Exemplul* 5.8.3.

Definiţia 5.8.4. *Sensul de creştere al parametrului* t *din ecuaţia vectorială* (5.74) *a drumului parametrizat* $\mathbf{f}$ *în* $\mathbb{R}^m$ *imprimă un* **sens de parcurs** *pe traiectorie care se numeşte* **sens pozitiv de parcurs**. *Drumul* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ *se numeşte* **orientat** *dacă este precizat un sens de parcurs al acestuia.*

Exemplul 5.8.5. *Funcţia* $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (\cos nt, \sin nt)$, $n \in \mathbb{N}^*$*, are ca traiectorie cercul de rază* 1 *cu centrul în originea reperului, parcurs însă de* n *ori în sens direct trigonometric. Când* t *parcurge intervalul* $\left[0, \dfrac{2\pi}{n}\right]$*, punctul corespunzător de pe traiectorie,* $M(\cos nt, \sin nt)$*, parcurge o dată cercul.*

Exemplul 5.8.6. *Funcţia* $\mathbf{f}:[0,2\pi]\to I\!R^3,\ \mathbf{f}(t)=(a\cos t, a\sin t, b)$ *unde* a *şi* b *sunt constante reale, iar* $a>0,$ *este un drum parametrizat în spaţiu situat la intersecţia* **cilindrului circular** *de ecuaţie* $x^2+y^2=a^2$ *cu planul paralel cu planul* xOy *de ecuaţie* $z=b.$ *Ecuaţiile parametrice ale drumului sunt*

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=b, \qquad\qquad t\in[0,2\pi],\end{cases}$$

iar ecuaţia sa vectorială este $\mathbf{r}=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+b\,\mathbf{k}.$ *Evident, traiectoria acestui drum în* $I\!R^3$ *este un cerc.*

Exemplul 5.8.7. *Drumul parametrizat*

$$\mathbf{f}:[0,2\pi]\to I\!R^3,\qquad \mathbf{f}(t)=(R\cos t, R\sin t, ht),\quad R>0,\quad h\in I\!R^*,$$

are drept traiectorie o **buclă** *din* **elicea cilindrică de pas constant**.

Într-adevăr, traiectoria acestui drumul poate fi descrisă *cinematic* în modul următor. Presupunem că la momentul $\tau=0,$ punctul $M(x,y,z),$ aflat în mişcarea care se va descrie mai jos, se găseşte în $A(R,0,0).$

Fie (G) o generatoare a cilindrului circular de rază R cu axa de rotaţie axa $Oz.$ La momentul $\tau=0,$ generatoarea (G) trece prin punctul $A.$

Presupunem că cilindrul execută o *mişcare circulară uniformă* în jurul axei Oz cu viteza unghiulară constantă $\omega>0$ şi că punctul $M\in(G)$ execută o mişcare *rectilinie uniformă* pe generatoarea (G) cu viteza constantă $v>0.$

Când τ parcurge intervalul de timp $\Big[0,\dfrac{2\pi}{\omega}\Big]$ punctul M are coordonatele

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\quad z=ht,$$

unde $t=\omega\tau$ şi $v=\omega h.$ Intervalul de variaţie al parametrului t este $[0.2\pi].$

Acest punct descrie o buclă din elicea circulară de pas constant. ■

Definiţia 5.8.5. *Dacă* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}([\alpha,\beta],I\!R^m)$ *este un drum parametrizat în* $I\!R^m,$ *atunci* $\mathbf{a}=\mathbf{f}(\alpha)\in I\!R^m$ *şi* $\mathbf{b}=\mathbf{f}(\beta)\in I\!R^m$ *se numesc* **capetele**, *sau* **extremităţile** *drumului.*

Drumul $\mathbf{f}$ *se numeşte* **închis** *dacă* $\mathbf{f}(\alpha)=\mathbf{f}(\beta).$

Dacă există $t'\in[\alpha,\beta],\ t''\in[\alpha,\beta],$ *cu* $t'\neq t'',$ *astfel încât* $\mathbf{f}(t')=\mathbf{f}(t''),$ *spunem că punctul* M' *de vector de poziţie* $\mathbf{f}(t')$ *este* **punct multiplu** *al drumului* $\mathbf{f}.$

Drumul

$$\mathbf{g}:[\alpha,\beta]\to I\!R^m,\qquad \mathbf{g}(t)=\mathbf{f}(\alpha+\beta-t),\quad t\in[\alpha,\beta],$$

se numeşte **opusul** *drumului* $\mathbf{f}.$

Observaţia 5.8.1. *Dacă* $\mathbf{g}$ *este opusul drumului* $\mathbf{f},$ *atunci* $\mathbf{g}(\alpha)=\mathbf{f}(\beta),\ \mathbf{g}(\beta)=\mathbf{f}(\alpha).$

Un drum şi opusul său au aceeaşi traiectorie, iar sensurile de parcurs sunt contrare.

Definiţia 5.8.6. *Dacă* $\mathbf{f}:[\alpha,\beta]\to I\!R^m$ *şi* $\mathbf{g}:[\beta,\gamma]\to I\!R^m$ *sunt două drumuri parametrizate în* $I\!R^m$ *astfel încât* $\mathbf{f}(\beta)=\mathbf{g}(\beta),$ *atunci drumul* $\mathbf{h}:[\alpha,\gamma]\to I\!R^m,\ \mathbf{h}(t)=\begin{cases}\mathbf{f}(t), & t\in[\alpha,\beta],\\ \mathbf{g}(t), & t\in[\beta,\gamma],\end{cases}$ *se numeşte* **juxtapunerea**, *sau* **concatenatul** *celor două drumuri.*

Imaginea concatenatului este reuniunea hodografelor drumurilor $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$. Este posibil ca un drum parametrizat în $I\!R^m$ să fie juxtapunerea a mai mult de două drumuri.

Exemplul 5.8.8. *Drumul parametrizat în* $I\!R^2$, $\mathbf{f} : \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right] \to I\!R^2$, $\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), & t \in [0, \dfrac{\pi}{2}], \\ \mathbf{v}(t), & t \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi], \\ \mathbf{w}(t), & t \in [\pi, \dfrac{3\pi}{2}], \end{cases}$ *unde*

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = b\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{v}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{w}(t) = \Big(\dfrac{2a}{\pi}t - 3a\Big)\mathbf{i} + \Big(a - \dfrac{a}{\pi}t\Big)\mathbf{j}, \quad a > b > 0, \end{cases}$$

este juxtapunerea drumurilor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *şi* $\mathbf{w}$. *Primul drum are ca imagine sfertul de cerc din primul cadran cu centrul în origine şi raza egală cu* b*; cel de al doilea drum are ca imagine sfertul de elipsă din cadranul doi, de semiaxe* a *şi* b*, cu axele de simetrie axele de coordonate, în timp ce al treilea drum este segmentul de dreaptă cu extremităţile* $C(-a, 0)$ *şi* $D(0, -\dfrac{a}{2})$.

În aplicţiile practice ale calculului integral, geometriei diferenţiale, mecanicii, fizicii etc., ipoteza de continuitate din Definiţia 5.8.1 nu este suficientă. Ca să justificăm această afirmaţie să considerăm drumul $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ şi t_0 un punct fixat din I. Pentru fiecare $t \in I \setminus \{t_0\}$ putem asocia drumul parametrizat

$$\mathbf{f}_t : I\!R \to I\!R^m, \;\; \mathbf{f}_t(s) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}s, \;\; s \in I\!R \tag{5.77}$$

care are ca hodograf dreapta din $I\!R^m$ care trece prin punctele M_0 şi M ale imaginii lui $\mathbf{f}$, corespunzătoare valorilor t_0 şi t ale variabilei drumului.

Când $s = 0$, punctul corespunzătoare de pe hodograful drumului $\mathbf{f}_t$ coincide cu M_0, iar când $s = t - t_0$, punctul corespunzătoare coincide cu M.

Să ne imaginăm acum mulţimea drumurilor parametrizate (5.77), în care t ia valori oricât de apropiate de t_0.

În aplicaţiile practice interesează existenţa *poziţiei limită* a drumului (5.77) când $t \to t_0$. O asemenea poziţie limită există dacă şi numai dacă există în $I\!R^m$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$$

care este derivata funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul t_0, dacă funcţia $\mathbf{f}$ este derivabilă sau diferenţiabilă în punctul t_0.

Definiţia 5.8.7. *Poziţia limită* $\mathbf{f}_{t_0}$ *a drumurilor* (5.77) *când* $t \to t_0$, *dacă există, se numeşte* **tangenta** *la drumul* $\mathbf{f}$ *în punctul* t_0.

Drumul $\mathbf{f}_{t_0} : I\!R \to I\!R^m$ există dacă şi numai dacă funcţia $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă în t_0. Ecuaţia vectorială a drumului este $\mathbf{r} = \mathbf{f}_{t_0}(s)$, unde $\mathbf{f}_{t_0}(s) = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0)$, $s \in I\!R$. Imaginea acestui drum este reprezentată grafic prin dreapta (T), tangenta geometrică în punctul M_0 la hodograful lui $\mathbf{f}$. Ecuaţia vectorială a tangentei (T) este

$$(T): \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0), \quad s \in I\!R, \tag{5.78}$$

iar ecuaţiile sale parametrice sunt

$$(T): \quad x_i = f_i(t_0) + sf_i'(t_0), \quad s \in I\!R, \quad i \in \overline{1, m}.$$

Observaţia 5.8.2. *Ecuaţiile parametrice ale tangentei* (T) *sunt echivalente cu*

$$(T): \quad \frac{x_1 - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{x_2 - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = ... = \frac{x_m - f_m(t_0)}{f_m'(t_0)}. \tag{5.79}$$

Definiţia 5.8.8. *Ecuaţiile* (5.79) *se numesc* **ecuaţiile canonice** *ale tangentei (T) în punctul* M_0 *la traiectoria drumului* $\mathbf{f}$.

Observaţia 5.8.3. *Pentru valori mici ale lui* $s = t - t_0$, *membrul doi din* (5.78) *este aproximarea liniară (funcţia afină) a funcţiei* $\mathbf{f}$ *într–o vecinătate a lui* t_0.

Definiţia 5.8.9. *Drumul parametrizat* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *se numeşte* **neted** *sau* **regulat** *dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă,* $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *este continuă şi* $\mathbf{f}'(t) \neq 0,\ \forall\, t \in I$; *un drum* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *se numeşte* **neted pe porţiuni** *sau* **regulat pe porţiuni** *dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.*

Observaţia 5.8.4. *Drumul* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *este neted dacă :*

$$\mathbf{f} \in C^1(I); \quad \mathbf{f}'(t) \neq 0,\ \forall\, t \in I.$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiţia 5.3.7 şi Definiţia 5.8.9. ■

Exerciţiul 5.8.1. *Să se determine drumul parametrizat în* $I\!\!R^2$ *care este frontiera bilei cu centrul în origine şi raza unitate din spaţiul metric* $(I\!\!R^2, d_2)$, *unde* $d_2 : I\!\!R^2 \times I\!\!R^2 \to I\!\!R$, $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Soluţie. Hodograful drumului este mulţimea punctelor $M(x, y)$ care satisfac ecuaţia $|x| + |y| - 1 = 0$. Drumul este juxtapunerea drumurilor netede $(BA), (AD), (DC), (DA)$, laturile unui pătrat, care au ecuaţiile parametrice:

$$(BA): \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \quad t \in [0, 1] \end{cases}; \qquad (AD): \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 - t, \quad t \in [1, 2] \end{cases};$$

$$(DC): \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t - 3, \quad t \in [2, 3] \end{cases}; \qquad (CA): \begin{cases} x = t - 4, \\ y = t - 3, \quad t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Fiecare latură a pătratului este traiectoria unui drum neted. În vârfurile pătratului nu putem construi tangenta la drum. Punctele A, B, C, D sunt *puncte singulare* ale drumului. ■

Definiţia 5.8.10. *Drumurile netede* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!\!R^m)$ *şi* $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(J, I\!\!R^m)$, *cu aceeaşi orientare, se numesc* **drumuri echivalente cu aceeaşi orientare**, *şi scriem* $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, *dacă există o funcţie reală de variabilă reală bijectivă* $\varphi : I \to J$, *strict crescătoare, derivabilă, cu derivata* $\varphi' : I \to J$ *continuă şi nenulă, care se numeşte* **schimbare de parametru** $s = \varphi(t)$, *astfel încât* $\mathbf{g} \circ \varphi = \mathbf{f}$.

Observaţia 5.8.5. *Deoarece $\varphi \in \mathcal{F}(I,J)$ este funcţie bijectivă, inversa sa, $\varphi^{-1} \in \mathcal{F}(J,I)$, este funcţie derivabilă, iar derivata funcţiei inverse este continuă. Mai mult, avem*

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\varphi^{-1}(s)),\ \forall\, s \in J,$$

ceea ce arată că relaţia binară $\sim$ stabilită între drumurile $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ este **simetrică**.

Observaţia 5.8.6. *Dacă $\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h} \in \mathcal{F}(I_3, I\!R^m)$ sunt trei drumuri în $I\!R^m$ astfel încât $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ şi $\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$, atunci $\mathbf{f} \sim \mathbf{h}$, ceea ce arată că relaţia $\sim$ este* **tranzitivă**.

Într-adevăr, fie $\varphi \in \mathcal{F}(I_1, I_2)$, funcţia care realizează echivalenţa drumurilor $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$, iar $\psi \in \mathcal{F}(I_2, I_3)$, funcţia care realizează echivalenţa drumurilor $\mathbf{g}$ şi $\mathbf{h}$. Atunci, avem:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(\varphi(t)),\ t \in I_1;\quad \mathbf{g}(s) = \mathbf{h}(\psi(s)),\ s \in I_2,$$

din care deducem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{h}(\psi(\varphi(t))),\ t \in I_1,$$

ceea ce arată că funcţia $\psi \circ \varphi \in \mathcal{F}(I_1, I_3)$ realizează echivalenţa între drumurile $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{h}$ deoarece $\psi \circ \varphi$ este o bijecţie strict crescătoare de la I_1 la I_3, derivabilă, cu derivata continuă şi diferită de zero. ■

Observaţia 5.8.7. *Orice drum neted în $I\!R^m$ de forma $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ este echivalent cu el însuşi, $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}$, ceea ce arată că $\sim$ este o relaţie* **reflexivă** *în mulţimea drumurilor în $I\!R^m$.*

Observaţia 5.8.8. *Drumurile netede în $I\!R^m$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ şi $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(J, I\!R^m)$, echivalente şi cu aceeaşi orientare, au aceeaşi traiectorie, adică $\mathbf{f}(I) = \mathbf{g}(J)$.*

Relaţia $\sim$ fiind reflexivă, simetrică şi tranzitivă este o *relaţie de echivalenţă* în mulţimea drumurilor netede în $I\!R^m$. Faptul că bijecţia φ care realizează echivalenţa este strict crescătoare, corespunde intuitiv parcurgerii celor două hodografe în acelaşi sens, ceea ce justifică folosirea cuvintelor *cu aceeaşi orientare* în Definiţia 5.8.10.

Se ştie că o relaţie de echivalenţă pe o mulţime (aici mulţimea drumurilor netede în $I\!R^m$) împarte acea mulţime în *clase de echivalenţă*. Două drumuri netede $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^m)$ şi $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(J, I\!R^m)$ aparţin aceleiaşi clase de echivalenţă dacă $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$. Această situaţie conduce în mod natural la următoarea definmiţie.

Definiţia 5.8.11. *Se numeşte* **curbă netedă în** $I\!R^m$ *o clasă de echivalenţă a relaţiei de echivalenţă $\sim$ în mulţimea drumurilor în $I\!R^m$.*

Observaţia 5.8.9. *Drumurile din Exemplul 5.8.3 şi Exemplul 5.8.4 sunt netede, cu aceeaşi orientare şi echivalente. Ele definesc una şi aceeaşi curbă şi anume semicercul superior din cercul cu centrul în origine şi raza egală cu unitatea.*

Definiţia 5.8.12. *Dată o curbă netedă în* $\mathbb{R}^m$*, adică o clasă de echivalenţă în mulţimea drumurilor netede cu aceeaşi orientare în* $\mathbb{R}^m$*, dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ *este un drum oarecare din această clasă, atunci* (5.73) *se numesc* **ecuaţiile parametrice** *ale curbei, iar* (5.74) *este* **ecuaţia vectorială** *a curbei respective.*

Un punct oarecare aparţinând imaginii $\mathbf{f}(I)$ *se numeşte* **punct regulat***, sau* **punct ordinar***.*

Unei curbe netede i se spune şi **arc neted***. Curba dată în* $\mathbb{R}^m$ *se numeşte* **netedă pe porţiuni** *dacă oricare din drumurile ce definesc clasa de echivalenţă din Definiţia 5.8.11 este o juxtapunere de drumuri netede.*

Când $m = 2$ *curba corespunzătoare se numeşte* **curbă în plan***, iar dacă* $m = 3$ *curba se numeşte* **curbă în spaţiu***.*

Toate celelalte noţiuni caracteristice drumurilor în $\mathbb{R}^m$ se transmit curbelor în $\mathbb{R}^m$. De exemplu, *extremităţile* unei curbe în $\mathbb{R}^m$ sunt extremităţile oricărui drum din clasa corespunzătoare de echivalenţă.

O curbă în $\mathbb{R}^m$ se notează fie cu una din literele alfabetului grec sau latin, eventual flancată de paranteze, de exemplu (C) sau (Γ), fie precizîndu–i extremităţile între două paranteze, de exemplu (AB).

În încheiere, prezentăm unele noţiuni caracteristice curbelor în plan şi curbelor în spaţiu.

Dacă I este un interval de timp şi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$ este un drum neted, atunci $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ reprezintă poziţia la momentul $t \in I$ a unui punct material în mişcare după legea $\mathbf{f}$, iar $\mathbf{f}(\mathbf{I})$ este *traiectoria particulei.*

Dacă $\mathbf{f} \in C^2(I)$, atunci $\mathbf{f}'(t)$ şi $\mathbf{f}''(t)$ reprezintă respectiv *vectorul viteză* şi *vectorul acceleraţie* ale particulei la momentul t.

Scalarii nenegativi $\|\mathbf{f}'(t)\|$ şi $\|\mathbf{f}''(t)\|$ se numesc corespunzător *viteza* şi *acceleraţia* la momentul t ale particulei materiale în mişcare după legea $\mathbf{f}$.

Semnificaţia mecanică a condiţiei de regularitate $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0},\ t \in I$, constă în aceea că particula materială, în mişcarea ei, nu are momente de repaos.

A da o curbă parametrizată în spaţiu (planul Oxy) înseamnă a considera un drum parametrizat

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3) \quad (\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2))$$

care face ca oricărui $t \in I$ sa-i corespundă punctul

$$(x(t), y(t), z(t)) \quad ((x(t), y(t)))$$

al cărui vector de poziţie este

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$
$$(\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}).$$

În acest caz

$$\mathbf{r} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k},\ t \in I \quad (\text{respectiv,} \quad \mathbf{r} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j},\ t \in I)$$

se numeşte *ecuaţia vectorială* a curbei în spaţiu (respectiv, în plan).

Definiţia 5.8.13. *Dacă*

$$\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \quad (\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2)$$

este un drum neted, sau neted pe porţiuni în $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$*, atunci numărul real pozitiv*

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt, \tag{5.80}$$

unde

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \quad \Big(\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\Big),$$

se numeşte **lungimea** *drumului, sau* **lungimea** *arcului de curbă care are ca reprezentant drumul considerat. În aceste condiţii, drumul considerat se numeşte* **rectificabil***, iar curba considerată este numită* **rectificabilă***.*

Fixând $t_0 \in I = [a,b]$, pentru orice $t > t_0$ se defineşte lungimea $s(t)$ a arcului de curbă (C) care are ca reprezentant restricţia unui drum al clasei de echivalenţă la segmentul $[t_0, t]$. Dacă curba (C) este rectificabilă, atunci lungimea $s(t)$ a porţiunii din curba (C), corespunzătoare segmentului $[t_0, t] \subset [a,b]$, este dată de

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [t_0, b]. \tag{5.81}$$

Punctul t_0 se numeşte *origine de arc* şi, de regulă, se ia $t_0 = a$.

Folosind proprietăţile integralelor definite, deducem

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

în cazul curbelor în spaţiu şi

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$$

pentru cazul când curba este situată în planul xOy.

Deoarece $\dot{s} \in \mathcal{F}([a,b],[0,\mathcal{L}])$ are proprietatea $\dot{s}(t) > 0,\ \forall\, t \in [a,b]$, rezultă că $s = s(t)$ este funcţie strict crescătoare.

Prin urmare, $t^{-1} : [0,\mathcal{L}] \to [a,b]$, funcţia inversă acesteia, poate juca rolul funcţiei φ din Definiţia 5.8.10. Aceasta arată că drumurile:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} \circ t^{-1} \in \mathcal{F}([0,\mathcal{L}], I\!R^3); \quad \mathbf{r} = \mathbf{f} \circ t^{-1} \in \mathcal{F}([0,\mathcal{L}], I\!R^2)$$

sunt echivalente respectiv cu drumurile:

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], I\!R^3); \quad \mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], I\!R^2),$$

deci reprezintă aceeaşi curbă (C).

În această nouă parametrizare, numită *parametrizarea naturală* a curbei (C), s se numeşte *parametru natural*.

Definiţia 5.8.14. *Diferenţiala* $ds = s'(t)dt$ *a funcţiei definită în* (5.81) *se numeşte* **element de arc**.

Dacă drumul neted, sau arcul de curbă netedă (Γ) este în spaţiu, atunci

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

iar dacă acestea sunt în planul xOy, elementul de arc este

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

În aceste relaţii dx, dy, dz sunt diferenţialele funcţiilor coordonate ale funcţiei vectoriale de variabilă reală care defineşte drumul sau arcul de curbă (Γ).

Convenim ca punctul M al curbei corespunzător valorii t a parametrului să se noteze prin $M(t)$, în această situaţie t numindu–se *coordonata curbilinie* a punctului M de pe curbă.

Definiţia 5.8.15. *Se numeşte* **versorul tangentei** *în punctul* $M(t)$ *al curbei netede* (Γ), *de ecuaţie vectorială* (5.76) *în cazul* $m = 3$ *şi de ecuaţie vectorială* (5.75) *în cazul* $m = 2$, *versorul* $\boldsymbol{\tau}(t)$ *al vectorului* $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}'(t)$, *adică:*

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}} (\dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}); \tag{5.82}$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} (\dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}). \tag{5.83}$$

Se vede imediat că $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)\dfrac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}.$

Alţi versori importanţi ai unei curbe (C) sunt introduşi mai jos.

Dacă notăm cu $\omega(t)$ unghiul dintre versorul $\mathbf{i}$ al axei Ox şi versorul $\boldsymbol{\tau}(t)$, atunci versorul tangentei şi cel al *normalei* în punctul curent al unei curbe netede din planul xOy, corespunzător valorii t a parametrului, sunt daţi de

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \cos\omega(t)\mathbf{i} + \sin\omega(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{n}(t) = -\sin\omega(t)\mathbf{i} + \cos\omega(t)\mathbf{j}. \tag{5.84}$$

Dacă folosim (5.83), constatăm că

$$\cos\omega(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + \dot{y}(t))^2}}, \quad \sin\omega(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + \dot{y}(t))^2}}.$$

Definiţia 5.8.16. *Versorul vectorului* $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ *se numeşte* **versorul normalei principale** *în punctul* $M(t)$ *al curbei netede în spaţiu de ecuaţie vectorială* (5.76).

Versorul normalei principale, notat cu $\boldsymbol{\nu}(t)$, este

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \frac{1}{\left\|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{1}{\left\|\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right\|}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \tag{5.85}$$

Definiţia 5.8.17. *Versorul* $\boldsymbol{\beta}(t)$,

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t), \tag{5.86}$$

se numeşte **versorul binormalei** *în* $M(t)$ *la curba de ecuaţie vectorială* (5.76).

Definiţia 5.8.18. *Triedrul* $\{\boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\beta}(t)\}$, *unde versorii* $\boldsymbol{\tau}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ *sunt daţi corespunzător de* (5.82), (5.85), (5.86), *se numeşte* **triedrul lui Frenet**[3] *în punctul* $M(t)$ *al curbei în spaţiu de ecuaţie vectorială* (5.76). *Ansamblul*

$$\{M(t); \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\beta}(t)\}$$

se numeşte **reper Frenet**, *sau* **reper local** *în punctul* $M(t)$.

În cazul curbei a cărei imagine este situată în planul xOy, *reperul Frenet în* $M(t)$ *este* $\{M(t); \boldsymbol{\tau}(t), \mathbf{n}(t)\}$ *unde* $\boldsymbol{\tau}(t)$ *şi* $\mathbf{n}(t)$ *sunt daţi în* (5.84).

Când parametrul t parcurge intervalul $I = [a, b]$, punctul $M(t)$ corespunzător descrie traiectoria curbei, iar triedrul Frenet se mişcă odată cu punctul $M(t)$. Se pot stabili formule care să indice viteza de variaţie a versorilor triedrului Frenet în raport cu arcul traiectoriei. Mai precis, se demonstrează existenţa funcţiilor pozitive $R \in \mathcal{F}([a, b])$ şi $T \in \mathcal{F}([a, b])$, numite *rază de curbură* şi respectiv *rază de torsiune* a curbei, astfel încât să aibă loc egalităţile

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dfrac{1}{R}\boldsymbol{\nu}, \\ \dfrac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\boldsymbol{\tau} + \dfrac{1}{T}\boldsymbol{\beta}, \\ \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\dfrac{1}{T}\boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

[3] Frenet, Jean Frederic (1816–1900), matematician francez.

Aceste egalităţi se numesc *formulele lui Frenet* pentru o curbă în spaţiu.

Inversa razei de curbură se numeşte *curbura* curbei considerate, iar inversa razei de torsiune se numeşte *torsiunea* curbei considerate. Curbura unei drepte în orice punct al ei este egală cu zero, iar torsiunea în orice punct al unei curbe situate într–un plan este , de asemenea, egală cu zero.

Raza de curbură măsoară *abaterea* curbei de la linia dreaptă (care are raza de curbură egală cu ∞), iar T măsoară *abaterea* curbei de la planul determinat de punctul $M(t)$ şi versorii $\boldsymbol{\tau}(t)$ şi $\boldsymbol{\nu}(t)$, numit *planul osculator* în $M(t)$. Raza de torsiune a unei curbe plane este $T = \infty$.

În cazul unei curbe în plan, a cărei traiectorie se află în planul xOy, formulele lui Frenet devin

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dfrac{1}{R}\mathbf{n}, \\ \dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\boldsymbol{\tau}. \end{cases}$$

Exerciţiul 5.8.2. *Să se arate că imaginea drumului parametrizat*

$$\mathbf{r} : [0,1] \to I\!R^3, \qquad \mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2+2)\mathbf{j} + (3t^2+1)\mathbf{k}$$

este situată într–un plan şi să se calculeze lungimea curbei (C) definită de acest drum.

Soluţie. Ecuaţiile parametrice ale drumului sunt

$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = t^2+2, \\ z = 3t^2+1, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului t din ultimele două ecuaţii conduce la $3y - z - 5 = 0$, care este ecuaţia unui plan paralel cu axa Ox. Aşadar, un punct curent $M(x,y,z)$ de pe drumul dat sau de pe curba (C) verifică ecuaţia planului de mai sus. În această situaţie spunem că drumul este *plan*, iar curba (C) corespunzătoare este o *curbă plană*.

Lungimea curbei (C) este $\mathcal{L} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}dt = \int_0^1 \sqrt{1+40t^2}dt$. Efectuând schimbarea de variabilă $u = 2t\sqrt{10}$, rezultă că lungimea curbei (C) este $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2\sqrt{10}} \displaystyle\int_0^{2\sqrt{10}} \sqrt{1+u^2}du$.

O primitivă a funcţiei $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ este

$$\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln|u + \sqrt{1+u^2}|,$$

deci $\mathcal{L} = \dfrac{\sqrt{41}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}}{40}\ln(2\sqrt{10} + \sqrt{41})$. ■

Exerciţiul 5.8.3. *Să se scrie ecuaţia tangentei (T) în punctul $M_0(1,1,1)$ la curba*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R, I\!R^3), \quad \mathbf{f}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad t \in I\!R.$$

Soluţie. Punctul M_0 corespunde valorii $t_0 = 1$ a parametrului t. Avem:

$$\mathbf{f}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; \quad \mathbf{f}'(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Ecuaţia vectorială a tangentei (T) în punctul M_0 la curba dată este

$$(T): \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0), \quad s \in I\!R,$$

unde

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Ecuaţiile parametrice ale aceleiaşi tangente sunt:

$$(T): \begin{cases} x = 1 + s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = 1 + 2s, \quad s \in I\!R. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului s conduce la ecuaţiile canonice ale tangentei

$$(T): \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

■

Exerciţiul 5.8.4. *Să se găsească vectorul viteză, vectorul acceleraţie, viteza şi acceleraţia la momentul* t *ale particulei materiale* $M(t)$ *în mişcare după legea* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R^+, I\!R^3)$, $\mathbf{f} = (t^2+3, t, -t^2)$.

Soluţie. Vectorul viteză la momentul t este $\mathbf{f}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ pe când viteza la acelaşi moment este $\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{1+8t^2}$. Vectorul acceleraţie este constant şi are expresia analitică $\mathbf{f}''(t) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, iar acceleraţia este $\|\mathbf{f}''(t)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. ■

Exerciţiul 5.8.5. *Să se determine lungimea unei bucle din elicea circulară de pas constant.*

Soluţie. Ecuaţiile elicei circulare de pas constant au fost deduse în Exemplul 5.8.7. Folosind (5.80), găsim

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+h^2} dt = 2\pi\sqrt{R^2+h^2}.$$

■

Exerciţiul 5.8.6. *Să se determine parametrizarea naturală a curbei*

$$\mathbf{r} = \sqrt{2}\cos^2 t\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin^2 t\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soluţie. Avem: $\dot{\mathbf{r}}(t) = -2\sqrt{2}\sin t\cos t\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\sin t\cos t\mathbf{j} + 2\cos 2t\mathbf{k}$; $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = 2$, de unde găsim $ds = 2dt$, deci $s = 2t + C$.

Dacă presupunem că originea de arc pe curbă este $t = 0$, constanta C are valoare nulă, deci $s = 2t$, de unde deducem $t = \dfrac{s}{2}$ şi parametrizarea naturală este

$$\mathbf{r} = \sqrt{2}\cos^2\frac{s}{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin^2\frac{s}{2}\mathbf{j} + \sin s\mathbf{k}, \quad s \in [0, \pi].$$

■

5.9 Formula lui Taylor pentru o funcţie reală de o variabilă reală. Aplicaţii la studiul local al funcţiilor

Rezultatele stabilite în Secţiunea 5.7 rămân valabile şi în cazul $m = 1.$ În plus, avem

Teorema 5.9.1. *Dacă $f \in C^N(I)$ şi funcţia $f^{(N)}$ este derivabilă în interiorul intervalului real I, atunci $\forall\, t \in I$ şi $\forall\, t_0 \in I$ există $\theta_N \in (0,1)$ astfel încât*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{(t-\xi_N)^{N-p+1} f^{(N+1)}(\xi_N)}{pN!}(t-t_0)^p, \tag{5.87}$$

unde p este un număr pozitiv, iar $\xi_N = t_0 + \theta_N(t-t_0).$

Demonstraţie. Alegem la îtâmplare numărul real pozitiv p şi introducem funcţiile:

$$\varphi : I \to I\!R,\ \ \varphi(\tau) = f(t) - \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!}(t-\tau)^k,\ \ \tau \in I; \tag{5.88}$$

$$\psi : I \to I\!R,\ \ \psi(\tau) = (t-\tau)^p,\ \ \tau \in I. \tag{5.89}$$

Funcţiile introduse sunt derivabile pe $\overset{\circ}{I}$ şi:

$$\varphi'(\tau) = -\frac{f^{(N+1)}(\tau)}{N!}(t-\tau)^N; \quad \psi'(\tau) = -p(t-\tau)^{p-1}, \quad \tau \in \overset{\circ}{I}\ . \tag{5.90}$$

$$\tag{5.91}$$

În plus, avem $\psi'(\tau) \neq 0,\ \forall\, \tau = t_0 + \theta(t-t_0),\ \theta \in (0,1).$

Din cele deduse mai sus constatăm că restricţiile funcţiilor φ şi ψ la compactul $[t_0, t]$, sau $[t, t_0]$ satisfac ipotezele teoremei lui Cauchy pentru funcţii derivabile [19, p. 289], deci există $\xi_N = t_0 + \theta_N(t-t_0)$, cu $0 < \theta_N < 1,$ astfel încât

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{\psi(t)-\psi(t_0)} = \frac{\varphi'(\xi_N)}{\psi'(\xi_N)}. \tag{5.92}$$

Din (5.88) şi (5.89) observăm că

$$\varphi(t) = \psi(t) = 0.$$

Utilizând aceste relaţii şi (5.88) – (5.91) în (5.92), obţinem

$$\frac{f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k}{(t-t_0)^p} = \frac{f^{(N+1)}(\xi_N)(t-\xi_N)^{N-p+1}}{pN!},$$

de unde se deduce (5.87). **q.e.d.**

Egalitatea (5.87) este cunoscută sub numele de *formula lui Taylor* pentru o funcţie reală de variabilă reală cu *restul de ordin N* sub forma lui Schlömilch[4]–Roche[5].

[4]Schlömilch, Oskar (1823–1901), matematician german.

[5]Roche, Jean n. 1901, matematician francez.

Din $\xi_N = t_0 + \theta_N(t - t_0)$ rezultă $t - \xi_N = (1 - \theta_N)(t - t_0)$ şi formula lui Taylor se scrie în forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{(1 - \theta_N)^{N-p+1} f^{(N+1)}(\xi_N))}{pN!}(t - t_0)^{N+1}. \tag{5.93}$$

Dacă în (5.93) luăm $p = 1$, obţinem

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{(1 - \theta_N)^{N} f^{(N+1)}(\xi_N))}{N!}(t - t_0)^{N+1}. \tag{5.94}$$

Această relaţie se numeşte *formula lui Taylor* pentru funcţia $f \in \mathcal{F}(I)$ cu *rest de ordin* N sub *forma lui Cauchy*. sub forma lui Cauchy

Dacă în (5.93) dăm lui p valoarea $p = N + 1$, atunci (5.93) devine

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{f^{(N+1)}(t_0 + \theta_N(t - t_0))}{(N+1)!}(t - t_0)^{N+1}, \tag{5.95}$$

cunoscută sub numele de *formula lui Taylor* pentru funcţia $f \in \mathcal{F}(I)$ cu *rest de ordin* N sub *forma lui Lagrange*[6].

De asemenea, putem demonstra prin inducţie matematică după N că are loc egalitatea

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \int_{t_0}^{x} f^{(N+1)}(u)\frac{(x-u)^N}{N!}du \tag{5.96}$$

numită *formula lui Taylor* pentru funcţia reală $f \in \mathcal{F}(I)$ cu *restul integral de ordin* N.

Dacă intervalul I conţine originea şi considerăm $t_0 = 0$, atunci formulele (5.87), (5.93) – (5.96), în care $t_0 = 0$, devin *formulele Mac Laurin*[7] cu *rest de ordin* N respectiv în *forma lui Schlomilch–Roche*, în *forma lui Cauchy*, în *forma lui Lagrange* şi sub *formă de integrală*. De exemplu, formula lui Mac Laurin cu restul sub forma lui Lagrange este

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{f^{(N+1)}(\theta_N t)}{(N+1)!}t^{N+1}. \tag{5.97}$$

Ţinând cont de relaţiile:

$$f^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k = d^k f(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, ..., t - t_0}_{k \text{ ori}}); \quad f^{(k)}(0)t^k = d^k f(0; \underbrace{t, t, ..., t}_{k \text{ ori}})$$

constatăm că formulele (5.95) şi (5.97) pot fi scrise în *forma diferenţială*:

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} d^k f(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, ..., t - t_0}_{k \text{ ori}}) +$$

$$+ \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\xi_N; \underbrace{t - t_0, t - t_0, ..., t - t_0}_{N+1 \text{ ori}});$$

[6]Lagrange, Joseph–Louis (1736 - 1813), matematician, mecanician şi astronom, născut în Torino, provincia Piemont din Italia. A trăit o parte a vieţii în Prusia şi o alta în Franţa. A adus contribuţii semnificative în toate domeniile analizei matematice, teoriei numerelor, mecanicii clasice şi mecanicii cereşti. La recomandarea lui Euler şi D'Alembert, în 1766 Lagrange i–a succedat lui Euler la conducerea secţiei de matematici a Academiei de Ştiinţe a Prusiei din Berlin, post în care a activat timp de 20 de ani efectuând un mare volum de munca şi câştigând câteva premii ale Academiei de Ştiinţe a Franţei. Tratatul lui Lagrange asupra mecanicii analitice (Mecanică Analitică, a 4–a Ediţie, 2 Volume, Editura Gauthier–Villars, Paris, 1888–1889), scris în Berlin şi publicat prima dată în 1788, oferă cel mai cuprinzător studiu al mecanicii clasice de la Newton, constituind totodată fundamentul pentru dezvoltarea fizicii matematice din secolul 19. În 1787, la vârsta de 51 de ani, se mută de la Berlin în Franţa, devine membru al Academiei de Ştiinţe a Franţei şi rămâne în Franţa până la sfârşitul vieţii. Prin urmare, Lagrange este considerat deopotrivă om de ştiinţă francez şi italian. Lagrange a supravieţuit Revoluţiei din Franţa şi a devenit primul profesor de analiză matematică a Şcolii Politehnice din Paris încă de la deschiderea sa din 1794. Napoleon i–a acordat lui Lagrange Legiunea de Onoare şi l–a înobilat in 1808 cu titlul de Conte al Imperiului. Este înmormântat în Panteon şi numele său apare printre cele 72 de personalităţi ale căror nume sunt inscripţionate pe Turnul Eiffel.

[7]Mac Laurin, Colin (1698–1746), matematician scoţian.

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} d^k f(0; \underbrace{t, t, ..., t}_{k \text{ ori}}) + \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\theta_N t; \underbrace{t, t, ..., t}_{N+1 \text{ ori}}).$$

Dacă avem în vedere că $t - t_0 = \Delta t$ este o *creştere a variabilei independente* în t_0, iar $f(t) - f(t_0) = \Delta f(t_0; \Delta t)$ este *creşterea funcţiei* f *în* t_0 *corespunzătoare creşterii* Δt *a variabilei independente*, atunci formula (5.95) se poate scrie în forma echivalentă

$$\Delta f(t_0; \Delta t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (\Delta t)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi_N))}{(N+1)!} (\Delta t)^{N+1},$$

unde $\xi_N = t_0 + \theta_N \Delta t$, iar $\theta_N \in (0, 1)$.

Exerciţiul 5.9.1. *Să se scrie formula lui Mac Laurin cu restul de ordin* $2n$ *sub forma lui Lagrange pentru funcţia* $f \in \mathcal{F}(I\!\!R),\ f(t) = \sin t$.

Soluţie. Prin inducţie, se demonstrează că derivata de ordinul k a funcţiei este

$$f^{(k)}(t) = \sin\Big(t + k\frac{\pi}{2}\Big),\ t \in I\!\!R,\ \ k \in I\!\!N,$$

din care deducem $f^{(2m)}(0) = 0,\ f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m,\ m \in I\!\!N$. Înlocuind aceste rezultate în relaţia

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + ... + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(\theta_{2n})}{(2n+1)!} t^{2n+1},$$

obţinută din (5.97) în care $N = 2n$ şi $0 < \theta_{2n} < 1$, deducem că pentru funcţia $f(t) = \sin t$ formula lui Mac Laurin cu restul de ordin $2n$ sub forma lui Lagrange este

$$\sin t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} t^{2k-1} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \cos(\theta_{2n} t).$$

■

Exerciţiul 5.9.2. *Să se scrie formula lui Mac Laurin cu restul de ordin* n *sub forma lui Lagrange pentru funcţia* $f \in \mathcal{F}(I\!\!R),\ f(t) = e^t,\ t \in I\!\!R$.

Soluţie. Avem $f^{(k)}(t) = e^t,\ \forall\, t \in I\!\!R,\ \forall\, k \in I\!\!N$. Atunci, considerând în (5.97) că $f(t) = e^t$ şi $N = n$, obţinem

$$e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} t^k + \frac{e^{\theta_n t}}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad t \in I\!\!R, \quad \theta_n \in\ (0, 1).$$

■

Exerciţiul 5.9.3. *Să se scrie formulele lui Mac Laurin cu resturile de ordin* n *sub forma lui Lagrange şi al lui Cauchy pentru funcţia* $f : (-1, +\infty) \to I\!\!R,\ \ f(t) = \ln(1 + t)$.

Soluţie. În acest exerciţiu $f(0) = 0$ şi $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pentru $k \in I\!N^*$. Restul de ordin n sub forma lui Lagrange este $R_n = (-1)^n \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_n t)^{n+1}}$, $0 < \theta_n < 1$, iar cel al lui Cauchy este $R_n = (-1)^n \Big(\dfrac{1-\theta_n}{1+\theta_n t}\Big)^n \dfrac{t^{n+1}}{1+\theta_n t}$, $\theta_n \in (0,1)$. Prin urmare, cele două formule ale lui Mac Laurin sunt:

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_n t)^{n+1}}, \qquad t \in (-1, +\infty);$$

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^n \Big(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n t}\Big)^n \frac{t^{n+1}}{1+\theta_n t}, \qquad t \in (-1, +\infty).$$

■

Exerciţiul 5.9.4. *Să se scrie formula lui Mac Laurin cu rest de ordin n sub forma lui Lagrange şi sub forma lui Cauchy pentru funcţia binomială $f \in \mathcal{F}\Big((-1, +\infty)\Big)$, $f(t) = (1+t)^\alpha$, $\alpha \in I\!R$.*

Soluţie. Derivatele de ordin superior ale funcţiei f sunt

$$f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+t)^{\alpha-k}, \quad k \in I\!N^*,$$

iar valorile acestora în origine sunt $f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot ... \cdot (\alpha-k+1)$.

Dacă la aceste rezultate adăugăm şi expresia derivatei de ordinul $n+1$ a funcţiei calculată în punctul $\theta_n t$, unde $0 < \theta_n < 1$, rezultă că formula lui Mac Laurin pentru funcţia $f(t) = \ln(1+t)$ este

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} t^k + R_n, \qquad t > -1,$$

unde R_n este restul de ordin n.

Pentru această funcţie, restul de ordin n sub forma lui Lagrange este

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta_n t)^{\alpha-n-1} t^{n+1}, \qquad 0 < \theta_n < 1,$$

iar dacă R_n este restul sub forma lui Cauchy, atunci

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}(1-\theta_n)^n (1+\theta_n t)^{\alpha-n-1} t^{n+1}.$$

■

Observaţia 5.9.1. *În cazul $N = 0$, formula lui Taylor (5.96) cu restul sub forma lui Lagrange devine*

$$f(t) - f(t_0) = (t-t_0) f'(\xi_0), \;\; \xi_0 = t_0 + \theta_0(t-t_0), \;\; 0 < \theta_0 < 1,$$

adică formula creşterilor finite (teorema lui Lagrange) pentru funcţia reală f de variabilă reală t.

Observaţia 5.9.2. *În fiecare din formulele (5.93) – (5.96) restul de ordin n este de forma*

$$R_n(t; t_0, f) = o(|t-t_0|^N), \qquad t \to t_0 \;\; .$$

Atunci, oricare din aceste patru formule se scrie sub forma echivalentă

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + o(|t-t_0|^N), \;\; t \to t_0. \tag{5.98}$$

Observaţia 5.9.3. *Dacă ţinem cont de faptul că* $o(|t-t_0|^N)=\alpha(t)|t-t_0|^N,\ N\in I\!N^*$, *unde funcţia* $\alpha(t)$ *are proprietatea* $\lim\limits_{t\to t_0=0}\alpha(t)=\alpha(0)=0$, *atunci relaţia* (5.98), *în cazul* $N=1$, *devine*

$$f(t)=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\alpha(t)|t-t_0|,\quad t\in I$$

şi este aceeaşi cu egalitatea din definiţia diferenţiabilităţii într–un punct a unei funcţii reale de o variabilă reală.

În încheierea acestei secţiuni prezentăm unele aplicaţii ale formulelor lui Taylor la studiul local al funcţiilor reale de variabilă reală.

5.9.1 Tabelarea funcţiilor

Exerciţiul 5.9.5. *Să se calculeze* $\sin 33^0$ *cu o aproximaţie mai mică decât* 10^{-6}.

Soluţie. Scriem formula lui Taylor pentru funcţia $f(t)=\sin t$, în care pentru t_0 şi t luăm valorile $t_0=\dfrac{\pi}{6}$ şi $t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{60}=33^0$, iar R_n, restul de ordinul n, este cel sub forma lui Lagrange. Avem

$$\sin 33^0=P_n+R_n,$$

unde P_n este polinomul Taylor corespunzător.

Determinăm valoarea lui n astfel încât $|R_n|\le 10^{-6}$.

Ţinând cont de expresia restului de ordinul n sub forma lui Lagrange

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\Big(\frac{\pi}{60}\Big)^{n+1}\sin\Big(\frac{\pi}{6}+\theta_n\frac{\pi}{60}+(n+1)\frac{\pi}{2}\Big),$$

prin încercări directe constatăm că $n\ge 3$.

Atunci, formula lui Taylor cu restul de ordinul trei conduce la aproximările

$$\sin 33^0\quad\approx\quad\frac{1}{2}+\frac{\pi}{60}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi^2}{2\cdot 60^2}\frac{1}{2}-\frac{\pi^3\cdot\sqrt{3}}{12\cdot 60^3}\quad\approx\quad 0,54464.$$

■

Tabelarea valorilor funcţiilor trigonometrice şi ale funcţiei logaritmice se bazează pe formula lui Taylor.

Aplicând procedeul din Exerciţiul 5.9.5, putem determina valori aproximative ale oricărei funcţii $f\in C^n(I)$. Operaţiile care se efectuează pentru obţinerea valorilor aproximative fiind iterative, există posibilitatea programării calculelor şi determinarea lor cu ajutorul computerului.

5.9.2 Convexitatea funcţiilor

Cu ajutorul formulei lui Taylor cu rest de ordin 1 sub forma lui Lagrange se pot stabili condiţii necesare pentru *convexitatea*, sau *concavitatea* curbelor $y=f(x),\ x\in I\subset I\!R,\ f\in\mathcal{F}(I),\ f\in C^2(I)$.

Definiţia 5.9.1. *Funcţia* $f\in\mathcal{F}(I)$ *se numeşte* **convexă** *în vecinătatea* $V\in\mathcal{V}(t_0),\ V\subset I$, *unde* $t_0\in\overset{\circ}{I}$, *dacă graficul restricţiei* $f_{/V}$ *este situat deasupra tangentei la grafic în punctul* $M_0(t_0,f(t_0))$, *adică*

$$f(t)\ge f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0),\quad\forall\,t\in V.\tag{5.99}$$

Scriind formula lui Taylor în vecinătatea $V \in \mathcal{V}(t_0),\ t_0 \in \overset{\circ}{I}$, cu restul de ordin 1 sub forma lui Lagrange,

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(t - t_0)^2, \tag{5.100}$$

din (5.99) şi (5.100), deducem $f''(\xi_1) \geq 0,\ \xi_1 = t_0 + \theta_1(t - t_0),\ 0 < \theta_1 < 1.$

Prin urmare, o condiţie necesară ca funcţia $f \in C^2(I)$ să fie convexă este

$$f''(t) \geq 0, \quad \forall\, t \in I.$$

Definiţia 5.9.2. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(I)$ se numeşte* **concavă** *pe vecinătatea $V \in \mathcal{V}(t_0)$, $V \subset I$, $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, dacă graficul funcţiei $f_{/V}$ este situat sub tangenta la grafic în punctul $M_0(t_0, f(t_0))$, adică*

$$f(t) \leq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \qquad \forall\, t \in V$$

Procedând analog, deducem că o condiţie necesară ca $f \in C^2(I)$ să fie funcţie concavă este

$$f''(t) \leq 0, \ \ \forall\, t \in V \cap I.$$

5.9.3 Contactul de ordin n a două curbe plane

Fie funcţiile reale de variabilă reală $f, g \in C^{n+1}([a, b])$, $[a, b] \subset I\!\!R$ şi $t_0 \in [a, b]$.

Definiţia 5.9.3. *Curbele plane:*

$$(C_1): \quad x = f(t), \quad t \in [a, b]; \qquad (C_2): \quad x = g(t), \quad t \in [a, b]$$

au un **contact** *de ordin cel puţin n în $M_0(t_0, x_0)$ dacă sunt îndeplinite condiţiile*

$$f(t_0) = g(t_0) = x_0, \quad f'(t_0) = g'(t_0), \quad ..., \quad f^{(n)}(t_0) = g^{(n)}(t_0).$$

Dacă, în plus, $f^{(n+1)}(t_0) \neq g^{(n+1)}(t_0)$, contactul este de ordinul n.

Observaţia 5.9.4. *Dacă (C_1) şi (C_2) au contact de ordin cel puţin n în punctul M_0, atunci funcţiile f şi g au acelaşi polinom Taylor de grad n centrat în t_0.*

Definiţia 5.9.4. *Fie curba $(C): \ x = f(t),\ t \in I,\ f \in C^2(I)$, $t_0 \in I$ pentru care $f''(t_0) \neq 0$ şi $M_0 \in (C)$ punctul corespunzător valorii t_0.*

Cercul care trece prin punctul $M_0(t_0, f(t_0))$ şi are contact de ordinul cel puţin 2 cu (C) în punctul M_0 se numeşte **cercul osculator** *al curbei (C) în punctul M_0. Centrul cercului osculator se numeşte* **centru de curbură**, *iar raza sa se numeşte* **rază de curbură** *a curbei (C) în M_0. Inversa razei de curbură se numeşte* **curbura** *în M_0 a curbei (C).*

Determinarea cercului osculator în $M_0 \in (C)$ presupune aflarea numerelor reale α, β şi $R > 0$ cu proprietatea că cercul de ecuaţie $(t-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 - R^2 = 0$ are un contact de ordinul cel puţin 2 în M_0 cu curba (C).

În cazul cercului osculator, contactul de cel puţin ordinul 2 al acestuia cu curba (C) de ecuaţie $x = f(t)$ în punctul t_0 nu se încadrează în Definiţia 5.9.3. În acest caz, condiţiile de contact se rezumă la anularea în punctul t_0 a funcţiei $\Phi(t) = F(t, f(t))$ şi a primelor două derivate ale sale, unde $F(t,x)$ este membrul întâi din ecuaţia cercului osculator.

Impunerea condiţiilor de contact de ordin cel puţin 2 conduce la sistemul

$$\begin{cases} F(t_0, f(t_0)) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t_0, f(t_0)) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(t_0, f(t_0)) f'(t_0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, f(t_0)) + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t_0, f(t_0)) f'(t_0) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_0, f(t_0))(f'(t_0))^2 + \dfrac{\partial F}{\partial x}(t_0, f(t_0)) f''(t_0) = 0, \end{cases}$$

unde $F(t,x) = (t-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 - R^2$.

După înlocuirea lui F şi a derivatelor sale, sistemul devine

$$\begin{cases} (t_0-\alpha)^2 + (f(t_0)-\beta)^2 - R^2 & = & 0 \\ t_0 - \alpha + (f(t_0)-\beta) f'(t_0) & = & 0 \\ 1 + (f'(t_0))^2 + (f(t_0)-\beta) f''(t_0) & = & 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim că expresiile celor trei numere care definesc cercul osculator sunt

$$\begin{cases} \alpha & = & t_0 - \dfrac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} f'(t_0) \\ \beta & = & f(t_0) + \dfrac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} \\ R & = & \dfrac{(1 + (f'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|}. \end{cases}$$

Numerele reale α şi β sunt coordonatele centrului de curbură, iar numărul pozitiv R este raza de curbură.

Dacă $f \in C^2(I)$ şi $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, atunci într–o vecinătate $V \in \mathcal{V}(t_0)$ avem *aproximarea liniară*

$$f(t) \cong f(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} f'(t_0) = P_1(t; t_0, f)$$

şi *aproximarea pătratică*

$$f(t) \cong f(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} f''(t_0) = P_2(t; t_0, f).$$

Aproximarea liniară reprezintă dreapta care are contact de ordin cel puţin 1 cu curba (C) în punctul $M_0(t_0, f(t_0))$, adică tangenta (T) în punctul M_0 la curba (C).

Aproximarea pătratică este o parabola cu vârful în punctul M_0 şi axa de simetrie normala în M_0 la curba (C). Această parabolă are contact de ordin cel puţin 2 cu (C) în M_0.

Aproximările $P_1(t; t_0, f)$ şi $P_2(t; t_0, f)$ sunt polinoamele Taylor de gradul 1 şi respectiv de gradul 2 ale funcţiei f, ambele centrate în punctul $t_0 \in I$.

Astfel, am dat interpretări polinoamelor Taylor de gradele 1 şi 2, asociate funcţiei f şi centrate în t_0.

Observaţia 5.9.5. *Curbele (C_1) şi (C_2) au contact de ordin cel puţin 1 în punctul $M_0(t_0, x_0)$, unde $x_0 = f(t_0) = g(t_0)$, dacă şi numai dacă au în punctul comun M_0 aceeaşi tangentă (T). Curbele au contact de ordin cel puţin 2 în t_0 dacă şi numai dacă au aceeaşi curbură în punctul M_0.*

Dacă cele două curbe au în punctul M_0 un contact de ordin cel puţin 2, atunci centrul C_0 al cercului osculator se află pe normala comună (N) în M_0, iar distanţa $d(C_0, M)$ este raza de curbură în punctul M_0.

5.9.4 Natura punctelor de extrem ale unei funcţii reale de o variabilă reală

Fie funcţia reală de variabilă reală $f \in \mathcal{F}(I)$ definită pe intervalul $I \subset I\!R$ şi $t_0 \in I.$

Definiţia 5.9.5. *Punctul* t_0 *se numeşte* **punct de extrem** *al funcţiei* f *dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(t_0)$ *astfel încât diferenţa* $f(t) - f(t_0)$ *să păstreze semn constant pe mulţimea* $I \cap V.$

Conform Teoremei lui Fermat pentru o funcţie reală de variabilă reală [18, p. 272], dacă funcţia f este derivabilă în $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ şi dacă t_0 este punct de extrem, atunci $f'(t_0) = 0.$

Să presupunem că $f \in C^n(I),\ n \geq 2,$ şi că $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ este astfel încât

$$f'(t_0) = ... = f^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad f^{(n)}(t_0) \neq 0, \quad n \geq 2.$$

Se pune problema dacă un astfel de punct $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ este sau nu punct de extrem al funcţiei $f.$ În acest scop, utilizăm formula lui Taylor pentru funcţia $f,$ în vecinătatea punctului $t_0,$ cu restul de ordin $n-1$ sub forma lui Lagrange, care în acest caz devine

$$f(t) - f(t_0) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(t - t_0)^n, \quad t \in I, \tag{5.101}$$

unde $\xi_n = t_0 + \theta_n(t - t_0),$ iar $\theta_n \in (0, 1).$

Deoarece derivata de ordinul n a funcţiei f este funcţie continuă în $t_0,$ rezultă că (5.101) se poate scrie în forma

$$f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^n}{n!}\Big(f^{(n)}(t_0) + \alpha(t)\Big),$$

unde funcţia $\alpha(t)$ are proprietatea $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = 0 = \alpha(0).$ De aici rezultă $\lim\limits_{t \to t_0}\Big(f^{(n)}(t_0) + \alpha(t)\Big) = f^{(n)}(t_0).$

Dacă $f^{(n)}(t_0) > 0,$ există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(t_0)$ astfel încât $f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) > 0,\ \forall\, t \in V \cap I,$ iar dacă $f^{(n)}(t_0) < 0,$ există o vecinătatea $V \in \mathcal{V}(t_0)$ cu proprietatea $f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) < 0,\ \forall\, t \in V \cap I.$

Prin urmare, dacă numărul natural n din formula (5.101) este de forma $n = 2k+1,\ k \geq 1,$ creşterea funcţiei f în $t_0,$ $\Delta f(t_0, \Delta t) = f(t) - f(t_0),$ corespunzătoare creşterii Δt a argumentului, are semn variabil în orice vecinătate a punctului $t_0,$ deci $M_0(t_0, f(t_0))$ nu este punct de extrem local al funcţiei $f.$

În acest caz t_0 este *punct de inflexiune* al funcţiei $f.$

Dacă $n = 2k,\ k \geq 1,$ şi $f^{(2k)}(t_0) > 0,$ $f^{(n)}(t_0) + \alpha(x) > 0,\ \forall\, t \in V \cap I,$ de unde rezultă $\Delta f(t_0, \Delta t) \geq 0$ sau $f(t) \geq f(t_0),\ \forall\, t \in V \cap I,$ ceea ce arată că t_0 este un *punct de minim local.*

Dacă $f^{(2k)}(t_0) < 0$ şi $n = 2k,$ atunci $f^{(2k)}(t_0) + \alpha(t) < 0,$
$\forall\, t \in V \cap I,$ de unde rezultă $\Delta f(t_0, \Delta t) \leq 0$ sau $f(t) \leq f(t_0),\ \forall\, t \in V \cap I.$

În această situaţie t_0 este un *punct de maxim local* al funcţiei $f.$

5.9.5 Metoda tangentei

Fie $\varphi \in C^2([a, b])$ cu proprietatea $\varphi'(t) \neq 0,\ \forall\, t \in [a, b] = I.$

Definiţia 5.9.6. *Şirul de puncte* $(t_n)_{n \geq 0},$ $t_n \in I$ *şi*

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\varphi(t_n)}{\varphi'(t_n)}, \tag{5.102}$$

unde t_0 *este ales arbitrar în* $I,$ *se numeşte* **procedura lui Newton** *asociată funcţiei* φ *în* $t_0.$

Teorema 5.9.2. *Dacă $\xi \in (a,b)$ este unica soluţie a ecuaţiei $\varphi(t) = 0$ şi $\varphi'(\xi) \neq 0$, atunci există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\xi)$ cu proprietatea că oricare ar fi $t_0 \in V \cap [a,b]$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \xi$.*

Demonstraţie. Funcţiile $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{F}([a,b])$ fiind continue, există $m > 0$ şi $M > 0$ astfel încât

$$|\varphi'(t)| \geq m, \qquad |\varphi''(t)| \leq M, \quad \forall\, t \in I. \tag{5.103}$$

Conform formulei lui Taylor cu restul de ordin 1 sub formă integrală, avem

$$\varphi(t) = \varphi(t_n) + (t - t_n)\varphi'(t_n) + \int_{t_n}^{t} (t-u)\varphi''(u)du,\ t \in I,\ n \geq 0.$$

Pentru $t = \xi$, această egalitate devine

$$0 = \varphi(t_n) + (\xi - t_n)\varphi'(t_n) + \int_{t_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du. \tag{5.104}$$

Pe de altă parte, din (5.102) rezultă

$$\varphi(t_n) + (\xi - t_n)\varphi'(t_n) = (\xi - t_{n+1})\varphi'(t_n). \tag{5.105}$$

Din (5.104) şi (5.105) deducem

$$\xi - t_{n+1} = -\frac{1}{\varphi'(t_n)} \int_{t_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du,\ n \geq 0.$$

Modulul ambilor membri ai acestei egalităţi şi inegalităţile (5.103) conduc la

$$|\xi - t_{n+1}| \leq \frac{1}{\delta}(\xi - t_n)^2, \quad \delta = \frac{2m}{M}.$$

Considerând $V = (\xi - \dfrac{\delta}{2}, \xi + \dfrac{\delta}{2}) \in \mathcal{V}(\xi)$ şi $t_0 \in V \cap [a,b]$, din inegalitatea precedentă obţinem

$$|\xi - t_n| \leq \frac{1}{\delta}|\xi - t_{n-1}|^2 < \frac{\delta}{4^n}, \quad n \in I\!N.$$

de unde deducem $t_n \to \xi$ şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Observaţia 5.9.6. *Dacă în locul lui ξ se ia t_n, atunci abaterea de la ξ* (eroarea) este mai mică decât $\delta/4^n$.

Exerciţiul 5.9.6. *Folosind procedura lui Newton să se determine o aproximare a numărului iraţional $\sqrt[3]{2}$ cu o eroare de 10^{-5}.*

Soluţie. Se observă că ξ este singura soluţie reală a ecuaţiei $t^3 - 2 = 0$ şi că ea se află în intervalul $[1,2]$. Considerăm funcţia $\varphi : [1,2] \to I\!R,\ \varphi(t) = t^3 - 2,\ t \in [1,2]$. Procedura lui Newton este

$$t_{n+1} = t_n - \frac{t_n^3 - 2}{3t_n^2} = \frac{2(t_n^3 + 1)}{3t_n^2},\ n \geq 0.$$

Luând $t_0 = 2,$ din relaţia de recurenţă (5.102) se obţin succesiv termenii şirului (t_n) care, conform Teoremei 5.9.2, converge la $\xi = \sqrt[3]{2}.$ Efectuând calculele până când primele cinci zecimale se repetă, găsim: $t_1 = 1,5;$ $t_2 = 1,29629;$ $t_3 = 1,26093;$ $t_4 = 1,25992;$ $t_5 = 1,259921.$

Prin urmare, $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992.$ ■

Observaţia 5.9.7. *Procedura lui Newton poate fi programată pe computer cu datele de intrare $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ şi t_0. Criteriul de oprire al algoritmului poate fi repetarea primelor p zecimale ale numărului t_n. Se poate demonstra că algoritmul este* **rapid convergent** *la soluţia problemei dacă t_0 este* **cât mai apropiat** *de ξ.*

Observaţia 5.9.8. *Tangenta (T_n) în punctul $M_n(t_n, \varphi(t_n))$ la graficul funcţiei φ, de ecuaţie*

$$(T_n): \quad x - \varphi(t_n) = \varphi'(t_n)(t - t_n),$$

intersectează axa absciselor Ot în punctul $(t_{n+1}, 0)$. Numărul real t_{n+1} satisface egalitatea

$$-\varphi(t_n) = \varphi'(t_n)(t_{n+1} - t_n). \tag{5.106}$$

Tangenta (T_{n+1}) la graficul funcţiei φ în punctul $M_{n+1}(t_{n+1}, \varphi(t_{n+1}))$ intersectează Ot în punctul de abscisă t_{n+2}, căruia îi corespunde pe grafic punctul $M_{n+2}(t_{n+2}, \varphi(t_{n+2}))$, în care tangenta este (T_{n+2}).

Procedeul continuă obţinându–se şirul $(t_n)_{n\geq 0}$.

Dacă din (5.106) determinăm t_{n+1} în funcţie de t_n, constatăm că obţinem procedura lui Newton.

Procedura lui Newton de determinare aproximativă a soluţiei unice a ecuaţiei $\varphi(t) = 0,$ $t \in I = [a, b]$, este cunoscută şi sub numele de **metoda tangentei**.

Capitolul 6

Diferenţiabilitatea şi derivabilitatea parţială ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

6.1 Direcţie în $I\!R^n$

Considerăm spaţiul Euclidian $I\!R^n$, vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I\!R^n$, cu $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ şi punctele $A, B \in I\!E^n$, astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, unde $I\!E^n$ este spaţiul afin Euclidian de dimensiune n al cărui spaţiu vectorial asociat este $I\!R^n$, iar O este originea reperului din $I\!E^n$.

Definiţia 6.1.1. *Se numeşte* **dreaptă** *determinată de punctele A şi B, sau de vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, mulţimea*

$$(D) = \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \ t \in I\!R\} \subset I\!R^n.$$

Definiţia 6.1.2. *Mulţimea $(SD) = \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \ t \in I\!R_+\} \subset I\!R^n$ se numeşte* **semidreapta cu originea în A, care trece prin B,**

Definiţia 6.1.3. *Prin* **segment închis de extremităţi** A **şi** B, *se înţelege mulţimea*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \ t \in [0, 1]\} \subset I\!R^n.$$

Analog se definesc *segmentul deschis* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \ t \in (0, 1)\} \subset I\!R^n,$$

segmentul închis la stânga şi deschis la dreapta $[\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \ t \in [0, 1)\} \subset I\!R^n,$$

precum şi *segmentul deschis la stânga şi închis la dreapta* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in I\!R^n : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \ t \in (0, 1]\} \subset I\!R^n.$$

Definiţia 6.1.4. *Se numeţe* **direcţie în** $I\!R^n$ *o semidreaptă cu originea în* O.

Observaţia 6.1.1. *Orice vector nenul din* $I\!R^n$ *determină o direcţie în* $I\!R^n$.

Este posibil ca două puncte distincte A şi B din $I\!E^n$ să determine aceeaşi direcţie. Aceasta se întâmplă când vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari şi de acelaşi sens.

Vectorii $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ sunt coliniari şi de acelaşi sens dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt proporţionale, iar cele corespunzătoare sunt de acelaşi semn.

Observaţia 6.1.2. *O direcţie conţine un unic vector de normă unitate care se numeşte* **versorul direcţiei** *respective. O direcţie în* $I\!R^n$ *se poate defini dând un versor.*

Observaţia 6.1.3. *În cazul* $n = 2$, *versorul* $\mathbf{s}$ *al unei direcţii date poate fi exprimat cu ajutorul unghiului* θ *dintre versorii* $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ *şi* $\mathbf{s}$. *Se vede imediat că* $\mathbf{s} = (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2$, *unde* $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ *este cel de al doilea versor care, împreună cu* $\mathbf{e}_1$, *formează baza canonică în* $I\!R^2$.

Observaţie similară are loc şi în cazul $n = 3$ când versorul $\mathbf{s}$ al unei direcţii în spaţiu se scrie în forma $\mathbf{s} = \cos\alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \cos\alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \cos\alpha_3\,\mathbf{e}_3$, unde $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $I\!R^3$, iar $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3$, este unghiul dintre versorul $\mathbf{e}_i$ al bazei şi versorul $\mathbf{s}$. Coordonatele lui $\mathbf{s}$ se numesc *cosinii directori* ai direcţiei. Deoarece $\mathbf{s} \in I\!R^3$ este versor, rezultă $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$.

6.2 Derivata după o direcţie a unei funcţii reale de variabilă vectorială

Definiţia derivabilităţii şi a derivatei într–un punct al unei funcţii vectoriale de variabilă reală $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, $A \subset I\!R$, nu poate fi extinsă întocmai la cazul funcţiilor reale de variabilă vectorială de forma

$$f \in \mathcal{F}(D); \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\mathbf{x}) \in I\!R, \tag{6.1}$$

unde $D \subset I\!R^n$ şi $n \geq 2$. Pentru funcţii de tipul (6.1) putem considera un gen de derivată a funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$ după direcţii, adică limita raportului incrementar dintre creşterea funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$ corespunzătoare creşterii $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ a variabilei independente $\mathbf{x}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ şi norma creşterii lui $\mathbf{x}$ în $\mathbf{x}_0$, raport luat însă după puncte care se găsesc pe o anumită dreaptă care trece prin $\mathbf{x}_0$, deci în punctele unei direcţii.

Presupunem atunci că domeniul de definiţie al funcţiei reale $f \in \mathcal{F}(D)$ este o mulţime deschisă din $I\!R^n$ şi fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$. Atunci, există $r > 0$, astfel încât $B(\mathbf{a}, r) \subset D$.

Fie $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) \in I\!R^n$ un vector cu proprietatea

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2} = 1, \tag{6.2}$$

deci un versor din $I\!R^n$ care defineşte o direcţie în $I\!R^n$.

Să considerăm dreapta (D) care trece prin extremitatea A a vectorului $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi care are direcţia $\mathbf{s}$. Un punct oarecare M, astfel încât $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n$ este pe dreapta (D) dacă $\mathbf{x}$ este de forma

$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{s}$, unde $t \in I\!R$. Pentru ca acest punct să fie în bila deschisă $B(\mathbf{a}, r)$ trebuie ca $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r$, unde $d \in \mathcal{F}(I\!R^n \times I\!R^n)$ este metrica Euclidiană pe $I\!R^n$. După cum ştim Însa,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a} + t\,\mathbf{s} - \mathbf{a}\| = \|t\,\mathbf{s}\| = |t|\,\|\mathbf{s}\| = |t|.$$

Din acest rezultat rezultă că diametrul de direcţie $\mathbf{s}$ al bilei $B(\mathbf{a}, r)$ este mulţimea $\{\mathbf{x} \in D : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{s}, \ t \in (-r, r)\}$, adică segmentul deschis $(\mathbf{a} - r\,\mathbf{s}, \mathbf{a} + r\,\mathbf{s})$.

Să considerăm acum funcţia reală de variabilă reală $g \in \mathcal{F}((-r, r))$ care să fie restricţia funcţiei f la segmentul deschis $(\mathbf{a} - r\,\mathbf{s}, \mathbf{a} + r\,\mathbf{s})$, adică

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}), \ t \in (-r, r), \tag{6.3}$$

sau

$$g(t) = f(a_1 + t\,s_1,\, a_2 + t\,s_2,\, ...,\, a_n + t\,s_n), \ t \in (-r, r). \tag{6.4}$$

Definiţia 6.2.1. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset I\!R^n$, $D = \overset{\circ}{D}$, este* **derivabilă** *în punctul $\mathbf{a}$ după* **direcţia** $\mathbf{s}$ *sau* **după versorul** $\mathbf{s}$, *dacă funcţia g din (6.3), sau din (6.4), este derivabilă în $t = 0$. Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este derivabilă în punctul $\mathbf{a} \in D$ după versorul $\mathbf{s} \in I\!R^n$, atunci numărul real $g'(0)$ se numeşte* **derivata** *funcţiei reale f în punctul $\mathbf{a}$ după* **direcţia** $\mathbf{s}$ *şi se notează cu* $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a})$.

Din această definiţie deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a}) = g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{t}. \tag{6.5}$$

Dacă $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{s}$ şi f este derivabilă în $\mathbf{x}$ după direcţia $\mathbf{s}$, atunci vom avea

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a} + t\,\mathbf{s}) = g'(t). \tag{6.6}$$

Pentru a înţelege semnificaţia numărului real definit de (6.5), să considerăm cazul $n = 2$. Vom nota $x_1 = x$, $x_2 = y$, iar pe $f(x_1, x_2)$ îl vom nota cu z. Mulţimea (S) a punctelor din $I\!R^3$ definită prin

$$(S) = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D, \ z = f(x, y)\},$$

unde funcţia $f \in \mathcal{F}(D)$ este cel puţin continuă pe D, se numeşte *suprafaţă*.

Punctul $A(x_0, y_0)$, extremitataea vectorului $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, fiind din mulţimea deschisă D, aparţine lui D împreună cu un întreg disc deschis cu centrul în $\mathbf{a}$ şi rază egală cu $r > 0$. Dacă este dat versorul $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, acesta determină diametrul $A_1\,A_2$ al discului, paralel cu $\mathbf{s}$. Porţiunea din planul (P), perpendicular pe planul Oxy, care intersectează planul Oxy după o dreaptă ce conţine diametrul A_1A_2, are în comun cu suprafaţa (S) un arc de curbă plană care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ şi care are extremităţile în punctele

$$M_1(x_0 - r\,s_1,\, y_0 - r\,s_2,\, f(x_0 - r\,s_1,\, y_0 - r\,s_2)) \quad \text{şi} \quad M_2(x_0 + r\,s_1,\, y_0 + r\,s_2,\, f(x_0 + r\,s_1,\, y_0 + r\,s_2)).$$

Pentru a înţelege semnificaţia geometrică a derivatei după o direcţie, alegem în planul (P) un reper format din dreapta care trece prin punctele A_1 şi A_2, drept axă a absciselor At, şi mediatoarea segmentului A_1A_2 ca axă a ordonatelor, unde A, originea reperului, este mijlocul segmentului A_1A_2.

Versorul axei absciselor At este $\mathbf{s}$, iar arcul de curba $(M_1\,M_2)$ are ecuaţia carteziană explicită $u = g(t)$, $t \in (-r, r)$. Deoarece g este derivabilă în $t = 0$, există tangenta orientată (T) la arcul de curbă $u = g(t)$ în punctul $M_0(0, g(0))$ de pe grafic, sensul de parcurs al tangentei fiind imprimat de sensul de parcurs pe curbă care la rându-i este imprimat de sensul de creştere a lui $t \in (-r, r)$. Fie α_0 unghiul dintre $\mathbf{s}$ şi versorul $\boldsymbol{\tau}$ al tangentei (T). Se ştie că $g'(0) = \operatorname{tg}\alpha_0$ şi deci $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \operatorname{tg}\alpha_0$, ceea ce arată că derivata funcţiei f în punctul $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$, după direcţia $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, este panta tangentei (T).

De asemenea, putem interpreta $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a})$ drept viteza de variaţie a funcţiei f, în punctul $\mathbf{x}_0$, pe direcţia $\mathbf{s}$.

Exercițiul 6.2.1. *Să se calculeze derivata funcției reale* $f \in \mathcal{F}(I\!R^2)$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ *în punctul* $M_0(1,1)$ *după direcția* $\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Soluţie. Funcţia g din (6.4) este $g(t) = f(1 + \frac{1}{2}\,t, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t) = (1 + \frac{1}{2}\,t)^2 - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t)^2 = (1 - \sqrt{3})\,t - \frac{1}{2}\,t^2$. Avem $g'(t) = 1 - \sqrt{3} - t$ de unde $g'(0) = 1 - \sqrt{3}$ şi deci $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(1,1) = 1 - \sqrt{3}$. ■

Exercițiul 6.2.2. *Să se calculeze derivata funcției reale*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^3), \quad f(x_1, x_2, x_3) = e^{\frac{x_3}{x_1}} \sin x_2 \;,$$

în punctul $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$ *după direcția* $\mathbf{v} = (2, -5, 7)$.

Soluţie. Determinămulţimîntâi versorul vectorului $\mathbf{v}$. Deoarece $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{78}}$, deducem că

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\,\mathbf{v} = (\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}).$$

Funcţia g este dată de $g(t) = f(3 + \dfrac{2}{\sqrt{78}}t, -\dfrac{5}{\sqrt{78}}t, -1 + \dfrac{7}{\sqrt{78}}t) = -e^{\frac{7t - \sqrt{78}}{2t + 3\sqrt{78}}} \sin \dfrac{5t}{\sqrt{78}}$.

Avem $g'(t) = -e^{\frac{7t - \sqrt{78}}{2t + 3\sqrt{78}}}\Big((\dfrac{7t - \sqrt{78}}{2t + 3\sqrt{78}})' \sin \dfrac{5t}{\sqrt{78}} + \dfrac{5t}{\sqrt{78}} \cos \dfrac{5t}{\sqrt{78}}\Big)$, de unde găsim $g'(0) = -\dfrac{5}{\sqrt{78}}e^{-\frac{1}{3}}$. Deci $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(3, 0, -1) = -\dfrac{5}{\sqrt{78}\,\sqrt[3]{e}}$. ■

Deoarece $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, este derivata ordinară a funcţiei auxiliare g, derivata după o direcţie are aceleaşi proprietăţi ca derivabilitatea obişnuită a funcţiilor reale de variabilă reală. De exemplu, au loc următoarele identităţi care rezultă direct din identităţi bine cunoscute în care intervin funcţii reale de o variabilă reală:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(f_1 \pm f_2) = \dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} \pm \dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}, \\ \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(c \cdot f) = c \cdot \dfrac{df}{d\mathbf{s}}, \quad c = const., \\ \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(f_1 \cdot f_2) = f_2 \cdot \dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} + f_1 \cdot \dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}, \\ \dfrac{d}{d\mathbf{s}}\Big(\dfrac{f_1}{f_2}\Big) = \dfrac{f_2 \cdot \dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} - f_1 \cdot \dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}}{f_2^2}, \end{cases} \tag{6.7}$$

în ipoteza că numitorul din ultima identitate nu se anulează şi că toate derivatele din membrii doi a tuturor identităţilor există.

Vom folosi acum Definiţia 6.2.1 şi relaţia (6.6) pentru a demonstra o *teoremă a valorii medii* pentru derivatele după o direcţie.

Teorema 6.2.1. *Fie* $f \in \mathcal{F}(D)$, *o funcție reală de* n *variabile reale,* $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{s} \in I\!R^n$, $\|\mathbf{s}\| = 1$ *și* $\lambda \in I\!R$. *Dacă segmentul închis* $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{s}]$ *este conținut în* D *și există derivata lui* f *după direcția* $\mathbf{s}$ *în orice punct* $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{s}]$, *atunci există* $\theta \in (0,1)$, *astfel încât*

$$f(\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{s}) - f(\mathbf{a}) = \lambda\,\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a} + \theta\,\lambda\,\mathbf{s}). \tag{6.8}$$

Demonstraţie. Funcţia $g(t) = f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{s})$ este continuă pe intervalul închis $[0,\lambda] \subset I\!R$ şi derivabilă pe intervalul $(0,\lambda)$. Aplicând teorema creşterilor finite a lui Lagrange funcţiei g deducem că există $\theta \in (0,1)$, astfel încât

$$g(\lambda) - g(0) = \lambda\, g'(\theta\,\lambda). \tag{6.9}$$

Dar

$$g(\lambda) = f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{s}),\ g(0) = f(\mathbf{a}),\ g'(\theta\,\lambda) = \frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a} + \theta\,\lambda\,\mathbf{s}). \tag{6.10}$$

Înlocuirea lui (6.10) în (6.9) conduce la (6.8) şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Observaţia 6.2.1. *Dacă $n = 1$, singurii versori în $I\!R^1 = I\!R$ sunt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ şi $-\mathbf{e}_1$, unde O este originea pe axa reală, iar A_1 este punctul de abscisă 1 de pe această axă. Considerând acum o funcţie reală definită pe o mulţime deschisă din $I\!R$, deci pe o reuniune de intervale deschise din $I\!R$, din cele de mai sus constatăm că derivata într–un punct a al domeniului de definiţie după direcţia $\mathbf{e}_1$ coincide cu derivata obişnuită a lui f în punctul a adică $\dfrac{df}{d\mathbf{e}_1}(a) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$. Să remarcăm că nu trebuie confundată derivata lui f în punctul a după versorul $\mathbf{e}_1$ cu derivata la dreapta a funcţiei f în punctul a, după cum derivata lui f în punctul a după versorul $-\mathbf{e}_1$ nu este aceeaşi cu derivata la stânga a funcţiei f în punctul a.*

Exerciţiul 6.2.3. *Să se studieze dacă funcţia reală de două variabile reale*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2),\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

are derivată în origine după un versor oarecare $\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta)$, unde $\theta \in [0,2\pi)$.

Soluţie. Construim funcţia g din (6.3). Găsim

$$g(t) = \begin{cases} \sin 2\theta, & \text{dacă } t \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } t = 0. \end{cases}$$

Atunci,

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} = \sin 2\theta\, \lim_{t\to 0}\frac{1}{t},$$

din care deducem că dacă $\theta \in [0,2\pi) \setminus \{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\}$ funcţia f nu este derivabilă în origine în raport cu direcţia $\mathbf{s}$.

Pentru direcţiile $\mathbf{s}$ în care $\theta \in \{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\}$ rezultă $g'(0) = 0$, deci funcţia f este derivabilă în origine după aceste direcţii $\mathbf{s}$ şi $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(0,0) = 0$. ■

Dacă pentru o funcţie reală de o variabilă reală derivabilitatea într–un punct implică continuitatea în acel punct, pentru o funcţie reală de mai multe variabile reale acest rezultat nu are loc dacă derivabilitatea este cea după o direcţie. Mai mult, nici chiar derivabilitatea lui $f \in \mathcal{F}(D)$, într–un punct din $D \subset I\!R^n$, după orice direcţie din $I\!R^n$, nu implică continuitatea funcţiei în acel punct. Această afirmaţie rezultă din exemplul următor.

Exemplul 6.2.1. *Funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ *este derivabilă în origine în raport cu orice versor din* $\mathbb{R}^2$, *dar* f *nu este continuă în origine.*

Într-adevăr, fie $\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi),$ un versor oarecare din $\mathbb{R}^2$. Calculând funcţia g după (6.3), sau (6.4) găsim

$$g(t) = f(\mathbf{0} + t\mathbf{s}) = \frac{t^3\ \cos^5\theta}{t^6\ \cos^8\theta + (\sin\theta - t\ \cos^2\theta)^2}.$$

Dacă $\theta \neq 0$ şi $\theta \neq \pi$, atunci

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^5\theta}{t^6\cos^8\theta + (\sin\theta - t\cos^2\theta)^2} = \frac{0}{\sin^2\theta} = 0,$$

ceea ce arată că f este funcţie derivabilă în origine după orice versor $\mathbf{s}$ diferit de unul din versorii $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ şi $-\mathbf{e}_1$, iar derivata funcţiei date în origine după versorul $\mathbf{s}$ este egală cu zero. Dacă $\theta = 0$, atunci $g(t) = \dfrac{t}{t^4+1}$ şi $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)-g(0)}{t} = 1$, prin urmare avem $\dfrac{df}{d\mathbf{e}_1}(\mathbf{0}) = 1$. În cazul $\theta = \pi$,

$$g(t) = -\frac{t}{t^4+1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{df}{d(-\mathbf{e}_1)}(\mathbf{0}) = -1.$$

Prin urmare, funcţia f este derivabilă în origine după orice versor $\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$.

Pentru studiul continuităţii funcţiei f în origine folosim definiţia continuităţii cu şiruri.

Luând şirul din $\mathbb{R}^2$ cu termenul general $\mathbf{x}_n = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2})$, convergent la $\mathbf{0} = (0,0)$, şirul valorilor funcţiei are termenul general $f(x_n) = n^3$, iar acest şir are limita $+\infty$. Deoarece limita este diferită de valoarea funcţiei în origine, care este zero, rezultă că f nu este continuă în origine. ■

6.3 Derivabilitatea parţială şi derivate parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Fie f o funcţie reală definită pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in D$ şi $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ baza canonică din spaţiul Euclidian $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 6.3.1. *Spunem că funcţia* $f \in \mathcal{F}(D)$ *este* **derivabilă parţial** *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabila* x_j, *dacă* f *este derivabilă în punctul* $\mathbf{a}$ *după versorul* $\mathbf{e}_j$.

Variabila x_j poate fi oricare din variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$ ale funcţiei f.

Definiţia 6.3.2. *Dacă* f *este derivabilă parţial în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabila* x_j, *atunci* $\dfrac{df}{d\mathbf{e}_j}(\mathbf{a})$ *se numeşte* **derivata parţială de ordinul întâi** *a funcţiei* f *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabila* x_j.

a unei funcţiii reale în raport cu o variabilă

Derivata parţială de ordinul întâi a lui f în punctul $\mathbf{a}$ în raport cu variabila x_j se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a});\quad f'_{x_j}(\mathbf{a});\quad f_{,x_j}(\mathbf{a});\quad f_{,j}(\mathbf{a}).$$

Definiţia 6.3.3. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(D)$ este* **derivabilă parţial pe** D, *sau* **pe o submulţime** $B \subset D$, *în raport cu variabila* x_j, *dacă* f *este derivabilă parţial în orice punct* $\mathbf{a} \in D$, *sau* $\mathbf{a} \in B$, *în raport cu variabila* x_j.

Folosind definiţia derivatei după o direcţie, derivata parţială a funcţiei f în punctul $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ în raport cu variabila x_j este

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{df}{d\mathbf{e}_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t} = \\ = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{t}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

În cazul $n = 2$, vom scrie (x, y) în loc de (x_1, x_2), iar în cazul $n = 3$ punctul curent al spaţiului (x_1, x_2, x_3) îl vom nota prin (x, y, z).

Dacă funcţia reală de două variabile reale $z = f(x, y)$, definită pe un domeniu D din $\mathbb{R}^2$, este derivabilă în punctul $\mathbf{a} = (a, b)$ în raport cu variabila x şi în raport cu variabila y, atunci derivatele parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t}; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t}. \end{cases} \tag{6.12}$$

În cazul $n = 3$, derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei reale $u = f(x, y, z)$, în punctul (a, b, c), dacă există, sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) &= \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t, b, c) - f(a, b, c)}{t}; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) &= \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a, b + t, c) - f(a, b, c)}{t}; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) &= \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a, b, c + t) - f(a, b, c)}{t}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Pentru a înţelege semnificaţia relaţiei (6.11), considerăm funcţia reală φ_j, restricţia funcţiei f la segmentul deschis din D care conţine extremitatea A a vectorului $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi are direcţia versorului $\mathbf{e}_j$. Un punct oarecare al acestui diametru are vectorul de poziţie $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}_j$, unde t aparţine unui interval I care conţine originea $t = 0$. Valorile funcţiei f pe acest diametru sunt egale cu valorile funcţiei φ_j pe intervalul I, iar acestea din urmă sunt date de

$$\varphi_j(t) = f(a_1, a_2, ..., a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, ..., a_n) \tag{6.14}$$

În acest mod ultimul membru din (6.11) este

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j(0)}{t} = \varphi_j'(0). \tag{6.15}$$

Din (6.11), (6.14) şi (6.15) rezultă că derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ este derivata obişnuită, în origine, a funcţiei φ_j, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \varphi_j'(0). \tag{6.16}$$

Identitatea (6.16) dă o *metodă practică* de calculare a derivatelor parţiale ale unei funcţii de n variabile reale x_1, x_2, ..., x_n în situaţia în care funcţia f este definită printr–o formulă explicită ca rezultat al unor operaţii algebrice, trigonometrice, etc. asupra coordonatelor x_1, x_2, ..., x_n.

Pentru calculul derivatei parţiale de ordinul întâi în punctul $\mathbf{a}$ în raport cu variabila x_j, considerăm că expresia matematică $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este funcţie numai de variabila x_j, celelalte variabile fiind tratate drept constante, derivăm funcţia de variabila x_j astfel obţinută conform regulilor cunoscute de derivare a funcţiilor reale de o variabilă reală, după care se înlocuieşte x_i cu a_i, unde $i \in \overline{1, n}$.

Definiţia 6.3.4. *Funcţia* $f \in \mathcal{F}(D)$ *este* **derivabilă parţial** *pe mulţimea deschisă* $D \subset I\!R^n$ *dacă* f *este derivabilă parţial în orice punct* $\mathbf{a} \in D$ *în raport cu toate variabilele* $x_k,\ k \in \overline{1,n}$.

Definiţia 6.3.5. *Fie* $f \in \mathcal{F}(D)$ *o funcţie reală derivabilă parţial pe mulţimea deschisă* $D \subset I\!R^n$. *Funcţiile*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to I\!R, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t}, \tag{6.17}$$

se numesc **derivatele parţiale de ordinul întâi** *ale funcţiei* f.

Pentru derivata parţială de ordinul întâi a funcţiei f în raport cu variabila x_k, în punctul $\mathbf{x} \in D$, se poate utiliza şi una din notaţiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}); \quad f'_{x_k}(\mathbf{x}) \quad = \quad f_{,x_k}(\mathbf{x}); \quad f_{,k}(\mathbf{x}).$$

Deoarece derivarea parţială a funcţiei $f \in \mathcal{F}(D),\ D \subset I\!R^n$ în raport cu variabila $x_j,\ j \in \overline{1,n}$, este derivarea ordinară, obişnuită, a funcţiei reale de variabilă reală φ_j, are aceleaşi proprietăţi ca şi derivarea obişnuită. De exemplu, avem

$$\begin{cases} (f_1 \pm f_2)_{,\,j} = f_{1,\,j} \pm f_{2,\,j}, \\ (c\,f)_{,\,j} = c\,f_{,\,j},\ c = const., \\ (f_1 \cdot f_2)_{,\,j} = f_{1,\,j} \cdot f_2 + f_1 \cdot f_{2,\,j}, \\ \Big(\dfrac{f_1}{f_2}\Big)_{,\,j} = \dfrac{f_{1,\,j} \cdot f_2 - f_1 \cdot f_{2,\,j}}{f_2^2}, \end{cases} \tag{6.18}$$

în ipoteza că derivatele din membrul doi din fiecare egalitate există şi că numitorul din ultima egalitate este diferit de zero.

Definiţia 6.3.6. *Funcţia reală* $f \in \mathcal{F}(D)$ *este* **de clasă** C^1 *pe mulţimea deschisă* D *din* $I\!R^n$ *dacă* f *este continuă, derivabilă parţial pe* D *şi toate derivatele parţiale* $f_{,\,j}$ *sunt funcţii continue pe* D.

Exerciţiul 6.3.1. *Folosind relaţiile* (6.12), *să se studieze dacă funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = x^2 + xy,$$

este derivabilă parţial în punctul $\mathbf{a} = (5,-3)$, *precizezându–se totodată derivatele parţiale de ordinul întâi în acest punct.*

Soluţie. Fie $g_1(t) = f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_1)$ şi $g_2(t) = f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_2)$ unde $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ este baza canonică din $I\!R^2$ şi $t \in I\!R$. După Definiţia 6.3.1 şi Definiţia 6.3.2 trebuie să studiem derivabiliatea în $t = 0$ a funcţiilor g_1 şi g_2. Pentru aceasta calculăm $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{g_1(t) - g_1(0)}{t}$ şi $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{g_2(t) - g_2(0)}{t}$. Constatăm că aceste limite există, sunt finite şi egale respectiv cu 7 şi 5. Prin urmare $g_1'(0) = 7$, iar $g_2'(0) = 5$, ceea ce arată că există $\dfrac{df}{d\mathbf{e}_1}(\mathbf{a})$ şi $\dfrac{df}{d\mathbf{e}_2}(\mathbf{a})$ şi acestea sunt egale cu 7, respectiv 5. După Definiţia 6.3.1 avem că f este derivabilă parţial în $\mathbf{a} = (5,-3)$. În baza Definiţiei 6.3.2 rezultă că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(5,-3) = 7$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(5,-3) = 5$. ■

Exerciţiul 6.3.2. *Folosind metoda practică de calcul a derivatelor parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale şi relaţiile (6.18) să se determine derivatele parţiale ale funcţiilor:*

$$\begin{array}{lll}\text{(i)} & f(x_1,x_2,x_3) & = \dfrac{x_1^6x_2^2}{x_3}+3x_1,\ \ (x_1,x_2,x_3)\in I\!R^3, x_3\neq 0;\\ \text{(ii)} & f(x_1,x_2) & = e^{ax_1}\cos bx_2,\ \ (x_1,x_2)\in I\!R^2,\end{array}$$

unde a şi b sunt constante reale.

Soluţie. Folosind (6.18) – (6.18), în cazul (i), obţinem:

$$f_{,1}(x_1,x_2,x_3)=\frac{6x_1^5x_2^2}{x_3}+3;\quad f_{,2}(x_1,x_2,x_3)=\frac{2x_1^6x_2}{x_3};\quad f_{,3}(x_1,x_2,x_3)=-\frac{x_1^6x_2^2}{x_3^2},$$

iar în cazul (ii), avem:

$$f_{,1}(x_1,x_2)=a\,e^{ax_1}\cos bx_2;\quad f_{,2}(x_1,x_2)=-b\,e^{ax_1}\sin bx_2.$$

■

Exerciţiul 6.3.3. *Să se determine derivatele parţiale $f_{,x}(x,y)$ şi $f_{,y}(x,y)$, unde $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.*

Soluţie. Aplicând regula practică de calculare a derivatelor parţiale, găsim:

$$f_{,x}(x,y)=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2};\quad f_{,y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

■

Exerciţiul 6.3.4. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei*

$$f\in\mathcal{F}(I\!R^n),\quad f(\mathbf{x})=e^{\|\mathbf{x}\|^2}(x_1+x_2^3+x_3^5+...+x_n^{2n-1}),$$

unde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in I\!R^n$ *şi* $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Soluţie. Folosind regulile de derivare (6.18), găsim:

$$\begin{cases} f_{,1}(\mathbf{x})= & e^{\|\mathbf{x}\|^2}\Big(1+2x_1(x_1+x_2^3+x_3^5+...+x_n^{2n-1})\Big);\\ f_{,2}(\mathbf{x})= & e^{\|\mathbf{x}\|^2}\Big(3x_2+2(x_1+x_2^3+x_3^5+...+x_n^{2n-1})\Big);\\ \vdots & \\ f_{,n}(\mathbf{x})= & e^{\|\mathbf{x}\|^2}\Big((2n-1)x_n^{2n-1}+2(x_1+x_2^3+x_3^5+...+x_n^{2n-1})\Big).\end{cases}$$

■

Derivabilitatea parţială a unei funcţii reale de mai multe variabile reale nu implică continuitatea acesteia. Exemplul de mai jos vine în sprijinul afirmaţiei făcute.

Exemplul 6.3.1. *Funcţia reală de două variabile reale*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \textit{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

este derivabilă parţial în origine, dar nu este continuă în origine.

Într-adevăr, prin calcul direct, constatăm că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0,$$

ceea ce arată că f este derivabilă parţial în origine şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Pentru studiul continuităţii funcţiei f în origine, folosim definiţia cu şiruri. În acest scop, fie şirurile $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ şi $(\mathbf{z}_n)_{n\geq 1}$ care au termenii generali $\mathbf{x}_n = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n})$ şi $\mathbf{z}_n = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n})$. Ambele şiruri sunt convergente la $\mathbf{0} = (0,0)$. Şirurile valorilor funcţiei au respectiv termenii generali $f(\mathbf{x}_n) = \dfrac{1}{2}$ şi $f(\mathbf{z}_n) = \dfrac{2}{5}$ şi, după cum se vede, sunt convergente la limite diferite, ceea ce arată că funcţia f nu este continuă în origine. ■

Definiţia 6.3.7. *Fie funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$ derivabilă parţial în punctul $\mathbf{x}_0$. Vectorul*

$$(\nabla f)(\mathbf{x}_0) = (f_{,1}(\mathbf{x}_0), f_{,2}(\mathbf{x}_0), ..., f_{,n}(\mathbf{x}_0)) = \sum_{j=1}^{n} f_{,j}(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_j, \tag{6.19}$$

se numeşte **gradientul**, *sau* **derivata** *funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$.*

Definiţia 6.3.8. *Operatorul $\nabla : \mathcal{F}(D) \to \mathcal{F}(D, I\!R^n)$ definit prin*

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{6.20}$$

unde $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j \in \overline{1,n}$, este operaţia de derivare parţială faţă de variabila x_j, se numeşte **operatorul nabla**, *sau* **operatorul lui Hamilton**[1].

Operatorul lui Hamilton aplicat funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$ în punctul $\mathbf{x} \in D$, unde D este o mulţime deschisă din $I\!R^n$, este gradientul funcţiei f în $\mathbf{x}$.

6.4 Diferenţiabilitatea şi diferenţiala de ordinul întâi ale unei funcţii reale de variabilă vectorială

Fie funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$, unde D este o mulţime deschisă din $I\!R^n$, şi funcţia afină reală

$$A : D \to I\!R, \quad A(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + c, \tag{6.21}$$

[1] Hamilton, William Rowan (1805–1865), matematician irlandez.

unde c este o constantă reală, iar T este o formă liniară pe $\mathbb{R}^n$, deci $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$.

Dacă în baza canonică

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n,$$

un vector oarecare $\mathbf{x}$ are expresia analitică

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X, \tag{6.22}$$

unde

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ ori}}, \tag{6.23}$$

iar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \tag{6.24}$$

este matricea coordonatelor vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}$, atunci, după Teorema 4.10.1, avem

$$T(\mathbf{x}) = A_\top X, \tag{6.25}$$

unde $A_\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ este matricea lui T în perechea de baze $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ şi $\{1\} \subset \mathbb{R}$ şi are expresia

$$A_\top = (a_1 \ a_2 \ ... \ a_n), \tag{6.26}$$

unde

$$a_i = T(\mathbf{e}_i), \quad i \in \overline{1, n}. \tag{6.27}$$

Ne propunem să aproximăm $f(\mathbf{x})$ prin numărul real (6.21), astfel încât să fie satisfăcute condiţiile

$$A(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0), \tag{6.28}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} A(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}). \tag{6.29}$$

Din (6.21) şi (6.28), deducem

$$c = f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x}_0). \tag{6.30}$$

Folosind (6.30) în (6.21) şi ţinând cont de faptul că $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, stabilim că

$$A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \ \forall \, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{6.31}$$

Din (6.29), (6.31) şi

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = T(\mathbf{0}) = 0,$$

rezultă că aproximarea dorită se poate realiza dacă $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$, ceea ce arată că funcţia f trebuie să fie continuă în $\mathbf{x}_0$.

Până acum aplicaţia T este nedeterminată deoarece nu se cunosc numerele a_j din (6.7). Acestea se determină din condiţia ca $f(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})$ să se "apropie" de zero "mai repede" de cum se apropie de zero numărul real pozitiv $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, unde $\|\cdot\|$ este norma Euclidiană pe $\mathbb{R}^n$. Această condiţie suplimentară conduce la

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{6.32}$$

sau echivalent

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{h}_0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{6.33}$$

Dacă raportul din (6.32) se notează cu $\alpha(\mathbf{h})$, adică

$$\alpha(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}, \tag{6.34}$$

atunci condiţia (6.33), cu notaţia (6.34), se scrie

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{h}_0} \alpha(\mathbf{h}) = 0. \tag{6.35}$$

Funcţia α se poate prelungi prin continuitate în origine punând

$$\alpha(\mathbf{0}) = 0. \tag{6.36}$$

Analizând acum (6.34 – (6.36), deducem că ultima condiţie impusă se poate formula astfel: să existe o funcţie reală $\alpha \in I\!R^n$ care să satisfacă (6.35) şi (6.36) astfel încât să aibă loc

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|, \ \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^n, \quad \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D, \tag{6.37}$$

sau

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \ \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{6.38}$$

Egalitatea (6.37), sau (6.38) conduce în mod natural la noţiunile de diferenţiabilitate şi diferenţială de ordinul întâi ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Definiţia 6.4.1. *Funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$, definită pe domeniul $D \subset I\!R^n$, este* **diferenţiabilă** *în $\mathbf{x}_0 \in D$ dacă există forma liniară $T \in L(I\!R^n, I\!R) = (I\!R^n)^*$ şi funcţia reală $\alpha \in \mathcal{F}(I\!R^n)$, cu proprietăţile (6.35), (6.36), astfel încât să aibă loc (6.37), sau (6.38). Funcţia $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă dacă f este diferenţiabilă în orice punct $\mathbf{x} \in D$.*

Definiţia 6.4.2. *Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D \subset I\!R^n$, atunci forma liniară T din $I\!R^n$ se numeşte* **diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$** *şi se notează cu*

$$T = T(\cdot) = df(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \cdot) = df(\mathbf{x}_0)(\cdot). \tag{6.39}$$

Teorema 6.4.1. (**Unicitatea diferenţialei**) *Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, atunci diferenţiala sa în $\mathbf{x}_0$ este unică.*

Demonstraţie. Să presupunem că aplicaţia $T = df(\mathbf{x}_0)$ nu este unică şi că mai există o formă liniară S pe $I\!R^n$ astfel încât să fie verificată o egalitate asemănătoare cu (6.33)

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - S(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{6.40}$$

În baza axiomelor $(N_1) - (N_3)$ din definiţia normei, pentru orice $\mathbf{h} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, avem

$$\begin{aligned} &\frac{S(\mathbf{h}) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \le \\ &\le \frac{S(\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Trecând la limită în (6.41) pentru $\mathbf{h} \to 0$ şi ţinând cont de (6.32) şi (6.40), obţinem

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{S(\mathbf{h}) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{6.42}$$

Dacă $\mathbf{y} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ este arbitrar dar fixat, atunci luând în (6.42) $\mathbf{h} = t\,\mathbf{y}$, unde $t > 0$ şi ţinând cont că $\mathbf{h} \to \mathbf{0} \Longrightarrow t \to 0$, obţinem

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t\,\mathbf{y}) - T(t\,\mathbf{y})}{t\,\|\mathbf{y}\|} = 0,$$

din care, în baza omogeneităţii lui S şi T, rezultă

$$\frac{S(\mathbf{y}) - T(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} = 0.$$

De aici avem evident

$$S(\mathbf{y}) = T(\mathbf{y}),\ \forall\,\mathbf{y} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Dacă la acest rezultat adăugăm şi faptul că $T(\mathbf{0}) \equiv S(\mathbf{0})$ deducem $T = S$, ceea ce arată că diferenţiala lui $f \in \mathcal{F}(D)$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este unică. **q.e.d.**

Teorema următoare stabileşte legătura dintre diferenţiabilitatea şi derivabilitatea unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Teorema 6.4.2. *Dacă funcţia $f \in \mathcal{F}(D),\ D \subset I\!R^n$ este diferenţiabilă în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci f este derivabilă parţial în $\mathbf{x}_0$ şi*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{e}_j) = df(\mathbf{x}_0;\mathbf{e}_j) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j),\quad j \in \overline{1,n}. \tag{6.43}$$

Demonstraţie. Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$ atunci (6.37) are loc şi pentru $\mathbf{h} = t\,\mathbf{e}_j,\ t \neq 0$. Ţinând cont că T este aplicaţie liniară, rezultă

$$T(t\,\mathbf{e}_j) = t\,T(\mathbf{e}_j) = t\,df(\mathbf{x}_0;\mathbf{e}_j) = t\,a_j = t\,df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j)$$

şi ca atare (6.37) se scrie în forma

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_j) = f(\mathbf{x}_0) + t\,T(\mathbf{e}_j) + |t|\,\alpha(t\mathbf{e}_j),\ t \in I\!R^*,\ \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_j \in D, \tag{6.44}$$

sau în forma echivalentă

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = df(\mathbf{x}_0;\mathbf{e}_j) + \frac{|t|}{t}\alpha(t\mathbf{e}_j). \tag{6.45}$$

Trecerea la limită pentru $t \to 0$ în (6.45), în care se ţine cont de (6.35), conduce la

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = df(\mathbf{x}_0;\mathbf{e}_j) = T(\mathbf{e}_j) = a_j,\ j \in \overline{1,n}, \tag{6.46}$$

care arată că f este derivabilă parţial în $\mathbf{x}_0$ şi are loc (6.43). **q.e.d.**

Cu acest rezultat putem afirma că matricea $A_\top$ este

$$A_\top = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \Big). \tag{6.47}$$

Definiţia 6.4.3. *Matricea $A_\top$ din (6.44) se numeşte* **matricea jacobiană a funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$** *şi, alteori, se notează cu $J_f(\mathbf{x}_0)$.*

Observaţia 6.4.1. *Vectorul care în baza canonică din $I\!R^n$ are drept coordonate elementele corespunzătoare ale matricei $A_\top = J_f(\mathbf{x}_0)$ este tocmai $f'(\mathbf{x}_0) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}_0)$, deci putem scrie*

$$f'(\mathbf{x}_0) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}J_f^\top(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{e}_i. \tag{6.48}$$

Corolarul 6.4.1. *Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci*

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\,h_i = ((\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{h} = J_f(\mathbf{x}_0)\,H, \tag{6.49}$$

oricare ar fi vectorul

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i\,\mathbf{e}_i = \mathbf{e}\,H \in I\!R^n. \tag{6.50}$$

Demonstraţie. Dacă se calculează $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})$ în care $\mathbf{h}$ are expresia (6.50), se ţine cont de faptul că diferenţiala funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$ este aplicaţie liniară, se are în vedere (6.48) şi expresia produsului scalar standard în $I\!R^n$, se obţine (6.49). **q.e.d.**

Teorema 6.4.3. *Dacă funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$, definită pe mulţimea nevidă deschisă D din $I\!R^n$, este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci f este continuă în $\mathbf{x}_0$, derivabilă în $\mathbf{x}_0$ după orice versor $\mathbf{s} \in I\!R^n$ şi are loc egalitatea*

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{s}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{s}. \tag{6.51}$$

Demonstraţie. Dacă f este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci are loc (6.37) sau, echivalenta ei, (6.38). Trecând la limită în (6.38) pentru $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, ţinând cont de faptul că T este aplicaţie continuă de valoare nulă în originea lui $I\!R^n$ şi de faptul că funcţia α are proprietatea (6.35), deducem că f este funcţie continuă în $\mathbf{x}_0$.

Să luăm acum în (6.37) $\mathbf{h} = t\,\mathbf{s}$, unde $\mathbf{s}$ este un versor din $I\!R^n$, iar $t \in I\!R^*$ este astfel încât $\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{s} \in D$. Dacă ţinem cont de notaţia (6.39), constatăm că pentru alegerea de mai sus egalitatea (6.37) devine

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{s}) - f(\mathbf{x}_0) = t\,df(\mathbf{x}_0 \tag{6.52}$$

Dacă în egalitatea (6.52) împărţim prin t, trecem la limită pentru $t \to 0$ şi ţinem cont de (6.35) şi Definiţia 6.2.1, obţinem (6.51). **q.e.d.**

Considerăm funcţiile $\mathrm{pr}_j : I\!R^n \to I\!R$, $j \in \overline{1,n}$, $\mathrm{pr}_j(\mathbf{x}) = x_j$, $\forall\,\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n$, care sunt diferenţiabile în orice punct din $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)I\!R^n$ deoarece

$$\mathrm{pr}_j(\mathbf{x}) = \mathrm{pr}_j(\mathbf{a}) + 1 \cdot (x_j - a_j) + 0 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|, \ \forall \mathbf{x} \in I\!R^n.$$

Diferenţiala oricăreia dintre ele este

$$d\ \mathrm{pr}_j(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 1 \cdot h_j, \ \forall\, \mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n) \in I\!R^n, \ j \in \overline{1,n}.$$

Deoarece diferenţiala funcţiei pr_j în punctul $\mathbf{a}$ nu depinde de $\mathbf{a}$ rezultă că în orice punct $\mathbf{x} \in I\!R^n$ avem

$$d\ \mathrm{pr}_j(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = h_j, \tag{6.53}$$

Folosind în (6.53) definiţia (6.52) a funcţiilor *proiecţie* pr_j, deducem

$$dx_j(\mathbf{h}) = h_j. \tag{6.54}$$

Diferenţialelor funcţiilor proiecţie (6.52) le vom spune *diferenţialele variabilelor independente.*

Înlocuirea lui (6.53) în (6.49) conduce la

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i(\mathbf{h}), \ \ \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^n. \tag{6.55}$$

Observaţia 6.4.2. *Din (6.53) rezultă că diferenţiala funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$ în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$ este combinaţie liniară de diferenţialele variabilelor independente dx_1, dx_2, ..., dx_n, coeficienţii combinaţiei liniare fiind derivatele parţiale ale funcţiei f, adică*

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i. \tag{6.56}$$

Observaţia 6.4.3. *Diferenţialele variabilelor independente sunt evident elemente ale spaţiului dual $(I\!R^n)^*$ şi, mai mult, din (6.55) rezultă că mulţimea $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ este bază în $(I\!R^n)^* = L(I\!R^n, I\!R)$.*

Definiţia 6.4.4. *Operatorul d definit prin*

$$d = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i, \tag{6.57}$$

care este o combinaţie liniară a operatorilor de derivare parţială $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i \in \overline{1,n}$, cu coeficienţi diferenţialele variabilelor independente, se numeşte **operatorul de diferenţiere de ordinul întâi**.

Având în vedere (6.57) şi proprietăţile (6.18) ale operaţiilor de derivare parţială deducem

Teorema 6.4.4. *Dacă funcţiile $f_1 \in \mathcal{F}(D)$ şi $f_2 \in \mathcal{F}(D)$ sunt diferenţiabile în în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$, iar λ_1, λ_2 sunt numere reale arbitrare, atunci funcţiile: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{F}(D)$; $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{F}(D)$; $\dfrac{f_1}{f_2} \in \mathcal{F}(D)$,* (cu condiţia $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$), sunt diferenţiabile în $\mathbf{x}_0$ şi

$$\begin{cases} d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\mathbf{x}_0) = \lambda_1\, df_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2\, df_2(\mathbf{x}_0), \\ d(f_1 \cdot f_2)(\mathbf{x}_0) = f_2(\mathbf{x}_0) df_1(\mathbf{x}_0) + f_1(\mathbf{x}_0) df_2(\mathbf{x}_0), \\ d\Big(\dfrac{f_1}{f_2}\Big)(\mathbf{x}_0) = \dfrac{f_2(\mathbf{x}_0) df_1(\mathbf{x}_0) - f_1(\mathbf{x}_0) df_2(\mathbf{x}_0)}{f_2^2(\mathbf{x}_0)}. \end{cases} \tag{6.58}$$

Definiţia 6.4.5. *Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^n$, atunci aplicaţia*

$$\mathbf{x} \in D \mapsto d\,f(\mathbf{x}) \in (I\!R^n)^*,\;\; df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})dx_i, \tag{6.59}$$

se numeşte **funcţia diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei** f **pe mulţimea deschisă D**.

În cazul $n = 2$, (6.59) se scrie în forma

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy, \tag{6.60}$$

iar în cazul $n = 3$, forma lui (6.59) este

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz. \tag{6.61}$$

Exerciţiul 6.4.1. *Folosind regulile de diferenţiere din Teorema 6.4.4 să se calculeze funcţia diferenţiala funcţiei*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = x\cos 3y - y^2 \sin 2x$$

după care ,utilizând (6.59), să se precizeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f.

Soluţie. Folosind (6.58), găsim

$$\begin{aligned} df(x,y) &= d(x\cos 3y - y^2\sin 2x) = d(x\cos 3y) - d(y^2\sin 2x) = \\ &= \cos 3y dx - 3x\sin 3y dy - 2y\sin 2x dy - 2y^2\cos 2x dx = \\ &= (\cos 3y - 2y^2\cos 2x)dx - (3x\sin 3y + 2y\sin 2x)dy, \end{aligned} \tag{6.62}$$

de unde, luând în consideraţie (6.59), deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad = \quad \cos 3y - 2y^2\cos 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad -(3x\sin 3y + 2y\sin 2x).$$

■

Exemplul 6.4.1. *Aplicaţia $f : I\!R^2 \to I\!R_+, \;\; f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ nu este diferenţiabilă în origine.*

Presupunem contrariul, şi anume că funcţia f este diferenţiabilă în origine. Atunci, există aplicaţia liniară $T : I\!R^2 \to I\!R$, care în baza canonică din $I\!R^2$ are expresia analitică

$$T(\mathbf{h}) = T(h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2) = a_1 h_1 + a_2 h_2, \quad \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^2,$$

unde $a_1, a_2 \in I\!R$, astfel încât (vezi (6.32))

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{h}\| - a_1\,h_1 - a_2\,h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{6.63}$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{h}\| - a_1\,h_1 - a_2\,h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 1 - a_1\cos\theta - a_2\sin\theta, \tag{6.64}$$

unde θ este unghiul dintre $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{h}$. Din (6.63) şi (6.64) rezultă egalitatea

$$1 - a_1\cos\theta - a_2\sin\theta = 0, \tag{6.65}$$

care nu este posibilă în ipoteza că θ este arbitrar între 0 şi 2π.

Presupunerea facută este falsă, prin urmare funcţia f nu este diferenţiabilă în origine. ■

Exemplul 6.4.2. *Funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(I\!\!R^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

este diferenţiabilă în origine.

Într-adevăr, remarcând mai întâi că funcţia dată este derivabilă în origine şi că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, deducem că egalitatea (6.38) se scrie în forma

$$f(x,y) = f(0,0) + \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow e^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}} = \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2},$$

din care deducem

$$\alpha(x,y) \;=\; \frac{e^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Folosind notaţia $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, constatăm că $\alpha(x,y)$ se exprimă în forma

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{\rho}\,e^{-\dfrac{1}{\rho^2}}.$$

Dacă ţinem cont că $\mathbf{x}\to\mathbf{0} \Longleftrightarrow \rho\to 0$, atunci

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \alpha(x,y) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \alpha(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho}\,e^{-\dfrac{1}{\rho^2}}.$$

Aplicând regula lui L'Hospital, găsim că ultima limită este egală cu zero şi deci funcţia f este diferenţiabilă în $\mathbf{0} = (0,0)$. ■

6.5 Condiţie suficientă de diferenţiabilitate

Diferenţiabilitatea într–un punct a unei funcţiii reale de mai multe variabile reale implică continuitatea sa în acest punct, derivabilitatea după orice direcţie şi, în particular, derivabilitatea parţială a funcţiei în acel punct.

Existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei f într–un punct nu asigura diferenţiabilitatea lui f în acel punct.

Pentru a justifica afirmaţia aceasta este de ajuns să considerăm Exemplul 6.3.1. Presupunând că funcţia din acest exemplu este diferenţiabilă, atunci trebuie să existe funcţia reală de două variabile reale $\alpha \in \mathcal{F}(I\!\!R^2)$ cu proprietatea

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = \alpha(0,0) = 0$$

astfel încât să avem

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,(y-0) + \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Cum $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, pentru $(x,y) \neq (0,0)$ şi $f(0,0) = 0$, folosind (6.12), deducem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ şi cu aceste calcule egalitatea de mai sus devine

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \alpha(x,y)\,\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{pentru } (x,y) \neq (0,0).$$

Această egalitate trebuie să aibă loc şi pentru $y = x \neq 0$. În acest caz particular, egalitatea devine

$$1 = 2\sqrt{2}\alpha(x,x)|x|.$$

Trecând la limită pentru $x \to 0$ în acest ultim rezultat găsim $1 = 0$, ceea ce arată că funcţia f nu este diferenţiabilă în origine deşi are derivate parţiale în acest punct.

Aşadar, simpla existenţă a derivatelor parţiale într–un punct ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale nu asigură diferenţiabilitatea acesteia în punct.

Ne punem atunci întrebarea: *ce condiţii suplimentare trebuie să satisfacă derivatele parţiale ale funcţiei* $f \in \mathcal{F}(D)$ *astfel încât* f *să fie diferenţiabilă într–un punct din* D? Teorema următoare dă răspunsul la această întrebare.

Teorema 6.5.1. (**Condiţie suficientă de diferenţiabilitate**) *Dacă funcţia reală* $f \in \mathcal{F}(D)$ *este derivabilă parţial într–o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ *a punctului* $\mathbf{a} \in D$, *iar derivatele parţiale sunt continue în* $\mathbf{a}$, *atunci* f *este diferenţiabilă în* $\mathbf{a}$.

Demonstraţie. Fără a micşora din generalitate, putem presupune că vecinătatea $V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$ este bila deschisă cu centrul în $\mathbf{a}$ şi rază $\varepsilon > 0$, pe care având în vedere că D este mulţime deschisă, o putem considera inclusă în D. Amintind că mulţimea $B(\mathbf{a},\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$, să procedăm la evaluarea creşterii funcţiei f în punctul $\mathbf{a}$ corespunzătoare creşterii $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Această creştere se poate scrie în forma

$$\Delta f(\mathbf{a};\Delta\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(g_i(x_i) - g_i(a_i)), \tag{6.66}$$

unde

$$\begin{cases} g_1 : [x_1, a_1] \to I\!R, & g_1(t) = f(t, x_2, x_3, ..., x_n), \\ g_2 : [x_2, a_2] \to I\!R, & g_2(t) = f(a_1, t, x_3, ..., x_n), \\ \vdots & \\ g_n : [x_n, a_n] \to I\!R, & g_n(t) = f(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, t). \end{cases} \tag{6.67}$$

Fiecare din funcţiile din (6.62) satisface ipotezele teoremei lui Lagrange referitoare la o funcţie reală de variabilă reală continuă pe un compact şi derivabilă pe interiorul acelui interval, ca urmare putem afirma că există $\xi_i \in (x_i, a_i)$ astfel încât

$$g_i(x_i) - g_i(a_i) = (x_i - a_i)g'(\xi_i), \ \ i \in \overline{1,n}. \tag{6.68}$$

Însă, se vede uşor că

$$\begin{cases} g_1'(\xi_1) &= \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, ..., x_n), \\ g_2'(\xi_2) &= \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, ..., x_n), \\ \vdots & \\ g_n'(\xi_n) &= \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, \xi_n). \end{cases} \tag{6.69}$$

Înlocuirea relaţiilor (6.69) în (6.68) şi a rezultatului în (6.66), conduce la

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{a};\Delta\mathbf{x}) = & \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, ..., x_n)+\\ & +\sum_{i=2}^{n-1}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, ..., x_n)+\\ & +\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \xi_n).\end{aligned} \tag{6.70}$$

Să scădem din ambii membri ai lui (6.70) expresia

$$T(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i).$$

Notând $h_i = x_i - a_i,\ i \in \overline{1,n}$ şi $\mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$, constatăm că aplicaţia

$$T \in \mathcal{F}(I\!R^n, I\!R),\ \ T(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i,\ \ \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^n, \tag{6.71}$$

este o formă liniară pe $I\!R^n$, deci $T \in L(I\!R^n, I\!R) = (I\!R^n)^*$.

După efectuarea operaţiei anunţate în (6.70) şi împărţirea în ambii membri a egalităţii obţinute cu $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$, obţiem

$$\begin{aligned}&\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} =\\ &\frac{x_1 - a_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n)\Big)+\\ &\frac{x_2 - a_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, ..., a_n)\Big)+\\ &\vdots\\ &\frac{x_n - a_n}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_n)\Big).\end{aligned} \tag{6.72}$$

Luând valoarea absolută în ambii membri ai lui (6.72) şi ţinând cont că

$$\frac{|x_i - a_i|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} \le 1, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

deducem

$$\begin{aligned}&\frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x}-\mathbf{a})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} \le\\ &|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n)|+\\ &|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, ..., a_n)|+\\ &\vdots\\ &|\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_n)|.\end{aligned} \tag{6.73}$$

Deoarece derivatele parţiale ale funcţiei f sunt continue în $\mathbf{a}$, există limita termenilor din membrul doi a inegalităţii (6.73) pentru $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ şi aceasta este egală cu zero. Prin urmare,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0. \tag{6.74}$$

Dacă expresia căreia i se calculează limita în (6.74) o notăm cu $\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ şi mai adăugăm $\alpha(\mathbf{0}) = 0$, atunci din (6.74) obţinem (6.38), unde $\alpha \in \mathcal{F}(I\!R^n, I\!R)$ satisface (6.35) şi (6.36) ceea ce, în baza Definiţiei 6.4.1, arată că funcţia f este diferenţiabilă în $\mathbf{a}$ şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Corolarul 6.5.1. *Dacă funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$ este de clasă C^1 pe mulţimea deschisă din $I\!R^n$, atunci f este diferenţiabilă pe D.*

6.6 Derivate parţiale de ordin superior ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale

Fie D o mulţime deschisă din $I\!R^n$, $f \in \mathcal{F}(D)$ o funcţie reală derivabilă pe D şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D),\ \ j \in \overline{1,n}$, cele n derivate parţiale de ordinul întâi ale lui f.

Definiţia 6.6.1. *Funcţia $f \in \mathcal{F}(D)$ este* **de două ori derivabilă în raport cu variabilele x_j şi x_i, în această ordine, în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$** *dacă funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D)$ este derivabilă în raport cu variabila x_i în punctul $\mathbf{x}_0$, deci dacă există limita*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)}{t} \tag{6.75}$$

şi aceasta aparţine lui $I\!R$.

Definiţia 6.6.2. *Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este de două ori derivabilă în $\mathbf{x}_0$ în raport cu variabilele x_j şi x_i, atunci limita finită din (6.75) se numeşte* **derivata parţială de ordinul al doilea a funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$ în raport cu variabilele x_j şi x_i** *şi se notează cu unul din simbolurile*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad f''_{x_j x_i}(\mathbf{x}_0), \quad f_{,x_j x_i}(\mathbf{x}_0), \quad f_{,ji}(\mathbf{x}_0).$$

Prin urmare,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)}{t}. \tag{6.76}$$

Observaţia 6.6.1. *Din definiţiile de mai sus rezultă că*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\Big)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \tag{6.77}$$

adică o derivată parţială de ordinul al doilea, a unei funcţii reale de o variabilă reală f, este derivata parţială a unei derivate parţiale de ordinul întâi a aceleiaşi funcţii f.

Observaţia 6.6.2. *Într–un punct* $\mathbf{x}_0 \in D$ *pot exista cel mult* n^2 *derivate parţiale de ordinul al doilea.*

Definiţia 6.6.3. *Dacă* $i \neq j$, *atunci derivatele parţiale de ordinul al doilea* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ *şi* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ *se numesc* **derivate parţiale mixte**, *iar când* $i = j$ *convenim să scriem* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}_0)$ *în loc de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$.

Definiţia 6.6.4. *Funcţia* $f \in \mathcal{F}(D)$ *se numeşte* **derivabilă parţial de două ori** *în* $\mathbf{x}_0$ *dacă există* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ *pentru orice* $i \in \overline{1, n}$ *şi pentru orice* $j \in \overline{1, n}$.

Definiţia 6.6.5. *Dacă există* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ *pentru orice* $\mathbf{x} \in D$, *pentru orice* $i \in \overline{1, n}$ *şi pentru orice* $j \in \overline{1, n}$, *atunci funcţia* $f \in \mathcal{F}(D)$ *este* **derivabilă parţial de două ori** *pe* D.

Definiţia 6.6.6. *Dacă funcţia* $f \in \mathcal{F}(D)$ *este derivabilă parţial de două ori pe* D, *atunci funcţiile*

$$\mathbf{x} \in D \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})}{t} \in I\!R,$$

unde $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, *se numesc* **derivatele parţiale de ordinul al doilea** *ale funcţiei* f.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot);\quad f_{,ji};\quad f_{,ji}(\cdot);\quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j});\ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(\cdot).$$

Definiţia 6.6.7. *Prin definiţie,* **derivatele parţiale de ordinul** m, $m \geq 2$, *ale funcţiei* $f \in \mathcal{F}(D)$ *sunt derivatele parţiale de ordinul întâi ale derivatelor parţiale de ordinul* $m - 1$, *în ipoteza că acestea din urmă există.*

Definiţia 6.6.8. *Funcţia* $f \in \mathcal{F}(D)$ *se numeşte* **de clasă** C^m, $m \geq 2$, *şi scriem* $f \in C^m(D)$, *dacă* f *admite derivate parţiale până la ordinul* m *inclusiv, iar* f *şi toate derivatele sale parţiale până la ordinul* m *sunt funcţii continue pe* D.

Observaţia 6.6.3. *Dacă notăm cu $C^0(D)$ mulţimea funcţiilor continue pe D rezultă că orice funcţie de clasă C^1 pe D este şi de clasă $C^0(D)$.*

Într-adevăr, dacă $f \in C^1(D)$, atunci conform Corolarului 6.6.4, f este diferenţiabilă pe D, iar din Teorema 6.4.3 rezultă că f este funcţie continuă, deci $f \in C^0(D)$. ∎

Ţinând cont de această observaţie rezultă că orice funcţie reală de clasă $C^q(D)$ este totodată şi o funcţie de clasă $C^{q-1}(D)$, unde $q \geq 1$.

Definiţia 6.6.9. *Clasa funcţiilor indefinit derivabile parţial pe D este mulţimea tuturor funcţiilor reale $f \in \mathcal{F}(D)$ care admit derivabile parţiale de orice ordin, continue pe D. Această mulţime se notează cu $C^\infty(D)$.*

Observaţia 6.6.4. *Din rezultatele de mai sus deducem că are loc următorul şir de incluziuni*

$$C^\infty(D) \subset ... \subset C^m(D) \subset C^{m-1}(D) \subset ... \subset C^1(D) \subset C^0(D).$$

Exemplul 6.6.1. *Funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = x\,|x|\,y,$$

nu este derivabilă parţial pe D, iar derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea, care există, sunt egale.

Într-adevăr, folosind definiţia derivatelor parţiale într–un punct, deducem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2|x|y, & \text{dacă} \quad (x,y) \in I\!R^* \times I\!R, \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \in \{0\} \times I\!R, \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x|x|, \quad \text{dacă } (x,y) \in I\!R^2. \end{cases}$$

Folosind aceste rezultate şi (6.76), se găseşte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} 2\dfrac{|x|}{x}\,y, & \text{dacă} \quad (x,y) \in I\!R^* \times I\!R, \\ \text{nu există}, & \text{dacă} \quad (x,y) \in \{0\} \times I\!R, \end{cases} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2|x|, \ \text{dacă } (x,y) \in I\!R^2; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2|x|, \ \text{dacă } (x,y) \in I\!R^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \text{dacă } (x,y) \in I\!R^2.$$

Prin urmare, nefiind derivabilă parţial de două ori în raport cu variabila x în puncte de forma $(0,y)$, unde $y \in I\!R$, funcţia f nu este de două ori derivabilă. De asemenea, derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea, acolo unde există, sunt egale. ∎

Exerciţiul 6.6.1. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei*

$$f \in \mathcal{F}(D), \quad f(x,y,z) = 3x^2y - \frac{x+y}{z} + 2z,$$

unde $D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \ (x,y) \in I\!R^2, \ z > 0\}$.

Soluţie. Folosind regulile de derivare parţială care rezultă din (6.18), găsim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=6xy-\frac{1}{z};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3x^2-\frac{1}{z};\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{x+y}{z^2}+2;$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial x}(6xy-\dfrac{1}{z})=6y;\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2-\dfrac{1}{z})=0;\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}(\dfrac{x+y}{z}+2)=-\dfrac{2(x+y)}{z^2};\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2-\dfrac{1}{z})=6x;\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial y}(6xy-\dfrac{1}{z})=6x;\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}(6xy-\dfrac{1}{z})=\dfrac{1}{z^2};\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x+y}{z^2}+2)=\dfrac{1}{z^2};\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}(3x^2-\dfrac{1}{z})=\dfrac{1}{z^2};\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{x+y}{z^2}+2)=\dfrac{1}{z^2}.
\end{cases}$$

Prin urmare, funcţia considerată este derivabilă parţial de două ori pe D, iar derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt egale. ■

Exerciţiul 6.6.2. *Se consideră funcţia*

$$f:I\!R^2\to I\!R,\quad f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \textit{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \textit{dacă}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiei f, în origine, nu sunt egale.

Soluţie. Pentru a calcula derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea în origine ale funcţiei date trebuie să calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f într–o vecinătate a originii. Pentru $(x,y)\neq(0,0)$, aplicând regulile de calcul cu derivatele parţiale, se vede uşor că :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pentru calculul derivatelor parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiei f în origine aplicăm formula de calcul (6.21) şi (6.76). Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0;\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-t}{t}=-1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

Din cele de mai sus rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$ ■

Din exemplele date constatăm că există funcţii pentru care derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea într–un punct, sau pe o mulţime sunt egale, în timp ce pentru altele acestea, măcar într–un punct, nu sunt egale.

În continuare, vom prezenta condiţii suficiente ce trebuie să le satisfacă funcţia f astfel încât derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale sale într–un punct, sau pe o mulţime de puncte să fie egale.

Teorema 6.6.1. (**Criteriul lui Schwarz**) *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ şi $i \neq j$, unde $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,n}$. Dacă există derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$ pe o vecinătate $V \subset D$ a punctului $\mathbf{x}_0$ şi dacă aceste derivate parţiale sunt continue în $\mathbf{x}_0$, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$.*

Demonstraţie. Pentru simplitate şi fără a pierde din generalitate, vom considera cazul funcţiilor reale f de două variabile reale x şi y. Fie $h \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat încât dreptunghiul cu două din vârfurile opuse în punctul $\mathbf{x}_0 = (x_0, yt_0)$ şi în punctul de coordonate $(x_0 + h, y_0 + h)$ să fie incluse în vecinătatea $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$. Definim acum funcţiile:

$$\varphi : [0,h] \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = f(x_0 + t, y_0 + h) - f(x_0 + t, y_0), \quad t \in [0,h]; \tag{6.78}$$

$$\psi : [0,h] \to \mathbb{R},\ \psi(t) = f(x_0 + h, y_0 + t) - f(x_0, y_0 + t), \quad t \in [0,h]. \tag{6.79}$$

Mai întâi observăm că

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \psi(h) - \psi(0). \tag{6.80}$$

Apoi, întrucât funcţiile φ şi ψ satisfac ipotezele teoremei creşterilor finite a lui Lagrange, există $0 < \theta_1 < 1$ şi $0 < \theta_2 < 1$, astfel încât:

$$\begin{cases} \varphi(h) - \varphi(0) &= h\varphi'(\theta_1\, h); \\ \psi(h) - \psi(0) &= h\, \psi'(\theta_2\, h). \end{cases} \tag{6.81}$$

Din (6.80) şi (6.81) obţinem

$$\varphi'(\theta_1\, h) = \psi'(\theta_2\, h). \tag{6.82}$$

Însă:

$$\varphi'(\theta_1\, h) = f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_{,1}(x_0 + \theta_1\, h, y_0); \tag{6.83}$$

$$\psi'(\theta_2\, h) = f_{,2}(x_0 + h, y_0 + \theta_2 h) - f_{,2}(x_0, y_0 + \theta_2\, h). \tag{6.84}$$

Membrul doi din (6.83) este creşterea funcţiei $f_{,1}(x_0 + \theta_1\, h, \cdot)$ în punctul y_0 corespunzătoare creşterii h a variabilei independente. Aplicând acestei funcţii teorema lui Lagrange, deducem că există $\tau_1 \in (0,1)$, astfel încât să avem

$$f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0) = h f_{,12}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \tau_1 h). \tag{6.85}$$

Un raţionament asemănător aplicat însă funcţiei $f_{,2}(\cdot, y_0 + \theta_2 h)$ conduce la existenţa numărului pozitiv subunitar τ_2, astfel încât membrul doi din (6.84) să se scrie în forma

$$f_{,2}(x_0 + h, y_0 + \theta_2\, h) - f_{,2}(x_0, y_0 + \theta_2 h) = h\, f_{,21}(x_0 + \tau_2\, h, y_0 + \theta_2 h). \tag{6.86}$$

Atunci, din (6.82) – (6.86), obţinem

$$f_{,12}(x_0+\theta_1 h, y_0+\tau_1 h) = f_{,21}(x_0+\tau_2 h, y_0+\theta_2 h). \tag{6.87}$$

Trecând la limită în (6.87) pentru $h \to 0$ şi ţinând cont că derivatele parţiale mixte sunt continue în (x_0, y_0), obţinem

$$f_{,12}(x_0,y_0) = f_{,21}(x_0,y_0).$$

Prin urmare, în cazul $n = 2$, teorema este demonstrată.

Pentru a arăta că teorema rămâne adevărată în cazul $n > 2$, considerăm $i < j$, fapt ce nu particularizează problema studiată, şi funcţia reală de două variabile reale x şi y

$$g(\cdot,\cdot) = f(x_{0\,1}, x_{0\,2}, ..., x_{0\,i-1}, \cdot, x_{0\,i+1}, ..., x_{0\,j-1}, \cdot, x_{0\,j+1}, ..., x_{0\,n}), \tag{6.88}$$

unde $x_{0\,1}, x_{0\,2}, ..., x_{0\,n}$ sunt coordonatele punctului $\mathbf{x}_0 \in I\!\!R^n$, definită pe o mulţime deschisă din $I\!\!R^2$ care conţine punctul de coordonate (x_{0i}, x_{0j}). Aplicând rezultatul obţinut mai sus funcţiei g, avem

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_{0i}, x_{0j}) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_{0i}, x_{0j}).$$

Observând că

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_{0i}, x_{0j}) & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{0i}, x_{0j}), \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_{0i}, x_{0j}) & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_{0i}, x_{0j}), \end{cases}$$

şi ţinând cont de rezultatul anterior, deducem că teorema este adevărată şi pentru $n > 2$. **q.e.d.**

Corolarul 6.6.1. *Dacă funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$ este de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \subset I\!\!R^n$, există funcţiile derivatele parţiale de ordinul al doilea $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe mulţimea D şi sunt continue pe D, atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\mathbf{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{6.89}$$

Teorema 6.6.2. (**Criteriul lui Young**[2]) *Dacă funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$ este derivabilă parţial într–o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$, unde $\mathbf{x}_0$ este un punct al mulţimii deschise $D \subset I\!\!R^n$ şi derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{F}(V)$ sunt diferenţiabile în $\mathbf{x}_0$, atunci există derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f în $\mathbf{x}_0$, iar cele mixte sunt egale.*

Demonstraţie. Vom considera mai întâi cazul $n = 2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$, fixat, (x, y) un punct arbitrar din $V \in \mathcal{V}((x_0, y_0))$, cu $V \subset D$, $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ şi funcţiile φ şi ψ din respectiv (6.78) şi (6.79), funcţii care satisfac (6.82), unde cei doi membri ai acestei din urmă relaţii sunt daţi în (6.83) şi (6.84). Pentru a calcula diferenţa din membrul drept a lui (6.83) adunăm şi scădem termenul $f_{,1}(x_0, y_0)$ după care observăm că expresiile $f_{,1}(x_0+\theta_1 h, y_0+h) - f_{,1}(x_0,y_0)$ şi $f_{,1}(x_0+\theta_1 h, y_0) - f_{,1}(x_0,y_0)$ pot fi evaluate în baza diferenţiabilităţii derivatelor parţiale ale funcţiei f după cum urmează:

$$f_{,1}(x_0+\theta_1 h, y_0+h) - f_{,1}(x_0,y_0) = f_{,11}(x_0,y_0)\theta_1 h + f_{,12}(x_0,y_0)h + |h|\sqrt{1+\theta_1^2}\,\alpha_1(\theta_1 h, h); \tag{6.90}$$

[2]Young, W. H. (1863–1942), matematician englez.

$$f_{,1}(x_0+\theta_1 h,y_0)-f_{,1}(x_0,y_0)=f_{,11}(x_0,y_0)\theta_1\,h+|h|\theta_1\alpha_2(\theta_1\,h). \tag{6.91}$$

Din (6.83), (6.90) şi (6.91) găsim

$$\varphi'(\theta_1 h)=h\,f_{,12}(x_0,y_0)+|h|\,\alpha(h), \tag{6.92}$$

unde $\alpha(h)=\sqrt{1+\theta_1^2}\alpha_1(\theta_1 h,h)+\theta_1\alpha_2(\theta_1 h)$ şi deci $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0.$

Folosind diferenţiabilitatea funcţiei $f_{,\,2}$ şi expresia (6.84) a lui $\psi'(\theta_2\,h)$, printr-un calcul similar celui de mai sus, găsim

$$\psi'(\theta_2\,h)=h\,f_{,\,2\,1}(x_0,y_0)+|h|\,\beta(h), \tag{6.93}$$

unde funcţia β definită într–o vecinătate a lui $h=0$, are proprietatea $\lim\limits_{h\to 0}\beta(h)=0.$

Din (6.82), (6.92) şi (6.93), după împărţirea cu h şi trecere la limită pentru $h\to 0$, obţinem $f_{,\,1\,2}(x_0,y_0)=f_{,\,2\,1}(x_0,y_0)$. Dacă $n>2$ şi i şi j sunt doi indici diferiţi cuprinşi între 1 şi n, iar $i<j$, atunci se consideră funcţia g din (6.88), se aplică raţionamentul de mai sus şi se găseşte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Corolarul 6.6.2. *Dacă $f\in\mathcal{F}(D)$ este derivabilă parţial pe mulţimea deschisă $D\subset I\!\!R^n$ şi derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f sunt funcţiii diferenţiabile pe D, atunci există derivatele parţiale ale funcţiei f pe mulţimea D şi cele mixte sunt egale.*

Pentru simplificarea notaţiilor să facem precizarea că atunci când vom avea o derivată parţială de forma

$$\frac{\partial^m f}{\underbrace{\partial x_{i_1}\partial x_{i_1}...\partial x_{i_1}}_{k_1\text{ori}}\underbrace{\partial x_{i_2}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_2}}_{k_2\text{ ori}}...\underbrace{\partial x_{i_\ell}\partial x_{i_\ell}...\partial x_{i_\ell}}_{k_\ell\text{ ori}}}(\mathbf{x}_0),$$

unde $k_1+k_2+...+k_\ell=m$, vom folosi în loc notaţia $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{k_1}\,\partial x_{i_2}^{k_2}...\partial x_{i_\ell}^{k_\ell}}(\mathbf{x}_0)$.

Definiţia 6.6.10. *Se numeşte* **multi–indice**, *sau* $m-$**indice**, *orice sistem ordonat de m numere naturale $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$, adică un element al mulţimii $I\!\!N^m$.*

Definiţia 6.6.11. *Pentru orice multi–indice $\alpha\in I\!\!N^n$, numărul natural $|\alpha|$ definit de $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$ se numeşte* **ordinul** *lui α.*

De exemplu, perechea $(1,5)$ este un $2-$indice de ordin 6, perechea $(0,0)$ este un $2-$indice de ordin 0, iar sextetul $(2,1,3,0,0,2)$ este un $6-$indice de ordin 8.

Dacă $f\in\mathcal{F}(D)$ este o funcţie reală de clasă C^m pe mulţimea deschisă $D\subset I\!\!R^n$, atunci pentru orice $m-$indice $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ cu $|\alpha|\le m$ este definită funcţia $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}\in(\mathcal{D})$, care aparţine clasei de funcţii $C^{m-|\alpha|}$, obţinută derivând succesiv funcţia f de α_n ori în raport cu variabila x_n (α_n poate fi şi zero, deci nu se derivează în raport cu x_n), de α_{n-1} ori în raport cu x_{n-1}, ... şi de α_1 ori în raport cu variabila x_1. Pentru această funcţie se utilizează uneori şi notaţia $D^\alpha f$.

Corolarul 6.6.3. *Dacă $f\in C^m(D)$, atunci $D^\alpha f=D^{\sigma(\alpha)} f$ în fiecare punct $\mathbf{x}\in D$, adică*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x})=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}}\partial x_{\sigma(2)}^{\alpha_{\sigma(2)}}...\partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}}(\mathbf{x}), \tag{6.94}$$

unde σ este o permutare a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din Teorema 6.6.1 aplicată derivatelor parţiale de ordinul $|\alpha| - 1$. **q.e.d.**

Observaţia 6.6.5. *Corolarul 6.6.3 afirmă că derivatele parţiale mixte de ordin $|\alpha|$ sunt egale. De exemplu, pentru o funcţie reală f de două variabile reale x şi y de clasă C^2 pe un domeniu plan D, avem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, iar dacă $f \in C^3(D)$, atunci $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$.*

Definiţia 6.6.12. *Aplicaţia $D^\alpha : C^n(D) \to C^{m-|\alpha|}(D)$, $f \mapsto D^\alpha f$, se numeşte* **operator diferenţial de multi–indice** *α. Mai general, se numeşte* **operator diferenţial liniar de ordin** *$\leq m$ pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^n$, orice combinaţie liniară de forma $\sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot D^\alpha$, unde funcţiile continue $a_\alpha \in \mathcal{F}(D)$ se numesc* **coeficienţii operatorului diferenţial**.

De exemplu, în cazul $n = 3$, un operator diferenţial liniar de ordin 2 care joacă un rol important în ecuaţiile fizice matematice este

$$\Delta : C^2(D) \to C^0(D),\ \Delta = D^{(2,0,0)} + D^{(0,2,0)} + D^{(0,0,2)},\ f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

care se numeşte **laplacianul în trei variabile** (după numele renumitului matematician francez Laplace, Pierre (1749–1827)). Asemănător, se poate introduce laplacianul în două variabile.

Corolarul 6.6.4. *Dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ admite toate derivatele parţiale de ordinul $m - 1$ pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$, $V \subset D$, unde D este o mulţime deschisă din $I\!R^n$, şi aceste derivate parţiale sunt diferenţiabile în $\mathbf{x}_0$, atunci există toate derivatele parţiale de ordinul m ale funcţiei f şi derivatele parţiale mixte de ordinul m sunt egale, adică*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}} \partial x_{\sigma(2)}^{\alpha_{\sigma(2)}} ... \partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}}(\mathbf{x}_0). \tag{6.95}$$

Observaţia 6.6.6. *Concluzia Corolarului 6.6.4 se extinde uşor la o submulţime de puncte din D.*

6.7 Diferenţiale de ordin superior ale funcţiilor reale de variabilă vectorială

Anterior am constatat că funcţia reală $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$ dacă există forma liniară pe $I\!R^n$, $T \in L(I\!R^n, I\!R) = (I\!R^n)^*$, şi funcţia reală $\alpha \in \mathcal{F}(I\!R^n)$, cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{y} \to 0} \alpha(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{0}) = 0, \tag{6.96}$$

astfel încât, pentru orice $\mathbf{y} \in I\!R^n$ cu proprietatea $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in D$, să avem

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{y})\|\mathbf{y}\|. \tag{6.97}$$

Să considerăm acum că $\mathbf{y} = t\,\mathbf{h}$, unde $\mathbf{h} \in I\!R^n$ este fixat, iar $t \in I\!R$ este variabil astfel încât $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in D$. Având în vedere că $T(t\mathbf{h}) = tT(\mathbf{h})$, din (6.97) în care considerăm că $t \neq 0$, obţinem

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = T(\mathbf{h}) + \frac{|t|}{t}\|\mathbf{h}\|\alpha(t\mathbf{h}). \tag{6.98}$$

Trecând la limită în (6.98) pentru $t \to 0$ şi având în vedere că raportul $\dfrac{|t|}{t}$ este mărginit, că $t \to 0 \Longleftrightarrow t\mathbf{h} \to 0$ şi că are loc (6.96), obţinem $T(\mathbf{h}) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$. Amintind că pentru $T(\mathbf{h})$ am utilizat notaţia $T(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$ şi observând că membrul doi din (6.98) este derivata în $t = 0$ a funcţiei $t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$, constatăm că dacă $f \in \mathcal{F}(D)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, atunci

$$df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})/_{t=0}. \tag{6.99}$$

Egalitatea (6.99) sugerează introducerea noţiunii de *diferenţială de ordin superior* a unei funcţii reale de n variabile reale $f \in \mathcal{F}(D)$, unde D este mulţime deschisă din $I\!R^n$.

Definiţia 6.7.1. *Se numeşte* **diferenţiala de ordinul al doilea** *a funcţiei* $f \in \mathcal{F}(D)$ *în punctul* $\mathbf{x}_0 \in D$, *forma biliniară* $d^2f(\mathbf{x}_0) = d^2f(\mathbf{x}_0; \cdot, \cdot) = d^2f(\mathbf{x}_0)(\cdot, \cdot) : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$, *ale cărei valori se calculează după legea*

$$d^2f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{k}) = d^2f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})/_{t=s=0}, \tag{6.100}$$

dacă derivata de ordinul al doilea a funcţiei $(t, s) \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})$ *în punctul* $(t, s) = (0, 0)$ *există.*

Teorema 6.7.1. *Dacă* $f \in C^2(D)$, *atunci* f *admite diferenţială de ordinul al doilea în orice punct* $\mathbf{x} \in D$ *şi*

$$d^2f(\mathbf{x}; \mathbf{h}, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{,ij}(\mathbf{x}) h_i k_j, \quad \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^n, \quad \forall\, \mathbf{k} \in I\!R^n, \tag{6.101}$$

Demonstraţie. Folosind rezultatele precedente, putem demonstra că are loc egalitatea

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) = f_{,1}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})h_1 + ... + f_{,n}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})h_n. \tag{6.102}$$

Funcţiile reale de două variabile reale $(t, s) \mapsto f_{,i}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})$ depind de variabila reală s tot prin intermediul combinaţiei $\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}$, prin urmare, aplicând regula de derivare (6.102) acestor funcţii, obţinem

$$\frac{d}{ds} f_{,i}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{n} f_{,ij}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})k_j, \;\; i \in \overline{1, n}. \tag{6.103}$$

Atunci, din (6.102) şi (6.103), deducem

$$\frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{,ij}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) h_i k_j. \tag{6.104}$$

Din (6.104) şi (6.100) rezultă evident (6.101). **q.e.d.**

Observaţia 6.7.1. *Deoarece $f \in C^2(D)$, din Teorema 6.6.1 rezultă*

$$f_{,ij}(\mathbf{x}) = f_{,ji}(\mathbf{x}),\ \forall\, i \neq j,\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,n},\ \forall\, \mathbf{x} \in D \tag{6.105}$$

şi atunci constatăm că $d^2 f(\mathbf{x};\cdot,\cdot)$ este o formă biliniară simetrică pe $I\!R^n$ a cărei matrice în baza canonică din $I\!R^n$ este matricea simetrică de tipul $n \times n$

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{,11}(\mathbf{x}) & f_{,12}(\mathbf{x}) & \ldots & f_{,1n}(\mathbf{x}) \\ f_{,12}(\mathbf{x}) & f_{,22}(\mathbf{x}) & \ldots & f_{,2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{,1n}(\mathbf{x}) & f_{,2n}(\mathbf{x}) & \ldots & f_{,nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{6.106}$$

Definiţia 6.7.2. *Matricea $H_f(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ se numeşte* **hessiana funcţiei f în punctul $\mathbf{x} \in D$.**

Denumirea de hessiană a unei funcţiii se datorează lui Hesse[3].

Dat fiind că vectorii arbitrari $\mathbf{h}$ şi $\mathbf{k}$ din $I\!R^n$, în baza canonică $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, se scriu în forma

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}H, \quad \mathbf{k} = \sum_{j=1}^{n} k_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}K, \tag{6.107}$$

unde $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in (I\!R^n)^n$, iar H şi K sunt matricele coloană cu n linii ale coordonatelor vectorilor $\mathbf{h}$ şi respectiv $\mathbf{k}$ în baza $\mathcal{B}$, din (6.101), (6.106) şi (6.107), rezultă

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = H^\top \cdot H_f(\mathbf{x}_0) \cdot K, \quad \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^n, \quad \forall\, \mathbf{k} \in I\!R^n. \tag{6.108}$$

Având în vedere că $h_i = dx_i(\mathbf{h}),\ i \in \overline{1,n},\ \mathbf{h} \in I\!R^n$ şi $k_j = dx_j(\mathbf{k}),\ j \in \overline{1,n},\ \mathbf{k} \in I\!R^n$, din (6.108) obţinem

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{,ij}(\mathbf{x}_0)(dx_i dx_j)(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \tag{6.109}$$

unde prin $(dx_i dx_j)(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ înţelegem produsul $dx_i(\mathbf{h})dx_j(\mathbf{k})$ adică produsul $h_i k_j$. În acest mod deducem că aplicaţia diferenţiala de ordinul al doilea în punctul $\mathbf{x} \in D$ este forma pătratică în diferenţialele variabileleor independente $dx_1,\ dx_2, ...\ dx_n$

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{,ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j, \tag{6.110}$$

a cărei coeficienţi sunt elementele matricei hessiene asociată funcţiei f în punctul $\mathbf{x} \in D$.

Dacă notăm cu dX matricea coloană care are ca elemente diferenţialele variabilelor independente, atunci (6.110) se scrie în forma matriceală echivalentă

$$d^2 f(\mathbf{x}) = (dX)^\top \cdot H_f(\mathbf{x}) \cdot dX. \tag{6.111}$$

Observaţia 6.7.2. *Dacă $f(\mathbf{x}) = \mathrm{pr}(\mathbf{x}) = x_k,\ k \in \overline{1,n},\ \mathbf{x} \in I\!R^n$, atunci*

$$d^2 f(\mathbf{x}) = d^2 x_k = 0,\ i \in \overline{1,n},\ \forall\, \mathbf{x} \in I\!R^n. \tag{6.112}$$

[3]Hesse, Oscar (1811–1874), matematician german.

Într-adevăr, în această situaţie se vede că avem $f_{,ij}(\mathbf{x}) = 0,\ \forall\, \mathbf{x} \in I\!R^n,\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,n}.$ Folosind acum aceste rezultate în (6.110) în care funcţia f este cea din enunţul observaţiei de mai sus, deducem (6.112). ■

Observaţia 6.7.3. *În operaţia de diferenţiere, diferenţialele variabilelor independente se comportă ca şi constantele, ale căror diferenţiale sunt evident identic nule.*

Observaţia 6.7.4. *Diferenţiala a doua este diferenţiala diferenţialei de ordinul întâi.*

Convenim ca pentru produsul $dx_i dx_i$ să utilizăm notaţia dx_i^2 neexistând pericolul confuziei cu diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) = x_i^2$. Pentru funcţia g diferenţiala de ordinul întâi este : $dg(\mathbf{x}) = 2x_i dx_i$.

Să considerăm operatorul de diferenţiere de ordinul întâi

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n \tag{6.113}$$

şi, în baza lui (6.112), să observăm că d aplicat lui d însuşi, deci d^2, este

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\Big)^{(2)} \tag{6.114}$$

unde puterea a doua din membrul al doilea, scrisă între paranteze, semnifică faptul că expresia din membrul doi al lui (6.113) se ridică formal la puterea a doua după o formulă clasică de tip binomial, păstrându–se puterile pentru diferenţialele variabilelor independente $dx_1,\ dx_2, ...\ dx_n$ şi înlocuind puterile operatorilor de derivare parţială $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ prin ordinele de derivare respective, adică: $\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big)^{(2)} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2};\quad \dfrac{\partial}{\partial x_i}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$

Astfel, expresia diferenţialei a doua a funcţiei reale $f \in \mathcal{F}(D)$ într–un punct $\mathbf{x} \in D$ este

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\Big)^{(2)} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})dx_i dx_j. \tag{6.115}$$

Exemplul 6.7.1. *În cazul $n = 2$, deci al unei funcţii reale f de două variabile reale x şi y, diferenţiala a doua a acesteia într–un punct (x,y) al domeniului de definiţie este*

$$d^2 f(x,y) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^{(2)} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2, \tag{6.116}$$

iar în cazul $n = 3$, deci al unei funcţii reale $f \in \mathcal{F}(D)$ de trei variabile reale x, y şi z, diferenţiala a doua a lui f într–un punct $(x,y,z) \in D$, este

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y,z) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\Big)^{(2)} f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)dy^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)dz^2 + 2\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)dydz + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)dzdx\Big). \end{aligned} \tag{6.117}$$

■

Definiţia 6.7.1 şi Teorema 6.7.1 pot fi extinse în următoarele sensuri.

Definiţia 6.7.3. *Fie $N \in I\!N^*$. Se numeşte* **diferenţială de ordinul** N *a funcţiei reale* $f \in \mathcal{F}(D)$ *în punctul* $\mathbf{x}$ *al mulţimii deschise* $D \subset I\!R^n$, *aplicaţia* $n-$*liniară*

$$d^N f(\mathbf{x}) = d^N f(\mathbf{x})(\cdot,\cdot,...,\cdot) = d^N f(\mathbf{x};\cdot,\cdot,...,\cdot) : I\!R^n \times I\!R^n \times ... \times I\!R^n \to I\!R,$$

definită prin

$$d^N f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^1,\mathbf{h}^2,...,\mathbf{h}^N) = \frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}...\frac{d}{dt_N} f(\mathbf{x} + t_1\mathbf{h}^1 + t_2\mathbf{h}^2 + ... + t_N\mathbf{h}^N)/_{t_1=t_2=...=t_N=0}, \tag{6.118}$$

oricare ar fi $\mathbf{h}^j \in I\!R^n,\ j =\in \{1,2,...,N\}$, *dacă derivatele din membrul doi a relaţiei* (6.118) *există.*

Pentru ca Definiţia 6.7.2 să fie consistentă trebuie ca funcţia

$$(t_1,t_2,...,t_N) \mapsto f(\mathbf{x} + t_1\mathbf{h}^1 + t_2\mathbf{h}^2 + ... + t_N\mathbf{h}^N),$$

unde $(t_1,t_2,...,t_N) \in I\!R^N$ este astfel încât $\mathbf{x}+t_1\mathbf{h}^1+t_2\mathbf{h}^2+...+t_N\mathbf{h}^N \in D$, să fie de N ori derivabilă în punctul $(t_1,t_2,...,t_N) = (0,0,...,0)$. Acest lucru se întâmplă dacă $f \in C^N(D)$. Mai precis, avem

Teorema 6.7.2. *Dacă* $f \in C^N(D)$, *atunci* f *admite diferenţială de ordin* N *în orice punct* $\mathbf{x}$ *din* D, *iar valoarea în* $(\mathbf{h}^1,\mathbf{h}^2,...,\mathbf{h}^N) \in (I\!R^n)^N$, *unde* $\mathbf{h}^k = \sum_{i_k=1}^{n} h^k_{i_k}\mathbf{e}_{i_k},\ k \in \overline{1,N}$, *a acesteia este*

$$d^N f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^1,\mathbf{h}^2,...,\mathbf{h}^N) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_N=1}^{n}\frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_N}}(\mathbf{x})h^1_{i_1}h^2_{i_2}...h^N_{i_N}. \tag{6.119}$$

Demonstraţie. Pentru $N \geq 2$, se procedează ca în Teorema 6.7.1. **q.e.d.**

Dacă avem în vedere că $dx_{i_k}(\mathbf{h}^k) = h^k_{i_k},\ i_k \in \overline{1,n}$ şi $k \in \overline{1,N}$, din (6.119) constatăm că aplicaţia *diferenţiala de ordinul* N *a funcţiei* f *în* $\mathbf{x} \in D$ este

$$d^N f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_N=1}^{n}\frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_N}}(\mathbf{x})dx_{i_1}dx_{i_2}...dx_{i_N}. \tag{6.120}$$

Dacă folosim rezultatele din Corolarul 6.6.3, se constată că diferenţiala de ordinul N a funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$ în punctul $\mathbf{x} \in D \subset I\!R^n$ se scrie în forma

$$d^N f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1+k_2+...+k_n=N}\frac{N!}{k_1!k_2!...k_n!}\frac{\partial^N f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x})dx_1^{k_1}dx_2^{k_2}...dx_n^{k_n}. \tag{6.121}$$

Prin utilizarea formulei multinomului

$$(a_1+a_2+...+a_n)^N = \sum_{k_1+k_2+...+k_n=N}\frac{N!}{k_1!k_2!...k_n!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_n^{k_n}, \tag{6.122}$$

constatăm că (6.121) se scrie în forma simbolică

$$d^N f(\mathbf{x}) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\Big)^{(N)} f(\mathbf{x}), \tag{6.123}$$

unde operatorul din faţa lui $f(\mathbf{x})$ din membrul doi se calculează folosind formula multinomului (6.122), înţelegând prin aceasta că dacă $a_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}dx_i,\ i \in \overline{1,n}$, atunci

$$a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_n^{k_n} = \frac{\partial^N}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}dx_1^{k_1}dx_2^{k_2}...dx_n^{k_n} \quad \text{şi} \quad (a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_n^{k_n})f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^N f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x})dx_1^{k_1}dx_2^{k_2}...dx_n^{k_n}.$$

Observaţia 6.7.5. *Valoarea în* $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, ..., \mathbf{h}^N) \in (I\!R^n)^N$ *a diferenţialei funcţiei* $f \in \mathcal{F}(D)$ *în punctul* $\mathbf{x} \in D \subset I\!R^n$ *este o funcţie omogenă de grad* N *pe* $I\!R^n$.

Într-adevăr, valoarea în $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, ..., \mathbf{h}^N) \in (I\!R^n)^N$ a diferenţialei funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$ în punctul $\mathbf{x} \in D$ este dată de (6.119) şi dacă avem în vedere Definiţia 4.11.1, constatăm că afirmaţia este adevărată. ■

Observaţia 6.7.6. *În cazul particular* $n = 1$, *relaţia* (6.121) *devine*

$$d^N f(x) = f^{(N)}(x)dx^N \tag{6.124}$$

şi reprezintă **diferenţiala de ordinul** N **a funcţiei reale** f **de variabila reală** x.

Definiţia 6.7.4. *Dacă* $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, ..., \mathbf{h}^N) \in (I\!R^n)^N$ *este fixat, atunci aplicaţia*

$$\mathbf{x} \in D \mapsto d^N f(\mathbf{x}; \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, ..., \mathbf{h}^N) \in I\!R,$$

unde expresia lui $d^N f(\mathbf{x}; \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, ..., \mathbf{h}^N)$ *este dată în* (6.119), *se numeşte* **diferenţiala de ordinul** N *a funcţiei reale* f *de* n *variabile reale.*

Observaţia 6.7.7. *Din modul cum a fost introdusă diferenţiala de ordinul* N *a unei funcţii reale de variabilă vectorială rezultă că aceasta este diferenţiala funcţiei diferenţiala de ordinul* $N-1$.

Exemplul 6.7.2. *Dacă* f *este o funcţie reală de două variabile reale* x *şi* y *de clasă* $C^N(D)$, *unde* D *este o mulţime deschisă în* $I\!R^2$, *atunci*

$$\begin{aligned} d^3 f(x,y) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^{(3)} f(x,y) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)dy^3 \end{aligned} \tag{6.125}$$

şi, în general, pentru $N \geq 4$,

$$d^N f(x,y) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^{(N)} f(x,y) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k}\partial y^k}(x,y)dx^{N-k}dy^k, \tag{6.126}$$

unde C_N^k *reprezintă combinări de* n *elemente luate câte* k. ■

Exemplul 6.7.3. *Pentru o funcţie reală f de trei variabile reale x, y şi z de clasă $C^N(D)$, unde D este o mulţime deschisă în $I\!R^3$, iar $N \geq 3$, avem*

$$\begin{aligned} d^3f(x,y,z) &== \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\Big)^{(3)} f(x,y,z) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y,z)dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,z)dy^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,z)dz^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y,z)dx^2dy + \\ &+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(x,y,z)dx^2dz + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y,z)dxdy^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,z)dy^2dz + \\ &+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}(x,y,z)dxdz^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(x,y,z)dydz^2 + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z)dxdydz \end{aligned} \tag{6.127}$$

Diferenţiala de ordin N a aceleiaşi funcţii este

$$\begin{aligned} d^Nf(x,y,z) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\Big)^{(N)} f(x,y,z) = \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=N} \frac{N!}{k_1!k_2!k_3!} \cdot \frac{\partial^N f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}}(x,y,z)dx^{k_1}dy^{k_2}dz^{k_3}, \end{aligned} \tag{6.128}$$

unde k_j, $j = 1, 2, 3$, ia toate valorile de la 0 până la N astfel încât $k_1 + k_2 + k_3 = N$. ■

Exerciţiul 6.7.1. *Să se calculeze $d^Nf(x,y)$, unde $f(x,y) = e^x \sin y$.*

Soluţie. Aplicând formula (6.126), găsim $d^N(e^x \sin y) = e^x \sum_{k=0}^{N} C_N^k \sin(y + k\frac{\pi}{2})dx^{N-k}dy^k$. ■

Exerciţiul 6.7.2. *Să se calculeze $d^Nf(x,y)$, unde $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.*

Soluţie. Aplicăm din nou formula (6.126) de calcul a diferenţialei de ordinul N al unei funcţii reale de două variabile reale. Pentru aceasta este nevoie de derivata parţială

$$\frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k}\partial y^k}(x,y) = \frac{\partial^N\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)}{\partial x^{N-k}\partial y^k}.$$

Vom calcula întâi derivata $\dfrac{\partial^{N-k} f}{\partial x^{N-k}}(x,y)$. Pentru că y este constant, notând $u(x) = x + y$, $v(x) = \dfrac{1}{x-y}$ şi aplicând regula lui Leibniz de derivare de ordin $N-k$ a produsului $u(x)v(x)$, obţinem

$$\frac{\partial^{N-k} f}{\partial x^{N-k}}(x,y) = 2(-1)^{N-k}(N-k)!\frac{y}{(x-y)^{N-k+1}}, \quad 0 \leq k \leq N. \tag{6.129}$$

Egalitatea (6.129) trebuie derivată în raport cu y de k ori. Funcţiei din membrul al doilea al egalităţii (6.129) îi aplicăm de asemeni regula lui Leibniz de derivare a produsului $u_1(y)v_1(y)$, unde $u_1(y) = y$ şi $u_2(y) = \dfrac{1}{(x-y)^{N-k+1}}$. În final, se obţine

$$\frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k}\partial y^k}(x,y) = (-1)^{N-k}\frac{(N-1)!(kx + (N-k)y)}{(x-y)^{N+1}}. \tag{6.130}$$

Aplicând (6.126) şi folosind (6.130), găsim

$$d^N f(x,y) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (-1)^{N-k} \frac{(N-1)!(kx+(N-k)y)}{(x-y)^{N+1}} dx^{N-k} dy^k,$$

sau $d^N f(x,y) = (N-1)!N! \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!k!} \frac{(kx+(N-k)y)}{(x-y)^{N+1}} dx^{N-k} dy^k.$ ■

Exerciţiul 6.7.3. *Să se calculeze diferenţiala de ordinul N a funcţiei*

$$f : D \to I\!R, \; f(x,y,z) = \ln(x^x y^y z^z), \quad \textit{unde} \;\; D = \{\mathbf{x} = (x,y,z) \in I\!R^3 : \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0\}.$$

Soluţie. Observăm că $f(x,y,z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z$ şi atunci vom avea

$$d^N f(x,y,z) = d^N(x\ln x) + d^N(y\ln y) + d^N(z\ln z).$$

Fiecare din diferenţialele din membrul doi al egalităţii de mai sus reprezintă diferenţiala unei aceleiaşi funcţii reale de o variabilă reală în diverse puncte. După cum se vede, funcţia este $t > 0 \mapsto f(t) = t\ln t$. Aplicăm formula (6.124). Pentru calculul derivatei de ordinul N a funcţiei $t \mapsto t\ln t$ aplicăm formula (5.19) şi găsim

$$f^{(N)}(t) = t(\ln t)^{(N)} + N(\ln t)^{(N-1)} = (-1)^N \frac{(N-2)!}{t^{N-1}}, \; N \geq 2,$$

cu ajutorul căreia diferenţiala căutată de ordin $N \geq 2$ este

$$d^N f(x,y,z) = (-1)^N (N-2)! \Big(x^{1-N} dx^N + y^{1-N} dy^N + z^{1-N} dz^N \Big).$$

Diferenţiala de ordinul unu o calculăm separat utilizând regulile de calcul ale operatorului de diferenţiere (6.60). După un calcul simplu, găsim: $df(x,y,z) = (1+\ln x)dx + (1+\ln y)dy + (1+\ln z)dz$. Astfel, am determinat diferenţialele de orice ordin ale funcţiei date. ■

6.8 Formula lui Taylor pentru funcţii reale de o variabilă vectorială

Teorema 6.8.1. (**Formula lui Taylor**) *Fie $f \in C^{N+1}(D)$, $D \subset I\!R^n$ mulţime deschisă, $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $r > 0$, astfel încât $B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$. Atunci, pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ există un punct $\boldsymbol{\xi}_N \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$, astfel încât*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} df(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + ... + \\ + \frac{1}{N!} d^N f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}-\mathbf{x}_0}_{N \; ori}) + \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\boldsymbol{\xi}_N; \underbrace{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}-\mathbf{x}_0}_{(N+1) \; ori}). \end{aligned} \tag{6.131}$$

Demonstraţie. Fixăm un versor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) \in I\!R^n$. Atunci, pentru orice $t \in (-r, r)$ avem că $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{s} \in B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$ şi se poate considera funcţia

$$g : (-r, +r) \to I\!R; \quad g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}), \quad t \in (-r, +r). \tag{6.132}$$

Deoarece $f \in C^{N+1}(D)$ rezultă că $g \in C^{N+1}\Big((-r,+r)\Big)$ şi în plus, conform (6.118), avem:

$$g^{(k)}(0) = d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{s}, ..., \mathbf{s}}_{k \text{ ori}}), \quad k \in \overline{1, N}; \tag{6.133}$$

$$g^{(N+1)}(\theta_N t) = d^{N+1} f(\boldsymbol{\xi}_N;\ \underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{s}, ..., \mathbf{s}}_{(N+1) \text{ ori}}\ ), \tag{6.134}$$

unde $\theta_N \in (0,1)$ şi $\boldsymbol{\xi}_N = \mathbf{x}_0 + \theta_N(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$.

Funcţia g din (6.132) satisface ipotezele Teoremei 5.9.1, deci putem scrie formula lui Mac–Laurin (5.97), deci există $\theta_N \in (0,1)$, astfel încât

$$g(t) = g(0) + \frac{t}{1!}g'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + ... + \frac{t^N}{N!}g^{(N)}(0) + \frac{t^{N+1}}{(N+1)!}g^{(N+1)}(\theta_N t). \tag{6.135}$$

Datorită faptului că diferenţiala de ordinul k a unei funcţii reale de variabilă vectorială este formă de gradul k pe $\mathbb{R}^n$, din (6.133) şi (6.134), deducem:

$$t^k g^{(k)}(0) = d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{t\mathbf{s}, t\mathbf{s}, ..., t\mathbf{s}}_{k \text{ ori}}), \quad k \in \overline{1, N}; \quad t^{N+1} g^{(N+1)}(\theta_N) = d^{N+1} f(\boldsymbol{\xi}_N; \underbrace{t\mathbf{s}, t\mathbf{s}, ..., t\mathbf{s}}_{(N+1) \text{ ori}}). \tag{6.136}$$

Deoarece $t\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, din (6.135) şi (6.136) rezultă (6.131) şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Deoarece $d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{k \text{ ori}})$ este polinom omogen de gradul k în coordonatele $x_1 - x_{01}$, $x_2 - x_{02}, ..., x_n - x_{0n}$ ale vectorului $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, rezultă că suma primilor $N+1$ termeni din membrul doi al lui (6.131) este un polinom de gradul N în aceste variabile care se numeşte *polinomul Taylor de grad N asociat funcţiei f, centrat în $\mathbf{x}_0$* şi se notează cu $T_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f)$. Deci,

$$T_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{k \text{ ori}}). \tag{6.137}$$

Cu această notaţie, (6.131) se scrie în forma mai simplă

$$f(\mathbf{x}) = T_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f) + R_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f), \tag{6.138}$$

unde funcţia $R_N(\cdot; \mathbf{x}_0, f) : D \to \mathbb{R}$, ale cărei valori sunt

$$R_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f) = \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta_N(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0); \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{(N+1) \text{ ori}}), \tag{6.139}$$

cu $\theta_N \in (0,1)$, se numeşte *rest de ordinul N, al funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$*, în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$, sub forma lui Lagrange.

Formula (6.138) se numeşte *formula lui Taylor în punctul $\mathbf{x}_0$ ataşată funcţiei f cu rest de ordin N sub forma lui Lagrange dat de* (6.139).

Exemplul 6.8.1. *Formula lui Taylor într–o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$, cu rest de ordin N sub* *forma lui Lagrange, pentru funcţia reală* f, *definită pe mulţimea deschisă* D *din* $\mathbb{R}^2$, *este*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\Big)^{(2)} f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k}\partial y^k}(x_0,y_0)(x-x_0)^{N-k}(y-y_0)^k+$$

$$+\frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{N+1} C_{N+1}^k \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x^{N+1-k}\partial y^k}(\boldsymbol{\xi}_N)(x-x_0)^{N+1-k}(y-y_0)^k, \tag{6.140}$$

$\boldsymbol{\xi}_N = \Big(x_0+\theta_N(x-x_0),\ y_0+\theta_N(y-y_0)\Big)$, *iar* $\theta_N \in (0,1)$.

Exerciţiul 6.8.1. *Să se scrie formula lui Taylor în punctul* $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0) = (0,\pi)$ *cu rest de ordin doi pentru funcţia reală* $f(x,y) = y\cdot \sin xy$.

Soluţie. Pentru funcţia dată, avem:

$$f(\mathbf{x}_0) = 0;\quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \pi^2;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = 0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) = 0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) = 0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{x}_0) = 2\pi. \tag{6.141}$$

Înlocuind (6.141) în (6.140), în care $N=2,\ x_0=0,\ y_0=\pi$, obţinem

$$y\cdot\sin xy = \pi^2 x + \pi x(y-\pi) + \Big(x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + (y-\pi)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{(3)} f(\boldsymbol{\xi}_2). \tag{6.142}$$

În formula lui Taylor (6.142), ridicarea la puterea a treia este simbolică şi se face după regula (6.125). Neglijând ultimul termen din (6.142), găsim $y\cdot\sin xy \approx \pi^2 x + \pi x(y-\pi)$. ■

6.9 Funcţii omogene. Identitatea lui Euler

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiul Euclidian $n-$dimensional, $\mathbb{E}^n$ spaţiul punctual afin Euclidian asociat spaţiului $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R} = \{O;\mathcal{B}\}$ reperul canonic din $\mathbb{E}^n$, unde $\mathcal{B}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1,x_2,...,x_n)$ vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$, M punctul din $\mathbb{E}^n$ cu proprietatea $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}$ şi (OM) semidreapta cu originea în O care trece prin M.

Definiţia 6.9.1. *Mulţimea* $E\subset\mathbb{R}^n$ *se numeşte* **con deschis cu vârful în origine** *dacă* E *este mulţime deschisă în* $\mathbb{R}^n$ *şi o dată cu punctul* $\mathbf{x} = (x_1,x_2,...,x_n)$ *conţine semidreapta deschisă* (OM).

Definiţia 6.9.2. *Fie* $E\subset\mathbb{R}^n$ *un con cu vârful în origine. Funcţia reală* $f\in\mathcal{F}(E)$ *se numeşte* **omogenă de grad** k *dacă, pentru orice număr* $t>0$ *şi orice* $\mathbf{x}\in E$, *avem*

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow f(tx_1,tx_2,...,tx_n) = t^k f(x_1,x_2,...,x_n). \tag{6.143}$$

Exemplul 6.9.1. *Funcţia reală de două variabile reale*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad \forall\,(x,y) \in I\!R^2,$$

unde a, b, c *sunt constante reale, este funcţie omogenă de grad doi.*

Într-adevăr, se verifică imediat că f satisface (6.143) în care $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ şi $(x,y) \in I\!R^2$. ■

Teorema 6.9.1. *Fie* $E \subset I\!R^n$, *con deschis cu vârful în origine. Dacă funcţia reală* $f \in \mathcal{F}(E)$ *este omogenă de grad* k *şi diferenţiabilă într–un punct* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in E$, *atunci*

$$a_1 f_{,1}(\mathbf{a}) + a_2 f_{,2}(\mathbf{a}) + ... + a_n f_{,n}(\mathbf{a}) = k f(\mathbf{a}). \tag{6.144}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia reală de variabilă reală $\varphi \in \mathcal{F}(I\!R^*_+)$, $\varphi(t) = f(t\mathbf{a})$, $\forall\, t > 0$. Deoarece f este omogenă de grad k pe conul deschis E, rezultă

$$\varphi(t) = t^k f(a_1, a_2, ..., a_n), \quad \forall\, t > 0. \tag{6.145}$$

Funcţia f fiind diferenţiabilă în punctul $\mathbf{a}$, rezultă că funcţia φ din (6.145) este derivabilă în punctul $t = 1$. Aplicând regula lanţului de derivare a unei funcţii compuse, avem

$$\frac{d\varphi}{dt}(1) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t\mathbf{a})\, \frac{d(t\, a_j)}{d\,t}(t)\Big)_{t=1} = \sum_{j=1}^{n} a_j\, f_{,j}(\mathbf{a}). \tag{6.146}$$

Pe de altă parte, folosind expresia (6.145) a funcţiei φ, deducem

$$\frac{d\varphi}{dt}(1) = \Big(k\, t^{k-1} f(a_1, a_2, ..., a_n)\Big)_{t=1} = k\, f(a_1, a_2, ..., a_n) = k\, f(\mathbf{a}). \tag{6.147}$$

Din (6.146) şi (6.147) rezultă (6.144). **q.e.d.**

Corolarul 6.9.1. *Funcţia reală* $f \in \mathcal{F}(E)$, *omogenă de grad* k *şi diferenţiabilă pe conul deschis* $E \subset I\!R^n$, *satisface* **identitatea lui Euler**

$$x_1 f_{,1}(\mathbf{x}) + x_2 f_{,2}(\mathbf{x}) + ... + x_n f_{,n}(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in E. \tag{6.148}$$

Teorema 6.9.2. *Dacă funcţia reală* $f \in \mathcal{F}(E)$ *este diferenţiabilă pe conul deschis cu vârful în origine* $E \subset I\!R^n$ *şi este verificată egalitaea* (6.148) *în orice punct din* E, *atunci* f *este funcţie omogenă de grad* k.

Demonstraţie. Considerăm funcţia reală de variabilă reală $\psi : (0, +\infty) \to I\!R$, $\psi(t) = \dfrac{f(t\mathbf{x})}{t^k}$, unde $\mathbf{x} \in E$ este un punct arbitrar dar fixat din E. Din ipotezele teoremei, rezultă că funcţia ψ este derivabilă şi

$$\psi'(t) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} tx_j\, f_{,j}(t\mathbf{x}) - kf(t\mathbf{x})}{t^{k+1}}, \quad \forall\, t > 0. \tag{6.149}$$

Din (6.148) şi (6.149) deducem $\psi'(t) = 0,\ \forall\, t > 0$. Deci ψ este funcţie constantă pe $(0, +\infty)$. Urmează că, pentru orice $t >, 0$ avem $\psi(t) = \psi(1)$, adică $\dfrac{f(t\mathbf{x})}{t^k} = f(\mathbf{x})$, de unde $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$. **q.e.d.**

Teorema 6.9.3. *Dacă funcţia $f : E \to I\!R$, unde E este un con deschis cu vârful în origine, este omogenă de grad m şi diferenţiabilă, atunci derivatele parţiale de ordinul întâi ale sale sunt funcţii omogene de gradul $m-1$.*

Demonstraţie. Funcţia f fiind omogenă de grad m, satisface identitatea

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^m f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{6.150}$$

oricare ar fi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ şi pentru orice $t > 0$.

Deoarece f este diferenţiabilă, se poate deriva în raport cu variabila de pe locul i în ambii membri ai identităţii (6.150). Obţinem $tf_{,i}(t\mathbf{x}) = t^m f_{,i}(\mathbf{x}),\ i \in \overline{1,n}$ care, după simplificare prin t, conduce la $f_{,i}(t\mathbf{x}) = t^{m-1} f_{,i}(\mathbf{x})$.

Deci, oricare derivată parţială de ordinul întâi ale funcţiei f este funcţie omogenă de grad $m-1$. **q.e.d.**

Observaţia 6.9.1. *Dacă funcţia omogenă de grad m este de două ori diferenţiabilă pe conul deschis $E \subset I\!R^n$, cu vârful în origine, atunci derivatele parţiale de ordinul al doilea ale lui f sunt funcţii omogene de grad $m-2$.*

Teorema 6.9.4. *Dacă funcţia $f : E \subset I\!R^n \to I\!R$, unde E este con deschis cu vârful în origine, este omogenă de gradul m şi diferenţiabilă, atunci derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f satisfac identitatea*

$$\Big(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{(2)} f(\mathbf{x}) = m(m-1)f(\mathbf{x}). \tag{6.151}$$

Demonstraţie. În identitatea (6.148) trecem pe $\mathbf{x}$ în $t\mathbf{x}$. Se obţine identiatea

$$t(x_1 f_{,1}(t\mathbf{x}) + x_2 f_{,2}(t\mathbf{x}) + ... + x_n f_{,n}(t\mathbf{x})) = mf(t\mathbf{x}). \tag{6.152}$$

Considerând în (6.152) că $\mathbf{x}$ este fixat şi derivând în raport cu t, deducem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{,i}(t\mathbf{x}) + t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f_{,ij}(t\mathbf{x}) = m\sum_{i=1}^{n} x_i f_{,i}(t\mathbf{x}). \tag{6.153}$$

În egalitatea (6.153) facem $t = 1$ şi folosim (6.148). Obţinem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f_{,ij}(\mathbf{x}) = m(m-1)f(\mathbf{x}). \tag{6.154}$$

Însă

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f_{,ij}(\mathbf{x}) = \Big(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{(2)} f(\mathbf{x}), \tag{6.155}$$

astfel că din (6.154) şi (6.155) rezultă (6.151) şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Capitolul 7

Teoria diferenţiabilităţii şi derivabiltăţii funcţiilor vectoriale de argument vectorial

7.1 Derivabilitatea funcţiilor vectoriale de argument vectorial

Fie D o mulţime deschisă în $I\!R^n$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ baza canonică din $I\!R^n$,

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$$

o funcţie vectorială de argumentul vectorial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ şi $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ un punct fixat dar arbitrar, unde $m \geq 1$ şi $n \geq 1$ sunt numere naturale.

Definiţia 7.1.1. *Spunem că funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ este derivabilă parţial în punctul $\mathbf{a}$ în raport cu variabila x_j dacă funcţia vectorială de variabilă reală*

$$t \mapsto \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}, \quad t \in I\!R^*, \quad \mathbf{a} + t\mathbf{e}_j \in D, \tag{7.1}$$

are limită în $t = 0$ şi această limită aparţine lui $I\!R^m$.

Definiţia 7.1.2. *Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ este derivabilă parţial în raport cu variabila x_j în punctul $\mathbf{a} \in D$, atunci limita în $t = 0$ a funcţiei din (7.1) se numeşte* **derivata parţială de ordinul întâi** *a funcţiei $\mathbf{f}$ în raport cu variabila x_j în punctul $\mathbf{a}$.*

Derivata parţială a funcţiei $\mathbf{f}$, în raport cu variabila x_j, în punctul $\mathbf{a}$ se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}'_{x_j}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}_{,j}(\mathbf{a}); \quad D_j\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Prin urmare, dacă $\mathbf{f}$ este derivabilă parţial în $\mathbf{a}$ în raport cu x_j, atunci

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}. \tag{7.2}$$

Observaţia 7.1.1. *Exista cel mult* n *derivate parţiale de forma* (7.2), *denumite* **derivate parţiale de ordinul întâi** *ale funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *în punctul* $\mathbf{a}$.

Definiţia 7.1.3. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *se numeşte* **derivabilă parţial în raport cu variabila** x_j **pe mulţimea** D *dacă* $\mathbf{f}$ *este derivabilă parţial în raport cu variabila* x_j *în orice punct* $\mathbf{x} \in D$.

Definiţia 7.1.4. *Dacă funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *este derivabilă parţial în raport cu variabila* x_j *pe mulţimea* D, *atunci funcţia*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} : D \to I\!R^m, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}, \quad \mathbf{x} \in D, \tag{7.3}$$

se numeşte **derivata parţială de ordinul întâi** *în raport cu variabila* x_j *a funcţiei* $\mathbf{f}$.

Observaţia 7.1.2. *Exista cel mult* n *funcţii derivate parţiale de forma* (7.3), *numite* **derivate parţiale de ordinul întâi** *ale funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *pe mulţimea* D.

Teorema 7.1.1. *Funcţia vectorială de variabilă vectorială*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$$

este derivabilă parţial în punctul $\mathbf{a}$ *în raport cu variabila* x_j *dacă şi numai dacă funcţiile coordonate* $f_i \in \mathcal{F}(D)$, $i \in \overline{1, m}$, *sunt derivabile parţial în raport cu* x_j *în punctul* $\mathbf{a}$ *şi*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\mathbf{e}'_i, \tag{7.4}$$

unde $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\}$ *este baza canonică din* $I\!R^m$.

Demonstraţie. Avem evident

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{a})}{t}\,\mathbf{e}'_i,$$

din care, folosind Teorema 4.1.4, rezultă concluzia teoremei cât şi identitatea (7.4). **q.e.d.**

Definiţia 7.1.5. *Spunem că funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *este* **derivabilă parţial în punctul** $\mathbf{a} \in D$ (*respectiv* **derivabilă parţial pe** D) *dacă* $\mathbf{f}$ *este derivabilă parţial în* $\mathbf{a}$ (*respectiv pe* D) *în raport cu toate variabilele* $x_1, x_2, ..., x_n$.

Definiţia 7.1.6. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ *se numeşte* **de clasă** C^1 **pe** D *dacă* $\mathbf{f}$ *este derivabilă parţial pe* D *şi funcţiile* $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$, $j \in \overline{1,n}$, *sunt continue pe* D. *În acest caz, scriem* $\mathbf{f} \in C^1(D, I\!\!R^m)$

Observaţia 7.1.3. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in C^1(D, I\!\!R^m)$ *dacă şi numai dacă funcţiile coordonate* $f_i \in C^1(D)$, $i \in \overline{1,m}$.

Definiţia 7.1.7. *Dacă funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ *este derivabilă parţial în* $\mathbf{a} \in D$, *atunci matricea*

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!R), \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & ... & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & ... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

se numeşte **matricea jacobiană** *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *în punctul* $\mathbf{a}$.

Dacă $m = n$ rezultă că $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ din (7.5) este matrice pătratică de ordinul n, iar determinantul ei se numeşte *jacobianul*, sau *determinantul funcţional* al funcţiilor $f_1, f_2, ..., f_n$ în punctul $\mathbf{a} \in D$ şi se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{a}); \qquad \det\, J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}); \qquad \frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{a}).$$

Exerciţiul 7.1.1. *Să se determine matricele jacobiene ale funcţiilor:*

(i) $\mathbf{f}(x,y) = (x^4 + xy^3, x^2y^2 - 3y^2), \qquad (x,y) \in I\!\!R^2$

(ii) $\mathbf{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x\cos y \sin y), \quad (x,y) \in I\!\!R^2$.

Soluţie. Funcţiile de mai sus sunt derivabile parţial în orice punct din $I\!\!R^2$.

Matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ de la punctul (i) este

$$J_{\mathbf{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^3 & 3xy^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y - 6y \end{pmatrix}.$$

Matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ de la punctul (ii) este matricea cu trei linii şi două coloane

$$J_{\mathbf{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \\ \cos y \sin y & x\cos 2y \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 7.1.2. *Să se scrie matricea jacobiană şi să se calculeze jacobianul funcţiei*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) : A \to I\!R^2, \quad \mathbf{f}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

unde A este o submulţime a intervalului bidimensional nemărginit $[0,\infty)\times[0,2\pi)$, într–un punct oarecare din interiorul D al mulţimii A.

Soluţie. Dacă coordonatele vectorului reprezentând valoarea funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $(\rho,\theta)\in A$ se notează cu x şi y, atunci ecuaţia vectorială

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{unde} \quad \mathbf{x} = (\rho,\theta), \quad \mathbf{y} = (x, y),$$

este echivalentă cu ecuaţiile

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Aceste ecuaţii stabilesc legătura dintre *coordonatele polare* (ρ,θ) ale unui punct al mulţimii A, aflată întrun plan, şi coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct al mulţimii $\mathbf{f}(A)\subset I\!R^2$, cu precizarea suplimentară că dacă Oxy este reperul Cartezian în plan, atunci semidreapta Ox este *axa polară* a *reperului polar* din acelaşi plan.

Matricea jacobiană a funcţiei considerate este

$$J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial f_1}{\partial\theta}(\rho,\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial f_2}{\partial\theta}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Jacobianul funcţiei $\mathbf{f}$ într–un punct oarecare al interiorului domeniului de definiţie este

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \det J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Se observă că $\det J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta) > 0$ în orice punct din interiorul mulţimii A. ■

Exerciţiul 7.1.3. *Fie A o submulţime a intervalului tridimensional nemărginit $[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$ şi funcţia vectorială*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : A \to I\!R^3, \quad \mathbf{f}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

Să se scrie matricea jacobiană şi să se calculeze jacobianul acestei funcţiii într–un punct oarecare din interiorul mulţimii A.

Soluţie. Matricea jacobiană într–un punct oarecare din interiorul mulţimii A este

$$J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial f_1}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial f_1}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial f_2}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial f_2}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\[2ex] \dfrac{\partial f_3}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial f_3}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial f_3}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Calculând derivatele parţiale ale funcţiilor f_1, f_2, f_3, coordonatele vectorului $\mathbf{f}$, şi înlocuind apoi rezultatele în expresia matricei jacobiene, găsim

$$J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobianul funcţiei considerate într–un punct (ρ,θ,φ) din interiorul D al domeniului de definiţie A este

$$\det J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta.$$

Funcţia $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)$ din acest exemplu exprimă legătura între coordonatele carteziene şi *coordonatele polare* ale unui punct din spaţiu. Dacă $(\rho,\theta,\varphi)\in D$, atunci $\det J_{\mathbf{f}}(\rho,\theta,\varphi)>0$. ■

Exerciţiul 7.1.4. *Fie funcţia vectorială de argument vectorial*

$$\mathbf{f}:D\subset I\!\!R^4\to I\!\!R^2,\quad \mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}))=(x_1^2+7x_2+\ln x_3,\frac{x_1}{x_4}),$$

unde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in D=\{\mathbf{x}\in I\!\!R^4: x_3>0, x_4\neq 0\}$.

Să se scrie matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{f}$ *într–un punct oarecare al domeniului de definiţie.*

Soluţie. Funcţia considerată este derivabilă în orice punct din D. Avem

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_4}(\mathbf{x})\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_4}(\mathbf{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1 & 7 & \dfrac{1}{x_3} & 0\\ \dfrac{1}{x_4} & 0 & 0 & -\dfrac{x_1}{x_4^2}\end{pmatrix}.$$

■

7.2 Diferenţiabilitatea unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială

Fie $\mathbf{f}=(f_1,f_2,...,f_m)\in\mathcal{F}(D,I\!\!R^m)$, unde D este o mulţime descchisă din $I\!\!R^n$, o funcţie vectorială de argument vectorial şi $\mathbf{x}_0$ un punct din D.

Definiţia 7.2.1. *Funcţia* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(D,I\!\!R^m)$ *este* **diferenţiabilă în** $\mathbf{x}_0$ *dacă există o aplicaţie liniară* $\mathbf{T}\in L(I\!\!R^n,I\!\!R^m)$ *astfel încât*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}=\mathbf{0}. \tag{7.6}$$

Observaţia 7.2.1. *Condiţia* (7.6) *este echivalentă cu existenţa funcţiei*

$$\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{F}(I\!\!R^n,I\!\!R^m) \tag{7.7}$$

cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \tag{7.8}$$

astfel încât să aibă loc identitatea

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\quad\forall\,\mathbf{x}\in D. \tag{7.9}$$

Observaţia 7.2.2. *Condiţia* (7.6) *poate fi dată şi în forma*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathbf{T}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=\mathbf{0}, \tag{7.10}$$

iar (7.9) *este echivalentă cu*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{T}(\mathbf{h})+\|\mathbf{h}\|\,\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h}), \tag{7.11}$$

oricare ar fi $\mathbf{h}\in I\!\!R^n$ *astfel încât* $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}\in D$.

Observaţia 7.2.3. *Din* (7.7) *şi* (7.11) *se constată că termenii*

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0);\quad \|\mathbf{h}\|\,\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h})$$

sunt infiniţi mici de ordinul lui $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$ *şi respectiv de ordinul lui* $\|\mathbf{h}\|$. *Prin urmare,* (7.7) *şi* (7.11) *se pot scrie după cum urmează:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\mathbf{o}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|),\quad \mathbf{x}\to\mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{T}(\mathbf{h})+\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|),\quad \mathbf{h}\to\mathbf{0}.$$

Definiţia 7.2.2. *Dacă* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(D,I\!\!R^m)$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0\in D$, *atunci aplicaţia liniară* $\mathbf{T}$ *din* (7.11) *se numeşte* **diferenţiala** *funcţiei* $\mathbf{f}$ *în* $\mathbf{x}_0$ *şi se notează cu unul din simbolurile:*

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0);\quad d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\cdot);\quad d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0;\cdot).$$

Teorema 7.2.1. *Funcţia* $\mathbf{f}=(f_1,f_2,...,f_m)\in\mathcal{F}(D,I\!\!R^m)$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0$ *dacă şi numai dacă funcţiile coordonate sunt diferenţiabile în* $\mathbf{x}_0$. *Dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0$, *atunci*

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=(df_1(\mathbf{x}_0),df_2(\mathbf{x}_0),...,df_m(\mathbf{x}_0))\in(L(I\!\!R^n,I\!\!R))^m. \tag{7.12}$$

Demonstraţie. Observăm că (7.11) are loc dacă şi numai dacă

$$f_i(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f_i(\mathbf{x}_0)=T_i(\mathbf{h})+\|\mathbf{h}\|\alpha_i(\mathbf{h}), \tag{7.13}$$

pentru toţi indicii i de la 1 până la m şi pentru orice $\mathbf{h}\in I\!\!R^n$ astfel încât $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}\in D$, unde

$$\mathbf{T}=(T_1,T_2,...,T_m),\quad T_i\in L(I\!\!R^n,I\!\!R),\quad i\in\overline{1,m} \tag{7.14}$$

şi

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),\quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\alpha_i(\mathbf{h})=0,\quad i\in\overline{1,m}. \tag{7.15}$$

Din (7.13), (7.15) şi Definiţia 6.3.1 rezultă că funcţiile $f_i\in\mathcal{F}(D)$ sunt diferenţiabile în $\mathbf{x}_0$ şi

$$T_i(\mathbf{h})=df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}), \tag{7.16}$$

deci

$$T_i = df_i(\mathbf{x}_0), \quad i \in \overline{1,m}, \tag{7.17}$$

unde aplicaţiile $T_i,\ i \in \overline{1,m}$, sunt cele din (7.14).

Înlocuind (7.16) în (7.14) şi ţinând cont că $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, rezultă (7.12). **q.e.d.**

Teorema 7.2.2. *Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ este diferenţiabilă în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci diferenţiala lui $\mathbf{f}$ în $\mathbf{x}_0$ este unică.*

Demonstraţie. Presupunem că ar mai exista o aplicaţie liniară

$$\mathbf{S} \in L(I\!\!R^n, I\!\!R^m),$$

astfel încât într–o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\mathbf{0})$ să aibă loc identitatea

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{S}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{h}), \tag{7.18}$$

unde funcţia vectorială de argument vectorial $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{F}(V, I\!\!R^m)$ are proprietatea

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{h}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{7.19}$$

Notând $\mathbf{u} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$ avem mai întâi că $\mathbf{u} \in L(I\!\!R^n, I\!\!R^m)$, iar din scăderea identităţilor (7.11) şi (7.18), obţinem

$$\mathbf{u}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\mathbf{g}(\mathbf{h}), \tag{7.20}$$

unde

$$\gamma(\mathbf{h}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h}) - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{h}). \tag{7.21}$$

Dacă fixăm un vector nenul $\mathbf{y} \in I\!\!R^n$, atunci vectorul $\mathbf{h} = t\mathbf{y}$, coliniar cu $\mathbf{y}$, tinde la vectorul nul din $I\!\!R^n$ dacă şi numai dacă $t \to 0$. Înlocuind $\mathbf{h} = t\mathbf{y}$, cu $t \neq 0$, în (7.20) şi ţinând cont că $\mathbf{u}$ este aplicaţie liniară, deducem

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{|t|}{t}\|\mathbf{y}\|\gamma(t\mathbf{y}), \quad t \in I\!\!R^*. \tag{7.22}$$

Dacă în (7.22) trecem la limită pentru $t \to 0$ şi ţinem cont că funcţia $t \in I\!\!R^* \mapsto \dfrac{|t|}{t}$ este mărginită şi că , în baza lui (7.7) şi (7.19), avem

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t\mathbf{y}) = \lim_{t\to 0} \boldsymbol{\alpha}(t\mathbf{y}) - \lim_{t\to 0} \boldsymbol{\beta}(t\mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

obţinem

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \forall\, \mathbf{y} \in I\!\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{7.23}$$

Cum $\mathbf{u} \in L(I\!\!R^n, I\!\!R^m)$, avem şi

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{7.24}$$

Relaţiile (7.23) şi (7.24) arată că $\mathbf{u}$ este identic nul din $L(I\!\!R^n, I\!\!R^m)$, deci $\mathbf{T} \equiv \mathbf{S}$. **q.e.d.**

Teorema 7.2.3. *Dacă funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ este diferenţiabilă în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$, atunci $\mathbf{f}$ este derivabilă parţial în $\mathbf{x}_0$ şi matricea aplicaţiei liniare $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ în perechea de baze canonice $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!\!R^n$ şi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\} \subset I\!\!R^m$ este $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$ atunci are loc (7.6), sau (7.10). Luând în (7.10) $\mathbf{h} = t\,\mathbf{e}_j$ şi folosind liniaritatea lui $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, după împăţirea în ambii membri cu $t \neq 0$, trecerea la limită pentru $t \to 0$ şi considerarea proprietăţii (7.7), obţinem

$$\lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\Big(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{|t|} - \mathbf{T}(\mathbf{e}_j)\Big) = \mathbf{0}. \tag{7.25}$$

Primul factor al primului membru din (7.25) este mărginit. Pentru ca limita din (7.25) să fie vectorul nul din $I\!R^m$ trebuie ca

$$\lim_{t\to 0}\Big(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{|t|} - \mathbf{T}(\mathbf{e}_j)\Big) = \mathbf{0},$$

din care deducem

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = d\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0;\mathbf{e}_j) = d\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{|t|}. \tag{7.26}$$

Din (7.26) rezultă că $\mathbf{f}$ este derivabilă parţial în punctul $\mathbf{x}_0$ şi

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_j), \qquad j \in \overline{1,n}. \tag{7.27}$$

Deoarece coordonatele vectorului $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ în baza canonică $\mathcal{B}' \subset I\!R^m$ sunt $T_i(\mathbf{e}_j),\ i \in \overline{1,m}$, iar cele ale vectorului $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ în aceeaşi bază sunt $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, din (7.27) rezultă

$$T_i(\mathbf{e}_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = df_i(\mathbf{x}_0;\mathbf{e}_j) = df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j), \quad i \in \overline{1,m}, \quad j \in \overline{1,n}. \tag{7.28}$$

Din (7.28) rezultă că

$$\mathbf{T}(\mathbf{h}) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0;\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\,h_j\,\mathbf{e}'_i,$$

sau matriceal

$$\mathbf{T}(\mathbf{h}) = \mathbf{e}'\Big(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\,H\Big), \quad \forall\,\mathbf{h} \in I\!R^n, \tag{7.29}$$

unde

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m) \in (I\!R^m)^m, \quad \mathbf{h} = \mathbf{e}H, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

iar $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., e_n) \in (I\!R^n)^n$ şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Corolarul 7.2.1. *Aplicaţia afină* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{e}'\Big(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\,\Big(X - X_0\Big)\Big)$, *unde* $\mathbf{x} = \mathbf{e}X,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{e}X_0$, *aproximează oricât de bine valorile funcţiei* $\mathbf{f}$ *într–o vecinătate suficient de mică a lui* $\mathbf{x}_0$.

Demonstraţie. Afirmaţia este consecinţă imediată a egalităţii (7.9) dacă se are în vedere condiţia (7.8). **q.e.d.**

Teorema 7.2.4. *Dacă funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in C^1(D, I\!R^m)$, *atunci* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă pe* D.

Demonstraţie. Concluzia rezultă din Teorema 7.2.1 şi Corolarul 6.5.1 aplicat funcţiilor $f_1, f_2, ..., f_m$. **q.e.d.**

Exerciţiul 7.2.1. *Să se determine aproximarea liniară a funcţiei*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I\!R^2, I\!R^2), \quad \mathbf{f}(x, y) = (x^4 + xy^3, x^2y^2 - 3y^2),$$

într–o vecinătate a punctului $(1, -1)$.

Soluţie. Observăm mai întâi că $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(1, -1) = (0, -2)$ şi apoi că , din Corolarul 7.2.1, avem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (0, -2) + \mathbf{e}\Big(J_{\mathbf{f}}((1, -1))\Big(X - X_0\Big)\Big),$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

În acest fel, se găseşte

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{e}\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}\Big) = (3x + 3y, 2x + 4y).$$

De exemplu, $\mathbf{f}(98 \cdot 10^{-2}, -106 \cdot 10^{-2}) \cong (-24 \cdot 10^{-2}, -228 \cdot 10^{-2})$.
Valoarea exactă a funcţiei în punctul $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (98 \cdot 10^{-2}, -106 \cdot 10^{-2})$ este

$$\mathbf{f}(98 \cdot 10^{-2}, -106 \cdot 10^{-2}) = (-244 \cdot 10^{-3}, -2291 \cdot 10^{-3}).$$

Comparând, constatăm că aproximarea liniară este destul de apropiată de valoarea exactă. ■

7.3 Derivate şi diferenţiale de ordin superior ale funcţiilor vectoriale de mai multe variabile reale

Considerăm $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ o funcţie derivabilă parţial pe $D \subset I\!R^n$. Atunci, există derivatele parţiale $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m), \ \forall\, j \in \overline{1, n}$.

Definiţia 7.3.1. *Funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *este de două ori derivabilă în punctul* $\mathbf{a} \in D$ *în raport cu variabilele* x_j *şi* x_i, *în această ordine, dacă funcţia* $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}$ *este derivabilă parţial în* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabila* x_i.

Observaţia 7.3.1. *Din Definiţia 7.3.1 rezultă că funcţia* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ *este derivabilă în* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabilele de pe locurile* j *şi* i *dacă există şi aparţine lui* $I\!\!R^m$ *limita în* $t = 0$ *a funcţiei*

$$t \in I\!\!R^* \mapsto \frac{\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t}, \tag{7.30}$$

unde $t \in I\!\!R^*$ *este astfel încât* $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i \in D$.

Definiţia 7.3.2. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ *este de două ori derivabilă în punctul* $\mathbf{a} \in D$ *în raport cu variabilele* x_j *şi* x_i, *atunci limita în* $t = 0$ *a funcţiei* (7.30) *se numeşte* **derivata parţială de ordinul al doilea** *a lui* $\mathbf{f}$ *în punctul* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabilele* x_j *şi* x_i, *în această ordine.*

Derivatele parţiale de ordinul al doilea se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}''_{x_j x_i}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}_{,x_j x_i}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}_{,ji}(\mathbf{a}).$$

Aşadar,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t}.$$

Teorema 7.3.1. *Funcţia* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$ *este de două ori derivabilă parţial în* $\mathbf{a}$, *în raport cu variabilele* x_j *şi* x_i, *dacă şi numai dacă funcţiile coordonate* f_i, $i \in \overline{1, m}$, *sunt de două ori derivabile parţial în* $\mathbf{a}$ *în raport cu variabilele* x_j *şi* x_i *şi*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\, \mathbf{e}'_k. \tag{7.31}$$

Demonstraţie. Din (7.30) avem

$$\frac{\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t} \mathbf{e}'_k. \tag{7.32}$$

Trecând la limită pentru $t \to 0$ în (7.32) şi ţinând cont de Definiţia 7.3.1, Definiţia 7.3.2 şi Teorema 4.1.4, constatăm că concluziile teoremei sunt adevărate. **q.e.d.**

Observaţia 7.3.2. *Într–un punct* $\mathbf{a} \in D$ *pot exista cel mult* n^2 *derivate parţiale de ordinul al doilea funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$. *Derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru care* $i \neq j$, *în număr de* $n(n-1)$, *se numesc* **derivate parţiale mixte** *ale funcţiei* $\mathbf{f}$ *în punctul* $\mathbf{a}$. *În cazul* $i = j$, *derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei* $\mathbf{f}$ *corespunzătoare se convine să se noteze cu* $\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i^2}(\mathbf{a})$.

Observaţia 7.3.3. *În baza Teoremei 7.3.1 rezultă că tot ce s–a demonstrat referitor la derivabilitatea de ordin superior a funcţiilor reale de mai multe variabile reale se transmite întocmai funcţiilor vectoriale de argument vectorial. De exemplu, dacă* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *este un multi–indice şi există derivatele parţiale de ordinul* $|\alpha|$ *ale funcţiilor coordonate* $f_1, f_2, ..., f_m$ *ale funcţiei* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, *atunci*

$$D^\alpha \mathbf{f} = \sum_{k=1}^{m} D^\alpha f_k \mathbf{e}'_k.$$

Referitor la diferenţiabilitatea şi diferenţialele de ordin superior ale funcţiei $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, putem stabili uşor alte rezultate pornind de la diferenţiabilitatea şi diferenţialele de ordin superior ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

De exemplu, diferenţiala de ordinul doi a funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{a} \in D$ este aplicaţia biliniară

$$d^2\mathbf{f}(\mathbf{a})(\cdot,\cdot) = d^2\mathbf{f}(\mathbf{a};\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

ale cărei valori se calculează după regula

$$d^2\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h},\mathbf{k}) = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})/_{t=s=0}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \tag{7.33}$$

Folosind (7.33), se poate arăta că expresia acestei diferenţiale secunde este

$$d^2\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{,ij}(\mathbf{a}) dx_i dx_j. \tag{7.34}$$

În mod analog, pentru diferenţiala de ordinul al treilea se ajunge la expresia

$$d^3\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_{,ijk}(\mathbf{a}) dx_i dx_j dx_k, \tag{7.35}$$

iar pentru diferenţiala de ordinul N se găseşte

$$d^N\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{|k|=N} \frac{N!}{k_1!k_2!...k_n!} D^k\mathbf{f}(\mathbf{a}) dx_1^{k_1} dx_2^{k_2}...dx_n^{k_n}, \tag{7.36}$$

unde $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ este un multindice de ordinul N.

7.4 Diferenţiabilitatea şi derivabilitatea funcţiilor vectoriale compuse

Fie

$$D \subset \mathbb{R}^n, \ D = \overset{\circ}{D}, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$$

şi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_p) \in \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(D), \mathbb{R}^p)$, unde $\boldsymbol{\varphi}(D) \subset \mathbb{R}^m$ este imaginea funcţiei vectoriale de mai multe variabile reale $\boldsymbol{\varphi}$ pe care o vom considera de asemenea mulţime deschisă. În aceste ipoteze se poate defini *funcţia compusă*

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{x} \in D \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^p. \tag{7.37}$$

Funcţia compusă $\mathbf{F}$ are ca valori vectori din $\mathbb{R}^p$, drept variabilă independentă vectorul $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ şi depinde de cele n variabile $x_1, x_2, ..., x_n$ prin intermediul variabilelor reale u_1, u_2, ..., u_m, unde

$$u_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i \in \overline{1,m}, \tag{7.38}$$

sau

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in \boldsymbol{\varphi}(D) \subset I\!R^m. \tag{7.39}$$

Scrise detaliat, valorile funcţiei compuse $\mathbf{F}$ sunt date de

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{f}\Big(\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)\Big). \tag{7.40}$$

Numerele naturale n, m şi p pot lua orice valoare mai mare sau egală cu 1. În partea a doua a acestui paragraf vom considera câteva cazuri particulare frecvent întâlnite în aplicaţiile practice ale calculului diferenţial.

Următoarea teoremă arată în ce condiţii funcţia compusă $\mathbf{F}$ este diferenţiabilă şi cum se exprimă diferenţiala acesteia în funcţie de diferenţialele funcţiilor ce o compun.

Teorema 7.4.1. **(Regula lanţului)** *Dacă funcţia* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0 \in D$ *şi* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(D), I\!R^p)$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) \in \overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}(D)}$, *atunci funcţia compusă* $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(D, I\!R^p)$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0$ *şi*

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0). \tag{7.41}$$

Demonstraţie. Deoarece $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\mathbf{f}$ sunt diferenţiabile în punctele menţionate, există funcţiile vectoriale de argument vectorial $\boldsymbol{\alpha}$ şi $\boldsymbol{\beta}$ definite într–o vecinătate a lui $\mathbf{0} \in I\!R^n$ şi respectiv într–o vecinătate a punctului $\mathbf{0} \in I\!R^m$ (aceste vecinătăţi pot fi chiar $I\!R^n$ şi respectiv $I\!R^m$), cu proprietăţile

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \lim_{\substack{\mathbf{u}\to\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{7.42}$$

astfel încât să aibă loc egalităţile:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D; \tag{7.43}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{u} \in \boldsymbol{\varphi}(D), \tag{7.44}$$

unde $d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) \in L(I\!R^n, I\!R^m)$ şi $d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in L(I\!R^m, I\!R^p)$ sunt diferenţialele funcţiilor vectoriale de argument vectorial $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\mathbf{f}$ în respectiv punctele $\mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{u}_0$.

Din paragraful precedent, avem:

$$d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}'\Big(J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0)dX\Big), \quad J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R); \tag{7.45}$$

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{e}''\Big(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0)dU\Big), \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \in \mathcal{M}_{p,m}(I\!R), \tag{7.46}$$

unde $dX \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$ are elementele egale cu diferenţialele variabilelor independente dx_1, $dx_2, ...,$ dx_n şi $dU \in \mathcal{M}_{m,1}(I\!R)$ are ca elemente diferenţialele du_1, $du_2, ...,$ du_m ale variabilelor intermediare. În relaţiile (7.45) (7.46) avem:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}' & = & \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\} \subset I\!R^m; \\ \mathbf{e}' & = & (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m) \in (I\!R^m)^m; \\ \mathcal{B}'' & = & \{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, ..., \mathbf{e}''_p\} \subset I\!R^p; \\ \mathbf{e}'' & = & (\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, ..., \mathbf{e}''_p) \in (I\!R^p)^p, \end{array}$$

unde $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sunt bazele canonice spaţiile Euclidiene $I\!R^m$, respectiv $I\!R^p$, iar

$$dX(\mathbf{h}) = H, \quad \forall\, \mathbf{h} = \mathbf{e}H = \sum_{i=1}^{n} h_i\, \mathbf{e}_i \in I\!R^n, \tag{7.47}$$

$$dU(\mathbf{v}) = V, \quad \forall\, \mathbf{v} = \mathbf{e}'V = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{e}'_j \in I\!R^m, \tag{7.48}$$

unde

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!R^n$$

este baza canonică din $I\!R^n$,

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \in (I\!R^n)^n,$$

$H \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{h}$ în baza $\mathcal{B}$, iar $V \in \mathcal{M}_{m,1}(I\!R)$ este matricea coordonatelor lui $\mathbf{v}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Din (7.44) (7.39), (7.37) şi (7.43), obţinem

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\Big(d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\Big) + \\ + \|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\|\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)), \quad \mathbf{x} \in D.\end{aligned} \tag{7.49}$$

Deoarece $d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in L\Big(I\!R^m, I\!R^p\Big)$ rezultă că

$$\begin{aligned} & d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\Big(d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\Big) = \\ & = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\Big(d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\Big) + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0;\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) = \\ & = \Big(d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\circ d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\Big)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0;\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)).\end{aligned} \tag{7.50}$$

Înlocuirea lui (7.50) în (7.49) conduce la

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \Big(d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\circ d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\Big)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{7.51}$$

unde am făcut notaţia

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) + \frac{\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)). \tag{7.52}$$

În relaţiile (7.51) şi (7.52) variabila $\mathbf{x}$ trebuie să fie diferită de $\mathbf{x_0}$.

Să arătăm că are loc

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{I\!R^p}. \tag{7.53}$$

Pentru aceasta, considerăm $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}$, unde $\mathbf{s}$ este un versor arbitrar din $I\!R^n$. Atunci $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \Longleftrightarrow t \to 0$ şi

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\| = \\ & = \lim_{t\to 0}\|\frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{t}\| = \|\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{t}\| = \\ & = \|\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0)\| = \|d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{s})\|.\end{aligned} \tag{7.54}$$

În deducerea relaţiilor (7.54) am folosit faptul că aplicaţia normă $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ este funcţie continuă pe $I\!R^n$ (vezi Exemplul 4.2.6).

Aplicaţia liniară $d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) \in L(I\!R^n, I\!R^m)$, fiind mărginită (vezi Corolarul 4.10.1 şi Teorema 4.9.1), avem

$$\|d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{s})\| \leq \|d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{s}\| = \|d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\|. \tag{7.55}$$

În mod analog demonstrăm

$$\|d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\| \leq \|d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\| \cdot \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|. \tag{7.56}$$

Aplicând norma ambilor membri din (7.52) şi folosind inegalitatea lui Minkowski şi inegalitatea (7.56), deducem

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\| \leq \|d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\|\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|+\\&+\frac{\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\|\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0))\|.\end{aligned} \tag{7.57}$$

unde $\mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Deoarece funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ este diferenţiabilă în punctul $\mathbf{x}_0$ rezultă că este continuă în $\mathbf{x}_0$ şi deci $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \to \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$. Ca urmare, avem

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)) = \lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{u}_0} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) = \mathbf{0}. \tag{7.58}$$

Prin trecere la limită în (7.57), pentru $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, şi folosirea lui (7.54), (7.55) şi (7.58), găsim că $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\| \leq 0$, din care rezultă (7.53).

Să revenim la (7.51). Deoarece

$$d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) \in L(I\!\!R^n, I\!\!R^m), \quad d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in L(I\!\!R^m, I\!\!R^p),$$

rezultă că

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) \in L(I\!\!R^n, I\!\!R^p). \tag{7.59}$$

Folosind (7.45), (7.46), Teorema 4.10.3 şi (7.59), deducem că matricea aplicaţiei liniare din (7.59) în perechea de baze $(\mathcal{B} \subset I\!\!R^n, \mathcal{B}'' \subset I\!\!R^p)$ este $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0)$, prin urmare putem scrie

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}''\Big(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0) dX\Big). \tag{7.60}$$

Din (7.51), (7.53), (7.60) şi teorema de unicitate a diferenţialei funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x}_0$, rezultă că funcţia $\mathbf{F}$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$ şi are loc (7.41). ∎

Corolarul 7.4.1. *În ipotezele Teoremei 7.4.1, avem*

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0). \tag{7.61}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, aceasta rezultă din (7.60),

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}''\Big(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) dX\Big) \tag{7.62}$$

şi unicitatea diferenţialei. **q.e.d.**

Corolarul 7.4.2. *În ipotezele Teoremei 7.4.1, există derivatele parţiale ale funcţiilor coordonate F_i, $i \in \overline{1,p}$, ale funcţiei compuse $\mathbf{F}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ în raport cu toate variabilele x_1, x_2, ..., x_n şi aceste sunt date de:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\mathbf{u}_0)\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i \in \overline{1,p}, \quad j \in \overline{1,n}; \tag{7.63}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}(\mathbf{u}_0)\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad j \in \overline{1,n}. \tag{7.64}$$

Demonstraţie. Să specificăm mai întâi că, utilizând o altă notaţie pentru derivatele parţiale de ordinul întâi, egalităţile (7.63) şi (7.64) se scriu în formele:

$$F_{i,j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} f_{i,\,k}(\mathbf{u}_0)\varphi_{k,j}(\mathbf{x}_0) \tag{7.65}$$

$$\mathbf{F}_{,j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{f}_{,k}(\mathbf{u}_0)\varphi_{k,j}(\mathbf{x}_0). \tag{7.66}$$

Din definiţia matricei jacobiene a unei funcţii vectoriale de argument vectorial rezultă:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) = \|f_{i,k}\|_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le k\le m}}; \quad J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0) = \|\varphi_{k,j}\|_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le j\le n}}; \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \|F_{i,j}\|_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}. \tag{7.67}$$

Atunci, egalităţile (7.63), sau (7.65) rezultă din (7.67), (7.61) şi regula de inmulţire a două matrice. Putem spune că (7.63), sau (7.65) reprezintă *regula de derivare a funcţiilor reale compuse de mai multe variabile reale*, cunoscută şi sub denumirea *regula lanţului.* **q.e.d.**

Corolarul 7.4.3. *Fiecare din operatorii de derivare parţială de ordinul întâi* $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j \in \overline{1,n}$, *este o combinaţie liniară de operatorii de derivare parţială* $\dfrac{\partial}{\partial u_k}$, $k \in \overline{1,m}$, *scalarii combinaţiei liniare fiind derivatele* $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$, $k \in \overline{1,m}$, *adică*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad j \in \overline{1,n}. \tag{7.68}$$

În continuare considerăm unele cazuri particulare ale regulii lanţului.

1⁰. Cel mai simplu caz particular este acela în care $m = n = p = 1$. Dacă notăm $x_1 = t$, $u_1 = x$, atunci

$$F(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)). \tag{7.69}$$

După (7.41), (7.38), (7.61), (7.62), avem

$$dF(t_0) = df(x_0) \circ d\varphi(t_0) = f'(t_0)d\varphi(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)dt, \quad x_0 = \varphi(t_0), \tag{7.70}$$

de unde deducem

$$F'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0), \tag{7.71}$$

rezultat care se poate obţine dacă se utilizează direct relaţia (7.67).

Egalitatea (7.71) se scrie uneori în forma

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{df}{dx}(x_0)\frac{d\varphi}{dt}(t_0), \tag{7.72}$$

în care funcţia F este dată de (7.69). În aplicaţiile practice se pune

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}, \tag{7.73}$$

formulă ambiguă dacă nu se face precizarea că w din membrul întâi este rezultatul compunerii lui w din membrul doi cu funcţia $x = \varphi(t)$. **q.e.d.**

2^0. Dacă $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ este o funcţie de la $I\!R$ la $I\!R^2$, deci cazul $n = 1$ şi $m = 2$, iar f este o funcţie de la $I\!R^2$ la $I\!R$, deci $p = 1$, atunci $f \circ \boldsymbol{\varphi}$ este funcţia reală de variabilă reală t

$$F(t) = (f \circ \boldsymbol{\varphi})(t) = f(\boldsymbol{\varphi}(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)). \tag{7.74}$$

Pentru funcţia din (7.74), matricea jacobiană în t_0 are o singură linie şi o singură coloană, singurul ei element fiind $F'(t_0)$, deci

$$J_F(t_0) = F'(t_0). \tag{7.75}$$

În baza lui (7.61) numărul real din (7.75) este rezultatul înmulţirii matricei

$$J_f(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix}$$

cu matricea

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

şi prin urmare

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0)\varphi_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)\varphi_2'(t_0), \tag{7.76}$$

sau

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0)\frac{d\varphi_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)\frac{d\varphi_2}{dt}(t_0). \tag{7.77}$$

Într–o notaţie ambiguă, (7.77) se foloseşte în forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}. \tag{7.78}$$

Ambiguitatea se înlătură dacă precizăm că funcţia w din membrul doi depinde de x_1 şi x_2 care la rândul lor depind de variabila independentă t pe când funcţia w din primul memebru este rezultatul unei compuneri de funcţii.

3^0. Cazul $n = m = 1$ şi $p \geq 2$ a fost considerat în Capitolul 5, rezultatul corespunzător fiind prezentat în (5.4.2). ■

4^0. Dacă $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$, unde $D \subset I\!R^2$ şi f este o funcţie reală de trei variabile reale (cazul $n = 2, m = 3, p = 1$), atunci funcţia compusă $F = f \circ \boldsymbol{\varphi}$ are valorile date de $F(x_1, x_2) = f(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_3(x_1, x_2))$. Aplicând regula lanţului (7.68), obţinem

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial u_3}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.79}$$

După efectuarea produsului matricelor din membrul doi al identităţii (7.79) şi egalarea elementelor corespunzătoare din cei doi membri, se obţine

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial u_3}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial u_3}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \right. \tag{7.80}$$

Folosind alte notaţii pentru derivate constatăm că (7.80) se scrie în forma

$$\begin{cases} F_{,1}(\mathbf{x}_0) &= f_{,1}(\mathbf{u}_0)\cdot\varphi_{1,1}(\mathbf{x}_0)+f_{,2}(\mathbf{u}_0)\cdot\varphi_{2,1}(\mathbf{x}_0)+f_{,3}(\mathbf{u}_0)\cdot\varphi_{3,1}(\mathbf{x}_0)\\ F_{,2}(\mathbf{x}_0) &= f_{,1}(\mathbf{u}_0)\cdot\varphi_{1,2}(\mathbf{x}_0)+f_{,2}(\mathbf{u}_0)\cdot\varphi_{2,2}(\mathbf{x}_0)+f_{,3}(\mathbf{u}_0)\cdot\varphi_{3,2}(\mathbf{x}_0).\end{cases}$$

La fel ca mai sus, formula (7.133) poate fi întâlnită într–o altă aranjare şi anume:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_i},\quad i\in\overline{1,2}. \tag{7.81}$$

În formula (7.134), trebuie precizat că funcţia F din membrul întâi este rezultatul compunerii funcţiei F din membrul al doilea cu funcţia $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$.

Exerciţiul 7.4.1. *Fie funcţiile:*

$$\mathbf{x}\mapsto\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})=(x_1^2x_2^4,\ \ x_1^3x_2^2+4x_1x_2^2);\ \ \mathbf{u}\mapsto\mathbf{f}(\mathbf{u})=(u_1\sin u_2,\ \ -u_1\cos u_2),$$

unde $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in I\!R^2$ *şi* $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in I\!R^2$. *Să se calculeze matricea jacobiană* $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$, *unde* $\mathbf{F}=\mathbf{f}\circ\boldsymbol{\varphi}$ *şi* $\mathbf{x}_0=(2,-1)$.

Soluţie. Matricea jacobiană a funcţiei $\boldsymbol{\varphi}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1x_2^4 & 4x_1^2x_2^3\\ 3x_1^2x_2^3+4x_2^2 & 6x_1^3x_2^2+8x_1x_2\end{pmatrix}_{/\substack{x_1=2\\x_2=-1}}. \end{aligned}$$

Matricea jacobiană $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0)$, unde $\mathbf{u}_0=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)=(4,0)$, este

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0)\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin u_2 & u_1\cos u_2\\ -\cos u_2 & u_1\sin u_2\end{pmatrix}_{/\substack{u_1=4\\u_2=0}}.$$

După efectuarea înlocuirilor care se impun, găsim:

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix}4 & -16\\ -8 & 8\end{pmatrix};\quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Folosind acum rezultatele de mai sus, avem:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)=J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0)\cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -16\\ -8 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-32 & 32\\ -4 & 16\end{pmatrix}.$$

■

În cazul particular $m=n=p$ se poate vorbi de jacobienii aplicaţiilor $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\mathbf{f}$. Legătura dintre jacobianul funcţiei compuse $\mathbf{F}=\mathbf{f}\circ\boldsymbol{\varphi}$ şi jacobienii funcţiilor $\mathbf{f}$ şi $\boldsymbol{\varphi}$ este precizată în următorul rezultat, care este o consecinţă imediată a Teoremei 7.4.1.

Corolarul 7.4.4. *Dacă aplicaţia* $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{F}(D,I\!R^n)$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0\in D\subset I\!R^n$, *iar aplicaţia* $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(D),I\!R^n)$ *este diferenţiabilă în punctul* $\mathbf{u}_0=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)$, *atunci*

$$\frac{D(F_1,F_2,...,F_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}(\mathbf{x}_0)\;=\;\frac{D(f_1,f_2,...,f_n)}{D(u_1,u_2,...,u_n)}(\mathbf{u}_0)\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}(\mathbf{x}_0). \tag{7.82}$$

Demonstrație. Din ipotezele acestui corolar rezultă că are loc (7.61). În cazul particular menționat în privința lui m, n și p avem că cele două matrice care intră în membrul al doilea din (7.61) sunt matrice pătratice de ordinul n. Ținând cont de faptul că determinantul produsului a două matrice pătratice de același tip este egal cu produsul determinanților matricelor factori, rezultă (7.61). **q.e.d.**

Exercițiul 7.4.2. *Să se calculeze jacobianul funcției* $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(I\!\!R^2, I\!\!R^2)$ *în punctul* $\mathbf{x} \in I\!\!R^2$*, unde*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!\!R^2, I\!\!R^2), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(u_1, u_2) = (u_1^2 + u_1 u_2)\mathbf{e}_1 + (u_1 u_2 + u_2^2)\mathbf{e}_2, \quad \text{şi}$$

$$\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(I\!\!R^2, I\!\!R^2), \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \mathbf{e}_1 + (x_1^2 - x_2^2)\mathbf{e}_2.$$

Soluție. Mai întâi avem

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{vmatrix} = -2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Apoi,

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u_1, u_2)}(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2u_1 + u_2 & u_1 \\ u_2 & u_1 + 2u_2 \end{vmatrix} = 2(u_1 + u_2)^2.$$

Folosind acum (7.82), deducem

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x_1, x_2)}(\mathbf{x}) = -4(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^2 \|\mathbf{x}\|^2 = -4(x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2)^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

■

Utilizând rezultatele de mai sus putem demonstra următoarea teoremă de medie pentru o funcție reală de variabilă vectorială.

Teorema 7.4.2. *Fie* $D \subset I\!\!R^n$ *o mulțime deschisă și convexă și* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D)$ *o funcție reală de variabilă vectorială. Dacă* $\mathbf{f}$ *este diferențiabilă pe* D *și* $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{b} \in D$, *atunci există un punct* $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset D$ *astfel încât*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = df(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \tag{7.83}$$

Demonstrație. Introducem funcția $\mathbf{G} : [0,1] \to D$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $t \in [0,1]$. Evident, $\mathbf{G}$ este continuă pe $[0,1]$, $\mathbf{G}\Big([0,1]\Big) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ și $\mathbf{G}$ este diferențiabilă pe $(0,1)$. Atunci, funcția compusă $F = f \circ \mathbf{G} \in \mathcal{F}([0,1])$ este diferențiabilă pe $(0,1)$ și

$$dF(t) = df(\mathbf{G}(t)) \circ d\mathbf{G}(t), \quad t \in (0,1). \tag{7.84}$$

Dacă h este arbitrar din $I\!R$, atunci

$$dF(t,h) = df(\mathbf{G}(t)) \circ d\mathbf{G}(t;h). \tag{7.85}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{cases} dF(t;h) &= F'(t)h; \\ d\mathbf{G}(t;h) &= \Big(dG_1(t;h), dG_2(t;h), ..., dG_n(t;h)\Big), \end{cases} \tag{7.86}$$

unde $G_1, G_2, ..., G_n$ sunt funcţiile coordonate ale funcţiei $\mathbf{G}$. Valoarea în h a diferenţialei funcţiei $\mathbf{G}$ în punctul t este

$$d\mathbf{G}(t,h) = \mathbf{G}'(t)h = (G_1'(t), G_2'(t), ..., G_n'(t))h. \tag{7.87}$$

Din (7.85) – (7.87) şi faptul că $\mathbf{G}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, obţinem

$$F'(t) = df(\mathbf{G}(t); \mathbf{G}'(t)) = df(\mathbf{G}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}). \tag{7.88}$$

Pe de altă parte, funcţia F satisface ipotezele teoremei lui Lagrange, deci există $\tau \in (0,1)$ astfel încât

$$F(1) - F(0) = F'(\tau). \tag{7.89}$$

Luând în consideraţie că $F(1) = f(\mathbf{b})$ şi $F(0) = f(\mathbf{a})$, din (7.88) şi (7.89), deducem

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{G}(\tau); \mathbf{b} - \mathbf{a}). \tag{7.90}$$

Pe de altă parte, avem

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{a} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{7.91}$$

Relaţia (7.83) rezultă acum din (7.90), (7.91) şi Corolarul 6.4.1. **q.e.d.**

7.5 Prelungirea unei funcţii uniform continue

Studiul derivabilităţii şi diferenţiabilităţii întrun punct $\mathbf{x}_0$ a unei funcţii $\mathbf{f} : D \to I\!R^m,\ D \subset I\!R^n$, presupune ca $\mathbf{x}_0$ să fie punct interior al mulţimii D şi din acest motiv domeniul de definiţie al funcţiei a fost considerat o mulţime deschisă în $I\!R^n$.

Se pune însă în mod natural problema extinderii noţiunilor de derivabilitate şi diferenţiabilitate în puncte frontieră aparţinând domeniului de definiţie.

Întrucât o funcţie diferenţiabilă într–un punct este în mod necesar continuă în acel punct, este indicat întâi să prelungim funcţia prin continuitate, dacă acest lucru este posibil. În acest sens dăm rezultatul următor.

Teorema 7.5.1. *Dacă funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$ este uniform continuă pe mulţimea neînchisă $A \subset I\!R^n$, atunci ea poate fi prelungită pe mulţimea $\overline{A} \setminus A$ într–un mod unic astfel încât prelungirea să fie continuă pe mulţimea $\overline{A}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{x}_0 \in \overline{A} \setminus A$. Atunci, $\mathbf{x}_0$ este punct aderent al mulţimii A. Din uniforma continuitate a funcţiei $\mathbf{f}$ pe mulţimea A rezultă că dat un $\varepsilon > 0$, arbitrar, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| < \varepsilon, \tag{7.92}$$

oricare ar fi $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$ care satisfac condiţia

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta(\varepsilon). \tag{7.93}$$

Dacă $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$ sunt astfel încât $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \dfrac{\delta}{2}; \quad \|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}_0\| < \dfrac{\delta}{2}$, atunci are loc şi inegalitatea (7.93). În consecinţă, în baza Teoremei 4.1.5, există limita $\ell_{\mathbf{x}_0}$ a lui $\mathbf{f}$ în $\mathbf{x}_0$ şi aceasta aparţine lui $I\!R^m$. Convenim ca $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{x}_0}$ să fie valoarea lui $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x}_0$.

Funcţia

$$\widetilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(A \cup \{\mathbf{x}_0\}, I\!R^m), \quad \widetilde{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \text{dacă} \quad \mathbf{x} \in A \\ \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{x}_0}, & \text{dacă} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \end{cases},$$

este o prelungire a funcţiei $\mathbf{f}$ la mulţimea $A \cup \{\mathbf{x}_0\}$, care în plus este continuă deoarece $\widetilde{\mathbf{f}}$ este continuă pe A şi limita lui $\widetilde{\mathbf{f}}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este egală cu valoarea funcţiei în acest punct. Cum $\mathbf{x}_0$ este arbitrar din $\overline{A}$ urmează că funcţia

$$\widetilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(\overline{A}, I\!R^m), \quad \widetilde{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \text{dacă} \quad \mathbf{x} \in A \\ \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{x}}, & \text{dacă} \quad \mathbf{x} \in \overline{A} \setminus A, \end{cases} \tag{7.94}$$

unde $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{x}} = \lim\limits_{\substack{\mathbf{y}\to\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\in A}} \mathbf{f}(\mathbf{y})$, este funcţie continuă pe mulţimea A. Mai mult, arătăm că funcţia $\widetilde{\mathbf{f}}$ din (7.94) este uniform continuă. Pentru aceasta, fie două puncte arbitrare $\mathbf{x}_0'$ şi $\mathbf{x}_0''$ ale lui $\overline{A}$ astfel încât

$$\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0''\| < \delta(\varepsilon). \tag{7.95}$$

Deoarece mulţimea $\overline{A}$ este închisă, există şirurile de puncte $(\mathbf{x}_k')_{k\geq 1}$ şi $(\mathbf{x}_k'')_{k\geq 1}$ din mulţimea A, convergente la $\mathbf{x}_0'$, respectiv $\mathbf{x}_0''$. Putem presupune în plus că $\|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''\| < \delta(\varepsilon)$, presupunere care, cumulată cu uniforma continuitate a lui $\mathbf{f}$, conduce la

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k') - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k'')\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, k \in I\!N^*.$$

Trecând la limită pentru $k \to \infty$ în această ultimă inegalitate, obţinem

$$\|\,\widetilde{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x}_0') - \widetilde{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x}_0'')\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{7.96}$$

Prin urmare, am demonstrat că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi punctele $\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0'' \in \overline{A}$, care satisfac (7.95), are loc (7.96), ceea ce, în baza Definiţiei 4.3.1, arată că prelungirea funcţiei $\mathbf{f}$ la mulţimea $\overline{A}$ definită în (7.94) este continuă şi cum $\overline{A}$ este mulţime închisă, rezultă că $\widetilde{\mathbf{f}}$ este funcţie uniform continuă. **q.e.d.**

7.6 Derivatele parţiale ale unei funcţii vectoriale pe frontiera domeniului de definiţie

Fie $n \geq 2$, $G \subset I\!R^n$ o mulţime deschisă, $\overline{G}$ închiderea lui G şi funcţia continuă $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(G, I\!R^m)$.

Este posibil ca, în anumite puncte ale frontierei $\Gamma = \overline{G} \setminus G$, să nu se poată vorbi de derivatele parţiale ale lui $\mathbf{f}$ în raport cu unele din variabilele sale $x_1, x_2, ..., x_n$.

De exemplu, dacă $G = B(\mathbf{0}, 1) \subset I\!R^n$, $n \geq 2$, atunci derivata parţială a funcţiei $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(B(\mathbf{0}, 1), I\!R^m)$ în raport cu variabila x_1 în punctul

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_2 \in \partial G = \Gamma = \overline{G} \setminus G,$$

nu poate avea sens deoarece punctele de forma

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \mathbf{x} = \mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_1,$$

unde $t > 0$, nu aparţin lui $\overline{G} = \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$, deci nu putem vorbi de

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{e}_2 + t\,\mathbf{e}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)}{t}$$

care defineşte derivabilitatea şi implicit derivata funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{e}_2$ în raport cu variabila x_1.

În astfel de cazuri este posibil să definim o *derivată parţială generalizată* a funcţiei $\mathbf{f}$ într–un punct $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ în raport cu o anumită varibilă x_i.

Pentru aceasta, funcţia f trebuie să fie nu numai continuă ci şi derivabilă parţial pe $G,$ iar derivatele parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \in \mathcal{F}(G, I\!\!R^m)$ trebuie să fie uniform continue pe $G.$

Dacă sunt îndeplinite aceste condiţii, atunci în baza Teoremei 7.5.1 putem prelungi prin continuitate, la mulţimea $\partial G,$ acele derivate parţiale $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ care există şi sunt uniform continue pe $G.$ Astfel de prelungiri sunt numite derivatele parţiale corespunzătoare ale lui $\mathbf{f}$ pe $\partial G,$ deşi în acest caz noţiunea de derivată parţială este înţeleasă într–un sens generalizat.

Mai mult, dacă într–un punct $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ se poate calcula $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ folosind Definiţiile 7.1.1 şi 7.1.2, atunci aceasta coincide cu derivata în sens generalizat în acel punct.

Pentru a arăta aceasta, considerăm cazul unei funcţii vectoriale de două variabile reale definită pe bila deschisă de rază 1 cu centrul în origine $G = B(\mathbf{0}, 1) \subset I\!\!R^2$ şi să luăm punctul $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ situat pe semicercul din semiplanul $x > 0$ a cercului de rază unitate cu centrul în origine mai puţin punctul de intersecţie al acestuia cu axa $Ox;$ aceasta înseamnă că $x_0 > 0$ şi $|y_0| < 1.$ În acest caz există derivatele parţiale ale lui $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(B(0,1), I\!\!R^m)$ în punctul $\mathbf{x}_0$ şi acestea coincid cu derivatele parţiale generalizate deoarece, de exemplu,

$$\frac{\mathbf{f}(x_0 - h, y_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0)}{-h} = \mathbf{f}_{,x}(x_0 - \theta\, h, y_0) \to \mathbf{f}_{,x_0}$$

atunci când $h \to 0$ şi $h > 0,$ unde $\mathbf{f}_{,x_0}$ este derivata parţială generalizată corespunzătoare.

Rezultatele de mai sus se pot extinde şi pentru derivate parţiale de ordin superior în sensul că dacă $\Gamma,$ sau o submulţime $\gamma \subset \Gamma$ a frontierei domeniului $G \subset I\!\!R^n,$ este de $r+1$ ori continuu diferenţiabilă, atunci o funcţie uniform continuă pe G împreună cu derivatele parţiale până la ordinul $r+1$ inclusiv pot fi extinse la Γ (respectiv la γ) cu păstrarea proprietăţilor de diferenţiabilitate. În particular funcţia prelungită $\widetilde{\mathbf{f}}$ are derivate parţiale continue până la ordinul $r+1$ inclusiv în toate punctele lui Γ (respectiv γ).

7.7 Pânze parametrice. Suprafeţe

În acest paragraf se arată cum se utilizează rezultatele precedente în studierea noţiunilor de *pânză parametrică* şi *suprafaţă*, frecvent întâlnite în calculul integral şi în geometria diferenţială.

Definiţia 7.7.1. *Se numeşte* **pânză parametrică netedă** *în* $I\!\!R^3$ *o funcţie continuă* $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^3),$ *unde* $A \subset I\!\!R^2,$ *care admite derivate parţiale continue pe mulţimea nevidă* $\overset{\circ}{A}$.

Mulţimea $\mathbf{S}(A) \subset I\!\!R^3$ *se numeşte de asemenea pânză netedă în* $I\!\!R^3$*, iar ecuaţiile*

$$\begin{cases} x = S_1(u,v), \\ y = S_2(u,v), \\ z = S_3(u,v), \quad (u,v) \in A, \end{cases} \tag{7.97}$$

unde

$$S_1(u,v)\mathbf{i} + S_2(u,v)\mathbf{j} + S_3(u,v)\mathbf{k} = \mathbf{S}(u,v) = \mathbf{r}(u,v), \tag{7.98}$$

se numesc **ecuaţiile parametrice ale pânzei***.*

Ecuaţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u,v), \quad \textit{sau} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), \tag{7.99}$$

unde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{OM}, \quad M(x,y,z), \tag{7.100}$$

se numeşte **ecuaţia vectorială a pânzei***.*

Observaţia 7.7.1. *Deoarece funcţia* $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^3)$ *are derivate parţiale continue pe* $\overset{\circ}{A}$, *din Teorema 7.2.4 rezultă că* $\mathbf{S}$ *este diferenţiabilă pe* $\overset{\circ}{A}$ *.*

Prin urmare, în fiecare punct $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ se poate defini aplicaţia liniară $d\mathbf{S}\Big((u_0, v_0)\Big) \in L\Big(I\!\!R^2, I\!\!R^3\Big)$, diferenţiala funcţiei $\mathbf{S}$ în punctul (u_0, v_0), a cărei matrice în perechea de baze canonice:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\} \subset I\!\!R^2; \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\} \subset I\!\!R^3$$

este

$$J_{\mathbf{S}}((u_0,v_0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}. \tag{7.101}$$

Observaţia 7.7.2. *Prima coloană a matricei jacobiene* $J_{\mathbf{S}}((u_0,v_0))$ *este matricea coloană a coordonatelor vectorului* $\dfrac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0,v_0) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ *în baza canonică* $\mathcal{B}' \subset I\!\!R^3$, *iar cea de a doua coloană este matricea coloană a coordonatelor vectorului* $\dfrac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u_0,v_0) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ *în aceeaşi bază.*

În aplicaţiile practice ale calculului integral, geometriei diferenţiale, mecanicii, fizicii, etc. se include în definiţia pânzei parametrice şi *condiţia de regulatitate* care spune că rangul matricei $J_{\mathbf{S}}((u_0,v_0))$ să fie egal cu 2 în orice punct $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{A}$, condiţie care se poate scrie sub forma

$$\Big(\frac{D(S_2,S_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2 + \Big(\frac{D(S_3,S_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2 + \Big(\frac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2 > 0. \tag{7.102}$$

Pentru a vedea semnificaţia geometrică a acestei condiţii să considerăm funcţia

$$u \mapsto \mathbf{S}(u, v_0), \quad u \in I\!\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0) \in A, \tag{7.103}$$

care este restricţia funcţiei $\mathbf{S}$ la segmentul de dreaptă paralel cu axa absciselor reperului cartezian din $I\!\!E^2$ ce trece prin punctul $M_0'(u_0,v_0)$ şi este conţinut în mulţimea A, deci care are ecuaţia carteziană $v = v_0$.

Deoarece (7.103) este o aplicaţie continuă diferenţiabilă de la o submulţime a lui $I\!\!R$ în $I\!\!R^3$, ea reprezintă un drum parametrizat neted în $I\!\!R^3$ şi are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u, v_0), \quad u \in I\!\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0) \in A. \tag{7.104}$$

Avem $\text{Im}\ \mathbf{S}(\cdot, v_0) \subset \text{Im}\ \mathbf{S}$, deci hodograful drumului (7.104) este o submulţime a pânzei netede de ecuaţie vectorială (7.99). Atunci, vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$$

are direcţia tangentei la drumul de ecuaţie vectorială (7.104) în punctul $M_0 \in I\!\!E^3$ a cărui vector de poziţie este $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0) = \mathbf{S}(u_0,v_0)$.

În mod similar aplicaţia

$$v \mapsto \mathbf{S}(u_0, v), \quad v \in I\!\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v) \in A, \tag{7.105}$$

este drum parametrizat neted în $I\!\!R^3$ care are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u_0, v), \quad v \in I\!\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v) \in A, \tag{7.106}$$

a cărui imagine este o submulţime a lui $\operatorname{Im}\mathbf{S}$. Vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

este vectorul director al tangentei la drumul parametrizat neted (7.106) în punctul M_0.

Să observăm că

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}, \tag{7.107}$$

unde

$$A=\frac{D(S_2,S_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0);\quad B=\frac{D(S_3,S_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0);\quad C=\frac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0),$$

este ortogonal atât pe vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ cât şi pe vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$.

Din cele prezentate rezultă că condiţia de regularitate (7.102) se scrie echivalent în forma

$$\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}>0$$

şi exprimă faptul că vectorii $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ şi $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ sunt necoliniari (liniar independenţi) fapt care, geometric, se traduce prin aceea că imaginile drumurilor parametrizate (7.104) şi (7.106) au în punctul comun M_0 tangente distincte. Dacă presupunem în plus că (7.97), sau (7.98) este corespondenţa biunivocă, atunci drumurile (7.97) şi (7.98) au în comun doar punctul M_0. Imaginile acestor drumuri se numesc *liniile parametrice* ale pânzei netede de ecuaţie vectorială (7.99), care trec prin punctul M_0

Să vedem acum ce interpretare geometrică are funcţia afină

$$(u,v)\mapsto \mathbf{S}(u_0,v_0)+d\mathbf{S}\Big((u_0,v_0);(u-u_0,v-v_0)\Big),\ \ (u,v)\in I\!R^2.$$

Evident că ea defineşte o nouă pânză parametrică netedă de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r}=\mathbf{S}(u_0,v_0)+d\mathbf{S}\Big((u_0,v_0);(u-u_0,v-v_0)\Big),\ \ (u,v)\in I\!R^2, \tag{7.108}$$

sau de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x=S_1(u_0,v_0)+\dfrac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0)+\dfrac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0)\\ x=S_2(u_0,v_0)+\dfrac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0)+\dfrac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0)\\ x=S_3(u_0,v_0)+\dfrac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0)+\dfrac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0).\end{cases} \tag{7.109}$$

Eliminarea lui $u-u_0$ şi $v-v_0$ din (7.109) conduce la ecuaţia

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+(z-z_0)\cdot C=0, \tag{7.110}$$

unde $x_0=S_1(u_0,v_0)$, $y_0=S_2(u_0,v_0)$, $z_0=S_3(u_0,v_0)$ sunt coordonatele punctului M_0.

Ecuaţia (7.110) arată că vectorul cu originea în M_0 şi extremitatea într–un punct curent M al pânzei (7.108) este ortogonal pe vectorul (7.107). Toate punctele M din spaţiu cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este ortogonal pe vectorul $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ formează un plan.

Prin urmare, pânza parametrică de ecuaţie vectorială (7.108), sau de ecuaţii parametrice (7.109) are ca imagine un plan care se numeşte *planul tangent* în punctul M_0 la pânza parametrică netedă de ecuaţie vectorială (7.99), plan care are în comun cu $\operatorname{Im}\mathbf{S}$, într–o vecinătate a punctului M_0, doar punctul M_0. Diferenţa

$$\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{r}(u_0,v_0)-d\mathbf{r}\Big((u_0,v_0);(u-u_0,v-v_0)\Big)=\mathbf{S}(u,v)-\mathbf{S}(u_0,v_0)-d\mathbf{S}\Big((u_0,v_0);(u-u_0,v-v_0)\Big),$$

caracterizează *abaterea* dintre coordonatele punctelor de pe imaginea pânzei netede de ecuaţie vectorială (7.99) şi coordonatele punctelor corespunzătoare de pe planul (7.109) în vecinătatea punctului $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{A}$, care are drept corespondent punctul M_0 de pe pânză.

Deoarece diferenţiabilitatea lui $\mathbf{S}$ în punctul (u_0, v_0) implică faptul că abaterea de mai sus tinde la zero mai repede decât tinde la zero distanţa dintre punctele $(u,v) \in \overset{\circ}{A}$ şi $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{A}$ când $(u,v) \to (u_0,v_0)$ rezultă că planul (7.108) aproximează satisfăcător $\operatorname{Im}\mathbf{S}$ într–o vecinătate a punctului M_0.

Exemplul 7.7.1. *Aplicaţia* $\mathbf{S} : [0,2\pi) \times [0,\pi] \to I\!R^3$ *defimită prin*

$$\mathbf{S}(u,v) = \mathbf{r}(u,v) = a\cos u \sin v\mathbf{i} + a\sin u\sin v\mathbf{j} + a\cos v\mathbf{k},$$

în care a *este o constantă pozitivă este o pânză parametrică netedă. Să se studieze această pânză.*

Într-adevăr, aplicaţia de mai sus este diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{A} = (0,2\pi) \times (0,\pi)$ deoarece funcţiile coordonate $S_1,\ S_2,\ S_3$ sunt diferenţiabile pe $\overset{\circ}{A}$ şi deci defineşte o pânză parametrică netedă în $I\!R^3$ de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x &= a\cos u\sin v\\ y &= a\sin u\sin v\\ z &= a\cos v,\ \ u\in[0,2\pi),\ \ v\in[0,\pi]. \end{cases}$$

Dacă calculăm distanţa Euclidiană de la punctul $M(x,y,z)$ al pânzei la originea $O(0,0,0)$ a reperului $\mathcal{R} = \{O;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ găsim

$$d^2(M,O) = x^2+y^2+z^2 = a^2\sin^2 v(\cos^2 u+\sin^2 u) + a^2\cos^2 v = a^2,$$

de unde rezultă $d(M,O) = a$, ceea ce arată că $\operatorname{Im}\mathbf{S}$ este frontiera bilei cu centrul în origine şi raza egală cu a, adică sfera de rază a cu centrul în origine.

Matricea jacobiană $J_{\mathbf{S}}(u,v)$ care defineşte diferenţiala funcţiei $\mathbf{S}$ în punctul $(u,v)\in(0,2\pi)\times(0,\pi)$ este

$$J_{\mathbf{S}}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v\\ a\cos u\sin v & a\sin u\cos v\\ 0 & -a\sin v \end{pmatrix}.$$

Conform Observaţiei 7.7.2, elementele coloanelor întâi şi a doua ale matricei $J_{\mathbf{S}}$ sunt coordonatele vectorilor $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ şi respectiv $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$. Prin urmare,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v) &= \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)\mathbf{k} =\\ &- \ a\sin u\sin v\mathbf{i} + a\cos u\sin v\mathbf{j}\\ \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v) &= \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\mathbf{k} =\\ &= a\cos v(\cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j}) - a\sin v\mathbf{k}. \end{cases}$$

Mai întâi constatăm că produsul scalar $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ este egal cu zero ceea ce înseamnă că liniile parametrice ale sferei (cercul paralel $v =$ const. şi meridianul $u =$ const.) care trec prin punctul $M(u,v)$ cu $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(u,v)$, sunt ortogonale. Apoi, produsul vectorial al aceloraşi vectori este

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -a\sin u\sin v & a\cos u\sin v & 0\\ a\cos u\cos v & a\sin u\sin v & -a\sin v \end{vmatrix} = -a\sin v\,\mathbf{r}(u,v) \neq \mathbf{0},$$

oricare ar fi perechea $(u,v)\in(0,2\pi)\times(0,\pi)$. Deoarece pentru $v\in(0,\pi)$, avem $a\sin v>0$, rezultă că vectorul $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ este coliniar şi de sens contrar vectorului $\mathbf{r}(u,v)$, adică vectorului de poziţie al punctului M de pe pânză corespunzător perechii $(u,v)\in(0,2\pi)\times(0,\pi)$.

Tangentele la la liniile parametrice care trec prin punctul M_0 de vector de poziţie $\overrightarrow{OM_0}=\mathbf{r}(u_0,v_0)$, unde $(u_0,v_0)\in(0,2\pi)\times(0,\pi)$, determină planul tangent la sferă în M_0 care are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v_0)+d\mathbf{S}\Big((u_0,v_0);(t-u_0,s-v_0)\Big),\quad (t,s)\in I\!R^2.$$

Pentru punctele $(t,s)=(u,v)$ situate într–o vecinătate a punctului (u_0,v_0) din mulţimea deschisă $(0,2\pi)\times(0,\pi)$, membrul doi din ultima ecuaţie aproximează satisfăcător punctele corespunzătoare de pe sferă. De exemplu, dacă luăm $u_0=v_0=\dfrac{\pi}{4}$, atunci $M_0(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},a\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, matricea jacobiană $J_{\mathbf{S}}(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$ este

$$J_{\mathbf{S}}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}-\dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2}\\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2}\\ 0 & -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

iar ecuaţiile parametrice ale planului tangent la sferă în punctul M_0 sunt

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}t+\dfrac{a}{2}s\\ y &= \dfrac{a(2-\pi)}{4}+\dfrac{a}{2}t+\dfrac{a}{2}s\\ z &= \dfrac{a\sqrt{2}(\pi+4)}{8}-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}s,\quad (t,s)\in I\!R^2.\end{cases}$$

Eliminând t şi s din aceste ecuaţii obţinem ecuaţia planului tangent în forma $x+y+z\sqrt{2}-2\,a=0$.

Este posibil ca funcţiile $S_1,\ S_2,\ S_3$ din (7.97) să fie astfel încât $S_1(u,v)=u$, $S_2(u,v)=v$, $S_3(u,v)=f(u,v)$, unde $f\in\mathcal{F}(A)$ este o funcţie diferenţiabilă pe mulţimea $\overset{\circ}{A}\in I\!R^2$, iar A este situată în planul Oxy, aceasta însemnând că $u=x$, $v=y$, iar z este o funcţie de x şi y. În această situaţie, în locul ecuaţiilor (7.97) putem considera doar ecuaţia

$$z=f(x,y),\ \ (x,y)\in A. \tag{7.111}$$

În acest caz se spune că funcţia reală f, diferenţiabilă pe mulţimea $\overset{\circ}{A}\in Oxy$, defineşte *explicit* pânza netedă $\operatorname{Im}\mathbf{S}$, sau că (7.111) este *ecuaţia explicită* a pânzei netede. Ecuaţia vectorială a pânzei este acum

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+f(x,y)\mathbf{k},\quad (x,y)\in A. \tag{7.112}$$

Vectorul tangent în $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ la drumul

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+f(x,y_0)\mathbf{k},\quad x\in I\!R,\quad \text{astfel încât}\quad (x,y_0)\in\overset{\circ}{A}, \tag{7.113}$$

este

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}(x_0,y_0)=\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathbf{k}, \tag{7.114}$$

iar vectorul tangent în M_0 la drumul parametrizat

$$\mathbf{r}=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+f(x_0,y)\mathbf{k},\quad y\in I\!R,\quad (x_0,y)\in\overset{\circ}{A}, \tag{7.115}$$

este

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}(x_0,y_0)=\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathbf{k}. \tag{7.116}$$

În această situaţie:

$$A=-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0);\quad B=-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0);\quad C=1, \tag{7.117}$$

astfel că, din (7.117) şi (7.110), se deduce că ecuaţia planului tangent la pânza netedă de ecuaţie (7.111) este

$$-(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+(z-z_0)=0. \tag{7.118}$$

Să considerăm acum pânza netedă (7.99) şi un drum parametrizat neted $\mathbf{f}\in\mathcal{F}(I,I\!R^3)$, unde I este interval din $I\!R$, cu proprietatea că există $t_0\in I$ astfel încât $\mathbf{f}(t_0)=\mathbf{S}(u_0,v_0)$, iar $\mathrm{Im}\mathbf{f}\subset\mathrm{Im}\mathbf{S}$. Aceste proprietăţi arată că imaginea drumului parametrizat considerat este situat pe pânza parametrică netedă (7.3) şi că această imagine trece prin punctul M_0 de pe pânză, unde M_0 este astfel încât $\overrightarrow{OM_0}=\mathbf{S}(u_0,v_0)$. Ca să se realizeze proprietăţile de mai sus ar trebui să existe un drum neted $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2):I\to A$ astfel încât $\mathbf{f}=\mathbf{S}\circ\boldsymbol{\varphi}$. Tangenta în punctul M_0 la drumul parametrizat neted de mai sus este de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t_0)+\mathbf{f}'(t_0)\,\mathbf{S},\quad s\in I\!R.$$

Pe de altă parte, se ştie că (vezi regula lanţului)

$$\mathbf{f}'(t_0)=\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial u}(u_0,v_0)\varphi_1'(t_0)+\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial v}(u_0,v_0)\varphi_2'(t_0). \tag{7.119}$$

Din (7.119) şi valoarea în $\mathbf{h}=\boldsymbol{\varphi}'(t_0)$ a diferenţialei funcţiei $\mathbf{S}$ în punctul (u_0,v_0) rezultă

$$\mathbf{f}'(t_0)=d\mathbf{S}\Big((u_0,v_0);\boldsymbol{\varphi}'(t_0)\Big). \tag{7.120}$$

Deoarece $\mathbf{f}(t_0)=\mathbf{S}(u_0,v_0)$, iar din (7.120) şi liniaritatea diferenţialei avem $\mathbf{f}'(t_0)\,s=d\,\mathbf{S}\Big((u_0,v_0);s\,\boldsymbol{\varphi}'(t_0)\Big)$ rezultă că tangenta (7.23) se află inclusă în planul tangent de ecuaţie (7.12). Acest rezultat stabilit duce la următoarea definiţie echivalentă a planului tangent într-un punct al unei pânze parametrice netede.

Definiţia 7.7.2. *Se numeşte* **plan tangent** *într–un punct al unei pânze netede, locul geometric al tangentelor la respectiv toate drumurile netede ale căror imagini se află pe imaginea pânzei şi care trec prin acel punct.*

Definiţia 7.7.3. *Două pânze netede* $\mathbf{S}\in\mathcal{F}(A,I\!R^3)$ *şi* $\widetilde{\mathbf{S}}\in\mathcal{F}(\widetilde{A},I\!R^3)$, *unde* $A\subset I\!R^2$, $\widetilde{A}\subset I\!R^2$, *se numesc* **echivalente** *dacă există un homeomorfism diferenţiabil* $\boldsymbol{\varphi}:A\to\widetilde{A}$ *cu matricea jacobiană nesingulară pe* $\overset{\circ}{A}$ *şi jacobianul pozitiv în orice punct* $(u,v)\in\overset{\circ}{A}$ *astfel încât* $\mathbf{S}=\widetilde{\mathbf{S}}\circ\boldsymbol{\varphi}$.

Definiţia 7.7.4. *Se numeşte* **suprafaţă netedă** *o clasă de echivalenţă în mulţimea pânzelor parametrice netede.*

O suprafaţă netedă poate fi reprezentată prin oricare pânză parametrică netedă care aparţine clasei de echivalenţă respective. Spre exemplu, într–o vecinătate a unui punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ o suprafaţă netedă care conţine acest punct poate fi reprezentată parametric prin ecuaţiile (7.97), sau prin *ecuaţia carteziană explicită* (7.111).

Să considerăm acum aplicaţia reală diferenţiabilă $F\in\mathcal{F}(A)$, $A\subset I\!R^3$, cu proprietea că gradientul ei

$$(\boldsymbol{\nabla}F)(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j}+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k}, \tag{7.121}$$

este vector nenul pe mulţimea deschisă $\overset{\circ}{A}$, adică are loc inegalitatea

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\Big)^2+\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\Big)^2+\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\Big)^2>0, \tag{7.122}$$

oricare ar fi punctul $(x,y,z)\in\overset{\circ}{A}$.

Definiţia 7.7.5. *Fie aplicaţia reală $F \in \mathcal{F}(A)$ care satisface condiţia (7.122). Mulţimea $(\mathcal{S})$ a punctelor $M(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$, ale căror coordonate verifică ecuaţia,*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7.123}$$

se numeşte **varietate bidimensională** *scufundată în $\mathbb{R}^3$, sau* **suprafaţă reprezentată implicit**, *iar ecuaţia (7.123) se numeşte* **ecuaţia carteziană implicită** *a suprafeţei $(\mathcal{S})$.*

scufundată în $\mathbb{R}^3$

Fie $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(I, A)$, unde I este interval din $\mathbb{R}$, iar domeniul de definiţie al funcţiei F, un drum parametrizat neted a cărui imagine se află pe varietatea bidimensională (7.29), fapt care matematic se exprimă prin

$$F(\boldsymbol{\varphi}(t)) = 0, \quad \forall\, t \in I. \tag{7.124}$$

Datorită faptului că atât F cât şi $\boldsymbol{\varphi}$ sunt funcţii diferenţiabile, rezultă că funcţia compusă $F \circ \boldsymbol{\varphi}$ este diferenţiabilă, deci derivabilă pe I şi ca atare vom avea

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_2'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_3'(t) = 0, \quad \forall\, t \in I. \tag{7.125}$$

Identitatea (7.125) arată că vectorul $(\boldsymbol{\nabla} F)(\boldsymbol{\varphi}(t))$ este ortogonal pe vectorul $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ care, după cum ştim este tangent la drumul parametrizat $\boldsymbol{\varphi}$ în punctul $M \in \mathbb{E}^3$ corespunzătoare valorii t a parametrului ceea ce înseamnă că $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{\varphi}(t)$. Pe de altă parte, ştim că toate tangentele în punctul M astfel încât $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ la respectiv toate drumurile parametrizate ce trec prin M şi sunt situate pe varietatea diferenţiabilă $(\mathcal{S})$ formează planul tangent în M la suprafaţă. Toate aceste rezultate conduc la următoarea definiţie.

Definiţia 7.7.6. *Vectorul $\mathbf{N} = (\boldsymbol{\nabla} F)(x, y, z)$ dat de (7.121), care este ortogonal pe vectorul tangent la orice drum neted situat pe varietatea diferenţiabilă $(\mathcal{S})$ ce conţine punctul $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$, se numeşte* **vectorul normalei** *la suprafaţă în punctul M.*

Definiţia 7.7.7. *Dacă funcţia reală diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$ satisface (7.28) şi punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este arbitrar din A, atunci varietatea bidimensională de ecuaţie carteziană explicită*

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \tag{7.126}$$

se numeşte **varietate de nivel**, *sau suprafaţă de nivel a funcţiei F corespunzătoare* **nivelului** $F(x_0, y_0, z_0)$.

Observaţia 7.7.3. *Vectorul normal la varietatea de nivel (7.126) în punctul $M(x, y, z)$ este (7.121).*

Definiţia 7.7.8. *Pentru fiecare punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ al vartietăţii de nivel (7.126), planul de ecuaţie*

$$(x - x_1)\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) + (y - y_1)\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1, z_1) + (z - z_1)\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 0, \tag{7.33}$$

se numeşte **plan tangent** *în punctul M_1 la varietatea de nivel (7.126).*

Definiţia 7.7.9. *Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ nu este netedă însă poate fi scrisă ca reuniune a unui număr finit de suprafeţe netede, atunci spunem că este suprafaţă netedă pe porţiuni.*

Să considerăm o suprafaţă netedă $(\mathcal{S})$ reprezentată printr–o pânză de forma (7.97), sau (7.99). Prin punctul M de vector de poziţie $\mathbf{r}(u,v)$ de pe $\operatorname{Im}\mathbf{S}$ trece o curbă parametrică $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),\ v=\ \text{const.}$, al cărei vector tangent în M este $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ şi o curbă parametrică $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),\ u=\ \text{const.}$, al cărei vector tangent în M este $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$. Un vector de mărime infinitezimală şi coliniar cu vectorul $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ este $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot du$ pe când un vector coliniar cu $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, de mărime infinitezimală, are forma $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\cdot dv$. Aceşti doi vectori de mărime infinitezimală determină un paralelogram de arie infinitezimală $d\sigma$ situat în planul tangent în M la suprafaţa $(\mathcal{S})$. Ne propunem să calculăm expresia lui $d\sigma$ când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată parametric prin ecuaţiile (7.97), sau prin ecuaţia vectorială (7.99) şi când este dată cartezian explicit prin ecuaţia (7.111). Pentru aceasta, ne folosim de interpretarea mărimii produsului vectorial a doi vectori necoliniari $\mathbf{a}\in I\!\!R^3$ şi $\mathbf{b}\in I\!\!R^3$ [7, p. 194]. Mărimea vectorului $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este aria paralelogramului din $I\!\!E^3$ care are două din laturile alăturate reprezentanţii celor doi vectori într–un punct oarecare al spaţiului. Din acest rezultat deducem $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\tau$, unde τ este unghiul cuprins între 0 şi π dintre cei doi vectori. Aplicând această formulă de calcul pentru $d\sigma$, găsim

$$(d\sigma)^2=\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\|^2\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\|^2\cdot\sin^2\tau(du)^2(dv)^2=$$
$$=\Big(\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\|^2\cdot\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\|^2-\Big(\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\|\cdot\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\|\cdot\cos\tau\Big)^2\Big)(du)^2(dv)^2,$$

în care am folosit identitatea $\sin^2\tau+\cos^2\tau=1$. Dacă ţinem cont că produsul scalar a doi vectori din $I\!\!R^3$ eşte egal cu produsul dintre mărimile vectorilor şi cosinusul unghiului dintre ei [7, p. 193] şi că pătratul normei (lungimii) unui vector este produsul scalar al acelui vector cu el însuşi, vedem că egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$d\sigma=\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}\,dudv, \tag{7.127}$$

în care s–au făcut notaţiile

$$\begin{cases} E(u,v) &= \|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\|^2=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)=\Big(\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)\Big)^2\\ F(u,v) &= \|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\|\,\|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\|\,\cos\tau=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)=\\ &= \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)+\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\\ G(u,v) &= \|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\|^2=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)=\Big(\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\Big)^2. \end{cases} \tag{7.128}$$

Observaţia 7.7.4. *Dată o suprafaţă netedă de ecuaţie vectorială* (7.99) *unde funcţia* $\mathbf{S}$ *ce o defineşte are matricea jacobiană* $J_{\mathbf{S}}(u,v)$, *constatăm că* $E(u,v)$ *este suma pătratelor elementelor primei coloane din* $J_{\mathbf{S}}(u,v)$, $F(u,v)$ *este suma produselor elementelor corespunzătoare de pe cele două coloane ale lui* $J_{\mathbf{S}}(u,v)$, *iar* $G(u,v)$ *este suma pătratelor elementelor celei de a doua coloane din* $J_{\mathbf{S}}(u,v)$.

Observaţia 7.7.5. *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată printr–o pânză netedă dată cartezian explicit prin* (7.111), *ţinând cont de* (7.113), *deducem* $J_{\mathbf{r}}(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\p&q\end{pmatrix}$, *unde am folosit notaţiile lui Monge*

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v),\qquad q=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Din Observaţia 7.7.4 şi Observaţia 7.7.5 rezultă

$$E(x,y) = 1 + p^2, \quad F(x,y) = pq, \quad G(x,y) = 1 + q^2. \tag{7.129}$$

Prin urmare putem spune că $d\sigma$ pentru suprafaţa netedă dată cartezian explicit prin ecuaţia (7.111) este

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy. \tag{7.130}$$

Definiţia 7.7.10. *Mărimea $d\sigma$ din (7.127), sau (7.130), se numeşte* **element de arie** *al suprafeţei $(\mathcal{S})$.*

Definiţia 7.7.11. *Funcţiile reale E, F, G (vezi (7.128) sau (7.129)) se numesc* **coeficienţii lui Gauss***, sau* **coeficienţii formei întâi fundamentale a suprafeţei netede** $(\mathcal{S})$.

Pentru a vedea semnificaţia formei întâi fundamentale a unei suprafeţe, considerăm un drum (o curbă) oarecare (γ) de pe suprafaţă care trece prin punctul $M(x, y, z)$ ale cărui coordonate sunt date de (7.97) unde $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$ şi calculăm elementul de arc ds al acestei curbe în punctul M. În primul rând ştim că $ds = \|d\mathbf{r}(u, v)\| = \sqrt{d\mathbf{r}(u, v) \cdot d\mathbf{r}(u, v)}$. Având în vedere că

$$d\mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)dv,$$

calculând pătratul scalar al acestei diferenţiale, considerată vector pentru perechea fixată (du, dv), şi ţinând cont de notaţiile (7.128) ajungem la concluzia

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2. \tag{7.131}$$

Membrul al doilea din (7.131) poate fi interpretat ca o formă pătratică în variabilele du şi dv. Din cele prezentate mai sus rezultă

$$E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) = \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)\|^2.$$

Dacă avem în vedere acum expresia analitică a produsului vectorial a doi vectori şi condiţia (7.102), deducem că această formă pătratică este pozitiv definită.

O altă noţiune, cu aplicabilitate practică, a teoriei suprafeţelor este noţiunea de *unghi* a două curbe de pe o suprafaţă netedă.

Definiţia 7.7.12. *Fie o suprafaţă netedă $(\mathcal{S})$, M_0 un punct al ei şi (γ_1), (γ_2) două curbe situate pe suprafaţa $(\mathcal{S})$ care trec prin punctul M_0. Dacă $\mathbf{c}_1$ şi $\mathbf{c}_2$ sunt vectorii tangenţi în M_0 la respectiv curbele (γ_1) şi (γ_2), atunci se numeşte* **unghiul în** M_0 *dintre curbele (γ_1) şi (γ_2) trasate pe suprafaţă, unghiul dintre vectorii $\mathbf{c}_1$ şi $\mathbf{c}_2$.*

Exerciţiul 7.7.1. *Fie suprafaţa*

$$(\mathcal{S}): \quad \mathbf{r} = (u\cos v + \sin v)\mathbf{i} + (u\sin v - \cos v)\mathbf{j} + (u - v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in I\!R^2.$$

Să se arate că în toate punctele suprafeţei există un plan tangent unic determinat, să se scrie ecuaţia vectorială, ecuaţiile parametrice şi ecuaţia carteziană implicită ale planului tangent la suprafaţă în punctul $M_0 \in (\mathcal{S})$ corespunzător perechei $(u_0, v_0) = (\dfrac{\pi}{3}, 0)$. Să se determine apoi coeficienţii lui Gauss şi prima formă fundamentală a suprafeţei $(\mathcal{S})$ într–un punct curent al ei $M(x, y, z)$.

Soluţie. Mai întâi să remarcăm că funcţia $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(I\!R^2, I\!R^3)$ care defineşte suprafaţa $(\mathcal{S})$ este diferenţiabilă, prin urmare $(\mathcal{S})$ este o suprafaţă netedă în $I\!R^3$. Apoi, matricea jacobiană a aplicaţiei $\mathbf{S}$ este

$$J_{\mathbf{S}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v + \cos v \\ \sin v & u\cos v + \sin v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pentru funcţiile $A, B, C,$ se găseşte: $A = -u\cos v - 2\sin v, \quad B = -u\sin v - 2\cos v, \quad C = u.$

Observăm că $A^2 + B^2 + C^2 = 2u^2 + 4 > 0, \quad \forall, (u,v) \in I\!R^2$, deci în orice punct al suprafeţei există un plan tangent unic determinat.

Ecuaţia vectorială a planului tangent în M_0 este $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\frac{\pi}{3}, 0) + (\mathbf{i},\, \mathbf{j},\, \mathbf{k})\Big(J_{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{3}, 0)\begin{pmatrix} t - \dfrac{\pi}{3} \\ s \end{pmatrix}\Big).$

Efectuând înlocuirile cerute, se găseşte $\mathbf{r} = \dfrac{\pi}{3}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \dfrac{\pi}{3}\mathbf{k} + (\mathbf{i},\, \mathbf{j},\, \mathbf{k})\begin{pmatrix} t - \dfrac{\pi}{3} + s \\ \dfrac{\pi}{3}s \\ t - s - \dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$

Egalând coordonatele corespunzătoare ale vectorilor din cei doi membri ai ecuaţiei vectoriale a planului tangent în punctul M_0, găsim că ecuaţiile parametrice ale acestuia sunt

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = \dfrac{\pi}{3} - 1 \\ z = t - s, \quad (t,s) \in I\!R^2. \end{cases}$$

Ecuaţia carteziană implicită a planului tangent în M_0 se obţine eliminând parametrii t şi s din ecuaţiile parametrice de mai sus. Se găseşte

$$\pi x - 6y - \pi z - 6 = 0.$$

Folosind Observaţia 7.7.4, determinăm coeficienţii lui Gauss:

$$E(u,v) = 2, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = 2 + u^2, \quad \forall\,(u,v) \in I\!R^2.$$

Atunci, forma întâia fundamentală a suprafeţei este $ds^2 = 2\,du^2 + (2 + u^2)\,dv^2$. ■

Exerciţiul 7.7.2. *Fie $\varphi : (a,b) \to I\!R$ o funcţie reală derivabilă, definită pe un interval deschis care nu conţine originea, şi suprafaţa $(\mathcal{S}) :\ z = x\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.*

Să se arate că planul tangent în orice punct al suprafeţei $(\mathcal{S})$ trece prin originea reperului din $I\!E^3$.

Soluţie. Dacă terna (X, Y, Z) reprezintă coordonatele unui punct oarecare al spaţiului $I\!E^3$, atunci ecuaţia planului tangent în punctul $M(x, y, x\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big))$ al suprafeţei $(\mathcal{S})$ este

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - (Z - f(x,y)) = 0, \tag{7.132}$$

unde, de data aceasta, (X, Y, Z) sunt coordonatele unui punct curent al planului (7.132), iar

$$f(x,y) = x\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.133}$$

Derivatele parţiale ale funcţiei f din (7.133) sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)-\frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big);\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big).\tag{7.134}$$

Înlocuind derivatele parţiale din relaţia (7.134) în ecuaţia planului tangent (7.132), găsim

$$\Big(\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)-\frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big)X+\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)Y-Z=0.\tag{7.135}$$

Deoarece coordonatele originii reperului, $(0,0,0)$, verifică ecuaţia (7.135), deducem că planul tangent în orice punct $M(x,y,z)\in(\mathcal{S})$ trece prin originea reperului . ■

Capitolul 8

Aplicaţii ale calculului diferenţial

8.1 Forme biliniare pe $I\!R^n$

Definiţia 8.1.1. *Se numeşte* ***formă biliniară*** *pe* $I\!R^n$, *funcţia reală* g *de două variabile vectoriale* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in I\!R^n$, *liniară în fiecare din argumentele sale.*

Din această definiţie rezultă că unei perechi arbitrare $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in I\!R^n \times I\!R^n$ îi corespunde numărul real $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, care are proprietăţile:

$$g(\mathbf{u}' + \mathbf{u}'', \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}'', \mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{v} \in I\!R^n; \tag{8.1}$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}' + \mathbf{v}'') = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}''), \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \in I\!R^n; \tag{8.2}$$

$$g(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall\, \lambda \in I\!R, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in I\!R^n; \tag{8.3}$$

$$g(\mathbf{u}, \mu \mathbf{v}) = \mu g(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall\, \mu \in I\!R, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in I\!R^n. \tag{8.4}$$

Egalităţile (8.1) şi (8.2) exprimă faptul că g este *funcţie aditivă* în argumentele sale, în timp ce (8.3) şi (8.4) arată că funcţia g este *omogenă* în ambele variabile.

Prin urmare, o funcţie definită pe un spaţiu vectorial este liniară în una din variabilele sale vectoriale daca este aditivă şi omogenă în acea variabilă.

Teorema 8.1.1. *Aplicaţia* $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ *este formă biliniară pe spaţiul Euclidian* $n-$*dimensional* $I\!R^n$ *dacă şi numai dacă ,* $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in I\!R$ *şi* $\forall\, \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \in I\!R^n$, *are loc egalitatea*

$$g(\lambda_1 \mathbf{u}' + \lambda_2 \mathbf{u}'', \mu_1 \mathbf{v}' + \mu_2 \mathbf{v}'') = \lambda_1 \mu_1 g(\mathbf{u}', \mathbf{v}') + \lambda_2 \mu_1 g(\mathbf{u}'', \mathbf{v}') + \lambda_1 \mu_2 g(\mathbf{u}', \mathbf{v}'') + \lambda_2 \mu_2 g(\mathbf{u}'', \mathbf{v}''). \tag{8.5}$$

Demonstraţie. Se folosesc Definiţia 8.1.1 şi egalităţile (8.1) – (8.4). **q.e.d.**

Teorema 8.1.2. *Funcţia* $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ *este formă biliniară pe* $I\!R^n$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi scalarii* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p,\ \mu_1, \mu_2, ..., \mu_q \in I\!R$ *şi vectorii* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p,\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_q \in I\!R^n$ *are loc egalitatea*

$$g\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j \mathbf{v}_j\Big) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j). \tag{8.6}$$

Demonstraţie. Se utilizează rezultatele precedente şi metoda inducţiei matematice în raport cu indicii de sumare $p \in I\!N^*$ şi $q \in I\!N^*$. **q.e.d.**

Observaţia 8.1.1. *Forma biliniară $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ este cunoscută dacă se cunoaşte valoarea acesteia în orice pereche de vectori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in I\!R^n \times I\!R^n$, adică dacă se cunoaşte numărul real $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.*

În baza acestei observaţii, să considerăm doi vectori oarecare $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in I\!R^n$ care, în baza oarecare $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!R^n$, au *expresiile analitice*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}U, \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}V, \tag{8.7}$$

unde

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \in \Big(I\!R^n\Big)^n = I\!R^n \times I\!R^n \times ... \times I\!R^n,$$

iar U şi V sunt matricele coloană ale coordonateleor vectorilor $\mathbf{u}$, respectiv $\mathbf{v}$, în baza $\mathcal{B}$.

Folosind (8.7) şi (8.6), deducem

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} u_i v_j, \tag{8.8}$$

unde s-au facut notaţiile

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{8.9}$$

Observaţia 8.1.2. *Valoarea formei biliniare $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ în perechea de vectori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in I\!R^n \times I\!R^n$ se poate scrie în una din formele:*

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = U^T G V, \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = V^T G^T U, \tag{8.10}$$

unde G este o matrice pătratică de ordinul n cu elemente numerele reale din (8.9), iar U^T, V^T, G^T sunt transpusele matricelor U, V, G, respectiv.

Definiţia 8.1.2. *Matricea pătratică G din (8.10), ale cărei elemente sunt date de (8.9), se numeşte **matricea formei biliniare** g în baza $\mathcal{B} \subset I\!R^n$.*

Observaţia 8.1.3. *Deoarece spaţiul liniar $I\!R^n$ are o infinitate de baze, rezultă că o formă biliniară pe $I\!R^n$ are o infinitate de matrice.*

Teorema 8.1.3. (**Legea de schimbare a matricei unei forme biliniare la o schimbare a bazei**) *Dacă $G = \|g_{ij}\|_{n\times n}$ şi $G' = \|g'_{ij}\|_{n\times n}$ sunt matricele formei biliniare $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ în respectiv bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ...\mathbf{e}'_n\}$ ale spaţiului vectorial $I\!R^n$, iar C este matricea pătratică de ordinul n, de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, atunci*

$$G' = C^T G C. \tag{8.11}$$

Demonstraţie. Legătura între bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ este dată de relaţia

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}C, \quad \mathbf{e}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n\} \in \left(I\!R^n\right)^n. \tag{8.12}$$

Expresia analitică a formei biliniare g în baza $\mathcal{B}'$ este

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g'_{ij} u'_i v'_j = U'^T G' V', \tag{8.13}$$

unde

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' U', \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v'_j \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}' V' \tag{8.14}$$

sunt expresiile analitice ale vectorilor $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Din (8.7), (8.12) şi (8.14) rezultă că legătura dintre U', V', pe de o parte, şi U, V este

$$U' = C^{-1}U, \quad V' = C^{-1}V, \tag{8.15}$$

unde C^{-1} este inversa matricei de trecere C.

Introducerea în (8.13) a expresiilor (8.15) ale lui U' şi V' conduce la

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = U^T\left((C^{-1})^T G' C^{-1}\right)V. \tag{8.16}$$

Din (8.10), (8.16) şi unicitatea matricei unei forme biliniare întro bazăm, rezultă

$$G = (C^{-1})^T G' C^{-1}, \tag{8.17}$$

din care deducem că legea de schimbare a matricei unei forme biliniare g la o schimbare a bazei de matrice C este dată de relaţia (8.11).

q.e.d.

Observaţia 8.1.4. *Matricele unei forme biliniare g pe $I\!R^n$ în baze diferite sunt* **echivalente**, *în sensul că au acelaşi rang.*

Definiţia 8.1.3. *Se numeşte* **rangul formei biliniare** $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R^n$ *rangul matricei sale intro bază a lui $I\!R^n$.*

Definiţia 8.1.4. *Forma biliniară $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ se numeşte* **degenerată** *dacă rangul ei este n şi* **nedegenerată** *dacă $r = rang\ g = rang\ G < n$.*

Rangul unei forme biliniare $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ fiind invariant la schimbarea bazei în $I\!R^n$, rezultă că există o bază $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ...\mathbf{e}'_n\} \subset I\!R^n$ în care matricea sa G' are forma diagonală

$$G' = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r, 0, ..., 0), \tag{8.18}$$

unde $\lambda_i \neq 0$. În această bază

$$g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \begin{cases} \lambda_j, & \text{pentru} \quad i = j \leq r, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{8.19}$$

Din (8.13), (8.18) şi (8.19) rezultă că expresia analitică a formei biliniare g în baza $\mathcal{B}'$ este

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \lambda_1 u_1' v_1' + \lambda_2 u_2' v_2' + ... + \lambda_r u_r' v_r', \tag{8.20}$$

unde vectorii arbitrari $\mathbf{u},\mathbf{v} \in I\!R^n$ au expresiile analitice (8.14) în baza $\mathcal{B}'$.

Definiţia 8.1.5. *Expresia* (8.20) *a formei biliniare* $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ *se numeşte* **expresie canonică** *a lui* g, *iar baza* $\mathcal{B}'$ *în care are loc această expresie canonică se numeşte* **bază canonică**.

Definiţia 8.1.6. *Forma biliniară* $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ *se numeşte* ***simetrică*** *dacă*

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{u}), \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in I\!R^n. \tag{8.21}$$

Observaţia 8.1.5. *Din* (8.9) *şi* (8.21) *rezultă că matricea unei forme biliniare simetrice pe* $I\!R^n$ *în orice bază din* $I\!R^n$ *este o matrice simetrică.*

8.2 Forme pătratice pe $I\!R^n$

Definiţia 8.2.1. *Aplicaţia* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *pentru care există o forma biliniară simetrică* $g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ *cu proprietatea*

$$\varphi(\mathbf{h}) = g(\mathbf{h},\mathbf{h}), \quad \forall\, \mathbf{h} = \mathbf{e}H \in I\!R^n, \tag{8.22}$$

se numeşte **formă pătratică** *pe* $I\!R^n$.

Aşadar, fiecărei forme biliniare simetrice pe $I\!R^n$ îi corespunde o formă pătratică φ pe $I\!R^n$, numită *forma pătratică asociată* lui g.

Reciproc, forma biliniară simetrică g este unic determinată de forma pătratică φ pe $I\!R^n$ prin

$$g(\mathbf{h},\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(\mathbf{h}+\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{s})\Big), \quad \forall\, \mathbf{h},\mathbf{s} \in I\!R^n. \tag{8.23}$$

Forma biliniară simetrică g definită de (8.23) se numeşte *forma polară* a formei pătratice φ pe $I\!R^n$.

Expresia analitică a formei pătratice h pe $I\!R^n$ asociată formei biliniare simetrice g în baza

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!R^n$$

se obţine din (8.10) punând $U = V = H$, deci

$$\varphi(\mathbf{h}) = H^T G H. \tag{8.24}$$

Matricea G din (8.24) este simetrică şi se numeşte *matricea formei pătratice* φ în baza $\mathcal{B} \subset I\!R^n$.

Reciproc, orice funcţie $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ pentru care există o bază $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ în care valorile $\varphi(\mathbf{h})$, cu $\mathbf{h} \in I\!R^n$, se exprimă prin relaţia (8.24), unde H este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{h}$ în baza $\mathcal{B}$, este o formă pătratică pe $I\!R^n$.

Observaţia 8.2.1. *Forma polară a formei pătratice* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$, *dată în baza* $\mathcal{B}$ *prin relaţia* (8.23), *este*

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{s}) = H^T G S = S^T G H,$$

unde

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}H, \quad \mathbf{s} = \mathbf{e}S$$

sunt expresiile analitice ale vectorilor $\mathbf{h}$ *şi* $\mathbf{s}$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Definiţia 8.2.2. *Se numeşte* **rangul formei pătratice** $\varphi : I\!R^n \to I\!R$, *rangul formei biliniare simetrice polare corespunzătoare.*

Definiţia 8.2.3. *Rangul formei pătratice* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *este rangul matricei sale în orice bază a spaţiului vectorial* $I\!R^n$.

Definiţia 8.2.4. *Forma pătratică* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *se numeşte* **nedegenerată** *dacă* $r = rang\ \varphi = n$ *şi* **degenerată**, *dacă* $r < n$.

Definiţia 8.2.5. *Dacă* G *este matricea formei pătratice* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *în baza* $\mathcal{B}$, *atunci numărul real* $D(G)$, *unde* $D(G)$ *este detertminantul matricei* G, *se numeşte* **discriminantul** *formei pătratice* φ.

Teorema 8.2.1. *Dacă* C *este matricea de trecere de la baza* $\mathcal{B}$ *la baza* $\mathcal{B}'$, *iar* G *şi* G' *sunt matricele formei pătratice* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *în bazele* $\mathcal{B}$ *şi respectiv* $\mathcal{B}'$, *atunci discriminantul lui* φ *se schimbă după legea*

$$D(G') = (D(C))^2 D(G). \tag{8.25}$$

Demonstraţie. Daca două matrice sunt egale, determinanţii acestora sunt egali, prin urmare, din (8.11) şi din faptul că determinantul produsului a două şi mai multe matrice este egal cu produsul determinanţilor acelor matrice, se obţine

$$D(G') = D(C^T) D(G) D(C). \tag{8.26}$$

Dar,

$$D(C^T) = D(C). \tag{8.27}$$

Din (8.26) şi (8.27) rezultă (8.25). **q.e.d.**

Observaţia 8.2.2. *Forma pătratică* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *este nedegenerată dacă discriminantul ei este nenul.*

Definiţia 8.2.6. *Se numeşte* **expresie canonică** *a formei pătratice*

$$\varphi : I\!R^n \to I\!R, \tag{8.28}$$

expresia analitică a sa în baza din $I\!R^n$ *în care forma biliniară polară corespunzătoare are expresie canonică.*

Definiţia 8.2.7. *Baza din* $I\!R^n$ *în care* (8.28) *are expresie canonică se numeşte* **bază canonică** *a lui* φ.

Din (8.20) şi (8.22), rezultă că expresia canonică a formei pătratice (8.28) este

$$\varphi(\mathbf{h}) = \lambda_1(h'_1)^2 + \lambda_2(h'_2)^2 + ... + \lambda_r(h'_r)^2, \tag{8.29}$$

unde $h'_1, h'_2, ..., h'_n$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{h}$ în baza canonică

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n\} \subset I\!R^n.$$

Definiţia 8.2.8. *Forma pătratică* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *se numeşte* **pozitiv** (**negativ**) **definită** *dacă* $\varphi(\mathbf{h}) > \mathbf{0}$ (*respectiv* $\varphi(\mathbf{h}) < \mathbf{0}$), *oricare ar fi vectorul* $\mathbf{h} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Definiţia 8.2.9. *Forma pătratică* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *se numeşte* **pozitiv** (**negativ**) **semidefinită** *dacă* $\varphi(\mathbf{h}) \geq \mathbf{0}$ (*respectiv* $\varphi(\mathbf{h}) \leq \mathbf{0}$), *oricare ar fi vectorul* $\mathbf{h} \in I\!R^n$ *dar, în ambele cazuri, există* $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ *cu proprietatea* $\varphi(\mathbf{h}) = 0$.

Observaţia 8.2.3. *Formele pătratice pozitiv* (*negativ*) *definite sunt nedegenerate.*

Definiţia 8.2.10. *Forma pătratică* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ *se numeşte* **nedefinită** *dacă există* $\mathbf{h}', \mathbf{h}'' \in I\!R^n$ *astfel încât* $\varphi(\mathbf{h}') < 0$ *şi* $\varphi(\mathbf{h}'') > 0$.

Teorema 8.2.2. *Fie* $\|g_{ij}\|_{n\times n}$ *o matrice pătratică simetrică cu elemente numere reale şi forma pătratică pozitiv definită* $\varphi : I\!R^n \to I\!R$

$$\varphi(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}h_ih_j,$$

unde $\mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n) \in I\!R^n$. *Atunci, există cosntanta pozitivă* m *astfel încât*

$$\varphi(\mathbf{h}) \geq m\|\mathbf{h}\|^2, \quad \forall\, \mathbf{h} \in I\!R^n. \tag{8.30}$$

Demonstraţie. Fie $S = \{\mathbf{y} \in I\!R^n : \|\mathbf{y}\| = 1\}$, sfera de rază 1 cu centrul în originea $\mathbf{0} \in I\!R^n$.

Deoarce S este mulţime închisă şi mărginită în $I\!R^n$, este o mulţime compactă în $I\!R^n$.

Funcţia $\varphi(\mathbf{y})$ fiind un polinom omogen de gradul doi în $y_1, y_2, ..., y_n$, coordonatele lui $\mathbf{y}$ în baza canonică, este mărginită pe S.

Dacă

$$m = \inf\{\varphi(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in S\}$$

este cea mai mică valoare a funcţiei φ pe sfera S, atunci există $\boldsymbol{\xi} \in S$ astfel încât $\varphi(\boldsymbol{\xi}) = m$.

Deoarece $\boldsymbol{\xi} \in S$, rezultă $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ şi, întrucât funcţia φ este pozitiv definită, avem $\varphi(\boldsymbol{\xi}) > 0$.

Prin urmare, $m > 0$.

Cum m este cea mai mică valoare pe care o poate lua φ pe S, rezultă

$$\varphi(\mathbf{y}) \geq m, \ \forall\, \mathbf{y} \in S. \tag{8.31}$$

Fie acum un vector $\mathbf{h} \in I\!R^n$, arbitrar.

Dacă $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, inegalitatea (8.30) este satisfăcută ca egalitate.

Dacă $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, atunci $\dfrac{1}{\|\mathbf{h}\|}\mathbf{h} \in S$ şi, după (8.31), rezultă

$$\varphi\left(\frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\mathbf{h}\right) \geq m, \quad \forall \quad \mathbf{x} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{8.32}$$

Deoarece φ este formă pătratică, avem

$$\varphi\left(\frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\mathbf{h}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|^2}\varphi(\mathbf{h}). \tag{8.33}$$

Din (8.32) şi (8.33, rezultă (8.30). **q.e.d.**

8.3 Extreme locale ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Fie $A \subset I\!R^n$, $f \in \mathcal{F}(A)$, o funcţie reală de variabila $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ un punct fixat din mulţimea A.

Definiţia 8.3.1. (i) $\mathbf{x}_0 \in A$ *se numeşte* **punct de minim** (*respectiv* **maxim**) **local** *pentru funcţia f, dacă există vecinătatea $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ (respectiv $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$), $\forall\, \mathbf{x} \in V \cap A$;*

(ii) $\mathbf{x}_0 \in A$ *se numeşte* **punct de minim** (*respectiv* **maxim**) **global** *al funcţiei f, dacă $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ (respectiv $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$), $\forall\, \mathbf{x} \in A$;*

(iii) $\mathbf{x}_0 \in A$ *se numeşte* **punct de minim** (*respectiv* **maxim**) **local strict** *pentru funcţia f, dacă există $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ astfel încât $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ (respectiv $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$), $\forall\, \mathbf{x} \in V \cap A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;*

(iv) $\mathbf{x}_0 \in A$ *se numeşte* **punct de maxim** (*respectiv* **minim**) **global strict** *al funcţiei f, dacă $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ (respectiv $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$), $\forall\, \mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;*

(v) *punctele de minim şi de maxim ale funcţiei f se numesc* **puncte de extrem** *ale funcţiei f.*

Observaţia 8.3.1. *Un punct $\mathbf{x}_0 \in A$ este punct de extrem local pentru funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$ dacă există o vecinătate*

$V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ pentru care creşterea funcţiei f corespunzătoare creşterii $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ a argumentului

$$\Delta f(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

păstrează semn constant pe $V \cap A$.

În cele ce urmează vom considera că $A = D$, unde D este o submulţime deschisă în $I\!R^n$.

Definiţia 8.3.2. *Un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ se numeşte* **punct critic**, *sau* **punct staţionar** *pentru funcţia f dacă f este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$ şi $df(\mathbf{x}_0) = 0$.*

Teorema 8.3.1. (**Teorema lui Fermat**[1]) *Dacă $\mathbf{x}_0 \in D$ este punct de extrem local al funcţiei $f : D \to I\!R$ şi f este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, atunci*

$$df(\mathbf{x}_0) = 0. \tag{8.34}$$

Demonstraţie. Fixăm arbitrar un versor $\mathbf{s} \in I\!R^n$ şi alegem $r > 0$ astfel încât $\Delta f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ să aibă semn constant pe bila $B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$. Atunci, funcţia reală de variabila reală $g : (-r, r) \to I\!R,\ g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s})$ este derivabilă şi are un extrem local în $t = 0$; conform teoremei lui Fermat pentru o funcţie reală de variabilă reală [19, p. 278] rezultă că $g'(0) = 0$, adică $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Luând $\mathbf{s} = \mathbf{e}_i,\ i \in \overline{1, n}$, deducem $\dfrac{df}{d\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}_0) = 0$, ceea ce înseamnă

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0,\ i \in \overline{1, n},$$

din care rezultă $df(\mathbf{x}_0) = 0$. **q.e.d.**

Corolarul 8.3.1. *Dacă $f : D \to I\!R$ este o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \in I\!R^n$, atunci punctele de extrem local ale lui f sunt printre soluţiile sistemului*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \tag{8.35}$$

situate în D.

Observaţia 8.3.2. *Este posibil ca $\mathbf{x}_0 \in D$ să fie punct de extrem pentru funcţia $f \in \mathcal{F}(D)$ fără ca f să fie diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$.*

[1] Fermat, Pierre (1601–1665), renumit matematician francez.

Exemplul 8.3.1. *Funcţia reală de variabilă vectorială*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^n), \quad f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|, \ \forall\, \mathbf{x} \in I\!R^n,$$

are $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ *punct de minim şi* f *nu este diferenţiabilă în origine.*

Într-adevăr, din axiomele normei observăm că $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{0}), \ \forall\, \mathbf{x} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, fapt care arată că $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ este punct de minim global strict pentru funcţia dată. Apoi, dacă f ar fi diferenţiabilă în origine ar însemna să existe funcţia reală $\alpha \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ cu proprietatea $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \alpha(\mathbf{x}) = 0$, astfel încât să avem

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + df(\mathbf{0}; \mathbf{x} - \mathbf{0}) + \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|, \ \forall\, \mathbf{x} \in I\!R^n.$$

Aceasta ar atrage după sine că funcţia f este derivabilă parţial în origine în raport cu toate variabilele sale ceea ce nu este adevărat pentru că, după cum constatăm cu uşurinţă, nu există limita în $t = 0$ a raportului incrementar $\dfrac{f(\mathbf{0} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{0})}{t}$, deoarece nu există $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|t|}{t}$. ■

Exerciţiul 8.3.1. *Fie Să se determine punctele critice ale funcţiei*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 20x.$$

Soluţie. Din faptul că funcţia f este un polinom rezultăcă este diferenţiabilă pe $I\!R^3$. Punctele critice ale funcţiei f au coordonatele (x, y, z), soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 20 = 0, \\ -2x + 2y - 4z = 0, \\ -4y + 2z = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are o singură soluţie (x_0, y_0, z_0), unde $x_0 = -\dfrac{15}{2}$, $y_0 = \dfrac{5}{2}$, $z_0 = 5$. Deci singurul punct critic este $M_0\left(-\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}, 5\right)$ care este posibil să fie punct de extrem. ■

Exemplul 8.3.2. *Pentru funcţia* $f : I\!R^2 \to I\!R$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, *de clasă* $C^\infty(I\!R^2)$, *sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

are o singură soluţie (x_0, y_0), *unde* $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, *iar punctul* $M_0(0, 0)$, *deci originea reperului, nu este punct de extrem.*

Într-adevăr, valoarea funcţiei f în origine este zero şi în orice vecinătate a originii există puncte de forma $(h, 0)$, $h \neq 0$ şi puncte de forma $(0, k)$, $k \neq 0$, în care funcţia f are valori de semne contrarii căci $f(h, 0) = h^2 > 0$, iar $f(0, k) = -k^2 < 0$, ceea ce arată că în originea reperului creşterea lui f nu poate păstra semn constant pentru nici o creştere a variabilelor independente. Deci, punctul staţionar M_0 nu este punct de extrem. ■

Observaţia 8.3.3. *Exemplul 8.3.1 arată că nu orice punct $\mathbf{x}_0 \in D$, soluţie a sistemului (8.35), este punct de extrem al funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$, adică nu orice punct staţionar este punct de extrem pentru funcţia reală f.*

Definiţia 8.3.3. *Un punct staţionar al funcţiei reale $f \in \mathcal{F}(D)$ care nu este punct de extrem se numeşte* **punct şa**.

Corolarul 8.3.1 arată că anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi reprezintă o condiţie necesară de extrem. În cele ce urmează vom da condiţii suficiente de extrem.

Teorema 8.3.2. (**Condiţie suficientă de extrem**) *Fie f o funcţie de clasă C^2 pe mulţimea deschisă D din $I\!R^n$ şi $\mathbf{x}_0$ un punct staţionar al funcţiei f.*

Dacă forma pătratică

$$\varphi(\mathbf{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j, \tag{8.36}$$

unde $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}H \in I\!R^n$, este:

1° *pozitiv (negativ) definită, atunci $\mathbf{x}_0$ este punct de minim (maxim) local strict;*

3° *nedefinită, atunci $\mathbf{x}_0$ nu este punct de extrem local;*

4° *pozitiv semidefinită, atunci $\mathbf{x}_0$ este punct de minim local;*

5° *negativ semidefinită, atunci $\mathbf{x}_0$ este punct de maxim local.*

Demonstraţie. Presupunem că forma pătratică (8.36) este pozitiv definită. Atunci luând $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ şi aplicând Teorema 8.3.1, avem:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \geq m\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2. \tag{8.37}$$

Pe de altă parte, deoarece $f \in C^2(D)$, putem să aplicăm formula lui Taylor cu rest de ordin unu. Prin urmare, pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ există un punct $\boldsymbol{\xi}_1 \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ aşa fel încât

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} df(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\boldsymbol{\xi}_1; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \tag{8.38}$$

Deoarece $\mathbf{x}_0$ este un punct critic al funcţiei f, avem $df(\mathbf{x}_0) = 0$, ceea ce implică $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$. Apoi, f fiind de clasă C^2 pe D, derivatele parţiale de ordinul al doilea ale lui f sunt continue în $\mathbf{x}_0$ şi deci

$$d^2 f(\boldsymbol{\xi}_1; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \theta(\mathbf{x})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2, \tag{8.39}$$

unde

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \theta(\mathbf{x}) = 0. \tag{8.40}$$

Folosind (8.39) în (8.38) şi având în vedere (8.37) şi Teorema 8.3.1, obţinem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{2}(m + \theta(\mathbf{x}))\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2. \tag{8.41}$$

Din $m > 0$ şi (8.40), rezultă că se poate găsi $r > 0$ astfel încât

$$m + \theta(\mathbf{x}) > 0, \ \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \setminus \{\mathbf{x}_0\}. \tag{8.42}$$

Atunci, din (8.41) şi (8.42), obţinem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \setminus \{\mathbf{x}_0\},$$

ceea ce arată că $\mathbf{x}_0$ este un punct de minim local strict pentru funcţia f.

Cazul punctului de maxim se tratează similar.

Dacă forma pătratică (8.36) este nedefinită, atunci există vectorii nenuli $\mathbf{h}', \mathbf{h}'' \in I\!R^n$ astfel încât

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}') = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}') - f(\mathbf{x}_0) > 0,$$
$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}'') = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}'') - f(\mathbf{x}_0) < 0,$$

deci creşterea lui f în $\mathbf{x}_0$ nu păstrează acelaşi semn, ceea ce arată că $\mathbf{x}_0$ nu este punct de extrem.

Dacă forma pătratică (8.36) este pozitiv (respectiv negativ) semidefinită, aceasta însemnând că pot exista $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ încât $d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{h}) = 0$, punctul $\mathbf{x}_0$ este tot punct de extrem dar nu mai este strict. **q.e.d.**

Definiţia 8.3.4. *Fie $A = \|a_{ij}\|_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$, o matrice pătratică de ordinul n cu elemente numere reale şi $I_n = \|\delta_{ij}\|_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ matricea unitate.*

(i) *Se numeşte* **polinom caracteristic** *al matricei A, polinomul*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n) = \det \|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}\|; \tag{8.43}$$

(ii) *Ecuaţia $P(\lambda) = 0$ se numeşte* **ecuaţia caracteristică** *a matricei A;*

(iii) *Rădăcinile ecuaţiei caracteristice a matricei A se numesc* **valori proprii** *ale matricei A.*

Dăm fără demonstraţie următoarele rezultate.

Teorema 8.3.3. *Toate valorile proprii ale unei matrice pătratice simetrice sunt numere reale.*

Teorema 8.3.4. *Dacă $H_f(x_0) = \left\| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right\|_{n\times n}$ are toate valorile proprii pozitive (respectiv negative,) forma pătratică (8.36) este pozitiv definită (respectiv negativ definită).*

Exerciţiul 8.3.2. *Să se determine extremele funcţiei*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x,y,z) = x^2 y + yz + 32x - z^2.$$

Soluţie. Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f au expresiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + 32, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y - 2z.$$

Coordonatele punctelor staţionare sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy + 16 = 0, \\ x^2 + z = 0, \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -8, \\ z_0 = -4. \end{cases}$$

Deci, singurul punct staţionar este $M_0(2, -8, -4)$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f, în punctul curent $M(x, y, z)$, sunt:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2y; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 2x; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 1; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -2. \end{array}$$

Hessiana asociată funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0 = (2, -8, -4)$ este

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{x}_0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rrr} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right\|$$

Polinomul caracteristic al matricei $H_f(\mathbf{x}_0)$ este

$$P(\lambda) = \det(H_f(\mathbf{x}_0) - \lambda I_3) = \left| \begin{array}{ccc} -16-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{array} \right| =$$

$$= -\lambda^3 - 18\lambda^2 - 15\lambda + 48.$$

Ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0$ nu poate avea toate rădăcinile nenegative deoarece

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -18 < 0.$$

Prin urmare, $\mathbf{x}_0$ nu este punct de extrem; este punct de tip şa. ■

Pentru forme pătratice pe $I\!R^n$ se cunosc şi alte condiţii necesare şi suficiente pentru ca acestea să fie pozitiv (negativ) definite. Aceste condiţii devin condiţii necesare şi suficiente pentru extremele locale stricte.

Teorema 8.3.5. (**Criteriul lui Sylvester**) *Forma pătratică* (8.36) *este:*

- *pozitiv definită dacă şi numai dacă minorii principali ai matricei hessiene $H_f(\mathbf{x}_0)$ sunt pozitivi, adică:*

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = f_{,11}(\mathbf{x}_0) > 0, \\ &\Delta_2 = \left| \begin{array}{cc} f_{,11}(\mathbf{x}_0) & f_{,12}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,21}(\mathbf{x}_0) & f_{,22}(\mathbf{x}_0) \end{array} \right| > 0, \\ &\Delta_3 = \left| \begin{array}{ccc} f_{,11}(\mathbf{x}_0) & f_{,12}(\mathbf{x}_0) & f_{13}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,21}(\mathbf{x}_0) & f_{,22}(\mathbf{x}_0) & f_{,23}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,31}(\mathbf{x}_0) & f_{,32}(\mathbf{x}_0) & f_{,33}(\mathbf{x}_0) \end{array} \right| > 0, \\ &\vdots \\ &\Delta_n = \det H_f(\mathbf{x}_0) > 0; \end{aligned} \tag{8.44}$$

- *negativ definită dacă şi numai dacă minorii principali (8.44) sunt de forma:*

$$\begin{vmatrix} f_{,11}(\mathbf{x}_0) & f_{,12}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{,1k}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,21}(\mathbf{x}_0) & f_{,22}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{,2k}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{,k1}(\mathbf{x}_0) & f_{,k2}(\mathbf{x}_0) & \vdots & f_{,kk}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = (-1)^k \lambda_k^2, \ k \in \overline{1,n}; \tag{8.45}$$

- *nedefinită dacă şi numai dacă nu are loc (8.44) dar* $\exists k \in \overline{1, n-1}$ *astfel încât* $\Delta_k \cdot \Delta_{k+1} > 0.$

Exerciţiul 8.3.3. *Să se studieze natura punctelor staţionare ale funcţiei*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y + 1.$$

Soluţie. Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei date sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + y - 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + x + 1; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z.$$

Sistemul care dă punctele staţionare ale funcţiei f este :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0, \\ 2z = 0, \end{cases}$$

şi are soluţia $(1, -1, 0)$.

Hessiana funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0 = (1, -1, 0)$ este

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{x}_0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

Minorii principali sunt: $\Delta_1 = 4, \ \Delta_2 = 3, \ \Delta_3 = 6,$ deci toţi pozitivi şi, în baza criteriului lui Sylvester, $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ este pozitiv definită, ceea ce arată că $M_0 = (1, -1, 0)$ este un punct de minim strict. Se constată că M_0 este punct de minim global strict deoarece $f(x,y,z) > f(1,-1,0) = 0$, $\forall\,(x,y,z) \in I\!R^3 \setminus \{(1,-1,0)\}$. ∎

Exerciţiul 8.3.4. *Să se găsească localizarea şi natura punctelor staţionare ale funcţiei*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 6xy.$$

Soluţie. Derivatele parţiale ale lui f sunt

$$\begin{cases} f_{,1}(x,y,z) &= 3x^2 - 3yz + 6y, \\ f_{,2}(x,y,z) &= 3y^2 - 3xz + 6x, \\ f_{,3}(x,y,z) &= 3z^2 - 3xy. \end{cases}$$

Punctele staţionare se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 - yz + 2y = 0, \\ y^2 - xz + 2x = 0, \\ z^2 - xy = 0. \end{cases}$$

Soluţiile acestui sistem sunt $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$ şi $\mathbf{x}_1 = (-1,-1,1)$. Calculând $H_f(\mathbf{0})$ găsim

$$H_f(\mathbf{0}) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

adică $d^2f(\mathbf{0}) = 12dxdy$, care se vede imediat că este nedefinită (pentru variaţii ale lui x şi y încât $dx \cdot dy > 0$ rezultă $d^2f(\mathbf{0}) > 0$ pe când dacă $dx \cdot dy < 0$ avem $d^2f(\mathbf{0}) < 0$), şi drept urmare punctul $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$ nu este punct de extrem; este punct şa.

Hessiana funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_1$ este

$$H_f(\mathbf{x}_1) = \left\| \begin{array}{rrr} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{array} \right\|.$$

Minorii principali ai acestei hessiene sunt:

$$\Delta_1 = -6 < 0;\ \Delta_2 = 27 > 0;\ \Delta_3 = 324 > 0.$$

Se vede că nu ne încadrăm în (8.44) şi $\Delta_2 \cdot \Delta_3 > 0$. Ca atare forma pătratică $d^2f(\mathbf{x}_1)$ este nedefinită şi deci $\mathbf{x}_1$ este tot punct şa. ∎

Prezentăm acum cazul $n = 2$, deci al unei funcţii reale f, de două variabile reale x şi y, de clasă C^2 pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^2$.

Se determină mai întâi punctele staţionare ale funcţiei $f \in \mathcal{F}(D)$ rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \end{cases} \tag{8.46}$$

Fie (x_0, y_0) o soluţie a sistemului (8.46).

Condiţiile lui Sylvester (8.44) sunt atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0, \tag{8.47}$$

în cazul minimului strict, iar cele din cazul maximului (8.45) sunt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0. \tag{8.48}$$

Din (8.47) şi (8.48) rezultă că punctul staţionar (x_0, y_0) este punct de extrem strict dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0. \tag{8.49}$$

Dacă în plus avem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, sau $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$, punctul staţionar (x_0, y_0) este punct de minim strict, iar dacă are loc (8.49) şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0,$$

punctul (x_0, y_0) este punct de maxim strict.

Dacă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Big)^2 < 0$$

rezultă că (x_0, y_0) nu este punct de extrem.

Dacă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Big)^2 = 0,$$

atunci natura punctului staţionar (x_0, y_0) se decide după investigaţii suplimentare care constau fie din evaluarea prin metode elementare a semnului diferenţei $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ într–o vecinătate a punctului (x_0, y_0), fie prin folosirea formulei lui Taylor cu rest de cel puţin ordin doi într–o vecinătate a punctului (x_0, y_0).

Exerciţiul 8.3.5. *Să se determine punctele staţionare şi natura acestora pentru funcţia reală de două variabile reale*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + 2xy - y^2 - 3y.$$

Soluţie. Derivatele parţiale de ordinele întâi şi doi ale funcţiei f sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 2y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2x - 2y - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x + 2, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2. \end{cases}$$

Sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0; \end{cases} \quad \text{este} \quad \begin{cases} xy + y = 0, \\ x^2 + 2x - 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

şi are soluţiile: $(1, 0),\ (-3, 0),\ (-1, -2)$. Apoi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)\Big)^2 = 0(-2) - 16 < 0,$$

ceea ce arată că $(1, 0)$ este punct şa;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3, 0) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-3, 0)\Big)^2 = -16 < 0$$

şi deci şi punctul $(-3, 0)$ este punct şa pentru funcţia f;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -2)\Big)^2 = (-4)(-2) - 0 > 0$$

şi pentru că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) < 0$ (ca şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) < 0$) tragem concluzia că $(-1, -2)$ este punct de maxim local. ■

Observaţia 8.3.4. *Fie $K \subset I\!R^n$ o mulţime compactă şi $f \in C^1(\overset{\circ}{K})$. Extremele globale ale funcţiei f pe mulţimea K sunt atinse în puncte din K.*

Punctele de extrem situate în $\overset{\circ}{K}$ se determină folosind teoria de mai sus.

Dacă punctele de extrem nu aparţin lui $\overset{\circ}{K}$, atunci ele se găsesc pe $K \setminus \overset{\circ}{K}$ şi pentru a le determina sunt necesare alte metode. Punctele de extrem ale funcţiei f care se află în mulţimea $K \setminus \overset{\circ}{K}$ se numesc **puncte de extrem condiţionat** *şi determinarea lor se face utilizând* **metoda multiplicatorilor** *a lui Lagrange care urmează să fie prezentată.*

8.4 Funcţii definite implicit

Fie $F_1, F_2, ..., F_m$ funcţii reale continue date, definite pe o submulţime deschisă D_0 a spaţiului Euclidian $I\!R^{n+m}$,

$$j = (j_1, j_1, ..., j_m) \tag{8.50}$$

un şir finit, dat, de numere întregi pozitive, cu proprietăţile

$$1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_m \leq n + m$$

şi

$$i = (i_1, i_1, ..., i_n) \tag{8.51}$$

un şir finit de numere întregi pozitive care nu apar în (8.50) şi pentru care

$$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq n + m.$$

Ne interesează în ce condiţii putem rezolva sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = 0, \end{cases} \tag{8.52}$$

în raport cu $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}$, deci când există funcţiile continue $f_1, f_2, ..., f_m$, definite pe o mulţime deschisă din $D \subset I\!R^n$, astfel încât dacă în (8.52) efectuăm înlocuirea

$$\begin{cases} x_{j_1} = f_1(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}), \\ x_{j_2} = f_2(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}), \\ \vdots \\ x_{j_m} = f_m(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}), \end{cases} \tag{8.53}$$

membrii întâi ai ecuaţiilor sistemului rezultat să devină nuli în orice punct $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}) \in D$.

Pentru a simplifica notaţia vom interpreta spaţiul $I\!R^{n+m}$ ca produsul (i, j) a spaţiilor $I\!R^n$ şi $I\!R^m$, ceea ce înseamnă că orice punct

$$(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) \in I\!R^{n+m} \tag{8.54}$$

îl vom nota prin

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{8.55}$$

unde

$$\mathbf{x} = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}), \quad \mathbf{y} = (y_{j_1}, y_{j_2}, ..., y_{j_m}). \tag{8.56}$$

În consecinţă, valoarea unei funcţii vectoriale $\mathbf{F}$ într-un punct de forma (8.55) se notează prin $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Simbolul $\mathbf{x}$ semnifică fie un punct din $I\!E^n$, fie un vector din $I\!R^n$, iar $\mathbf{y}$ desemnează un punct din $I\!E^m$, sau un vector din $I\!R^m$, coordonatele acestora fiind date de (8.56).

Notând

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_m), \tag{8.57}$$

constatăm că sistemul (8.52) poate fi scris în forma ecuaţiei vectoriale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \tag{8.58}$$

iar problema principală a acestui paragraf poate fi formulată după cum urmează.

Fie $\mathbf{F}$ din (8.57) o funcţie vectorială, continuă, definită pe mulţimea deschisă $D_0 \subset I\!R^{n+m}$ cu valori vectori din $I\!R^m$, sau puncte din $I\!E^m$. Ne punem problema în ce condiţii există transformarea continuă

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!R^m) \tag{8.59}$$

astfel încât

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in D, \tag{8.60}$$

unde $D \subset I\!R^n$ este o mulţime deschisă în $I\!R^n$.

Există funcţii $\mathbf{F}$ pentru care ecuaţia (8.58) nu are loc pentru nici un punct $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in D_0$. Este suficient să considerăm funcţia $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D_0, I\!R^m)$ a căror funcţii coordonate $F_1, F_2, ..., F_m$ din (8.57) să fie diferite de zero oriunde în D_0 şi atunci nu există nici o soluţie $\mathbf{f}$ a ecuaţiei (8.58). De aici deducem necesitatea existenţei a cel puţin unui punct $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \in D_0$ astfel încât $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$.

Această condiţie, inpreună cu alte condiţii simple de diferenţiabilitate impuse funcţiei $\mathbf{F}$, pot fi suficiente pentru existenţa unei transformări continue $\mathbf{f}$, de forma (8.59), definită pe o vecinătate D a lui $\mathbf{x}_0$, astfel încât să aibă loc (8.60), iar $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.

În acest sens, vezi Teorema 8.4.3 care urmează.

Definiţia 8.4.1. *Dacă $\mathbf{f}$ din (8.59) este unica funcţie ce satisface (8.58), atunci se spune că ecuaţia $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$* **defineşte implicit** *pe $\mathbf{y}$ ca funcţie de $\mathbf{x}$.*

Vom examina mai întâi cazul particular în care $\mathbf{F}$ din (8.57) este de forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{8.61}$$

unde $\mathbf{G}$ este o funcţie continuă definită pe mulţimea deschisă D_0, cu valori în $I\!R^m$.

Definiţia 8.4.2. *Spunem că funcţia $\mathbf{G} \in \mathcal{F}(D_0, I\!R^m)$ satisface* **condiţia Lipschitz**, *cu constanta $M \geq 0$,* **în raport cu coordonatele** *j, adică în raport cu variabila $\mathbf{y}$, dacă oricare ar fi perechile $(\mathbf{x},\mathbf{y}_1) \in D_0$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}_2) \in D_0$, avem*

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}_2)\| \leq M\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|. \tag{8.62}$$

În ambii membri ai lui (8.62) norma din $I\!R^m$ se consideră a fi cea euclidiană, adică cea indusă de produsul scalar standard (canonic) pe $I\!R^m$.

În teorema care urmează vom considera că $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ este un punct fixat din D_0.

Teorema 8.4.1. *Fie transformarea continuă $\mathbf{G} \in \mathcal{F}(A, I\!R^m)$, unde*

$$A = B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset I\!R^{n+m}.$$

Dacă $\mathbf{G} : A \to I\!R^m$ satisface condiţia Lipschitz cu constanta $M < 1$ în raport cu coordonatele j, iar numărul real $K = \sup\{\|G(\mathbf{x},\mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0\| : \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\}$ satisface inegalitatea

$$\frac{K}{1-M} < \varepsilon, \tag{8.63}$$

atunci există o transformare continuă $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ *astfel încât*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})), \ \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta).$$

Mai mult, pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, *punctul* $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ *este singurul punct din* $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ *astfel încât*

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{8.64}$$

şi deci $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ *este funcţia definită implicit de ecuaţia*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Demonstraţie. Mulţimea $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset I\!\!R^n$ este bila deschisă de rază $\delta > 0$ şi centrul în $\mathbf{x}_0 \in I\!\!R^n$, iar $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset I\!\!R^m$ este bila deschisă cu centrul în $\mathbf{y}_0 \in I\!\!R^m$ şi rază $\varepsilon > 0$. Ambele bile sunt mulţimi deschise în respectiv spaţiile normate (deci şi metrice) $(I\!\!R^n, \|\cdot\|)$ şi respectiv $(I\!\!R^m, \|\cdot\|)$. Normele în aceste spaţii, notate cu acelaşi simbol, pot fi diferite.

Condiţia (8.64) exprimă faptul că $\mathbf{y} \in I\!\!R^m$ este punct fix pentru aplicaţia $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\cdot) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \cdot) : I\!\!R^m \to I\!\!R^m$. Având în vedere că $I\!\!R^m$ este spaţiu Banach, deci spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de norma Euclidiană $\|\cdot\|$, vom demonstra că aplicaţia $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$ este o contracţie pe $I\!\!R^m$, după care vom aplica teorema de punct fix a lui Banach.

Într-adevăr, condiţia (8.62) împreună cu ipoteza $M < 1$ din enunţul teoremei exprimă faptul că $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$ este o contracţie pe $I\!\!R^m$ deoarece, pentru orice $\mathbf{y}_1 \in B(\mathbf{y}_0, \delta)$ şi $\mathbf{y}_2 \in B(\mathbf{y}_0, \delta)$, avem

$$\begin{aligned} d(\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_2)) &= \|\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_2)\| = \\ &= \|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \le M\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = M d(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \end{aligned} \tag{8.65}$$

unde $d(\cdot, \cdot)$ este metrica indusă de norma Euclidiană $\|\cdot\|$ din $I\!\!R^m$.

Deoarece $(I\!\!R^m, \|\cdot\|)$ este spaţiu metric complet, conform teoremei de punct fix a lui Banach, contracţia $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\cdot)$ are un punct fix unic determinat.

Vom arăta mai mult că punctul fix $\mathbf{y} \in I\!\!R^m$ al contracţiei $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\cdot)$ aparţine bilei deschise $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$.

În acest sens, construim şirul aproximaţiilor succesive $(\mathbf{g}_k)_{k \in I\!\!N}$ ale punctului fix $\mathbf{y} \in I\!\!R^m$, unde

$$\mathbf{g}_k : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon), \ k \in I\!\!N$$

şi

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0, \\ &\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{g}_k(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Din (8.65) rezultă că pentru $k \ge 1$ avem

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \le M\|\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x})\|,$$

din care deducem

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \le M^k\|\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})\| = M^k\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0\|.$$

În consecinţă,

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \le M^k \cdot K, \tag{8.66}$$

unde K este definit de (8.63).

Să arătăm acum că valorile funcţiilor $\mathbf{g}_k$ sunt în bila $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$.

Pentru aceasta, calculăm $d(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_0(\mathbf{x})) = d(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0) = \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|$. Din proprietăţile normei, avem: $d(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0)\| \le \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x})\| + ... \|\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|$. Dacă folosim (8.66), obţinem

$$\|(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| \le K(M^k + M^{k-1} + ... + M + 1) = K\frac{1 - M^{k+1}}{1 - M} < \frac{K}{1 - M} < \varepsilon. \tag{8.67}$$

Inegalitatea (8.67) arată că valorile funcţiilor $\mathbf{g}_k$ aparţin bilei $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$, cu alte cuvinte termenii şirului $(\mathbf{g}_k)_{k\geq 0}$ sunt funcţii mărginite.

Din definiţia lui $\mathbf{g}_k$ rezultă că aceste funcţii sunt continue pe $B(\mathbf{x}_0, \delta)$. Apoi, şirul de aplicaţii $(\mathbf{g}_k)_{k\geq 0}$ este şir fundamental în spaţiul normat complet al funcţiilor mărginite $\mathcal{B}\Big(B(\mathbf{x}_0, \delta), I\!R^m\Big)$ deoarece, folosind (8.66), avem

$$\|\mathbf{g}_{k+p}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{g}_{k+p}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{k+p-1}(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{g}_{k+p-1} - \mathbf{g}_{k+p-2}\| + ... + \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \leq$$
$$\leq K(M^{k+p-1} + M^{k+p-2} + ... + M^k) < \frac{K}{1-M}M^k,$$

din care deducem

$$\|\mathbf{g}_{k+p}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| < \frac{K}{1-M}M^k, \quad \forall p \in I\!N, \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta). \tag{8.68}$$

Rezultatul (8.68) demonstrează că şirul de funcţii continue $(\mathbf{g}_k)_{k\geq 0}$ este şir fundamental în spaţiul normat complet $\Big(\mathcal{M}(B(\mathbf{x}_0, \delta), I\!R^m), \|\cdot\|_{sup}\Big)$. (vezi Exemplul 3.5.3 şi Observaţia 3.5.10).

Deoarece orice şir fundamental într–un spaţiu metric complet este convergent, conform Teoremei 4.5.5, rezultă că şirul de funcţii continue $(\mathbf{g}_n)_{n\geq 0}$ este convergent la funcţia continuă $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to I\!R^m$.

Să calculăm acum $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|$. Din $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ şi intervertirea limitei cu metrica, deci cu norma, obţinem

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| = \|\lim_{k\to\infty} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \frac{K}{1-M} < \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon, \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta),$$

relaţie care arată că $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$, adică $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$.

Funcţia limită $\mathbf{g}$ este funcţia care satisface ecuaţia $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. În adevăr,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \lim_{k\to\infty} \mathbf{g}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

Trebuie să mai arătăm că pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, punctul $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ este singurul punct $\mathbf{y}$ din $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ astfel încât $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Demonstraţia acestei afirmaţii o vom face prin reducere la absurd. În acest sens, presupunem că au loc simultan egalităţile:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1); \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$$

Calculând norma diferenţei $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$, găsim

$$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = \|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \leq M\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|,$$

ceea ce conduce la relaţia

$$(1 - M)\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq 0.$$

Dar $1 - M > 0$, deci $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq 0$, de unde $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = 0$, adică $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$.

Aşadar, pentru orice $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ există cel mult un punct $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ care satisface ecuaţia $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Întrucât am arătat că punctul $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ satisface ecuaţia $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ şi apoi că $\mathbf{y}$ este singurul punct care verifică această ecuaţie, deducem că punctul fix al contracţiei $\mathbf{T}_\mathbf{x}$ este funcţia $\mathbf{g}$. **q.e.d.**

Teorema 8.4.2. *Fie* $\mathbf{G} = (G_1, G_2, ..., G_m)$ *o transformare continuă definită pe o mulţime deschisă* $D_0 \subset I\!R^{n+m}$

cu valori în $I\!R^m$, *de clasă* C^1 *în raport cu variabilele* j *şi fie* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D_0$. *Dacă*

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \quad 1 \le i \le m, 1 \le r \le m, \tag{8.69}$$

atunci există numerele $\delta > 0$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

(a) $A = B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_0$;

(b) *există o transformare continuă* $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ *cu proprietatea*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})), \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta); \tag{8.70}$$

(c) *transformarea* $\mathbf{g}$ *este singura funcţie definită pe* $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ *cu valori în* $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ *care satisface ecuaţia* (8.70), *adică* $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ *este funcţia definită implicit de ecuaţia*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Demonstraţie. Din continuitatea derivatelor parţiale $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}$ şi anularea acestora în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D_0$, rezultă că există numerele $\delta_0 > 0$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right| < \frac{1}{2m}; \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, \delta_0); \quad \mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon); \quad i, r = \overline{1, m}.$$

Mulţimea D_0 fiind deschisă, putem presupune că

$$B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_0, \tag{8.71}$$

iar dacă nu are loc această incluziune, înlocuim numerele δ_0 şi ε prin altele mai mici astfel încât (8.71) să aibă loc.

Din continuitatea funcţiei $\mathbf{G}$ şi condiţia $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0 = 0$ rezultă că există numărul pozitiv $\delta \le \delta_0$ astfel încât numărul $K = \sup\{\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0\| : \mathbf{x} \in B(\mathbf{y}_0, \delta)\}$ satisface inegalitatea

$$2K < \varepsilon. \tag{8.72}$$

Din această definiţie a lui δ, rezultă că incluziunea (a) are loc.

Să arătăm acum că restricţia funcţiei $\mathbf{G}$ la mulţimea $A = B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ satisface condiţia Lipschitz cu constantă $M = \dfrac{1}{2}$ în raport cu coordonatele j.

Considerând funcţia $G_i(\mathbf{x}, \cdot)$, de variabila $\mathbf{y}$, punctul $\mathbf{x}$ fiind fixat, şi aplicându–i teorema valorii medii (Teorema 7.4.2), deducem că pentru orice două puncte $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \in A$, există $0 < \theta < 1$ astfel încât

$$|G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)| = |dG_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2); \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)| =$$

$$= |(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} G_i)(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)| \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| {\cdot} \|(\nabla_{\mathbf{y}} G_i)(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\| =$$

$$= \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \sqrt{\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\right)^2} \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \sqrt{\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{4m^2}} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, \quad i \in \overline{1, m}.$$

În consecinţă, obţinem relaţiile $\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{m} (G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)^2} \le \dfrac{1}{2} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$ care arată că funcţia $\mathbf{G}_{/A}$ satisface condiţia Lipschitz cu constanta $M = \dfrac{1}{2}$.

Având în vedere (8.72) şi modul cum au fost alese numerele δ şi ε rezultă că mulţimea A şi $\mathbf{G}_{/A}$ satisfac ipotezele Teoremei 8.4.1.

Prin urmare, concluziile (b) şi (c) rezultă direct din Teorema 8.4.1. **q.e.d.**

Teorema 8.4.3. **(Teorema funcţiilor implicite)** *Fie* $\mathbf{F} : D_0 \to \mathbb{R}^m$ *o funcţie continuă pe mulţimea deschisă* $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$*, de clasă* C^1 *în raport cu coordonatele* j *şi* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *un punct din* D_0*. Dacă:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0; \tag{8.73}$$

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m})}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0, \tag{8.74}$$

atunci:

(a) *există numerele* $\delta > 0$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_0;$$

(b) *există o aplicaţie continuă* $\mathbf{f} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ *care are proprietăţile*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta), \tag{8.75}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0; \tag{8.76}$$

(c) *funcţia* $\mathbf{f}$ *este unica funcţie definită pe* $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ *cu valori în* $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ *care are proprietăţile* (b).

Demonstraţie. Să notăm pentru simplitate

$$\mathcal{U} = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right\|_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le r \le m}}.$$

Din ipoteza (8.74), determinantul lui $\mathcal{U}$ este diferit de zero şi deci matricea $\mathcal{U}$ este inversabilă.

Transformarea $\mathbf{G} : D_0 \to \mathbb{R}^m$ definită prin

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathcal{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

satisface ipotezele Teoremei 8.4.2. În adevăr, $\mathbf{G}$ este funcţie continuă, derivabilă parţial în raport cu variabilele $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}$ şi $\left\| \dfrac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\| = I_m - \mathcal{U}^{-1} \left\| \dfrac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|$, unde I_m este matricea unitate de ordin m. Ipotezele (8.69) ale Teoremei 8.4.2 sunt de asemenea satisfăcute fiindcă, în baza lui (8.73), $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 - \mathcal{U}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$ şi $\left\| \dfrac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right\| = I_m - \mathcal{U}^{-1} \cdot \mathcal{U} = I_m - I_m = 0.$

Ipotezele Teoremei 8.4.2 fiind îndeplinite, rezultă că există numerele $\delta > 0$ şi $\varepsilon > 0$ şi o transformare continuă $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ care satisface concluziile $(a), (b)$ şi (c) ale Teoremei 8.4.2.

Pe de altă parte, condiţia (a) din Teorema 8.4.2 este identică cu condiţia (a) din Teorema 8.4.3. Mai mult, (8.75) şi condiţia (c) din Teorema 8.4.3 sunt respectiv echivalente cu condiţiile (b) şi (c) din Teorema 8.4.2. Această afirmaţie rezultă din faptul că ecuaţia $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ are loc dacă şi numai dacă are loc ecuaţia $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Într-adevăr, prima ecuaţie are loc dacă şi numai dacă $\mathcal{U}^{-1}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$. Înmulţind această ecuaţie cu $\mathcal{U}$ la stânga, deducem că ecuaţia $\mathbf{y}=\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ are loc dacă şi numai dacă $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$.

Astfel, am demonstrat că numerele δ,η şi funcţia $\mathbf{f}=\mathbf{g}$, unde $\mathbf{g}$ este funcţia din Teorema 8.4.2, satisfac condiţiile (a) şi (c) din Teorema 8.4.3, precum şi identitatea (8.75).

Deoarece, pentru $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$, punctele $\mathbf{y}_0$ şi $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ sunt soluţii ale ecuaţiei $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y})=\mathbf{0}$, (vezi $(8.73)_1$ şi (8.75) în care $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$), din condiţia (c) a Teoremei 8.4.3 rezultă că $\mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, adică (8.76) este adevărată. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Teorema 8.4.3 poate fi reformulată în funcţie de coordonatele funcţiilor vectoriale care intervin.

Teorema 8.4.4. (**Teorema funcţiilor implicite reformulată**) *Presupunem că:*

(α) $F_1,F_2,...,F_m$ *sunt funcţii reale continue pe mulţimea deschisă* $D_0\subset I\!R^{n+m}$;

(β) *există un punct*

$$(x_{01},x_{02},...,x_{0;n+m})\in D_0 \tag{8.77}$$

ale cărui coordonate satisfac toate ecuaţiile (8.52);

(γ) *derivatele parţiale* $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}$, $i\in\overline{1,m}, r=\overline{1,n}$ *sunt continue pe* D_0;

(δ) *jacobianul* $\dfrac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_m})}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{j_1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{j_m}}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{j_1}} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{j_m}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{j_1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{j_m}}\end{vmatrix}$

nu se anulează în punctul (8.77).

În aceste ipoteze, într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0\in I\!R^n$ *există funcţiile*

$$\begin{cases} x_{j_1}=f_1(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_n}),\\ x_{j_2}=f_2(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_n}),\\ \vdots\\ x_{j_m}=f_m(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_n}),\end{cases}$$

care constituie o soluţie a sistemului de ecuaţii (8.52) *ce satisface următoarele condiţii numite* ***condiţii iniţiale***

$$\begin{cases} f_1(x_{0i_1},x_{0i_2},...,x_{0i_n})=x_{0j_1},\\ f_2(x_{0i_1},x_{0i_2},...,x_{0i_n})=x_{0j_2},\\ \vdots\\ f_m(x_{0i_1},x_{0i_2},...,x_{0i_n})=x_{0j_m}.\end{cases}$$

Prezentăm acum câteva cazuri particulare ale Teoremei 8.4.3 şi Teoremei 8.4.4 care apar cel mai adesea în aplicaţiile practice.

A. Funcţia reală de variabilă reală definită implicit de ecuaţia

$$F(x,y)=0,\quad (x,y)\in D_0,\quad \text{unde}\quad D_0\subset I\!\!R^2.$$

Această situaţie corespunde cazului $n=m=1$.

Pentru orice funcţie reală F de variabilele reale x şi y, definită pe o mulţime deschisă $D_0\subset I\!\!R^2$, de clasă $C^1(D_0)$, dacă

$$F(x_0,y_0)=0\quad \text{şi}\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0,$$

unde $(x_0,y_0)\in D_0$, atunci există o unică funcţie reală f de variabilă reală x, definită şi continuă pe o vecinătate a lui $x_0\in I\!\!R$ de forma $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, care satisface (8.75) şi (8.76).

Funcţia f se numeşte *funcţie reală de variabilă reală definită implicit de ecuaţia* $F(x,y)=0$, $(x,y)\in D_0$.

B. Funcţia reală de n variabile reale definită implicit de ecuaţia

$$F(x_1,x_2,...,x_n;y)=0.$$

În acest caz avem: $m=1$; $i_k=k$; $k\in\overline{1,n}$; $x_{j_1}=y$.

Dacă funcţia reală F de varibilele reale $x_1,x_2,...,x_n$ şi y, de clasă $C^1(D_0)$, unde $D_0\subset I\!\!R^{n+1}$, satisface condiţiile

$$F(x_{01},x_{02},...x_{0n};y_0)=0\quad \text{şi}\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_{01},x_{02},...x_{0n};y_0)\neq 0,$$

atunci există o unică funcţie reală f de variabilele reale $x_1,x_2,...,x_n$, definită pe o bilă deschisă $B(\mathbf{x}_0,\delta)\subset I\!\!R^n$, $\mathbf{x}_0=(x_{01},x_{02},...x_{0n})$, cu valori în intervalul $(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$, care are proprietăţile $f(\mathbf{x}_0)=y_0$ şi

$$F(x_1,x_2,...,x_n;f(x_1,x_2,...,x_n)=0,\quad \forall\,\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in B(\mathbf{x}_0,\delta).$$

C. Cazul $n=1$ şi $m=2$.

Dacă funcţiile reale arbitrare F_1,F_2, de variabilele reale x,y şi z sunt de clasă $C^1(D_0)$, unde $D_0\subset I\!\!R^3$, şi

$$\begin{aligned}
F_1(x_0,y_0,z_0) &= 0,\\
F_2(x_0,y_0,z_0) &= 0,\\
\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(x_0,y_0,z_0) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{vmatrix}\neq 0,
\end{aligned}$$

atunci există în mod unic funcţiile f_1 şi f_2 de variabila reală x, definite pe o vecinătate de forma $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, cu valori într-un disc centrat în punctul (y_0,z_0), de rază $\varepsilon>0$, astfel încât:

$$\begin{cases} F_1(x,f_1(x),f_2(x)) = 0,\\ F_2(x,f_1(x),f_2(x)) = 0,\quad \forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta);\end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_0)=y_0,\\ f_2(x_0)=z_0.\end{cases}$$

Sistemul de funcţii

$$\begin{cases} y=f_1(x),\\ z=f_2(x),\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\end{cases}$$

se numeşte **sistem de două funcţii reale de o variabilă reală definite implicit de sistemul de ecuaţii**

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

D. Cazul $m = n = 2.$ (**Sistem de două funcţii reale de două variabile reale definit implicit de sistemul de ecuaţii**)

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) &= 0, \\ F_2(x,y,u,v) &= 0. \end{cases} \tag{8.78}$$

Dacă funcţiile reale de patru variabile reale x, y, u şi v, $F_1,\ F_2$, de clasă $C^1(D_0)$, unde $D_0 \subset I\!R^4$, satisfac condiţiile:

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0, \\ F_2(x_0,y_0,u_0,v_0); \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x_0,y_0,u_0,v_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x_0,y_0,u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x_0,y_0,u_0,v_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x_0,y_0,u_0,v_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci există în mod unic funcţiile reale f_1, f_2, de variabilele reale x şi y, definite pe discul $B((x_0,y_0),\delta)$ cu centrul în punctul $(x_0,y_0) \in I\!R^2$ şi rază δ, cu valori în discul cu centrul în $(u_0,v_0) \in I\!R^2$ de rază $\varepsilon > 0$, astfel încât:

$$\begin{cases} F_1(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) &= 0, \\ F_2(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) &= 0, \quad \forall\,(x,y) \in B(x_0,y_0),\delta); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_0,y_0) &= u_0, \\ f_2(x_0,y_0) &= v_0. \end{cases}$$

În acest caz sistemul de funcţii

$$\begin{cases} u = f_1(x,y), \\ v = f_2(x,y), \ \ (x,y) \in B(x_0,y_0),\delta) \end{cases}$$

se numeşte **sistem de funcţii reale de două variabile reale definite implicit de sistemul de ecuaţii** (8.78).

Recomandăm cititorului să considere şi alte cazuri particulare. ■

Teorema 8.4.5. (**Derivabilitatea funcţiilor implicite**) *Fie* $\mathbf{F} : D_0 \to I\!R^m$ *o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă* $D_0 \subset I\!R^{n+m}$ *cu proprietatea*

$$\frac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_m})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq 0,\ \ \forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in D_0 \tag{8.79}$$

şi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, *funcţia continuă definită pe o mulţime deschisă* $D \subset I\!R^n$ *cu valori cu* $I\!R^n$ *astfel încât* $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0},\ \forall\,\mathbf{x} \in D.$

Dacă $\mathbf{F} \in C^1(D_0)$, *atunci* $\mathbf{f} \in C^1(D)$ *şi*

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -J^{-1}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \forall\,\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta), \tag{8.80}$$

unde

$$J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \right\|_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le r\le m}},\ \ J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_{i_s}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \right\|_{\substack{1\le k\le m \\ 1\le s\le n}},$$

sau, după egalarea elementelor corespunzătoare ale celor două matrice,

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_{i_s}}(\mathbf{x}) = -\frac{\dfrac{D(F_1,\ F_2,\ ...,\ F_m)}{D(x_{j_1},...,\partial x_{j_{r-1}},\partial x_{i_s},\partial x_{j_{r+1}},...,\partial x_{j_m})}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))}{\dfrac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_m})}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))}, \tag{8.81}$$

$\forall\,\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta),\quad r \in \overline{1,m},\quad s \in \overline{1,n}.$

Dacă $\mathbf{F} \in C^p(D_0)$, *atunci* $\mathbf{f} \in C^p(B(\mathbf{x}_0,\delta).$

Demonstraţie. Fie $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ un punct fixat în D_0. Să evaluăm creşterea $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Avem mai întâi

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), F_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), ..., F_m(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Din Definiţia 7.1.6 rezultă că funcţiile coordonate sunt de clasă C^1 pe D_0 şi, conform Teoremei 7.4.2, pentru fiecare F_i putem scrie

$$F_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_i((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \theta_i(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

unde $0 < \theta_i < 1,\ i \in \overline{1, m}$ şi

$$dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta_i(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \in L(I\!R^{n+m}, I\!R) = (I\!R^{n+m})^*.$$

Din faptul că $F_i \in C^1(D_0)$, deducem

$$dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta_i(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T_i,\ i \in \overline{1, m}$$

unde $dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este diferenţiala lui F_i în punctul $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, iar $T_i \in L(I\!R^{n+m}, I\!R)$ are proprietatea

$$\lim_{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \to (\mathbf{x}, \mathbf{y})} T_i = O,$$

unde O este forma liniară nulă pe $I\!R^{n+m}$.

Având în vedere că

$$(dF_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), dF_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), ..., dF_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

rezultă că

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{T})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}), \tag{8.82}$$

unde $\mathbf{T} \in L(I\!R^{n+m}, I\!R^m)$, iar $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_m)$.

De asemenea, avem

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

$$T(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = U(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + V(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

unde U şi $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aparţin spaţiului liniar $\mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^m)$, al operatorilor liniari definiţi pe $I\!R^n$, cu valori în $I\!R^m$, iar V şi $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sunt din $\mathcal{L}(I\!R^m, I\!R^m)$.

Matricea operatorului liniar $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ în perechea de baze canonice din $I\!R^n$ şi $I\!R^m$ este $J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, iar cea a operatorului $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ în baza canonică din $I\!R^m$ este $J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

În plus, matricele operatorilor U şi V în aceleaşi baze au proprietatea că tind la zero, în sensul că toate elementele lor tind la zero, când $\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x}$ şi $\tilde{\mathbf{y}} \to \mathbf{y}$.

În acest fel, diferenţa (8.82) se scrie în forma

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Big(d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U\Big)(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \Big(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V\Big)(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}). \tag{8.83}$$

Fie acum $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ fixat şi $\mathbf{h}$ un vector arbitrar din $I\!R^n$. Există intervalul $I = \left(-\dfrac{\delta}{\|\mathbf{h}\|}, \dfrac{\delta}{\|\mathbf{h}\|}\right)$ din $I\!R$ astfel încât $\mathbf{x} + t\mathbf{h} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, $\forall\, t \in I$. Considerăm de asemenea că $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$, $\bar{\tilde{x}} = \mathbf{x} + t\mathbf{h}$ şi $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$. Atunci, $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, iar (8.83) devine

$$(d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U)(t\mathbf{h}) + (d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V)(\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}. \tag{8.84}$$

Deoarece $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este operator inversabil la fel va fi şi $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V$, deci există $(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V)^{-1}$. Efectuând compunerea membrului stâng al lui (8.84) cu operatorul $(d_y\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V)^{-1}$, obţinem:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + V)^{-1} \circ (d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + U)(t\mathbf{h}). \tag{8.85}$$

Dacă în (8.85) luăm pe rând pe $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$, $i \in \overline{1,n}$, unde $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ este baza canonică din $I\!R^n$, împărţim ambii membri prin t şi trecem apoi la limită pentru $t \to 0$, constatăm că raportul $\dfrac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}$ are limită în $t = 0$ şi aceasta este

$$-\Big(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}\circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_i).$$

Prin urmare, $\mathbf{f}$ este derivabilă parţial şi

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\Big(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}\circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_i), \quad i\in\overline{1,n}. \tag{8.86}$$

Din (8.86) deducem că $\mathbf{f} \in C^1(B(\mathbf{x}_0,\delta)$, iar din (8.85) rezultă că $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}$ şi

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\Big(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}\circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})). \tag{8.87}$$

Din (8.87) rezultă că matricele aplicaţiilor liniare din cei doi membri în bazele canonice din $I\!R^n$ şi $I\!R^m$ sunt egale.

Matricea operatorului liniar $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$ în perechea de baze canonice $\mathcal{B}\subset I\!R^n$ şi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\}\subset I\!R^m$ este $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$.

Matricea operatorului liniar $\Big(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}$ în baza canonică $\mathcal{B}'$ din $I\!R^m$ este inversa matricei operatorului liniar $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ în aceeaşi bază. Desigur, matricea operatorului liniar $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ este $J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$.

În sfârşit, matricea operatorului $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ în perechea de baze $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ este $J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ care este o matrice de tipul (m,n).

Folosind acum Teorema 4.10.1, din (8.87), deducem

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -\Big(J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})\Big)^{-1}_{m\times m}\cdot J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))_{m\times n},$$

care este tocmai (8.80).

Demonstraţia ultimei afirmaţii a teoremei se face prin inducţie.

Cazul $p = 1$ a fost demonstrat mai sus.

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $p-1$. Dacă $\mathbf{F}\in C^p(D_0)$, atunci se poate demonstra că (vezi [24, p. 184]) $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})$ şi $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sunt de clasă C^{p-1} ceea ce duce la concluzia că membrul drept al lui (8.80) este de clasă C^{p-1} pe bila $B(\mathbf{x}_0),\delta)$. Având acest rezultat şi ţinând cont de (8.87), putem afirma că $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ este de clasă C^{p-1} pe bila $B(\mathbf{x}_0),\delta)$. Aceasta demonstrează că $\mathbf{f}\in C^p\Big(B(\mathbf{x}_0),\delta)\Big)$.

Cu notaţiile obişnuite ale analizei , formula (8.81) poate fi scrisă în forma

$$\frac{\partial x_{j_r}}{\partial x_{i_s}} = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(x_{j_1},...,\partial x_{j_{r-1}},\partial x_{i_s},\partial x_{j_{r+1}},...,\partial x_{j_m})}}{\dfrac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_m})}}, \tag{8.88}$$

unde $\dfrac{\partial x_{j_r}}{\partial x_{i_s}}$ este derivata parţială de ordinul întâi a funcţiei

$$x_{j_r} = f_r(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_n}), \quad r=\overline{1,m},$$

în raport cu variabila x_{i_s}, $s\in\overline{1,n}$. **q.e.d.**

Să scriem acum formula (8.82) în cazurile particulare **A** – **D**.

A. Dacă $y = f(x)$ este funcţia reală de variabila reală x definită implicit de ecuaţia $\mathbf{F}(x, y) = 0$, atunci (8.82) se scrie în forma

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))},$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

B. Dacă $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este funcţia reală de mai multe variabile reale, definită implicit de ecuaţia $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n))}, \quad i \in \overline{1, n},$$

sau

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

C. Dacă funcţiile F_1, F_2 satisfac ipotezele Teoremei 8.4.3 şi Teoremei 8.4.5 pe mulţimea deschisă $D \in I\!R^3$ şi funcţiile reale f_1 şi f_2, de variabila reală x, sunt definite implicit de sistemul de ecuaţii $\begin{cases} F_1(x; y, z) = 0, \\ F_2(x; y, z) = 0, \end{cases}$ atunci:

$$f_1'(x) = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}}(x, f_1(x), f_2(x)) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}(x, f_1(x), f_2(x));$$

$$f_2'(x) = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, x)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}}(x, f_1(x), f_2(x)) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}(x, f_1(x), f_2(x)),$$

sau:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}.$$

D. Dacă funcţiile $F_1, F_2 \in C^1(D)$, unde D este o mulţime deschisă din $I\!R^4$, satisfac în plus ipotezele (8.73) şi funcţiile $u = f_1(x,y)$, $v = f_2(x,y)$ sunt definite implicit de sistemul de ecuaţii $\begin{cases} F_1(x,y,u,v) = 0, \\ F_2(x,y,u,v) = 0, \end{cases}$ atunci:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) \end{vmatrix}},$$

sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}; \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

În partea finală a acestui paragraf vom considera că funcţia $\mathbf{F}$ ia valori în spaţiul $I\!R^s$, unde $s \geq m$.

Teorema 8.4.6. *Fie $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_s)$ o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $D_0 \subset I\!R^{n+m}$ astfel încât*

$$\text{rang}\, J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = m, \quad \forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in D_0, \quad s \geq m \tag{8.89}$$

şi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ transformarea continuă definită pe o mulţime deschisă $D \subset I\!R^n$ cu valori în $I\!R^m$, care are proprietăţile:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in D_0; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{8.90}$$

Dacă $\mathbf{F} \in C^1(D_0)$, atunci $\mathbf{f} \in C^1(D)$ şi

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -\Big(J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1} \cdot J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})). \tag{8.91}$$

Dacă $\mathbf{F}$ este de clasă $C^p(D_0)$, atunci $\mathbf{f}$ este de clasă $C^p(D)$.

Demonstraţie. Să remarcăm mai întâi că diferenţa între ultimele două teoreme constă în aceea că în cazul celei din urmă numărul s al coordonatelor lui $\mathbf{F}$ este mai mare decât numărul m al coordonatelor lui $\mathbf{y}$. Atunci, matricea $J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este dreptunghiulară de tipul (s,m), deci nu are inversă, astfel că formula (8.80) nu are sens pentru $s > m$.

Dacă $s = m$, ipoteza (8.79) este identică cu (8.89) şi formula (8.80) este identică cu (8.91) deoarece $J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este matrice pătratică de tipul (m,m), iar $\Big(J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1} = J^{-1}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \Big(J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}$.

În consecinţă,

$$\Big(J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}\cdot J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))=$$

$$=J^{-1}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot\Big(J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\Big)^{-1}\cdot J^{\top}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))=J^{-1}_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Pentru a demonstra Teorema 8.4.6, fie $\mathbf{x}_0$ un punct fixat din D. Din (8.89) rezultă că există $r_1, r_2, ..., r_m$ cu $1\le r_1<r_2<...<r_m\le s$ astfel încât jacobianul

$$\frac{D(F_{r_1},F_{r_2},...,F_{r_m})}{D(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_m})}(\mathbf{x}_0,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\neq 0.$$

Dacă notăm

$$\tilde{\mathbf{F}}=(F_{r_1},F_{r_2},...,F_{r_m}),$$

ultima afirmaţie se scrie echivalent în forma

$$\det J_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))=\det\left\|\frac{\partial F_{r_i}}{\partial x_{j_s}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\right\|_{\substack{1\le i\le m\\1\le s\le m}}\neq 0.$$

Din (8.90) şi definiţia lui $\tilde{\mathbf{F}}$, rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{0},\ \forall\,\mathbf{x}\in D.$$

Înlocuind mulţimea D_0 din Teorema 8.4.5 prin mulţimea deschisă $D_0'=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_0:\det J_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\neq 0\}$ şi mulţimea deschisă D, din aceeaşi teoremă, prin mulţimea deschisă $D'=\{\mathbf{x}\in D:(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\in D_0'\}$ care conţine punctul $\mathbf{x}_0$ şi, de asemenea, înlocuind $\mathbf{F}$ prin $\tilde{\mathbf{F}}$, iar $\mathbf{f}$ prin $\mathbf{f}/D'$, din Teorema 8.4.5 deducem că dacă $\mathbf{F}$ este de clasă C^p, restricţia lui $\mathbf{f}$ la D' este, de asemenea, de clasă C^p.

Cu alte cuvinte, am demonstrat că dacă $\mathbf{F}$ este de clasă C^p, atunci $\mathbf{f}$ este de clasă C^p pe o vecinătate D' a oricărui punct $\mathbf{x}_0\in D$, cee ce arată că $\mathbf{f}$ este funcţie de clasă $C^p(D)$.

Pentru a demonstra (8.91) să observăm că dacă $\mathbf{F}$ este funcţie de clasă C^1, atunci aplicaţia $\mathbf{G}:D\to D_0$ definită prin $\mathbf{G}(\mathbf{x})=(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ este, de asemenea, de clasă $C^1(D)$.

În consecinţă, în baza Corolarului 7.4.1, avem

$$J_{\mathbf{F}\circ\mathbf{G}}(\mathbf{x})=J_{\mathbf{F}}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))\cdot J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}).\tag{8.92}$$

Constatăm că expresia din membrul drept al lui (8.92) este egală cu

$$J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))+J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}).\tag{8.93}$$

Pe de altă parte, în baza lui (8.90) avem $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}=0$. Folosind acest rezultat constatăm că matricea din (8.93) este egală cu matricea nulă de unde deducem

$$J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})=-J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Să prezentăm acum următorul rezultat al calculului matriceal [24, p. 62]:

Dacă U este o matrice dreptunghiulară de tipul (s,m) astfel încât

$$\det U^{\top}U\neq 0,$$

B este o matrice de tipul (m,n) şi $C=U\cdot B$, atunci

$$B=(U^{\top}\cdot U)^{-1}\cdot U^{\top}\cdot C.\tag{8.94}$$

Dacă luăm acum $U=J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, $B=J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))$ şi $C=-J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, din (8.94) rezultă (8.91) şi teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Exemplul 8.4.1. *Funcţia reală $F \in \mathcal{F}(D)$, de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^3$, este astfel încât:*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0; \ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0; \ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Dacă funcţiile reale

$$x = f(y, z), \quad y = g(z, x), \quad z = h(x, y)$$

constituie soluţii ale ecuaţiei $F(x, y, z) = 0$ care satisfac condiţiile iniţiale

$$x_0 = f(y_0, z_0), \ y_0 = g(z_0, x_0), \ z_0 = h(x_0, y_0),$$

atunci

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(z_0, x_0) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -1.$$

Într-adevăr, deoarece

$$F \in C^1(D), \ F(x_0, y_0, z_0) = 0 \ \text{ şi } \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

rezultă că ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte implicit funcţia $z = h(x, y)$ într–o vecinătate a punctului (x_0, y_0) şi

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

În mod similar deducem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Înmulţind membru cu membru aceste trei egalităţi se obţine relaţia dorită. ■

Exemplul 8.4.2. *Dacă $F \in C^2(D_0)$ şi $y = f(x)$ este funcţia definită implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$, atunci*

$$f''(x) = -\frac{F_{,xx}(F_{,y})^2 - 2F_{,xy}\,F_{,x}\,F_{,y} + F_{,yy}\,(F_{,x})^2}{(F_{,y})^3}(x, f(x)).$$

Într-adevăr, din Teorema 8.4.5 rezultă mai întâi

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{F_{,x}(x, f(x))}{F_{,y}(x, f(x))}\,. \tag{8.95}$$

Atunci, $f''(x) = (f')'(x) = -\left(\dfrac{F_{,x}(x, f(x))}{F_{,y}(x, f(x))}\right)'$. Calculând această ultimă derivată folosind regula de derivare a câtului şi regula de derivare a funcţiilor compuse şi înlocuind apoi în expresia găsită valoarea lui $f'(x)$ dată de (8.95), se obţine rezultatul dorit. ■

Exerciţiul 8.4.1. *Fie* $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$, *unde*

$$F_1(x, y, z, y_1, y_2) = x + yz - y_1 y_2 - y_1^2, \quad F_2(x, y, z, y_1, y_2) = x - y + y_1^3 - y_2^3.$$

Să se arate că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \\ F_2(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \end{cases}$$

defineşte implicit pe y_1 *şi* y_2 *ca funcţii de variabilele* x, y, z *într–o vecinătate a punctului* $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ *şi să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestor funcţii în punctul* $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Soluţie. Într-adevăr, avem evident $\mathbf{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$. Apoi, există un punct de forma (8.77), şi anume $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$, cu proprietatea

$$\mathbf{F}(1, 1, 1, 1, 1) = 0, \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2).$$

Matricea $J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(x, y, z, \mathbf{y})$, unde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, este

$$J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(x, y, z, \mathbf{y}) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -y_2 - 2y_1 & -y_1 \\ 3y_1^2 & -y_2^2 \end{Vmatrix} \Longrightarrow \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(x, y, z, \mathbf{y}) = 3y_1^3 + 3y_2^3 + 6y_1 y_2^2.$$

Se vede că $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(1, 1, 1, 1, 1) \neq 0$. Prin urmare, într-o vecinătate V_0 a punctului $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ există funcţiile f_1, f_2 de clasă C^∞ cu proprietăţile:

$$f_1(1, 1, 1) = 1, \quad f_2(1, 1, 1) = 1;$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z) & = & 0, \\ F_2(x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z) & = & 0, \quad \forall\, (x, y, z) \in V_0. \end{cases} \tag{8.96}$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor f_1 şi f_2 se obţin din sistemele algebrice:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial x} f_2 - f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\ 1 + 3f_1^2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} - 3f_2^2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} z - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} - 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \\ -1 + 3f_1^2 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} - 3f_2^2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} y - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} - 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ 3f_1^2 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - 3f_2^2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = 0. \end{cases} , \end{aligned} \tag{8.97}$$

care se deduc derivând succesiv în raport cu x, y, z egalităţile (8.96). Rezolvând sistemele (8.97) şi făcând apoi în soluţiile găsite $x = y = z = 1$, obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(1, 1, 1) = \dfrac{1}{6}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(1, 1, 1) = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1, 1, 1) = \dfrac{1}{3}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1, 1) = 0; \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(1, 1, 1) = \dfrac{1}{4}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(1, 1, 1) = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{8.98}$$

De menţionat că relaţiile (8.98) pot fi obţinute direct din formulele (8.81). ∎

8.5 Extreme locale ale funcţiilor definite implicit

Considerăm funcţia reală $F \in \mathcal{F}(D)$, unde $D \subset I\!R^{n+1}$ este o mulţime deschisă, şi presupunem că ecuaţia

$$F(x_1, x_2, ..., x_n; y) = 0 \tag{8.99}$$

defineşte implicit pe y ca funcţie de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n$ într–o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0 = (x_{0\,1}, x_{0\,2}, ..., x_{0\,n})$. Pentru a se întâmpla aceasta este suficient ca funcţia F să fie de clasă cel puţin C^1 pe mulţimea D şi să existe un punct $(\mathbf{x}_0; y_0) \in D$ astfel încât:

$$F(\mathbf{x}_0; y_0) = 0; \tag{8.100}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0; y_0) \neq 0. \tag{8.101}$$

Conform teoremei de existenţă şi unicitate a funcţiilor reale de mai multe variabile reale, definite implicit de ecuaţia (8.99), există $h > 0$, $k > 0$ astfel încât

$$B(\mathbf{x}_0, h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset D \tag{8.102}$$

şi funcţia reală

$$f : B(\mathbf{x}_0, h) \to (y_0 - k, y_0 + k)$$

care satisface proprietăţile:

$$f(\mathbf{x}_0) = y_0; \tag{8.103}$$

$$F(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})) = 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0), h); \tag{8.104}$$

$$\begin{cases} f \in C^1(B(\mathbf{x}_0, h)), \\ \\ (\nabla f)(\mathbf{x}) = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}(\nabla_{\mathbf{x}} F)(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, h), \end{cases} \tag{8.105}$$

unde vectorul $(\nabla_{\mathbf{x}}\, F)(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in I\!R^n$, numit *gradientul redus* al funcţiei F, are expresia analitică

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\, F)(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\mathbf{e}_i, \tag{8.106}$$

şi f este unica funcţie definită pe bila deschisă $B(\mathbf{x}_0, h)$, cu valori în intervalul real $(y_0 - k, y_0 + k)$, care satisface (8.103) – (8.106).

Ne punem acum problema determinării extremelor locale ale funcţiei f, definită implicit de ecuaţia (8.99), luând în calcul că, de cele mai multe ori, f nu se poate determina efectiv.

Mai întâi trebuiesc găsite punctele critice ale funcţiei f. Aceste puncte se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \tag{8.107}$$

Folosind (8.105) şi (8.99), din (8.107) deducem că punctele staţionare ale funcţiei f sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x};y)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x};y)=0,\\ \vdots\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x};y)=0,\\ F(\mathbf{x},y)=0. \end{cases} \tag{8.108}$$

Dacă $(\mathbf{x}_1;y_1)$, unde $y_1=f(\mathbf{x}_1)$ este o soluţie a sistemului (8.108), atunci $\mathbf{x}_1$ este punct staţionar pentru f.

Să cercetăm acum natura punctului staţionar $\mathbf{x}_1$. Pentru aceasta trebuie să studiem forma pătratică $d^2f(\mathbf{x}_1)$, a cărei expresie este

$$d^2f(\mathbf{x}_1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}_1)dx_idx_j. \tag{8.109}$$

Având în vedere că (8.105) este echivalentă cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))},\quad j\in\overline{1,n}, \tag{8.110}$$

şi ţinând cont de faptul că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(\mathbf{x}), \tag{8.111}$$

din (8.108), (8.110) şi (8.111), obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_1)=-\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1;y_1)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_1;y_1),\quad i\in\overline{1,n},\quad j\in\overline{1,n}. \tag{8.112}$$

Înlocuirea lui (8.112) în (8.109) conduce la

$$d^2f(\mathbf{x}_1)=-\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1;y_1)}\,d^2_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_1;y_1), \tag{8.113}$$

unde diferenţiala din membrul doi a relaţiei (8.113) se numeşte *diferenţiala redusă* a funcţiei F în punctul $(\mathbf{x}_1,y_1)$, adică

$$d^2_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_1;y_1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_1;y_1)dx_i\,dx_j. \tag{8.114}$$

Ţinând cont că numerele pozitive h şi k se aleg astfel încât pe lângă (8.102) să fie satisfăcută şi condiţia

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x};y)\neq 0,\quad \forall\,(\mathbf{x},y)\in B(\mathbf{x}_0,h)\times(y_0-k,y_0+k), \tag{8.115}$$

unde $y=f(\mathbf{x})$, din (8.113) şi (8.115) deducem că natura punctului staţionar $\mathbf{x}_1$ al funcţiei f este decisă de natura formei pătratice (8.114) în care se ţine cont şi de semnul numărului $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1;y_1)$. De exemplu, dacă forma pătratică (8.114) este pozitiv definită şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1;y_1)>0$ rezultă că forma pătratică (8.109) este negativ definită şi deci, folosind condiţia suficientă de extrem, deducem că $\mathbf{x}_1$ este punct de maxim local strict al funcţiei f.

Ilustrăm teoria prezentată mai sus prin următorul exerciţiu.

Exerciţiul 8.5.1. *Să se determine extremele locale ale funcţiei* $z = f(x, y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Soluţie. Domeniul de definiţie al funcţiei reale F de mai sus poate fi considerat că este întreg spaţiul $\mathbb{R}^3$, prin urmare $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$. Funcţia F este infinit diferenţiabilă, iar derivatele sale parţiale de ordinul întâi sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - z + 2, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y - z + 2, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -x - y + 2z + 2. \end{cases}$$

Putem afirma că ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte implicit pe z ca funcţie reală f de variabilele reale x şi y în vecinătatea oricărui punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$ pentru care avem îndeplinite condiţiile

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Nu este dificil de constatat că astfel de puncte M_0 există. Presupunând că M_0 este un astfel de punct, atunci punctele critice ale lui f se determină rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are următoarele două soluţii

$$\begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{6}, \\ y_1 = -3 + \sqrt{6}, \\ z_1 = -4 + 2\sqrt{6}, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x_2 = -3 - \sqrt{6}, \\ y_2 = -3 - \sqrt{6}, \\ z_2 = -4 - 2\sqrt{6}, \end{cases}$$

care definesc punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$. După cum se constată, derivata parţială a lui F în raport cu z în fiecare din aceste puncte este diferită de zero.

În acest mod s–au obţinut două puncte staţionare ale funcţiei f şi anume:

$$M_1'(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}); \quad M_1'(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}),$$

valorile corespunzătoare ale funcţiei f fiind

$$f(M_1') = -4 + 2\sqrt{6}, \quad f(M_2') = -4 - 2\sqrt{6}.$$

Utilizând regulile de diferenţiere şi considerând constantă variabila z, găsim

$$d^2_{(x,y)}F(x, y, z) = 2(dx^2 + dy^2),$$

din care rezultă

$$d^2_{(x,y)}F(M_1) = 2(dx^2 + dy^2), \quad d^2_{(x,y)}F(M_2) = 2(dx^2 + dy^2).$$

Dacă precizăm că
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)=2\sqrt{6}\quad \text{şi}\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_2,y_2,z_2)=-2\sqrt{6},$$
folosind (8.113), obţinem
$$d^2 f(x_1,y_1)=-\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)}\, d^2_{(x,y)}\, F(x_1,y_1,z_1)=-\frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2+dy^2),$$
ceea ce înseamnă că diferenţiala a doua a lui f în punctul M_1' este negativ definită şi ca atare punctul M_1' este punct de maxim local pentru funcţia f, iar valoarea maximă a locală a lui f este $z_{\max}=f(x_1,y_1)=z_1=-4+\sqrt{6}.$

În mod similar, găsim
$$d^2 f(x_2,y_2)=-\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_2,y_2,z_2)}\, d^2_{(x,y)}\, F(x_2,y_2,z_2)=\frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2+dy^2),$$
de unde deducem că diferenţiala a doua a lui f în punctul M_2' este pozitiv definită fapt care duce la afirmaţia că punctul M_2' este punct de minim local, iar valoarea minimă a lui f este $z_{\min}=f(x_2,y_2)=z_2=-4-\sqrt{6}.$ ■

8.6 Extreme condiţionate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

În cel de al treilea paragraf al acestui capitol am analizat problema determinării punctelor de extrem local ale funcţiilor reale diferenţiabile pe mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$.

În aplicaţiile practice ale calculului diferenţial în geometrie şi nu numai, apar deseori probleme de extrem care nu se pot încadra în teoria expusă în acel paragraf.

În acest sens, analizăm următorul exemplu.

Exerciţiul 8.6.1. *Dintre toate punctele $M\in\mathbb{E}^3$, situate pe dreapta $\mathbb{E}\in\mathbb{E}^3$ care trece prin punctul $M_0(u_0,v_0,w_0)\in\mathbb{E}^3$ şi are direcţia definită de vectorul nenul $\mathbf{h}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$, să se determine acelea situate la distanţă minimă de punctele suprafeţei netede $(\mathcal{S})\subset\mathbb{R}^3$ de ecuaţie*
$$(\mathcal{S})\;\; F(x,y,z)=0, \tag{8.116}$$
unde F este o funcţie reală diferenţiabilă pe o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. Dacă $P(x,y,z)$ şi $M(u,v,w)$ sunt două puncte din $\mathbb{E}^3$, atunci pătratul distanţei Euclidiene dintre ele se determină cu ajutorul funcţiei reale
$$f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^6),\quad f(x,y,z,u,v,w)=(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2. \tag{8.117}$$

Cele şase variabile ale funcţiei f din (8.117) sunt legate însă între ele căci, pe de o parte, primele trei variabile trebuie să verifice ecuaţia (8.116), întrucât $M\in(\mathcal{S})$, şi, pe de altă parte, variabilele u,v,w trebuie să verifice ecuaţiile canonice ale dreptei care trece perin M_0 şi are direcţia $\mathbf{h}$, adică
$$\frac{u-u_0}{l}=\frac{v-v_0}{m}=\frac{w-w_0}{n}, \tag{8.118}$$
ecuaţii care, în ipoteza $l\neq 0$, se scriu în forma echivalentă
$$v=\alpha u+p,\quad w=\beta u+q, \tag{8.119}$$
unde:
$$\alpha=\frac{m}{l};\quad \beta=\frac{n}{l};\quad p=v_0+\frac{m}{l}u_0;\quad q=w_0+\frac{n}{l}v_0.$$

Problema formulată mai sus se reduce la determinarea punctelor din $\mathbb{E}^6$ care realizează minimul funcţiei (8.117) când coordonatele carteziene ale acestora satisfac condiţiile (8.116) şi (8.118). Înlocuind (8.119) în (8.117) şi notând noua funcţie cu f_1, constatăm că problema determinării extremelor funcţiei (8.117), supusă la condiţiile (8.116) şi (8.119), se reduce la aceea a aflării valorilor extreme ale funcţiei

$$f_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4), \quad f_1(x, y, z, u) = (x - u)^2 + (y - \alpha\, u - p)^2 + (z - \beta\, u - q)^2,$$

cu restricţia (8.116).

Dacă ce s–a realizat cu ecuaţiile (8.118) (este vorba de explicitarea acestora şi scrierea lor sub forma echivalentă (8.119)) s–ar putea realiza şi cu ecuaţia (8.116), adică explicitarea lui z, de exemplu, în funcţie de variabilele x şi y, atunci problema formulată s–ar reduce la una de genul celor studiate în primul paragraf al acestui capitol.

În adevăr, presupunând că ar exista posibilitatea ca din (8.116) să determinăm unic funcţia reală $\varphi \in \mathcal{F}(D)$, unde $D \in \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, astfel încât

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \forall\,(x, y) \in D, \tag{8.120}$$

atunci problema pusă s–ar reduce la cea a determinării extremelor libere locale ale funcţiei

$$\begin{aligned} &f_2 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}, \\ &f_2(x, y, u) = (x - u)^2 + (y - \alpha\, u - p)^2 + (\varphi(x, y) - \beta\, u - q)^2. \end{aligned} \tag{8.121}$$

Observaţia 8.6.1. *Funcţia f_2 din (8.121) este restricţia funcţiei f la mulţimea $\mathbb{E} \times (\mathcal{S})$.*

Chiar dacă, teoretic vorbind, problema existenţei şi unicităţii funcţiei φ astfel încât să aibă loc (8.120) este soluţionabilă, practic însă, de cele mai multe ori, determinarea efectivă a lui φ şi explicitarea efectivă a ecuaţiilor care ar corespunde lui (8.118) sunt imposibile. ■

Comentariul făcut impune elaborarea unei metode care să ocolească dificultăţile prezentate şi care să conducă la determinarea extremelor funcţiei f din (8.117) fară a se şti efectiv cine este φ şi fără a explicita ecuaţii ce ar corespunde lui (8.118).

O astfel de metodă există şi se numeşte *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Să formulăm matematic problema desprinsă din exemplul de mai sus.

Să presupunem că sunt date următoarele obiecte:

$$\begin{cases} m, n \in \mathbb{N}^*; \\ D_1 \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad D_1 = \overset{\circ}{D}_1; \\ f : D_1 \to \mathbb{R}, \quad z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \forall\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_1; \\ \mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_m) : D_1 \to \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

unde variabilele independente ale funcţiilor date sunt scrise în forma $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, cu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, ambii vectori fiind astfel încât $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_1$. Despre funcţiile f şi $\mathbf{F}$ presupunem în plus că sunt de clasă cel puţin $C^1(D_1)$.

Dorim să determinăm punctele de extrem ale funcţiei f supuse la condiţia suplimentară

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \tag{8.122}$$

echivalentă cu sistemul de condiţii

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \end{cases} \tag{8.123}$$

Deoarece funcţia $\mathbf{F}$ este de clasă C^1 pe D_1, rezultă că submulţimea

$$A \subset D_1, \quad A = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_1 : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \tag{8.124}$$

este mulţime închisă deoarece orice şir de puncte din A, de forma $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)_{n\geq 1}$, cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, deci convergent, are limita în A, adică $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$.

Prin urmare, în problema generală formulată mai sus se cere de fapt determinarea punctelor de extrem liber local ale restricţiei funcţiei f la mulţimea A definită în (8.124).

Observăm că metoda de determinare a extremelor libere locale ce se desprinde din teoria prezentată în primul paragraf al acestui capitol nu se poate aplica aici.

Dacă însă putem rezolva în mod unic ecuaţia (8.122) în raport cu $\mathbf{y}$ şi determinăm funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ de variabila $\mathbf{x}$ astfel încât $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ să fie soluţia ecuaţiei (8.122), atunci introducerea acestei funcţii în funcţia f conduce la funcţia reală

$$\mathbf{h} : D_2 \to I\!R, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D_2, \tag{8.125}$$

unde D_2 este o mulţime deschisă din $I\!R^n$.

Pentru funcţia $\mathbf{h}$ din (8.125), putem studia punctele de extrem utilizând metoda prezentată în primul paragraf al acestui capitol. După cum am afirmat şi mai sus, acest lucru este greu de aplicat în practică, întrucât, în general, ecuaţia (8.122), sau sistemul (8.123), nu se pot rezolva efectiv în raport cu variabila $\mathbf{y}$ şi chiar dacă teoretic s–ar putea, de cele mai multe ori este greu de pus în evidenţă forma explicită a funcţiei $\boldsymbol{\varphi}$.

De aceea se impune prezentarea unei metode pentru rezolvarea problemei generale enunţate, metodă care să se aplice când nu se poate determina efectiv şi explicit funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ dar care să conducă la aceleaşi rezultate la care am fi conduşi dacă am cunoaşte–o.

Această metodă se numeşte, după cum am spus, *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* şi constă în a asocia funcţiei f *funcţia lui Lagrange* căreia să i se poată determina punctele de extrem prin metoda obişnuită astfel încât punctele de extrem ale restricţiei funcţiei f la mulţimea A să poată fi găsite cu ajutorul punctelor de extrem local ale funcţiei lui Lagrange.

Pentru a formula această metodă dăm mai întâi următoarele definiţii.

Definiţia 8.6.1. *Punctul* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ *se numeşte* **punct de extrem local** *al funcţiei* f **cu restricţia** (8.122), *sau* **punct de extrem local condiţionat** *al funcţiei* f*, dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *astfel încât diferenţa* $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *să păstreze semn constant pentru orice* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$*. Punctul* $(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}_0)$ *se numeşte* **punct de minim condiţionat** *pentru funcţia* f *dacă*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \geq 0, \quad \forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$$

şi **punct de maxim condiţionat** *dacă*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq 0, \quad \forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A.$$

Observaţia 8.6.2. *Punctul* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este punct de extrem condiţionat pentru funcţia* f *dacă* $\mathbf{x}_0$ *este punct de extrem pentru funcţia* h*, restricţia funcţiei* f *la mulţimea* A*.*

Definiţia 8.6.2. *Punctul* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ *se numeşte* **punct staţionar condiţionat***, sau* **punct critic condiţionat** *al funcţiei* f *dacă* $\mathbf{x}_0$ *este un punct staţionar pentru funcţia* h*.*

Definiţia 8.6.3. *Funcţia $f : D_1 \to I\!R$ căreia i se cere a se determina extremele condiţionate se numeşte* **funcţie scop, obiectiv**, *sau* **economică**, *iar ecuaţiile (8.122) se numesc* **legături**, *sau* **restricţii**.

Definiţia 8.6.4. *Problema determinării punctelor de extrem ale funcţiei scop f cu legăturile (8.122) se numeşte* **problemă de extrem condiţionat**, *sau* **problemă de extrem cu legături**.

Observaţia 8.6.3. *Pentru ca o problemă de extrem cu legături să aibă soluţie este necesar ca $m < n$ şi $n > 1$.*

Într-adevăr, dacă $m \geq n$, atunci din sistemul de ecuaţii (8.123), dacă nu este incompatibil, se determină soluţii de forma $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ care sunt puncte izolate ale lui D_1. În concluzie, $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ are o valoare bine determinată. Prin urmare funcţiei f nu i se poate ataşa o problemă de extrem liber local întrucât nu există posibilitatea comparării diverselor valori ale lui f într–o vecinătate $V \cap A$ cu valoarea lui f în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Dacă $n = 1$, atunci din (8.122) se deduce $m \geq n$, ceea ce s-a constatat că nu este acceptabil. ■

Definiţia 8.6.5. *Funcţia reală $\mathcal{L} \in \mathcal{F}(D_1 \times I\!R^m)$, cu valorile date de*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{8.126}$$

se numeşte **funcţia lui Lagrange** *asociată funcţiei scop $f \in \mathcal{F}(D_1)$ şi funcţiei legătură $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D_1, I\!R^m)$.*

Definiţia 8.6.6. *Numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ din relaţia (8.126) se numesc* ***multiplicatori Lagrange***, *iar vectorul $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in I\!R^m$ se numeşte* **vectorul multiplicatorilor Lagrange**.

În continuare, prezentăm o teoremă analoagă teoremei lui Fermat care pune în evidenţă condiţii necesare pentru ca un punct $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ să fie punct de extrem condiţionat pentru funcţia scop f cu legăturile (8.123).

Teorema 8.6.1. (**Existenţa multiplicatorilor lui Lagrange**) *Fie*

$$f \in C^1(D_1), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_m) \in C^1(D_1, I\!R^m),$$

unde $D_1 \subset I\!R^{n+m}$ mulţime deschisă, $n > 1$, $m < n$ şi A mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Dacă $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ este un punct de extrem condiţionat al funcţiei f şi

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0, \tag{8.127}$$

atunci există numerele reale $\lambda_{0\,j}$, $j \in \overline{1, m}$, astfel încât punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) \in I\!R^{n+2m}$ să fie soluţia sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = 0, & i \in \overline{1, n} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = 0, & j \in \overline{1, m} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{8.128}$$

Demonstraţie. Din enunţul teoremei, constatăm că funcţia $\mathbf{F}$ satisface ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a sistemelor de funcţii reale de mai multe variabile reale definite implicit de ecuaţia (8.122), deci există $\delta > 0$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_1$ şi o unică funcţie

$$\boldsymbol{\varphi} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to B(\mathbf{y}_0, \varepsilon),$$

de clasă $C^1(B(\mathbf{x}_0, \delta))$, care satisface în plus proprietăţile:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0;$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \in I\!R^m, \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta).$$

Din Observaţia 8.6.1 şi din faptul că $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) \in A$, când $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, deducem că $\mathbf{x}_0$ este punct de extrem local pentru funcţia reală

$$h : B(\mathbf{x}_0, \delta) \to I\!R, \quad h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})), \quad \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta). \tag{8.129}$$

Aplicând Teorema 8.3.1 funcţiei h din (8.129), rezultă $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i \in \overline{1, n}. \tag{8.130}$$

Considerăm sistemul liniar neomogen de m ecuaţii cu n necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\, \lambda_k = -\frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad j \in \overline{1, m}. \tag{8.131}$$

Din (8.127) rezultă că (8.131) are soluţia unică $\boldsymbol{\lambda_0} = (\lambda_{0\,1}, \lambda_{0\,2}, ..., \lambda_{0\,m})$.
Înlocuind scalarii λ_{0k}, $k \in \overline{1, m}$, în (8.127), obţinem

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}_0) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{0i}\, F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{8.132}$$

Derivatele parţiale ale funcţiei $\mathcal{L}$ din (8.132), în raport cu variabilele x_i, $i \in \overline{1, n}$, în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, sunt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{0k} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad i \in \overline{1, n}. \tag{8.133}$$

Utilizând teorema de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse, obţinem

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad k \in \overline{1, m}, \quad i \in \overline{1, n}. \tag{8.134}$$

Din (8.133) şi (8.134), deducem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\, \lambda_{0\,k}. \tag{8.135}$$

Folosind apoi (8.131) în (8.135), găsim

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \tag{8.136}$$

iar din (8.130) şi (8.136) rezultă că punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ verifică primele ecuaţii din sistemul (8.128).

Pe de altă parte, derivând funcţia $\mathcal{L}$ în raport cu $y_j,\ j = \overline{1,m}$, calculând apoi valoarea acestor derivate în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ şi ţinând cont că $(\lambda_{0\,1}, \lambda_{0\,2}, ..., \lambda_{0\,m})$ este soluţia sistemului (8.131), obţinem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{0\,k} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0,$$

ceea ce arată că ecuaţiile $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = 0,\ j \in \overline{1,m}$, sunt verificate în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$.

În sfârşit, ultimele m ecuaţii ale sistemului (8.128) sunt verificate de coordonatele punctului $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ deoarece $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$. **q.e.d.**

Observaţia 8.6.4. *Punctele de extrem condiţionat ale funcţiei f se găsesc printre punctele staţionare condiţionate, iar acestea din urmă se deduc din punctele critice ale funcţiei lui Lagrange.*

Observaţia 8.6.5. *Pentru determinarea punctelor critice (staţionare) condiţionate se procedează astfel:*

- *se asociază funcţiei scop f funcţia lui Lagrange care este o funcţie reală de $n + 2m$ variabile reale definită pe mulţimea $D_1 \times I\!R^m \subset I\!R^{n+2m}$;*
- *se anulează toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei lui Lagrange şi se rezolvă sistemul astfel obţinut în necunoscutele: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$; $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_m$;*
- *dacă $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$, unde $\begin{cases} \mathbf{x}_0 = (x_{0\,1}, ..., x_{0\,n}) \\ \mathbf{y}_0 = (y_{0\,1}, ..., y_{0\,m}) \\ \boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{0,\,1}, ..., \lambda_{0\,m}), \end{cases}$ este o soluţie a sistemului (8.128), atunci $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei scop f;*
- *numerele reale $\lambda_{0\,1}, ..., \lambda_{0\,m}$ se numesc **multiplicatorii Lagrange corespunzători punctului staţionar condiţionat** $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.*

Teorema 8.6.2. *Dacă $f \in C^1(D_1)$, $\mathbf{F} \in C^1(D_1, I\!R^m)$ şi $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei scop f, corespunzător valorii $\boldsymbol{\lambda}_0$, atunci*

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = 0. \tag{8.137}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, din faptul că $f \in C^1(D_1)$ şi $\mathbf{F} \in C^1(D_1, I\!R^m)$ rezultă că funcţia lui Lagrange $\mathcal{L}$ este diferenţiabilă în punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ şi

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)dy_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)d\lambda_k.$$

Afirmaţia (8.137) este acum evidentă. **q.e.d.**

Teorema 8.6.1 dă condiţii necesare pentru ca punctul $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in A$ să fie punct de extrem condiţionat. La fel ca în cazul extremelor libere locale, punem problema determinării unor condiţii suficiente pentru ca un punct staţionar condiţionat să fie punct de extrem condiţionat al funcţiei scop f. În acest sens dăm mai întâi următorul rezultat ajutător.

Lema 1. *Dacă $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei scop f, funcţiile $\mathbf{F}\in\mathcal{F}(D_1,I\!R^m)$ şi $f\in\mathcal{F}(D_1)$ sunt de clasă C^2 pe mulţimea de definiţie D_1 şi are loc (8.127), atunci*

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0;\boldsymbol{\lambda}_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,dx_i dx_j. \tag{8.138}$$

Demonstraţie. În punctul staţionar condiţionat $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange este

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0;\boldsymbol{\lambda}_0) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0;\boldsymbol{\lambda}_0)\,dx_i\,dx_j+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i\,\partial y_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0;\boldsymbol{\lambda}_0)dx_i dy_j+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y_j\,\partial y_k}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0;\boldsymbol{\lambda}_0)dy_j dy_k. \end{aligned}\tag{8.139}$$

De remarcat că grupul de termeni

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i\partial\lambda_s}dx_i d\lambda_s+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y_j\partial\lambda_s}dy_j d\lambda_s+\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda_s\partial\lambda_p}d\lambda_s d\lambda_p,$$

unde derivatele parţiale sunt calculate în punctul $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$, nu apare în (8.139) deoarece toate derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei lui Lagrange în punctul $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0;\boldsymbol{\lambda}_0)$, care apar în acest grup, sunt egale cu zero fiindcă $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in A$.

Diferenţialele legăturilor $F_k,\ k\in\overline{1,m}$, în punctul $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$, sunt egale cu zero, deci

$$\begin{cases} dF_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=0,\\ dF_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=0,\\ \vdots\\ dF_m(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=0. \end{cases}\tag{8.140}$$

Cum

$$dF_k(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dx_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dy_j,\ \ k\in\overline{1,m}, \tag{8.141}$$

după înlocuirea lui (8.141) în (8.140) şi trecerea în membrul doi a termenilor care conţin pe dx_i ca factori, obţinem:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_1}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dy_j=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dx_i,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_2}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dy_j=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\,dx_i,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_m}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dy_j=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)dx_i \end{cases}\tag{8.142}$$

Sistemul (8.142), de m ecuaţii cu necunoscutele $dy_1,\, dy_2, ...,\, dy_m$, este compatibil determinat în baza condiţiei (8.127). Aplicând regula lui Cramer de determinare a soluţiei unui sistem liniar şi neomogen, din (8.142) găsim că diferenţialele variabilelor y_j, $j \in \overline{1,m}$, sunt de forma

$$dy_j = \sum_{s=1}^{n} b_{js} dx_s, \quad j \in \overline{1,m}. \tag{8.143}$$

Înlocuind (8.143) în (8.139), suntem conduşi la (8.138). **q.e.d.**

Teorema 8.6.3. **(Condiţii suficiente de extrem condiţionat)** *Dacă* $f \in C^2(D)$, $\mathbf{F} \in C^2(D, I\!R^m)$ *şi* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ *este un punct staţionar condiţionat al funcţiei scop* f *cu restricţia* (8.122), *corespunzător valorii* $\boldsymbol{\lambda}_0$ *a vectorului parametrilor lui Lagrange, atunci:*

(i) *dacă forma pătratică* $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ *din* (8.138) *este pozitiv definită,* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este punct de minim condiţionat condiţionat al funcţiei* f*;*

(ii) *dacă* $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ *este formă pătratică negativ definită,* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este punct de maxim condiţionat al funcţiei* f*;*

(iii) *dacă* $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ *este formă pătratică nedefinită,* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *nu este punct de extrem condiţionat al funcţiei* f.

Demonstraţie. Pentru stabilirea naturii punctului staţionar condiţionat $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ corespunzător valorii $\boldsymbol{\lambda}_0$ a vectorului parametrilor lui Lagrange trebuie să evaluăm diferenţa $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ pentru $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$, unde $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ şi să folosim apoi Definiţia 8.6.1.

Însă, pentru puncte $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$, avem

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0). \tag{8.144}$$

Aplicând formula lui Taylor funcţiei $\mathcal{L}$ cu rest de ordin unu şi ţinând cont de Teorema 8.6.2, deducem

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \\
&= \frac{1}{2} d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)\Big((\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\boldsymbol{\lambda}), (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\boldsymbol{\lambda})\Big) + \\
&+ \frac{1}{2}\Big(d^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta}_0; \boldsymbol{\mu}_0)\Big((\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\boldsymbol{\lambda}), (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\boldsymbol{\lambda})\Big) - \\
&- d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)\Big((\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\boldsymbol{\lambda}), (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\boldsymbol{\lambda})\Big)\Big),
\end{aligned} \tag{8.145}$$

unde $(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta}_0; \boldsymbol{\mu}_0)$ este un punct situat pe segmentul deschis de extremităţi $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ şi $(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda})$ din spaţiul $I\!R^{n+2m}$, iar

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0; \quad \Delta\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0.$$

Cum f şi $\mathbf{F}$ sunt funcţii de clasă C^2, diferenţa din membrul doi a egalităţii (8.145) este suficient de mică într–o vecinătate a lui $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$. Din acest motiv semnul membrului întâi din (8.142) este determinat de semnul primului termen din membrul al doilea al egalităţii (8.145). **q.e.d.**

Observaţia 8.6.6. *Dacă* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este un punct staţionar condiţionat al funcţiei* f *şi toţi minorii principali*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k \in \overline{1,n}$$

ai matricei formei pătratice (8.70) *sunt pozitivi, atunci în baza Teoremei lui Sylvester, forma pătratică* $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ *este pozitiv definită şi deci* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este punct de minim condiţionat al funcţiei* f. *Dacă* $(-1)^k\Delta_k > 0,\ k = 1, n$, *atunci* $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ *este negativ definită şi ca urmare* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este punct de maxim condiţionat.*

Exerciţiul 8.6.2. *Mulţimea punctelor din spaţiul Euclidian* $I\!E^3$ *raportat la reperul cartezian* $Oxyz$ *ale căror coordonate* x, y *şi* z *verifică ecuaţia*

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{8.146}$$

unde $a > b > c > 0$ *sunt constante reale, se numeşte* **elipsoid real** *de semiaxe* a, b, c *cu axele de simetrie axele de coordonate.*

Dintre toate punctele elipsoidului (8.146) *să se găsească acele puncte situate la distanţă extremă de originea* O *a reperului.*

Soluţie. Deoarece distanţa de la un punct $M(x, y, z)$ al elipsoidului la originea reperului $O(0, 0, 0)$ este

$$d(O, M) = \| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

rezultă că punctele de extrem condiţionat ale funcţiei d, cu legătura (8.146), coincid cu acelea ale funcţiei

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \tag{8.147}$$

supuse aceleiaşi restricţii (8.146).

Problema enunţată poate fi formulată alternativ după cum urmează.

Dintre toate punctele $M(x, y, z)$ *aparţinând elipsoidului* (8.146), *să se determine acelea care realizează valori extreme pentru funcţia* (8.147).

Avem deci o problemă de extrem condiţionat cu o legătură în care funcţia scop este (8.147), legătura fiind (8.146).

În aceste ipoteze, funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\Big). \tag{8.148}$$

Derivatele parţiale ale funcţiei (8.148) sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x + \dfrac{2\lambda\, x}{a^2}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2y + \dfrac{2\lambda\, y}{a^2}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 2z + \dfrac{2\lambda\, z}{a^2}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1, \end{cases}$$

astfel că sistemul care dă punctele staţionare condiţionate este

$$\begin{cases} x + \dfrac{\lambda\, x}{a^2} = 0, \\ y + \dfrac{\lambda\, y}{a^2} = 0, \\ z + \dfrac{\lambda\, z}{a^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases} \tag{8.149}$$

Rezolvând sistemul (8.149) găsim că punctele staţionare condiţionate sunt

$$A(a,0,0),\ A'(-a,0,0),\ B(0,b,0),\ B'(0,-b,0),\ C(0,0,c),\ C'(0,0,-c),$$

valorile corespunzătoare ale multiplicatorului Lagrange fiind

$$\lambda = -a^2, \quad \text{pentru punctele} \quad A \quad \text{şi} \quad A',$$

$$\lambda = -b^2, \quad \text{pentru punctele} \quad B \quad \text{şi} \quad B',$$

$$\lambda = -c^2, \quad \text{pentru punctele} \quad C \quad \text{şi} \quad C'.$$

Diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange într–un punct arbitrar este

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = 2\Big(1 + \frac{\lambda}{a^2}\Big)dx^2 + 2(1 + \frac{\lambda}{b^2}\Big)dy^2 + 2\Big(1 + \frac{\lambda}{c^2}\Big)dz^2. \tag{8.150}$$

În punctul A şi pentru valoarea $\lambda = -a^2$ a multiplicatorului Lagrange, diferenţiala (8.150) devine

$$d^2\mathcal{L}(A;\lambda = -a^2) = 2\Big(1 - \frac{a^2}{b^2}\Big)dy^2 + 2\Big(1 - \frac{a^2}{c^2}\Big)dz^2. \tag{8.151}$$

Fără a mai diferenţia legătura (8.146), se vede că forma pătratică (8.147) este negativ definită, deci A este punct de maxim condiţionat. În aceeaşi situaţie se plasesază şi punctul A'.

Diferenţiala a doua a funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul B şi pentru valoarea $\lambda = -b^2$ a multiplicatorului Lagrange este

$$d^2\mathcal{L}(B;\lambda = -b^2) = 2\Big(1 - \frac{b^2}{a^2}\Big)dx^2 + 2\Big(1 - \frac{b^2}{c^2}\Big)dz^2. \tag{8.152}$$

Diferenţiind legătura (8.146), obţinem

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0. \tag{8.153}$$

În punctul $B(0,b,0)$, egalitatea (8.153), devine $dy = 0$. Prin urmare, în (8.152), dx şi dz sunt variabile independente.

Întrucât coeficientul lui dx^2 este pozitiv, iar cel al lui dz^2 este negativ, rezultă că forma pătratică (8.152) este nedefinită, deci B nu este punct de extrem condiţionat. Aceeaşi proprietate o are şi punctul B'.

Pentru punctul C şi multiplicatorul Lagrange $\lambda = -c^2$, găsim

$$d^2\mathcal{L}(C;\lambda = -c^2) = 2\Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)dx^2 + 2\Big(1 - \frac{c^2}{b^2}\Big)dy^2. \tag{8.154}$$

Din nou, fără a mai diferenţia legătura, se vede că forma pătratică (8.154) este pozitiv definită deoarece coeficienţii lui dx^2 şi dy^2 sunt pozitivi. Prin urmare, C este punct de minim condiţionat.

Aceeaşi concluzie are loc şi pentru punctul C'.

Rezultatele găsite erau de aşteptat deoarece punctele staţionare determinate mai sus sunt tocmai *vârfurile elipsoidului* care sunt prin definiţie *punctele de intersecţie a suprafeţei cu axele de coordonate*. Punctele A şi A' sunt vârfurile elipsoidului de pe axa absciselor Ox, B şi B' sunt vârfurile sale de pe axa ordonatelor Oy, iar C şi C' sunt vârfurile elipsoidului de pe axa cotelor Oz.

Numerele a, b, c, numite *semiaxele elipsoidului*, fiind în relaţiile $a > b > c$, rezultă că cele mai "îndepărtate" de origine sunt vârfurile A şi A' ale elipsoidului care sunt deci puncte de maxim condiţionat. Cele mai apropiate de origine sunt vârfurile C şi C', deci acestea sunt puncte de minim condiţionat.

Evident, valoarea maximă a lui f pe mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ este $f_{\max} = f(A) = f(A') = a^2$, iar cea mai mică valoare este $f_{\min} = f(C) = f(C') = c^2$.

Prin urmare, pentru orice ternă $(x, y, z) \in I\!R^3$, care verifică ecuaţia elipsoidului de semiaxe a, b, c, cu $a > b > c$, şi care are drept axe de simetrie axele de coordonate, avem inegalităţile

$$c^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

Altfel spus, dintre punctele elipsoildului, cele mai apropiate de origine sunt vârfurile C şi C', de pe axa $z'Oz$, iar cele mai îndepărtate sunt vârfurile A şi A' de pe axa absciselor. ■

Exerciţiul 8.6.3. *Să se găsească punctele de extrem condiţionat ale funcţiei scop*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^3), \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0, \\ F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda_1\,(x + y + z - 3) + \lambda_2\,(x^2 + y^2 + z^2 - 5).$$

Sistemul care dă punctele staţionare condiţionate este

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2\, x = 0, \\ 2y + \lambda_1 + 2\lambda_2\, y = 0, \\ -2z + \lambda_1 + 2\lambda_2\, z = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Primele trei ecuaţii ale acestuia pot fi considerate că formează un sistem de trei ecuaţii cu necunoscutele 1, λ_1 şi λ_2, sistem care fiind liniar şi omogen, cu soluţii nebanale, impune ca

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2x \\ 2y & 1 & 2y \\ -2z & 1 & 2z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow\; z(x - y) = 0.$$

Rezolvăm acum sistemul

$$\begin{cases} z(x - y) = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \end{cases}$$

echivalent cu sistemele

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \end{cases}, \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Primul sistem are soluţiile $(2,1,0)$ şi $(1,2,0)$, iar cel de al doilea are soluţiile

$$(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-2\frac{\sqrt{3}}{3}), \quad (1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+2\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

valorile corespunzătoare ale parametrilor Lagrange fiind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$ pentru primele două puncte staţionare condiţionate,

$$\lambda_1 = \frac{4(\sqrt{3}-3)}{9}, \quad \lambda_2 = \frac{1-2\sqrt{3}}{3}$$

pentru cel de al treilea punct staţionar condiţionat şi

$$\lambda_1 = -\frac{4(\sqrt{3}+3)}{9}, \quad \lambda_2 = \frac{1+2\sqrt{3}}{3}$$

pentru ultimul.

Diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange într–un punct curent este

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 2(1+\lambda_2)dx^2 + 2(1+\lambda_2)dy^2 + 2(\lambda_2 - 1)dz^2.$$

Pentru primele două puncte staţionare condiţionate avem:

$$d^2\mathcal{L}(2,1,0;0,-1) = -4dz^2; \quad d^2\mathcal{L}(1,2,0;0,-1) = -4dz^2. \tag{8.155}$$

Fără a mai diferenţia legăturile în aceste puncte, constatăm că formele pătratice (8.155) sunt negativ definite. Prin urmare, ambele puncte sunt puncte de maxim condiţionat.

Pentru cel de al treilea punct staţionar condiţionat, obţinem

$$d^2\mathcal{L}(x_3,y_3,z_3;\lambda_1^3,\lambda_2^3) = \frac{4(2-\sqrt{3})}{3}(dx^2+dy^2-dz^2).$$

Diferenţiind legăturile în acest punct, găsim

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ (1+\frac{\sqrt{3}}{3})(dx+dy) + (1-\frac{2\sqrt{3}}{3})dz = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$dy = -dx, \;\; dz = 0.$$

Înlocuind rezultatul în expresia diferenţialei a doua a lui $\mathcal{L}$ în cel de al treilea punct, obţinem

$$d^2\mathcal{L}(x_3,y_3,z_3;\lambda_1^3,\lambda_2^3) = \frac{8(2-\sqrt{3})}{3}\,dx^2.$$

Forma pătratică rezultată este pozitiv definită, deci cel de al treilea punct staţionar condiţionat este punct de minim condiţionat.

Procedând analog cu cel de al patrulea punct staţionar condiţionat se deduce că acesta este punct de minim condiţionat. ∎

8.7 Extremele funcţiilor reale definite pe mulţimi compacte din $I\!R^n$.

Să presupunem că se doreşte aflarea celei mai mari, sau celei mai mici valori ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale definită pe mulţimea compactă K din $I\!R^n$.

În ipoteza că funcţia reală $f \in \mathcal{F}(K)$ este diferenţiabilă în $\overset{\circ}{K}$, interiorul mulţimii de definiţie a funcţiei, metoda expusă în primul paragraf a acestui capitol permite găsirea tuturor valorilor extreme ale restricţiei funcţiei f la mulţimea $\overset{\circ}{K}$.

Pentru aflarea celei mai mari şi celei mai mici valori ale funcţiei f trebuie să se ţină cont de valorile funcţiei pe frontiera $\partial K = K - \overset{\circ}{K}$ a mulţimii de definiţie şi apoi să se compare valorile extreme ale funcţiei în puncte din $\overset{\circ}{K}$ cu cele din puncte aflate în $\partial K.$

Valoarea cea mai mare (respectiv cea mai mică) a tuturor acestor valori se numeşte *cea mai mare* (respectiv *cea mai mică*) valoare a funcţiei $f \in \mathcal{F}(K).$ Pentru a înţelege semnificaţia acestor noţiuni, considerăm următorul exemplu.

Exerciţiul 8.7.1. *În planul raportat la reperul cartezian Oxy se consideră mulţimea*

$$K = \{M(x, y) : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y - 1 \leq 0\},$$

care este mulţimea compactă din primul cadran al reperului limitată de segmentele OA, OB şi AB, unde $A(1, 0)$ şi $B(0, 1)$, pe care le şi conţine

Se cere să se determine punctele mulţimii K pentru care suma pătratelor distanţelor Euclidiene la punctele O, A şi B este cea mai mică.

Soluţie. Suma pătratelor distanţelor Euclidiene de la un punct $M(x, y) \in K$ la cele trei puncte este

$$z = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2. \tag{8.156}$$

Problema se reduce atunci la aflarea celei mai mici valori a funcţiei

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \quad \forall\, (x, y) \in K. \tag{8.157}$$

Valoarea funcţiei f în punctul $M(x, y) \in K$ este numărul real pozitiv z introdus în (8.156).

Căutăm punctele de extrem ale restricţiei funcţiei (8.157) la interiorul domeniului de definiţie.

Pentru aceasta rezolvăm sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale lui $f.$

Se găseşte punctul $M_0(x_0, y_0)$, unde $x_0 = \dfrac{1}{3}$, şi $y_0 = \dfrac{1}{3}$.

Diferenţiala a doua a funcţiei f în punctul M_0 este $d^2 f(x_0, y_0) = 6\, dx^2 + 6\, dy^2$ şi se vede că este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce arată că punctul M_0 este punct de minim local al funcţiei f aflat în interiorul domeniului de definiţie al funcţiei.

Valoarea funcţiei f în acest punct este $f(x_0, y_0) = \dfrac{4}{3}$.

Examinăm acum valorile lui f pe segmentul OA care face parte din frontiera lui $K.$ Pentru aceasta este suficient să punem $y = 0$ în expresia lui z şi se obţine valoarea restricţiei $f_{/OA}$ a funcţiei f la acest segment. Prin urmare

$$f_{/OA} : [0, 1] \to I\!R, \quad f_{/OA}(x) = 2x^2 + (x - 1)^2 + 1, \quad x \in [0, 1]. \tag{8.158}$$

Funcţia reală de variabilă reală din (8.158) are un singur punct staţionar căci derivata acesteia se anulează într–un singur punct din itervalul $(0, 1)$ şi anume $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

Diferenţiala a doua a funcţiei (8.158) în punctul $x_0 = \dfrac{1}{3}$ este $d^2 f_{/OA}(x_0) = 6dx^2$, care este formă pătratică pozitiv definită.

Prin urmare, punctul $M_1(x_0, 0)$ este punct de minim pentru funcţia f care are în acest punct valoarea $\dfrac{5}{3}$.

Să remarcăm că în extremităţile intervalului $[0,1]$ funcţia din (8.158) are valori extreme de asemenea însă ambele sunt puncte de maxim.

În acelaşi mod se constată că cea mai mică valoare a restricţiei funcţiei f la segmentul OB este $\dfrac{5}{3}$ şi reprezintă valoarea lui f în punctul de minim $M_2(0, \dfrac{1}{3})$.

Pentru a examina valorile lui f pe segmentul deschis BA vom considera restricţia sa la acest segment care se obţine din (8.156) prin înlocuirea lui y cu valoarea sa scoasă din ecuaţia segmentului BA, adică $y = 1 - x,\ \ x \in (0,1)$. Se obţine

$$f_{/BA} : (0,1) \to I\!R, \quad f_{/BA}(x) = 3x^2 + 3(x-1)^2, \quad x \in (0,1). \tag{8.159}$$

Aplicând funcţiei (8.159) algoritmul de determinare a extremelor libere care se desprinde din cel de al treilea paragraf al acestui capitol, găsim că pentru $x_3 = \dfrac{1}{2}$ se realizează un minim al funcţiei de valoare $\dfrac{3}{2}$. Aceasta atrage că în punctul $M_3(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$, aflat pe segmentul BA, funcţia f are un minim local şi valoarea funcţiei în acest punct este $\dfrac{3}{2}$.

Din rezultatele găsite deducem că valoarea cea mai mică a funcţiei f din (8.157) este $\dfrac{4}{3}$ şi este atinsă în punctul $M_0(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$, care este centrul de greutate al unei plăci plane omogene ce ocupă domeniul K. ■

Observaţia 8.7.1. *Părţi din frontiera mulţimii K, domeniul de definiţie al funcţiei din Exerciţiul 8.7.1, s–au reprezentat prin ecuaţii de forma $F(x,y) = 0$ care s-au putut rezolva în privinţa uneia dintre variabile. După introducerea acestei variabile în expresia funcţiei f, cu alte cuvinte după aflarea restricţiei funcţiei f la porţiuni netede ale frontierei lui K, s–a aplicat algoritmul care se desprinde din cel de al treilea paragraf al acestui capitol pentru determinarea extremelor funcţiei f pe frontiera lui K. Dacă însă rezolvarea ecuaţiei $F(x,y) = 0$ este imposibilă practic, sau funcţia reală definită implicit de această ecuaţie are expresie complicată, pentru aflarea valorilor extreme ale restricţiei funcţiei f la frontiera de ecuaţie $F(x,y) = 0$ se poate aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Exerciţiul 8.7.2. *Să se găsească cea mai mare valoare a funcţiei reale*

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad (x,y) \in K,$$

unde K este discul închis cu centrul în origine şi rază egală cu 2.

Soluţie. Deoarece $k \in \overline{B(\mathbf{0},2)}$ rezultă că această mulţime se poate scrie în forma $K = \{(x,y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Singurul punct staţionar al restricţiei funcţiei f la mulţimea $\overset{\circ}{K}$ este originea reperului Oxy, care se vede imediat că nu este punct de extrem al funcţiei deoarece diferenţiala a doua a funcţiei f în acest punct este $d^2 f(\mathbf{0}) = 2\,dx^2 - 2\,dy^2$ care este formă pătratică nedefinită deci originea reperului este punct şa pentru funcţia f.

Determinăm valorile extreme ale restricţiei funcţiei f la conturul lui K deci la cercul de ecuaţie $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Pentru aceasta folosim metoda multiplicatorilor Lagrange. Funcţia lui Lagrange are valorile date de

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\, F(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 - 4).$$

Sistemul care dă punctele staţionare condiţionate este

$$\begin{cases} x + \lambda y = 0, \\ -y + \lambda\, y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim punctele staţionare condiţionate

$$M_1(2,0),\ M_2(-2,\ 0),$$

corespunzătoare valorii $\lambda = -1$ şi

$$M_3(0,2),\ M_4(0,-2),$$

corespunzătoare valorii $\lambda = 1$.

Diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange, într–un punct oarecare, este

$$d^2\mathcal{L}(x,y;\lambda) = 2(\lambda\ +\ 1)\,dx^2\ +\ 2(\lambda\ -\ 1)\,dy^2.$$

Pentru primele două puncte, diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange este $-4\,dy^2$, deci formă pătratică negativ definită, ceea ce atrage că fiecare din aceste puncte este punct de maxim condiţionat.

În celelalte două puncte diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange este egală cu $4\,dx^2$. Această diferenţială este formă pătratică pozitiv definită şi ca atare M_3 şi M_4 sunt puncte de minim condiţionat.

În punctele de maxim condiţionat funcţia f are aceeaşi valoare, egală cu 4.

Prin urmare, cea mai mare valoare a funcţiei f este 4 şi aceasta este valoarea funcţiei fie în punctul M_1, fie în punctul M_2, ambele aflate pe frontiera domeniului de definiţie al funcţiei f. ■

Observaţia 8.7.2. *Ultima problemă în care se determină valoarea maximă a unei funcţii poate fi interpretată geometric.*

Într-adevăr, $z = f(x,y) = x^2 - y^2$, unde $(x,y) \in I\!\!R^2$, reprezintă, în spaţiul afin Euclidian tridimensional raportat la reperul cartezian rectangular $Oxyz$, ecuaţia carteziană explicită a unei suprafeţe, numită *paraboloid hiperbolic*, sau *şa*, care are punctul de tip şa în origine, iar planele de coordonate Ozx şi Oyz, plane de simetrie ale suprafeţei.

Din punct de vedere geometric, inecuaţia care defineşte domeniul de definiţie al funcţiei f reprezintă în spaţiu un cilindru circular de rază 2, având Oz ca axă de rotaţie şi secţiune perpendiculară pe axa de rotaţie discul de rază 2 cu centrul pe Oz.

Cilindrul decupează din paraboloidul hiperbolic o porţiune de suprafaţă mărginită de curba

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \tag{8.160}$$

Cu aceste pregătiri suntem în poziţia de a da interpretarea geometrică.

Dintre toate punctele acestei porţiuni de suprafaţă, cele de cotă maximă sunt $P_1(2,0,4)$ *şi* $P_2(-2,0,4)$ *şi se află pe curba* (8.160).

Punctele P_1 şi P_2 se află la intersecţia curbei (8.160) cu planul Ozx. ■

8.8 Transformări regulate, sau difeomorfisme

Fie D o mulţime deschisă a spaţiului Euclidian n-dimensional $I\!\!R^n$ şi

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$$

o transformare de la mulţimea D în spaţiul liniar $I\!\!R^m$.

Dacă $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă într-un punct $\mathbf{a} \in D$, atunci diferenţiala sa în acest punct este

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{e}'(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})dX), \tag{8.161}$$

unde $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ este matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{a}$, sau matricea operatorului liniar $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}(I\!\!R^m, I\!\!R^m)$ în perechea de baze canonice $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \subset I\!\!R^n$ şi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m\} \subset I\!\!R^m$, dX

este matricea coloană cu elementele egale cu diferenţialele variabilelor independente $x_1, x_2, ..., x_n$, iar $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_m) \in (I\!R^m)^m$. Amintim că

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right\|_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R). \tag{8.162}$$

Dacă $m = n$, simbolul $\dfrac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{a})$ este *jacobianul transformării* $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{a}$, adică determinatul matricei pătratice $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$.

Definiţia 8.8.1. *Fie* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$, $D = \overset{\circ}{D} \subset I\!R^n$ *şi* $m \ge n$. *Numărul real*

$$\begin{aligned} |J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})| &= \sqrt{\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_n\le m} \begin{vmatrix} f_{i_1,1}(\mathbf{a}) & f_{i_1,2}(\mathbf{a}) & ... & f_{i_1,n}(\mathbf{a}) \\ f_{i_2,1}(\mathbf{a}) & f_{i_2,2}(\mathbf{a}) & ... & f_{i_2,n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{i_n,1}(\mathbf{a}) & f_{i_n,2}(\mathbf{a}) & ... & f_{i_n,n}(\mathbf{a}) \end{vmatrix}^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_n\le m} \left(\frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_n})}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{a}) \right)^2}, \end{aligned} \tag{8.163}$$

se numeşte **modulul matricei jacobiene** $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ *şi este o înlocuire incompletă a noţiunii de determinant al unei matrice pătratice. Dacă* $m \le n$, *atunci*

$$|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})| = \sqrt{\sum_{1\le j_1<j_2<...<j_m\le n} \left(\frac{D(f_1, f_2, ..., f_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m})}(\mathbf{a}) \right)^2}. \tag{8.164}$$

Definiţia 8.8.2. *Aplicaţia* $\mathbf{f} : D \to I\!R^m$, *unde* D *este o mulţime deschisă din* $I\!R^n$, *se numeşte* ***transformare regulată*** *dacă* $\mathbf{f} \in C^1(D)$ *şi*

$$|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})| \ne 0, \;\; \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{8.165}$$

În cazul $m \ge n$ condiţia (8.165) afirmă că pentru fiecare punct $\mathbf{x} \in D$ cel puţin unul din jacobienii

$$\frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_n})}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{x}),\;\; 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_n \le m, \tag{8.166}$$

este diferit de zero.

Afirmaţia (8.166) este echivalentă cu independenţa liniară a vectorilor

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i,\;\; j \in \overline{1,n}, \tag{8.167}$$

deoarece combinaţia liniară

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in I\!R^m, \tag{8.168}$$

are, în baza relaţiei (8.166), doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ pentru că $\operatorname{rang} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = n = \min\{m, n\}$.

Relaţia (8.168) se scrie în forma

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{a}) = \mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad \text{unde} \quad \mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in I\!R^n$$

şi arată că avem

$$\text{Ker}\,\mathbf{T} = \text{Ker}\,d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{0}\}. \tag{8.169}$$

Atunci în baza Teoremei 4.8.2 rezultă că aplicaţia

$$\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}, \cdot) = d\mathbf{f}(\mathbf{x})(\cdot),$$

care depinde de variabila $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in I\!R^n$, este injectivă. În felul acesta am justificat următorul rezultat.

Propoziţia 8.8.1. *88a Aplicaţia $\mathbf{f} : D \to I\!R^m$, definită pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^n$, cu $m \geq n$, este transformare regulată dacă pentru orice $\mathbf{x} \in D$, arbitrar dar fixat, aplicaţia liniară $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in L(I\!R^n, \text{Im}T)$ este bijectivă, adică $\forall\, \mathbf{y} \in I\!R^m$ există exact un vector $\mathbf{a} \in I\!R^n$ astfel încât $d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{a}) = \mathbf{y}$.*

Observaţia 8.8.1. *Dacă aplicaţia $\mathbf{f} : D \to I\!R^m$, cu D mulţime deschisă în $I\!R^n$, $m \geq n$, este transformare regulată, atunci spaţiile vectoriale $I\!R^n$ şi $\text{Im}T$ sunt izomorfe.*

În cazul $m \leq n$ condiţia (8.165) afirmă că pentru fiecare $\mathbf{x} \in D$ cel puţin unul din jacobienii

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m})}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_m \leq n \tag{8.170}$$

este nenul. Deoarece vectorii

$$(\nabla f_1)(\mathbf{x}),\ (\nabla f_2)(\mathbf{x}),\ ...,\ (\nabla f_m)(\mathbf{x}), \tag{8.171}$$

sunt liniile matrice jacobiene $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ rezultă că (8.165) exprimă faptul că vectorii (8.127) sunt liniar independenţi, sau, altfel spus, combinaţia liniară

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i (\nabla f_i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in I\!R^n \tag{8.172}$$

are loc atunci şi numai atunci când $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$. Relaţia (8.172) şi afirmaţia ce–i urmează este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\nabla f_i)(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \tag{8.173}$$

oricare ar fi vectorul nenul $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in I\!R^m$.

Din aceste rezultate deducem că şi în cazul $m \leq n$ avem

$$\text{rang}\, J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = m = \min\{m, n\},\ \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{8.174}$$

În sfârşit, în cazul $m = n$, condiţia (8.165) afirmă că

$$\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{x}) \neq 0,\ \forall\, \mathbf{x} \in D, \tag{8.175}$$

adică din nou are loc (8.174).

Analiza făcută mai sus demonstrează propoziţia urmă toare.

Propoziţia 8.8.2. *88b Aplicaţia* $\mathbf{f} : D \to I\!\!R^m$, $D = \overset{\circ}{D} \subset I\!\!R^n$, *este transformare regulată dacă şi numai dacă* $\mathbf{f} \in C^1(D, I\!\!R^m)$ *şi*

$$rang\, J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \min\{m, n\}, \ \forall\, bfx \in D. \tag{8.176}$$

Definiţia 8.8.3. *Se numeşte* **difeomorfism**, *sau* **transformare regulată** *transformarea regulată* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!\!R^m)$, *unde* $D = \overset{\circ}{D} \subset I\!\!R^n$, *care este şi homeomorfism.*

Se poate demonstra că [24, p. 223] dacă $m < n$, atunci nu există un difeomorfism de la $D \subset I\!\!R^n$ în $I\!\!R^m$. De aceea, în toate teoremele asupra difeomorfismelor care urmează, presupunem $m \geq n$.

Examinăm mai întâi cazul $m = n$.

Teorema 8.8.1. (**Teorema de inversare locală a funcţiilor**) *Dacă* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ *este o transformare regulată de la mulţimea* D, *deschisă în* $I\!\!R^n$, *la mulţimea* $I\!\!R^n$, *atunci*:

(i) *mulţimea* $\mathbf{f}(D)$ *este deschisă în* $I\!\!R^n$;

(ii) *pentru orice punct* $\mathbf{x}_0 \in D$ *există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0), U \subset D$, *astfel încât restricţia funcţiei* $\mathbf{f}$ *la aceasta,* $\mathbf{f}_{/U}$, *este un difeomorfism al mulţimii* U *pe o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$, *unde* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi punctul (ii). Fie în acest sens punctele $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in I\!\!R^n$. Atunci punctul de coordonate $(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n)$ este un element al mulţimii $D \times I\!\!R^n \subset I\!\!R^{2n}$. Pentru simplitatea scrierii convenim ca punctul din $D \times I\!\!R^n$ să se scrie în forma $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, deci

$$(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n)$$

Să considerăm acum funcţia

$$\mathbf{F} : I\!\!R^n \times D \to I\!\!R^n, \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}. \tag{8.177}$$

Rezultă imediat că

$$\mathbf{F} \in C^1(I\!\!R^n \times D, I\!\!R^n). \tag{8.178}$$

Apoi $\left\| \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \right\|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, ceea ce, în baza lui (8.165), conduce la

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \neq 0, \ \forall\, (\mathbf{y}; \mathbf{x}) \in I\!\!R^n \times D$$

şi, în particular, la

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{y}_0; \mathbf{x}_0) \neq 0, \tag{8.179}$$

unde $\mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{y}_0$ sunt punctele menţionate în (ii). Având în vedere cine este $\mathbf{y}_0$ şi (8.177) deducem, de asemenea,

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \tag{8.180}$$

În acest fel, constatăm că pentru funcţia $\mathbf{F}$ definită de (8.177), condiţiile (8.178) – (8.180) sunt tocmai ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a funcţiilor definite implicit.

Conform acestei teoreme există numerele $\delta > 0$ şi $\eta > 0$ astfel încât

$$B(\mathbf{y}_0, \delta) \times B(\mathbf{x}_0, \eta) \subset D_0 = I\!R^n \times D, \; B(\mathbf{x}_0, \eta) \subset D$$

şi transformarea continuă $\boldsymbol{\varphi} : B(\mathbf{y}_0, \delta) \to B(\mathbf{x}_0, \eta)$ care satisfac proprietăţile:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \delta); \tag{8.181}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0, \tag{8.182}$$

pentru orice $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \delta)$, iar punctul $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ este singurul punct $\mathbf{x}$ din $B(\mathbf{x}_0, \eta)$ care satisfac ecuaţia

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{8.183}$$

Mulţimea $V = B(\mathbf{y}_0, \delta)$ este mulţime deschisă în $I\!R^n$ (vezi Teorema 3.9.9), $U = \mathbf{f}^{-1}(V) \cap B(\mathbf{x}_0, \eta)$ este mulţime deschisă în $B(\mathbf{x}_0, \eta)$ (conform Teoremei 4.2.5), iar $\mathbf{y}_0 \in V$ şi $\mathbf{x}_0 \in U$. Rezultă că V şi U sunt vecinătăţi ale lui $\mathbf{y}_0$ şi respectiv $\mathbf{x}_0$.

Din (8.181) şi (8.177) deducem

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}, \; \forall\, \mathbf{y} \in V \tag{8.184}$$

Deoarece $U \subset \mathbf{f}^{-1}(V)$, deducem:

$\boldsymbol{\varphi}(V) = U$;

$\boldsymbol{\varphi}_{/U}$ este transformare bijectivă;

$\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{f}_{/U})^{-1}$.

În consecinţă $\mathbf{f}(U) = V$.

Deoarece $\boldsymbol{\varphi}$ este continuă, rezultă că transformarea regulată $\mathbf{f}_{/U}$ este homeomorfism şi prin urmare $\mathbf{f}_{/U}$ este un difeomorfism de la U la V.

Punctul (i) al teoremei rezultă din (ii). Într-adevăr, dacă $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{f}(D)$ atunci există $\mathbf{x}_0 \in D$ astfel încât $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. După (ii), aplicaţia $\mathbf{f}$ duce o vecinătate $U \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ într–o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$. Deoarece $\mathbf{y}_0 \in V \subset \mathbf{f}(D)$ rezultă că $\mathbf{y}_0$ este punct interior al lui $\mathbf{f}(D)$. Dat fiind că orice punct $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{f}(D)$ este punct interior al mulţimii $\mathbf{f}(D)$, rezultă că $\mathbf{f}(D)$ este mulţime deschisă. **q.e.d.**

Teorema 8.8.2. *Dacă* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^n)$, *unde* $D = \overset{\circ}{D} \subset I\!R^n$, *este o transformare regulată bijectivă, atunci transformările* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{f}^{-1}$ *sunt difeomorfisme şi*:

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1}, \; \forall\, \mathbf{x} \in D \Longrightarrow J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))^{-1}; \tag{8.185}$$

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(x)} \Longrightarrow \det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))}, \tag{8.186}$$

oricare ar fi punctul $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(D)$.

Dacă $\mathbf{f} \in C^k(D)$, *atunci* $\mathbf{f}^{-1} \in C^k(\mathbf{f}(D)$.

Demonstraţie. Pentru a arăta că $\mathbf{f}$ este difeomorfism este suficient să demonstrăm că $\mathbf{f}^{-1}$ este continuă în orice punct $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{f}(D)$. Fie $\mathbf{x}_0 \in D$ astfel încât $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Din Teorema 8.8.1 există vecinătăţile U şi V ale punctelor $\mathbf{x}_0$ şi respectiv $\mathbf{y}_0$, astfel încât $\mathbf{f}_{/U}$ este homeomorfism de la U pe V. Deoarece $\mathbf{f}^{-1}_{/V} = (\mathbf{f}_{/U})^{-1}$ rezultă că transformarea$\mathbf{f}^{-1}_{/V}$ este continuă. Aceasta demonstrează că $\mathbf{f}^{-1}$ este continuă în punctul $\mathbf{y}_0$, arbitrar din $\mathbf{f}(D)$, deci

$\mathbf{f}^{-1}$ este continuă pe $\mathbf{f}(D)$.

Păstrând aceleaşi notaţii ca în Teorema 8.8.1 vedem că funcţia $\mathbf{F}$ din (8.177) este de clasă $C^1(\mathbb{R}^n \times D)$. Mai mult,

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = \|\delta_{ij}\| = I_n, \;\; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \tag{8.187}$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n, iar δ_{ij} sunt simbolii lui Kronecker şi

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

care, în baza faptului că $\mathbf{f}$ este transformare regulată, conduce la

$$\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = \det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0, \;\; \forall\, (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times D.$$

Din teorema precedentă rezultă atunci că $\mathbf{f}^{-1}$ satisface (8.181) pentru orice $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(D)$, iar din teorema funcţiilor definite implicit deducem că $\mathbf{f}^{-1} \in C^1(\mathbf{f}(D))$ şi

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) \right\| = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))^{-1}, \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{f}(D),$$

ceea ce arată că (8.185) este demonstrată. Identitatea (8.186) este o consecinţă directă a lui (8.185).

Din (8.185) şi (8.165) rezultă

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) \neq 0. \tag{8.188}$$

Relaţia (8.188) arată că $\mathbf{f}^{-1}$ este transformare regulată.

Deoarece $\mathbf{f}^{-1}$ este şi homeomorfism, rezultă că $\mathbf{f}^{-1}$ este un difeomorfism.

Dacă $\mathbf{f}$ este de clasă C^k, atunci şi $\mathbf{F}$ din (8.177) este, de asemenea, de clasă C^k pe $\mathbb{R}^n \times D$. Atunci din teorema funcţiilor definite implicit rezultă că $\mathbf{f}^{-1}$ este de clasă C^k. **q.e.d.**

Formulele (8.185) şi (8.186) pot fi scrise, de asemenea, în următoarea formă care este mai puţin precisă dar mai uşor de memorat:

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1} \tag{8.189}$$

şi respectiv

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})}\,. \tag{8.190}$$

În formulele (8.189) şi (8.190) trebuie să se menţioneze că variabilele $\mathbf{y}$ şi $\mathbf{x}$ sunt legate prin

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in D, \;\; \mathbf{y} \in \mathbf{f}(D), \tag{8.191}$$

sau prin

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}), \;\; \mathbf{y} \in \mathbf{f}(D), \;\; \mathbf{x} \in D. \tag{8.192}$$

Folosind notaţia clasică pentru jacobienii $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ şi $\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y})$, putem scrie identităţile (8.190) în forma

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\dfrac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}), \tag{8.193}$$

cu aceeaşi precizare în ceea ce priveşte legătura dintre variabilele $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$.

În cazul $n = 1$, (8.193) devine

$$\varphi_1'(y) = \frac{d\varphi_1}{dy}(y) = \frac{1}{f_1'(x)} = \frac{(}{1}) \frac{df_1}{dx}(x) \;\;,$$

în care $y = f_1(x)$, formulă bine cunoscută din analiza clasică.

Teorema 8.8.3. *Pentru ca o transformare bijectivă* $\mathbf{f}: D \to D_1$*, unde* D *şi* D_1 *sunt mulţimi deschise din* $I\!R^n$*, să fie un difeomorfism este necesar şi suficient ca ambele transformări* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{f}^{-1}$ *să fie de clasă* C^1*.*

Demonstraţie. Necesitatea rezultă din Teorema 8.8.2.

Pentru a demonstra suficienţa, este destul să arătăm că

$$\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0, \ \forall \, \mathbf{x} \in D.$$

Transformarea compusă $\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f}$ este transformarea identică pe D. Matricea jacobiană a transformării identice este matricea unitate. Dacă $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{f}^{-1}$ sunt de clasă C^1, atunci avem

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = 1. \tag{8.194}$$

De aici rezultă că $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$. Prin urmare, (8.165) este satisfăcută, ceea ce artă că $\mathbf{f}$ este difeomorfism.

Din (8.194) deducem de asemenea că $\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq 0$, rezultat care, înpreună cu ipotezele suficienţei, Definiţia 4.6.1 şi Definiţia 8.8.3 conduce la concluzia că f este difeormorfism. **q.e.d.**

Teorema 8.8.4. *Fie* $\mathbf{f}$ *un difeomorfism de la o mulţime deschisă* $D \subset I\!R^n$*, în mulţimea* $I\!R^m$*,* $m \geq n$*,* $\mathbf{g}$ *o transformare de la mulţimea deschisă* $D_1 \subset I\!R^p$*, în mulţimea* $\mathbf{f}(D)$ *şi* $\mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}$*.*

(a) *Dacă* $\mathbf{f}$ *este de clasă* $C^1(D)$*, atunci* $\mathbf{h}$ *este de clasă* $C^1(D_1)$ *şi, pentru orice* $\mathbf{y} \in D_1$*,*

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \Big(J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(\mathbf{y}))\Big)^{-1} \cdot J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}). \tag{8.195}$$

Dacă $\mathbf{f} \in C^k(D)$ *şi* $\mathbf{g} \in C^k(D_1)$*, atunci* $\mathbf{h} \in C^k(D_1)$*.*

(b) *Dacă* $\mathbf{g}$ *este transformare regulată şi* $p \leq n$*, atunci* $\mathbf{h}$ *este transformare regulată.*

(c) *Dacă* $\mathbf{g}$ *este un difeomorfism şi* $p \leq n$*, atunci* $\mathbf{h}$ *este un difeomorfism.*

Demonstraţie. Să observăm că identitatea (8.195) poate fi scrisă după cum urmează

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1} \cdot J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}), \tag{8.196}$$

unde $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$, sau

$$J_{\mathbf{h}} = (J_{\mathbf{f}}^{\top} \cdot J_{\mathbf{f}})^{-1} \cdot J_{\mathbf{f}}^{\top} \cdot J_{\mathbf{g}}. \tag{8.197}$$

Partea (a) a teoremei rezultă din Teorema 8.4.6 unde

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{y} \in D_1.$$

Rezultă imediat că funcţia $\mathbf{h}$ este continuă şi

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y})) = 0, \quad \text{pentru} \quad \mathbf{y} \in D_1.$$

Astfel, $\mathbf{h}$ este de clasă C^k dacă $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ sunt de clasă C^k. Deoarece

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = -J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) \quad \text{şi} \quad \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = -J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}),$$

deducem că relaţia (8.195) este o consecinţă directă a Teoremei 8.4.6.

Din faptul că $\mathbf{h}=\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{g}$ rezultă evident $\mathbf{g}=\mathbf{f}\circ\mathbf{h}$ şi, în consecinţă, $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})=J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})\cdot J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$. Această ultimă relaţie împreună cu Teorema 8.8.2 implică relaţia (8.195) care la rându–i conduce la

$$|J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})|\neq 0,\quad \text{dacă}\quad |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})|\neq 0,$$

afirmaţie care se dovedeşte a fi adevărată şi din Teorema 8.4.1. Prin urmare, concluzia (b) a Teoremei 8.4.5 este adevărată.

Deoarece compunerea a două homeomorfisme este un homeomorfism, rezultă că $(b)\Longrightarrow(c)$. **q.e.d.**

Teorema 8.8.5. (**Compunerea difeomorfismelor**) *Dacă $p\leq n\leq m$, $\mathbf{h}$ este o transformare regulată a unei mulţimi deschise $D_1\subset I\!\!R^p$ într-o mulţime deschisă $D\subset I\!\!R^n$ şi $\mathbf{f}$ este o transformare regulată de la D în $I\!\!R^m$, atunci transformarea compusă*

$$\mathbf{g}=\mathbf{f}\circ\mathbf{h}$$

este regulată. Dacă $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{h}$ sunt difeomorfisme, atunci $\mathbf{g}$ este difeomorfism.

Demonstraţie. În baza Corolarului 7.4.1 rezultă că $\mathbf{g}\in C^1(D_1)$ şi că matricea jacobiană $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$ este produsul matricelor jacobiene $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})$ şi $J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$. Deoarece $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{h}$ sunt transformări regulate, în baza lui (8.165), rezultă că

$$|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})|\neq 0,\ \forall\,\mathbf{y}\in D_1,$$

ceea ce arată că $\mathbf{g}$ este transformare regulată pe D_1.

Partea a doua a teoremei rezultă din prima deoarece compunerea a două homeomorfisme este un homeomorfism. **q.e.d.**

Rezultatul următor este o generalizare a punctului (ii) din Teorema 8.8.1.

Teorema 8.8.6. *Dacă $\mathbf{f}=(f_1,f_2,...,f_m):D_0\subset I\!\!R^n\to I\!\!R^m$, $n\leq m$, este o transformare regulată, atunci pentru orice punct $\mathbf{y}_0\in D_0$ există o vecinătate $U\in\mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$ astfel încât funcţia $\mathbf{f}_{/U}$ să fie un difeomorfism.*

Demonstraţie. Deoarece $|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_0)|\neq 0$, conform relaţiei (8.165) din Definiţia 8.8.2, există numerele întregi pozitive $i_1,i_2,...,i_n$, diferite între ele şi mai mici, cel mult egale cu m, (vezi (8.163)), astfel încât jacobianul transformării $\boldsymbol{\varphi}=(f_{i_1},f_{i_2},...,f_{i_n})$ în punctul $\mathbf{y}_0$ este nenul.

Mulţimea $D=\{\mathbf{y}\in D_0:\det J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})\neq 0\}$ este deschisă şi conţine punctul $\mathbf{y}_0$, iar transformarea $\boldsymbol{\varphi}_{/D}$ este regulată.

După Teorema 8.8.1, punctul (ii), există o vecinătate $U\subset D$, $U\in\mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$, astfel încât $\boldsymbol{\varphi}_{/U}$ să fie un difeomorfism.

Deoarece $\boldsymbol{\varphi}_{/U}=\mathbf{h}\circ\mathbf{f}_{/U}$, unde

$$\mathbf{h}:\mathbf{f}(U)\to I\!\!R^n,\quad \mathbf{h}(\mathbf{x})=(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_n}),$$

rezultă că transformarea $\mathbf{f}_{/U}$ este bijectivă şi $(\mathbf{f}_{/U})^{-1}=(\boldsymbol{\varphi}_{/U})^{-1}\circ\mathbf{h}$.

Prin urmare, $(\mathbf{f}_{/U})^{-1}$ este continuă, adică $\mathbf{f}_{/U}$ este homeomorfism şi în consecinţă este şi difeomorfism. **q.e.d.**

8.9 Dependenţă şi independenţă funcţională

Fie $\mathbf{f}=(f_1,f_2,...,f_m)\in\mathcal{F}(D,I\!\!R^m)$, o funcţie vectorială de argumentul vectorial $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in D$, unde $D\subset I\!\!R^n$ este o mulţime deschisă în spaţiul vectorial topologic $I\!\!R^n$. Considerăm, de asemenea, funcţia reală

$g \in \mathcal{F}(D)$.

Definiţia 8.9.1. *Spunem că funcţia* g **depinde funcţional** *de funcţiile*

$$f_1, \quad f_2, \quad ..., \quad f_m$$

pe submulţimea $D_1 \subset D$, *dacă există funcţia reală* $G \in \mathcal{F}(U)$, $U \subset I\!R^m$, $\mathbf{f}(D_1) \subset U$, *astfel încât*

$$g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = G(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D_1. \tag{8.198}$$

Definiţia 8.9.2. *Funcţiile* $f_j \in \mathcal{F}(D)$, $j \in \overline{1,m}$, *se numesc* **dependente funcţional** *pe submulţimea* $D_1 \subset D$, *dacă cel puţin una dintre ele depinde de celelalte pe* D_1.

Definiţia 8.9.3. *Funcţiile* $f_j \in \mathcal{F}(D)$, $j \in \overline{1,m}$, *se numesc* **independente funcţional** *în punctul* $\mathbf{x}_0 \in D$, *dacă nici una dintre funcţii nu depinde de celelalte în nici o vecinătate a lui* $\mathbf{x}_0$.

Definiţia 8.9.4. *Funcţiile* $f_j \in \mathcal{F}(D)$, $j \in \overline{1,m}$, *se numesc* **independente funcţional** *pe mulţimea* D *dacă sunt independente în fiecare punct din* D.

Lema 2. *Fie* $D \subset I\!R^n$, $D = \overset{\circ}{D}$ *şi* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$.

Dacă funcţiile $f_j \in \mathcal{F}(D)$, $j \in \overline{1,m}$, *sunt dependente funcţional pe submulţimea* $D_1 \subset D$, *atunci mulţimea* $\mathbf{f}(D_1) \subset I\!R^m$ *nu conţine puncte interioare.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{y}_0 = (y_{0\,1}, y_{0\,2}, ..., y_{0\,m-1}, y_{0\,m}) \in \mathbf{f}(D_1)$. Atunci, există $\mathbf{x}_0 \in D_1$ astfel încât $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Funcţiile $f_j \in \mathcal{F}(D)$, $j \in \overline{1,m}$, fiind dependente funcţional pe mulţimea D_1, după Definiţia 8.9.2, cel puţin una depinde de celelalte pe D_1.

Să presupunem că funcţia f_m depinde funcţional de $f_1, f_2, ..., f_{m-1}$ pe mulţimea D_1. Atunci, există o funcţie reală $G \in \mathcal{F}(U)$, $U \subset I\!R^{m-1}$, unde $\widetilde{\mathbf{f}}\,(D_1) \subset U$, $\widetilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, ..., f_{m-1})$, astfel încât

$$f_m(\mathbf{x}) = G(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_{m-1}(\mathbf{x})) = G(\widetilde{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x})), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D_1, \tag{8.199}$$

de unde deducem

$$f_m(\mathbf{x}_0) = G(f_1(\mathbf{x}_0), f_2(\mathbf{x}_0), ..., f_{m-1}(\mathbf{x}_0)) = G(y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m-1}). \tag{8.200}$$

Să considerăm acum vectorul $y_0^\varepsilon = (y_{0\,1}, y_{0\,2}, ..., y_{0\,m-1}, y_{0\,m} + \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar, şi să arătăm că $\mathbf{y}_0^\varepsilon \notin \mathbf{f}(D_1)$.

Presupunem contrariul. Atunci, există $\mathbf{x}_\varepsilon \in D_1$, astfel încât

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon) = (y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m-1}, y_{0m} + \varepsilon) \tag{8.201}$$

Ţinând cont de (8.199), (8.201) şi (8.200), găsim relaţia

$$y_{0m} + \varepsilon = f_m(\mathbf{x}_\varepsilon) = G(\widetilde{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x}_\varepsilon)) = G(y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m-1}) = y_{0m},$$

care contrazice definiţia unei funcţii. **q.e.d.**

În continuare vom presupune că $m \leq n$.

Teorema 8.9.1. *Fie* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in C^1(D, I\!R^m)$, *unde* $D = \overset{\circ}{D}$ *şi* $D \subset I\!R^n$.

Dacă în orice punct $\mathbf{x} \in D$ *rangul matricei jacobiene* $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ *este* m, *atunci funcţiile* $f_j \in \mathcal{F}(D)$, $j \in \overline{1,m}$, *sunt independente funcţional pe* D.

Demonstraţie. Rangul matricei jacobiene fiind m, există $m-$upla de numere întregi

$$j = (j_1, j_2, ..., j_m), \quad \text{cu} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_m \leq n,$$

astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m})}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{8.202}$$

Un vector arbitrar $\mathbf{x} \in D$ se poate scrie sub forma $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{y})$, unde $\mathbf{y} = (x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m})$, iar $\mathbf{u} \in I\!R^{n-m}$ este vectorul ale cărui coordonate în baza canonică din $I\!R^{n-m}$ sunt, în ordine, coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ neutilizate în vectorul $\mathbf{y}$. Atunci (8.202) se poate scrie în forma

$$\det J_{\mathbf{y}\,\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \neq 0, \quad \forall\, (\mathbf{u}, \mathbf{y}) \in D. \tag{8.203}$$

Condiţia (8.203) arată că matricea pătratică de ordinul m

$$J_{\mathbf{y}\,\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{j_m}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{j_1}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) & ... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{j_m}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \tag{8.204}$$

este matrice nesingulară.

Cu ajutorul matricei (8.204) se poate scrie expresia analitică a diferenţialei reduse, în raport cu variabila $\mathbf{y}$, a funcţiei $\mathbf{f}$, în punctul $(\mathbf{u}, \mathbf{y})$,

$$d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{e}'\Big(J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{y})dU\Big),$$

unde dU este matricea coloană cu m linii care are drept elemente diferenţialele dx_{j_1}, $dx_{j_2}, ..., dx_{j_m}$.

Fie acum $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in D$, fixat dar arbitrar,

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0) \quad \text{şi} \quad \det J_{\mathbf{y}\,\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Deoarece $\mathbf{f} \in C^1(D, I\!R^m)$, rezultă că există o vecinătate deschisă $V_0 \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$, astfel încât $\det J_{\mathbf{y}\,\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \neq 0$, pentru orice $\mathbf{x} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \in V_0 \cap D$, de unde rezultă că aplicaţia liniară

$$d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \in L(I\!R^m, I\!R^m), \quad d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y})(\mathbf{h}) = \mathbf{e}'\Big(J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y})\, H\Big),$$

unde $\mathbf{h} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} h_j\, \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'\, H$ este un vector arbitrar din $I\!R^m$, este un izomorfism liniar de la $I\!R^m$ în $I\!R^m$.

Să notăm $V'_0 = \{\mathbf{y} \in I\!R^m : (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \in D \cap V_0\}$. Din faptul că D şi V_0 sunt mulţimi deschise rezultă că V'_0 este mulţime deschisă în $I\!R^m$.

Fie acum funcţia

$$\mathbf{f}^{\,1} \in \mathcal{F}(V'_0, I\!R^m), \quad \mathbf{f}^{\,1}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}), \quad \forall, \mathbf{y} \in V'_0.$$

Deoarece $\mathbf{f} \in C^1(D, I\!R^m)$ rezultă că $\mathbf{f}^{\,1} \in C^1(V_0', I\!R^m)$ şi prin urmare $\mathbf{f}^{\,1}(V_0)$ este mulţime deschisă în $I\!R^m$ care conţine punctul

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{f}^{\,1}(\mathbf{y}_0).$$

Să presupunem că funcţiile $f_j \in \mathcal{F}(D),\ j \in \overline{1,m}$, nu sunt independente în punctul $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)$. Atunci există o vecinătate $U_o \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$, $U_0 \subset D$, pe care funcţiile $f_j \in \mathcal{F}(D),\ j \in \overline{1,m}$, sunt dependente funcţional. Fără să restrângem generalitatea putem presupune că $V_0 \subset U_0$. Atunci din Lema 2 rezultă că $\mathbf{f}(U_0)$ nu conţine puncte interioare.

Însă, pe de altă parte, avem

$$\mathbf{f}^{\,1}(V_0') \subset \mathbf{f}(V_0 \cap D) \subset \mathbf{f}(U_0 \cap D) \subset \mathbf{f}(U_0). \tag{8.205}$$

Dacă ţinem cont că mulţimea $\mathbf{f}^{\,1}(V_0')$ este deschisă în $I\!R^m$, atunci rezultatul din (8.205) intră în contradicţie cu concluzia Lemei 2 şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Teorema 8.9.2. *Fie mulţimea deschisă $D \subset I\!R^n$ şi funcţia $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$. Dacă $\mathbf{f} \in C^1(D, I\!R^m)$ şi $\mathrm{rang} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = s < m \leq n,\ \forall\, \mathbf{x} \in D$, atunci s dintre funcţiile $f_j \in \mathcal{F}(D),\ j \in \overline{1,m}$, sunt independente funcţional, iar celelalte $m - s$ funcţii sunt dependente funcţional de acestea.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{x}_0 = (x_{0\,1}, x_{o\,2}, ..., x_{0\,n}) \in D$. Deoarece $\mathrm{rang} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = s$, există o vecinătate deschisă $V_0 \subset D$ astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_s)}{D(x_1, x_2, ..., x_s)}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall\, \mathbf{x} \in V_0. \tag{8.206}$$

Dacă în (8.206) nu intră primele s funcţii coordonate ale lui $\mathbf{f}$ şi primele s variabile independente ale funcţiei, o renumerotare a funcţiilor şi a variabilelor conduce la (8.206).

În baza Teoremei 8.8.1, funcţiile $f_1, f_2, ..., f_s$ sunt independente funcţional pe V_0.

Să arătăm că celelalte funcţii depind de funcţiile $f_1, f_2, ..., f_s$ pe V_0.

Pentru aceasta, introducem vectorul $\mathbf{y} \in I\!R^s$, unde

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_s) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_s(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in D$$

şi funcţia

$$\begin{array}{c} \mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_s) \in \mathcal{F}(D \times I\!R^s, I\!R^s), \\ F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i,\ \ i \in \overline{1,s}, \ \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D \times I\!R^s. \end{array} \tag{8.207}$$

Funcţia (8.207) satisface următoarele condiţii:

$$\begin{cases} \mathbf{F} \in C^1(D \times I\!R^s, I\!R^s); \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_{I\!R^s}; \\ \dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_s)}{D(x_1, x_2, ..., x_s)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0, \end{cases} \tag{8.208}$$

unde

$$\mathbf{y}_0 = (f_1(\mathbf{x}_0), f_2(\mathbf{x}_0), ..., f_s(\mathbf{x}_0)) = (y_{0\,1}, y_{0\,2}, ..., y_{0\,s}).$$

Condiţiile (8.208) sunt tocmai ipotezele Teoremei 8.4.3

Conform Teoremei 8.4.3, există $\delta > 0$ şi $\varepsilon > 0$, astfel încât

$$B\Big((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\Big) \times B(\mathbf{x}_0', \varepsilon) \subset D \times I\!R^s,$$

unde $\mathbf{x}_0' = (x_{0\,1}, ..., x_{0\,s})$, $\mathbf{x}_0'' = (x_{0\,s+1}, ..., x_{0\,n})$. De asemenea, există funcţia vectorială de argument vectorial $\boldsymbol{\varphi} : B\Big((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\Big) \to B(\mathbf{x}_0', \varepsilon)$ cu proprietăţile:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0';$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}\,(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}''), \mathbf{x}'', \mathbf{y}) = \mathbf{0} \in I\!R^s; \tag{8.209}$$

$$\boldsymbol{\varphi} \text{ este funcţie diferenţiabilă pe bila } B\Big((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\Big),$$

unde $\mathbf{x}'' = (x_{s+1}, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_s)$.

Să considerăm indicele k astfel încât $s < k \le m$. Definim funcţia G_k de variabilele $x_{s+1}, ..., x_n; y_1, ..., y_s$ prin

$$\begin{aligned} &G_k(x_{s+1}, ..., x_n; y_1, ..., y_s) = \\ &= f_k\Big(\boldsymbol{\varphi}(x_{s+1}, ..., x_n; y_1, ..., y_s), x_{s+1}, ..., x_n\Big). \end{aligned} \tag{8.210}$$

Vom arăta că funcţia G_k nu depinde de variabilele $x_{s+1}, ..., x_n$. Pentru a arăta aceasta să derivăm folosind regula lanţului atât coordonatele funcţiei $\widetilde{\mathbf{F}}$ din (8.209) cât şi funcţia G_k din (8.210) în raport cu variabila x_j, unde $s < j \le n$. Dacă mai ţinem cont şi de (8.207), obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, \widetilde{F}_1}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + ... + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s}\cdot\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial\, \widetilde{F}_2}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + ... + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_s}\cdot\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j} = 0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots, \\ \dfrac{\partial\, \widetilde{F}_s}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + ... + \dfrac{\partial f_s}{\partial x_s}\cdot\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_s}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial G_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + ... + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_s}\cdot\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}, \end{cases} \tag{8.211}$$

unde derivatele din membrul întâi sunt calculate în punctul

$$(\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}) \in B\Big((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\Big).$$

Ecuaţiile (8.211) constituie un sistem liniar şi neomogen de $s+1$ ecuaţii cu necunoscutele $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}, ... \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}$, despre care ştim apriori că are soluţii, întrucât funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ există conform Teoremei 8.4.3. Rangul sistemului (8.211) este s în baza lui (8.206). Sistemul este compatibil dacă toţi determinanţii caracteristici sunt nuli. În cazul sistemului (8.211), există un singur determinant caracteristic. Prin urmare, obţinem

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} - \dfrac{\partial G_k}{\partial x_j} \end{vmatrix} = 0. \tag{8.212}$$

Aplicând proprietăţile determinanţilor, din (8.212) deducem

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_s} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} & 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_s} & 0 \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_s} & -\dfrac{\partial G_k}{\partial x_j} \end{vmatrix} = 0. \tag{8.213}$$

Întrucât $\operatorname{rang} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = s$, orice minor de ordin mai mare cel puţin egal cu $s+1$ extras din matricea funcţională $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ este egal cu zero. Prin urmare, primul determinant din membrul întâi al lui (8.213) este nul.

Dezvoltând cel de al doilea determinant din (8.213) după elementele ultimei coloane, obţinem

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_s)}{D(x_1, x_2, ..., x_s)}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = 0. \tag{8.214}$$

Folosind acum (8.206), din (8.214) găsim

$$\frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = 0, \quad s < j \leq n, \quad \forall\, (\mathbf{x}'', \mathbf{y}) \in B\Big((\mathbf{x}''_0, \mathbf{y}_0), \delta\Big). \tag{8.215}$$

Egalitatea (8.215) arată că funcţia G_k din (8.210) nu depinde de variabilele x_j, cu $s < j \leq n$, deoarece diferenţiala sa redusă în raport cu variabilele x_j, $s < j \leq n$, este nulă pe mulţimea deschisă $B\Big((\mathbf{x}''_0, \mathbf{y}_0), \delta\Big)$.

Prin urmare, funcţia G_k depinde doar de variabilele y_1, y_2, ..., y_n, fapt ce se poate scrie în forma

$$G_k(x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \quad = \quad \Phi_k(y_1, y_2, ..., y_n), \tag{8.216}$$

sau

$$G_k(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}). \tag{8.217}$$

Din (8.210) şi (8.216), sau (8.217), deducem

$$f_k(\mathbf{x}) = \Phi(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_s(\mathbf{x})), \tag{8.218}$$

oricare ar fi punctul $\mathbf{x} \in B\Big((\mathbf{x}''_0, \mathbf{y}_0), \delta\Big) \times B(\mathbf{x}'_0, \varepsilon) \subset D$.

În baza Definiţiei 8.9.1, relaţia (8.218) demonstrează că oricare din funcţiile f_{s+1}, f_{s+1}, ..., f_n depinde de funcţiile f_1, f_2, ..., f_s. **q.e.d.**

8.10 Coordonate curbilinii în plan

Fie D o mulţime închisă în $I\!R^2$ cu proprietatea că interiorul ei $\overset{\circ}{D}$ este o mulţime nevidă, a cărui frontieră este (L), deci $D = \overset{\circ}{D} \cup (L)$, şi fie $\Delta \subset I\!R^2$ o altă mulţime închisă în $I\!R^2$, cu aceeaşi proprietate şi care are frontiera (Λ). Dacă în spaţiul afin Euclidian $I\!E^2$ se alege reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, unde O este originea reperului, iar $\mathcal{B} = \{\mathbf{i} = (1,0), \mathbf{j} = (0,1)\}$ este baza canonică din $I\!R^2$, atunci orice punct $M \in I\!E^2$ este unic determinat prin două coordonate carteziene x şi y care reprezintă mărimile algebrice ale proiecţiei ortogonale a vectorului de poziţie $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ al punctului M pe respectiv versorii $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$ ai axelor de coordonate Ox şi Oy ale reperului cartezian $\mathcal{R}$.

Definiţia 8.10.1. *Transformarea* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$, *de ecuaţii*

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v), \\ y = \varphi_2(u,v), \end{cases} \tag{8.219}$$

se numeşte **sistem de coordonate curbilinii** *pe mulţimea* $D \subset I\!R^2$, *dacă restricţia funcţiei* $\boldsymbol{\varphi}$ *la mulţimea* $\overset{\circ}{\Delta}$ *este un difeomorfism.*

Dacă figurăm mulţimea D în reperul Oxy, iar mulţimea Δ în reperul $O'uv$, atunci putem spune că dacă punctul $M'(u,v)$ parcurge mulţimea Δ, punctul corespunzător $M(x,y)$, unde valorile lui x şi y sunt date de (8.219), descrie mulţimea D.

Deoarece transformarea $\boldsymbol{\varphi}$ este bijectivă, la două puncte distincte $M_1' \in \Delta$ şi $M_2' \in \Delta$ corespund două puncte distincte $M_1 \in D$ şi $M_2 \in D$. Din Teorema 8.8.1 de inversare locală a funcţiilor, rezultă că sistemul de ecuaţii (8.219), în care $(u,v) \in \overset{\circ}{\Delta}$, iar $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$, defineşte transformarea inversă $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\overset{\circ}{D}, \overset{\circ}{\Delta})$, ale cărei ecuaţii sunt

$$\begin{cases} u = f_1(x,y), \\ v = f_2(x,y). \end{cases} \tag{8.220}$$

Transformarea regulată (8.220) este, de asemenea, un difeomorfism.

Matricele jacobiene

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

şi

$$J_{\mathbf{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

ale respectiv transformărilor (8.219) şi (8.220), sunt matrice pătratice de ordinul doi nesingulare şi

$$\det J_{\boldsymbol{\varphi}}(u,v) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(x,y)}, \tag{8.221}$$

oricare ar fi perechea $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$, perechea $(u,v) \in \overset{\circ}{\Delta}$ fiind cea corespunzătoare perechii (x,y) prin transformarea de ecuaţii (8.219).

Egalitatea (8.221) poate fi scrisă echivalent în forma

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}(u,v) \cdot \frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(x,y) = 1. \tag{8.222}$$

Dacă în mulţimea Δ se consideră o curbă netedă, sau netedă pe porţiuni (γ), reprezentată parametric prin

$$(\gamma) : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset I\!R, \end{cases} \tag{8.223}$$

atunci imaginea continuă a curbei (γ) prin transformarea (8.219) este submulţimea $(\Gamma) = \{M \in I\!E^2 : M = (x,y)\} \subset D$, unde

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = \varphi_1(u(t), v(t), \\ y = \varphi_2(u(t), v(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases} \tag{8.224}$$

care reprezintă, de asemenea, o curbă netedă, sau netedă pe porţiuni (Γ), situată în mulţimea D, deoarece existenţa şi continuitatea derivatelor $\dfrac{du}{dt}$, $\dfrac{dv}{dt}$, eventual pe porţiuni, induc aceleaşi proprietăţi derivatelor $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$.

Legătura dintre aceste derivate se deduce prin regula de derivare a funcţiilor reale compuse. Se obţine

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) & = & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u(t),v(t)\,\dfrac{du}{dt}(t)+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u(t),v(t)\,\dfrac{dv}{dt}(t) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) & = & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u(t),v(t)\,\dfrac{du}{dt}(t)+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u(t),v(t)\,\dfrac{dv}{dt}(t). \end{cases} \tag{8.225}$$

Din ecuaţiile (8.225) rezultă că unui punct regulat de pe curba (γ), adică un punct $(u(t),v(t))$, în care funcţiile u şi v sunt continue, derivabile şi suma pătratelor derivatelor pozitivă, îi corespunde un punct regulat pe curba (Γ), iar punctele singulare ale celor două curbe se corespund.

Teorema 8.10.1. *Dacă $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{F}(\Delta,D)$ este un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea închisă D, atunci frontiera (Λ) a mulţimii Δ este transformată în frontiera (L) a mulţimii închise D.*

Demonstraţie. Procedăm prin reducere la absurd.

În acest sens, presupunem că punctul $(x_0,y_0)\in(L)$ corespunde unui punct $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{\Delta}$.

Aplicând teorema funcţiilor implicite sistemului

$$\begin{cases} F_1(x,y;u,v) & = & \varphi_1(u,v)-x & = & 0, \\ F_2(x,y;u,v) & = & \varphi_2(u,v)-y & = & 0, \end{cases}$$

se poate defini u şi v ca funcţiii de variabilele x şi y într–o vecinătate a punctului (x_0,y_0).

Însă, orice vecinătate a unui punct frontieră conţine puncte care nu aparţin lui D şi deci punctul $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{\Delta}$ poate avea o vecinătate inclusă în Δ care să nu fie transportată în D, ceea ce ar contrazice faptul că $\boldsymbol{\varphi}$ este transformare regulată. **q.e.d.**

Fie $(x_0,y_0)\in\overset{\circ}{D}$ şi $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{\Delta}$ astfel încât

$$x_0=\varphi_1(u_0,v_0) \text{ şi } y_0=\varphi_2(u_0,v_0).$$

Segmentul de dreaptă $u=u_0$, situat în mulţimea Δ, este transformat în curba netedă de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x & = & \varphi_1(u_0,v), \\ y & = & \varphi_2(u_0,v), \quad v\in I\!\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0,v)\in\Delta, \end{cases} \tag{8.226}$$

situată în mulţimea D.

Vectorul tangent la curba (8.226), în punctul $M_0(x_0,y_0)\in\overset{\circ}{D}$ al ei, este

$$\mathbf{c}_2=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0,v_0)=d\boldsymbol{\varphi}\Big((u_0,v_0);\mathbf{j}\Big). \tag{8.227}$$

În mod similar, segmentul de dreaptă $v=v_0$ din mulţimea Δ este transformat în curba netedă

$$\begin{cases} x & = & \varphi_1(u,v_0), \\ y & = & \varphi_2(u,v_0), \quad u\in I\!\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u,v_0)\in\Delta, \end{cases} \tag{8.228}$$

la care vectorul director al tangentei în M_0 este

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0) = d\boldsymbol{\varphi}\Big((u_0, v_0); \mathbf{i}\Big). \tag{8.229}$$

Dacă efectuăm produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{c}_1$ şi $\mathbf{c}_2$, găsim

$$\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}, \quad \text{unde} \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}. \tag{8.230}$$

Deoarece $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$ rezultă că vectorii $\mathbf{c}_1$, şi $\mathbf{c}_2$ sunt necoliniari, sau liniar independenţi.

Definiţia 8.10.2. *Fie $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea închisă $D \subset I\!R^2$.*

*Curbele de ecuaţii parametrice (8.226) şi (8.228), situate în domeniul închis D şi în care (u_0, v_0) este orice punct din $\overset{\circ}{\Delta}$, se numesc **curbe de coordonate** pe mulţimea închisă D.*

Observaţia 8.10.1. *Deoarece transformarea (8.219) este un difeomorfism pe $\overset{\circ}{\Delta}$, există o unică curbă (8.226) care trece printr–un punct $M(x, y) \in \overset{\circ}{D}$, obţinută dând lui u o valoare constantă, şi o unică curbă de forma (8.228), corespunzătoare unei valori constante a lui v. În consecinţă, mărimile u şi v pot fi privite drept coordonate ale punctelor aparţinând mulţimii închise D, coordonate care sunt diferite de cele carteziene.*

Definiţia 8.10.3. *Fie $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea închisă $D \subset I\!R^2$ şi perechea $(u, v) \in \Delta$ căreia îi corespunde punctul $M(x, y) \in D$.*

Mărimile u şi v se numesc **coordonate curbilinii** *ale punctului $M \in D$.*

Observaţia 8.10.2. *Din punct de vedere geometric, variabilele u şi v ale funcţiei $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$, care defineşte un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea închisă D, pot fi interpretate în două moduri: pe de o parte ele sunt coordonatele punctelor mulţimii închise Δ şi, pe de altă parte, ele sunt coordonatele curbilinii ale punctelor aparţinând mulţimii închise D.*

Observaţia 8.10.3. *Orice ecuaţie de forma $F(u, v) = 0$, unde funcţia reală F satisface ipotezele teoremei funcţiilor implicite poate fi interpretată fie ca ecuaţia în coordonate carteziene a unei curbe (γ), situată în mulţimea închisă Δ, fie ca ecuaţia în coordonate curbilinii a unei curbe (Γ) care este imaginea în D a curbei (γ) prin transformarea (8.219).*

Definiţia 8.10.4. *Sistemul de coordonate curbilinii pe $D \subset I\!R^2$ definit de ecuaţiile (8.219) se numeşte* **ortogonal** *dacă*

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0, \quad \forall\,(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta},$$

unde $\mathbf{c}_1$ şi $\mathbf{c}_2$ sunt vectorii introduşi în (8.227) şi respectiv (8.229).

Pe lângă vectorii $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,$ punctului M_0 de coordonate curbilinii (u_0, v_0) îi asociem şi numerele reale

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \Big(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0)\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0)\Big)^2, \\ g_{12} = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0), \\ g_{22} = \mathbf{c}_2^2 = \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \Big(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0)\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0)\Big)^2. \end{cases} \tag{8.231}$$

Observaţia 8.10.4. *Dacă sistemul de coordonate curbilinii pe D este ortogonal, atunci $g_{12} = 0,\ \forall\,(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$.*

Definiţia 8.10.5. *Fie $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea închisă $D \subset \mathbb{R}^2$ care are proprietatea că interiorul ei $\overset{\circ}{D}$ este mulţime conexă. Numerele pozitive $h_1,\ h_2,$ unde*

$$h_1 = \|\mathbf{c}_1\|, \quad h_2 = \|\mathbf{c}_2\|$$

se numesc **parametrii lui Lamé** [2]*, sau, în cazul unui sistem ortogonal de coordonate curbilinii,* **factorii de scală** *asociaţi coordonatelor curbilinii (u_0, v_0) ale punctului M_0.*

Observaţia 8.10.5. *Dacă sistemul de coordonate curbilinii $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ este ortogonal atunci*

$$h_1 h_2 = \Big|\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\Big|. \tag{8.232}$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din $h_1 h_2 = \|\mathbf{c}_1\| \cdot \|\mathbf{c}_2\|$ şi faptul că vectorii $\mathbf{c}_1$ şi $\mathbf{c}_2$ sunt ortogonali. În această situaţie, $h_1 h_2 = \|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|,$ iar în baza relaţiei (8.230), rezultă (8.232). ■

Observaţia 8.10.6. *Noţiunile şi rezultatele de mai sus s–au prezentat pentru cazul când mulţimile D şi Δ sunt închise, iar $\overset{\circ}{D}$ şi $\overset{\circ}{\Delta}$ sunt mulţimi nevide. Aceste noţiuni şi rezultate se păstrează dacă D şi Δ sunt mulţimi oarecare din plan cu precizarea că, din nou, $\overset{\circ}{D}$ şi $\overset{\circ}{\Delta}$ sunt mulţimi nevide.*

8.10.1 Coordonate polare în plan

Orice punct M din spaţiul punctual afin Euclidian bidimensional $\mathbb{E}^2,$ raportat la reperul cartezian $Oxy,$ este unic determinat de coordonatele carteziene x şi $y.$ În acelaşi timp, orice punct M din $\mathbb{E}^2,$ diferit de originea reperului, este unic determinat de distanţa sa până la origine, notată cu $r,$ şi unghiul $\theta \in (-\pi, \pi],$ sau $\theta \in [0, 2\pi]$ pe care vectorul de poziţie al punctului M îl face cu o semidreaptă fixată. Cel mai adesea, originea semidreptei, care se numeşte *pol*, coincide cu cea a reperului cartezian $Oxy,$ iar semidreapta, numită *axă polară*, are aceeaşi direcţie cu axa absciselor. Deci, versorul axei polare este $\mathbf{i}.$

Definiţia 8.10.6. *Ansamblul format dintr–un punct $O,$ numit* **pol***, şi o semiaxă $Ox,$ de versor director $\mathbf{i},$ numită* **axă polară***, se numeşte* **reper polar în plan***.*

[2] Lamé, Gabriel (1795–1870), om de ştiinţă francez.

Fiecărui punct $M \in I\!\!E^2$, cu excepţia originii, i se poate ataşa fie perechea (x,y), formată cu coordonatele carteziene ale punctului, fie perechea (r,θ).

Dacă polul reperului polar este originea O a reperului cartezian Oxy, iar axa polară este semiaxa pozitivă a axei absciselor, adică semidreapta Ox, atunci

$$(x,y) = \overrightarrow{OM} = \boldsymbol{\varphi}(r,\theta), \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathcal{F}(\Delta, I\!\!R^2 \setminus \{(0,0)\}), \tag{8.233}$$

unde $\Delta = (0,\infty) \times [0, 2\pi)$.

Se constată că

$$\begin{cases} x = \varphi_1(r,\theta) = r\cos\theta, \\ y = \varphi_2(r,\theta) = r\sin\theta, \end{cases} \tag{8.234}$$

unde $(r,\theta) \in \Delta$, iar $(x,y) \in I\!\!R^2 \setminus \{(0,0)\} = D$.

Restricţia funcţiei $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2)$ la domeniul $\overset{\circ}{\Delta} = (0,\infty) \times (0,2\pi)$ este difeomorfism, deoarece din (8.234) rezultă că:

- funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ este continuă pe Δ;
- funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ are derivate parţiale continue pe $\overset{\circ}{\Delta}$;
- matricea jacobiană

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{pmatrix} \tag{8.235}$$

  este nesingulară;
- jacobianul transformării $\boldsymbol{\varphi}$, într–un punct din interiorul mulţimii Δ, este pozitiv

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(r,\theta)}(r,\theta) = r > 0; \tag{8.236}$$

- funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ transformă domeniul $\overset{\circ}{\Delta} = (0,\infty) \times (0,2\pi)$ în domeniul $\overset{\circ}{D} = I\!\!R^2 \setminus \{(x,0) : \ x \geq 0\}$.

Prin urmare, (r,θ) sunt coordonate curbilinii care se numesc *coordonate polare în plan.*

Curbele de coordonate ale acestui sistem de coordonate curbilinii sunt, pe de o parte, *cercuri concentrice* cu centrul în origine (curbele $r = r_0 = \text{ const. }$) şi, pe de altă parte, *semidrepte* limitate de origine (curbele $\theta = \theta_0 = \text{ const. }$).

Prima coloană a matricei jacobiene din (8.235), în care $r = r_0 > 0$ şi $\theta = \theta_0 \in (0,2\pi)$, reprezintă matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{c}_1$ în baza canonică din $I\!\!R^2$, vector care este tangent la curba de coordonate de ecuaţie $\theta = \theta_0$ în punctul M_0 de coordonate curbilinii (r_0,θ_0).

Coloana a doua a aceleiaşi matrice este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{c}_2$ tangent în $M_0(r_0,\theta_0)$ la curba de coordonate $r = r_0$.

Dacă sensurile de parcurs ale curbelor de coordonate prin M_0 se stabilesc a fi sensurile pozitive de parcurs, adică sensurile imprimate de creşterile parametrilor $r \in (0,\infty)$ şi respectiv $\theta \in (0,2\pi)$, atunci aceste sensuri imprimă sensurile vectorilor $\mathbf{c}_1$ şi $\mathbf{c}_2$. Aşadar,

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \cos\theta_0\mathbf{i} + \sin\theta_0\mathbf{j}, \\ \mathbf{c}_2 = -r_0\cos\theta_0\,\mathbf{i} + r_0\cos\theta_0\,\mathbf{j}. \end{cases} \tag{8.237}$$

Din (8.237) deducem că $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0$, ceea ce arată că sistemul coordonatelor polare în plan este un sistem ortogonal de coordonate curbilinii. Apoi,

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = r_0^2. \tag{8.238}$$

Parametrii lui Lamé corespunzători sistemului de coordonate polare în plan sunt $h_1 = 1$ şi $h_2 = r_0$. Observăm că

$$h_1 h_2 = \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(r,\theta)}(r_0,\theta_0), \quad \forall\, r_0 > 0, \quad \forall\, \theta_0 \in (0,2\pi). \tag{8.239}$$

Transformarea inversă a transformării (8.234) este funcţia vectorială

$$\mathbf{f} = (f_1,f_2) \in \mathcal{F}(I\!R^2 \setminus \{(x,0):\ x \geq 0\}, (0,+\infty)\times(0,2\pi), \tag{8.240}$$

unde

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x,y) \in I\!R^2 \setminus \{(x,0):\ x \geq 0\} \tag{8.241}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{dacă} \quad x > 0, \quad y > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă} \quad x = 0, \quad y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{dacă} \quad x < 0, \quad y \in I\!R, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{dacă} \quad x = 0, \quad y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{dacă} \quad x > 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{8.242}$$

Geometric, $f_1(x,y)$ reprezintă distanţa r de la originea reperului cartezian care coincide cu polul *reperului polar* (*ansamblu dintre un punct numit pol şi o semidreaptă numită axă polară*), iar $f_2(x,y)$ este unghiul, măsurat în sens direct trigonometric, dintre versorul $\mathbf{i}$ şi vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}$ a punctului $M(x,y)$.

8.10.2 Coordonate polare generalizate în plan

Fie $a \in I\!R_+^*$, $b \in I\!R_+^*$ şi transformarea

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathcal{F}(0,\infty)\times[0,2\pi), I\!R^2 \setminus \{\mathbf{0}\}),$$
$$\begin{cases} x = \varphi_1(\rho,\varphi) = a\rho\cos\varphi, \\ y = \varphi_2(\rho,\varphi) = b\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{8.243}$$

Funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ din relaţiile (8.243) este bijectivă, iar restricţia sa la mulţimea deschisă $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ este funcţie diferenţiabilă şi are matricea jacobiană

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} a\,\cos\varphi & -a\,\rho\,\sin\varphi \\ b\,\sin\varphi & b\,\rho\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{8.244}$$

Jacobianul acestei restricţii,

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(\rho,\varphi)}(\rho,\varphi) = ab\rho,$$

este pozitiv pe mulţimea $(0,\infty)\times(0,2\pi)$.

Prin urmare, (8.243) defineşte un sistem de coordonate curbilinii în plan.

Curbele, sau liniile de coordonate sunt, pe de o parte, elipse omofocale cu axele de coordonate axe de simetrie şi raportul semiaxelor egal cu $\dfrac{a}{b}$, obţinute pentru $\rho =$ const. şi, pe de altă parte, semidrepte limitate de origine care se obţin când $\varphi =$ const..

Vectorii tangenţi la curbele de coordonate care trec prin punctul M de coordonate curbilinii ρ şi φ sunt

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\rho}(\rho,\varphi) = a\cos\varphi\mathbf{i} + b\sin\varphi\mathbf{j}, \\ \mathbf{c}_2 = \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\varphi}(\rho,\varphi) = -a\rho\sin\varphi\mathbf{i} + b\rho\cos\varphi\mathbf{j}. \end{cases} \tag{8.245}$$

Mărimile care se determină cu ajutorul vectorilor (8.245) sunt:

$$\begin{cases} g_{11} &= a^2\,\cos^2\varphi + b^2\,\sin^2\varphi, \\ g_{12} &= (b^2-a^2)\rho\sin\varphi\cos\varphi \\ g_{22} &= \rho^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi); \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 &= \|\mathbf{c}_1\| &= \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \\ h_2 &= \|\mathbf{c}_2\| &= \rho\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Sistemul de coordonate curbilinii în plan definit de (8.243) nu este ortogonal fiindcă $g_{12} \neq 0$, iar dacă $a = b = 1$ se reduce la sistemul coordonatelor polare în plan.

Sistemul de coordonate curbilinii definit de (8.243) se numeşte *sistemul coordonatelor polare generalizate în plan.*

Exemplul 8.10.1. *Funcţia vectorială de argument vectorial*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(D, \Delta),$$

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= \dfrac{y}{x}, \\ f_2(x,y) &= \dfrac{x^2}{y}, \end{cases} \tag{8.246}$$

unde

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 :\ x > 0,\ y > 0\}, \quad \Delta = \{(u,v) \in I\!R^2 :\ u > 0,\ v > 0\},$$

stabileşte un sistem de coordonate curbilinii pe D.

Într-adevăr, funcţia $\mathbf{f}$ din relaţiile (8.246) este un difeomorfism de la D în Δ.

Matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{f}$ este

$$J_{\mathbf{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{pmatrix},$$

din care rezultă că jacobianul este $\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(x,y) = -\dfrac{1}{y} < 0.$

Punând $u = \dfrac{y}{x}$, respectiv $v = \dfrac{x^2}{y}$, şi considerând pe rând că u şi v sunt constante pozitive, constatăm că liniile de coordonate în D sunt semidrepte deschise cu vârful în origine situate în primul cadran al reperului, respectiv segmente de parabolă cu vârful în origine, având axa de simetrie axa Oy, situate în primul cadran

Transformarea inversă a transformării regulate (8.246) este dată de

$$\begin{cases} x &= uv, \\ y &= u^2 v, \quad u > 0, \quad v > 0. \end{cases} \tag{8.247}$$

Folosind (8.247), putem determina vectorii $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$, tangenţi curbelor de coordonate, după care se pot determina elementele g_{ij}, precum şi factorii de scală h_1, h_2.

Deoarece $g_{12} \neq 0$, sistemul de coordonate curbilinii pe mulţimea D, definit de ecuaţiile (8.247), nu este un sistem ortogonal. ■

8.11 Coordonate curbilinii în $I\!R^3$.

Considerăm două configuraţii ale spaţiului punctual afin Euclidian tridimensional $I\!E^3$, care au ca spaţiu vectorial asociat spaţiul Euclidian $I\!R^3$, raportat la baza canonică $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. În una din aceste configuraţii considerăm reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\} = Oxyz$ şi mulţimea V, $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, cu frontiera S o suprafaţă netedă, sau netedă pe porţiuni, iar în celălaltă configuraţie considerăm reperul cartezian $\mathcal{R}' = \{O'; \mathcal{B}\} = O'uvw$ şi mulţimea Ω, $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$, a cărei frontieră Σ este de asemeni o suprafaţă netedă, sau netedă pe porţiuni.

Definiţia 8.11.1. *Transformarea bijectivă $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(\Omega, V)$ cu proprietatea că restricţia sa la mulţimea $\overset{\circ}{\Omega}$ este un difeomorfism se numeşte* **sistem de coordonate curbilinii** *pe mulţimea V.*

Corespondenţa biunivocă între punctele $M(x, y, z) \in V$ şi $M'(u, v, w) \in \Omega$ poate fi exprimată prin ecuaţiile

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(u, v, w), \\ y &= \varphi_2(u, v, w), \\ z &= \varphi_3(u, v, w), \end{cases} \tag{8.248}$$

sau, cu ajutorul funcţiei inverse $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(\overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{\Omega})$, prin ecuaţiile

$$\begin{cases} u &= f_1(x, y, z), \\ v &= f_2(x, y, z), \\ w &= f_3(x, y, z), \end{cases} \tag{8.249}$$

care este, de asemenea, difeomorfism de la mulţimea $\overset{\circ}{V}$ la mulţimea $\overset{\circ}{\Omega}$.

Funcţiile $\mathbf{f}$ şi $\boldsymbol{\varphi}$ satisfac relaţia

$$\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{1}_{\overset{\circ}{\Omega}}, \quad \boldsymbol{\varphi} \circ \bar{f} = \mathbf{1}_{\overset{\circ}{V}}, \tag{8.250}$$

în care prin $\mathbf{1}_{\overset{\circ}{\Omega}}$ şi $\mathbf{1}_{\overset{\circ}{V}}$ s–au notat funcţiile identice pe $\overset{\circ}{\Omega}$ şi respectiv $\overset{\circ}{V}$.

Faptul că $\boldsymbol{\varphi}$ este difeomorfism conduce la afirmaţiile:

- dacă $M'(u, v, w) \in \overset{\circ}{\Omega}$, atunci $\boldsymbol{\varphi}(u, v, w) \in \overset{\circ}{V}$;
- o suprafaţă netedă, sau netedă pe porţiuni din Ω, de ecuaţie carteziană implicită

  $$F(u, v, w) = 0, \qquad \text{unde } F \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}), \quad (\boldsymbol{\nabla} F)(u, v, w) \neq \mathbf{0}, \tag{8.251}$$

  este transportată prin aplicaţia $\boldsymbol{\varphi}$ într–o suprafaţă netedă, sau netedă pe porţiuni din V;
- orice curbă netedă, sau netedă pe porţiuni (γ) din Ω de ecuaţii implicite

  $$(\gamma): \begin{cases} F_1(u, v, w) = 0, \\ F_2(u, v, w) = 0, \end{cases} \tag{8.252}$$

  unde $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(\Omega, I\!R^2)$, $\mathbf{F} \in C^1(\overset{\circ}{\Omega})$, cu $\text{rang}\, J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = 2$, $\forall\, \mathbf{u} \in \overset{\circ}{\Omega}$, este dusă prin transformarea $\boldsymbol{\varphi}$ într–o curbă (Γ) inclusă în V şi care este de asemeni netedă, sau netedă pe porţiuni;
- punctele de pe frontiera Σ a lui Ω care aparţin lui Ω sunt transportate prin (9.1) în puncte ale frontierei S a lui V care aparţin lui V.

Fie acum $M_0'(u_0, v_0, w_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$ un punct oarecare dar fixat din interiorul lui Ω şi $J\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$, unde $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, w_0)$, matricea jacobiană a funcţiei $\boldsymbol{\varphi}$ în acest punct. Avem

$$J\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix}. \tag{8.253}$$

Matricea jacobiană prezentată în (8.253) este nesingulară şi determinantul ei este jacobianul

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}_0) \neq 0. \tag{8.254}$$

Să considerăm cazul particular în care ecuaţia (8.251) este de forma

$$w - w_0 = 0, \tag{8.255}$$

care reprezintă în Ω porţiunea de plan care trece prin punctul $M_0'(u_0, v_0, w_0)$ şi este paralel cu planul $O'uv$.

În mulţimea V, ecuaţia (8.255) reprezintă o suprafaţă netedă de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v, w_0), \quad (u, v) \in I\!R^2, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v, w_0) \in \Omega.$$

Această suprafaţă trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ care corespunde prin funcţia $\boldsymbol{\varphi}$ punctului $M_0'(u_0, v_0, w_0)$.

În mod similar, suprafeţei

$$u - u_0 = 0, \tag{8.256}$$

îi corespunde o suprafaţă care trece prin M_0 şi are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v, w), \quad (v, w) \in I\!R^2, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v, w) \in \Omega,$$

iar suprafeţei

$$v - v_0 = 0, \tag{8.257}$$

îi corespunde în V o a treia suprafaţă care trece prin M_0 şi care are ecuaţia

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v_0, w), \quad (u, w) \in I\!R^2, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0, w) \in \Omega.$$

Definiţia 8.11.2. *Fie $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Omega, V)$ un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea $V \subset I\!R^3$. Suprafeţele de ecuaţii (8.255), (8.256) şi (8.257) se numesc* **suprafeţe de coordonate** *care trec prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \overset{\circ}{V}$ corespunzător punctului $M_0'(u_0, v_0, w_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$ prin tensformarea $\boldsymbol{\varphi}$.*

Să luăm acum în (8.252) drept funcţii F_1 şi F_2 oricare două din funcţiile care intră în (8.255) – (8.257). În acest fel se obţin curbele:

$$\begin{cases} v - v_0 = 0, \\ w - w_0 = 0; \end{cases} \tag{8.258}$$

$$\begin{cases} w - w_0 = 0, \\ u - u_0 = 0; \end{cases} \tag{8.259}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = 0, \\ v - v_0 = 0. \end{cases} \tag{8.260}$$

Ecuaţiile fiecăreia din curbele (8.258) – (8.260) pot fi scrise în forme vectoriale corespunzătoare, echivalente, după cum urmează:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v_0, w_0), \quad u \in I\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0, w_0) \in \Omega; \tag{8.261}$$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v, w_0), \quad v \in I\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0, w_0) \in \Omega; \tag{8.262}$$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0, w), \quad w \in I\!R, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0, w_0) \in \Omega. \tag{8.263}$$

Definiţia 8.11.3. *Fie $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Omega, V)$ un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea $V \subset I\!R^3$.*

Curbele de ecuaţii (8.258), (8.259), (8.260), situate în mulţimea V, în care (u_0, v_0, w_0) este orice punct din $\overset{\circ}{\Omega}$, se numesc **curbe de coordonate** *pe mulţimea V.*

Observaţia 8.11.1. *Fiecare dintre curbele de coordonate poate fi reprezentată prin ecuaţia vectorială corespunzătoare extrasă din ecuaţiile (8.261), (8.262), (8.263).*

Observaţia 8.11.2. *Oricare dintre curbele de coordonate care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \overset{\circ}{V}$, corespunzător punctului $M_0'(u_0, v_0, w_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$, este intersecţia a două dintre suprafeţele de coordonate care trec prin punctul M_0.*

Tangenta în M_0 la curba de (8.258) are vectorul director

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{k}. \tag{8.264}$$

În mod similar vectorii:

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{k}; \tag{8.265}$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial w}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{k}, \tag{8.266}$$

reprezintă vectorii directori ai tangentelor în M_0 la respectiv curbele de coordonate (8.259) şi (8.260).

Observaţia 8.11.3. *Matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{c}_j$, $j = 1, 2, 3$, în baza canonică din $I\!R^3$, este coloana de indice j din matricea jacobiană (8.253).*

Observaţia 8.11.4. *Deoarece matricea jacobiană (8.253) are rangul 3, prin fiecare punct $M_0 \in \overset{\circ}{V}$ trec trei curbe de coordonate, de formele (8.261), (8.262), (8.263) şi trei suprafeţe de coordonate de ecuaţii date în (8.255), (8.256) şi (8.257).*

Observaţia 8.11.5. *Vectorii $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ din respectiv relaţiile (8.264), (8.265), (8.266) sunt liniar independenţi şi, deoarece sunt în număr egal cu dimensiunea spaţiului $I\!R^3$, formează o bază în $I\!R^3$, numită* **bază locală** *în punctul M_0.*

Într-adevăr, combinaţia liniară $\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2+\lambda_3\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$ are loc numai pentru $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathbf{0}$ deoarece rangul matricei jacobiene (9.6) este trei, rezultat care demonstrează că vectorii $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \mathbf{c}_3$ sunt liniar independenţi. ∎

Observaţia 8.11.6. *Produsul mixt $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ al vectorilor $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2$ şi $\mathbf{c}_3$ este dat de*

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = \mathbf{c}_1 \cdot (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}_0).$$

Într-adevăr, această afirmaţie rezultă din definiţia produsului mixt a trei vectori (vezi Definiţia 5.1.2 şi relaţia (1.1.12)) şi din cea a jacobianului unei transformări. ∎

Observaţia 8.11.7. *Având în vedere semnificaţia geometrică a produsului mixt a trei vectori, valoarea absolută a jacobianului (8.254) reprezintă volumul paralelipipedului construit pe reprezentanţii vectorilor $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ în punctul M_0 al spaţiului raportat la reperul cartezian rectangular $Oxyz$.*

Paralelipipedul din spaţiul tridimensional Euclidian construit pe reprezentanţii în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ai vectorilor $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \mathbf{c}_3,$ raportat la reperul $Oxyz,$ reprezintă transformatul cubului din spaţiul raportat la reperul $O'uvw,$ cu un vârf în punctul $M_0'(u_0, v_0, w_0),$ muchiile care pornesc din acest vârf fiind paralele cu axele reperului $O'uvw.$

Observăm că prin difeomorfismul $\boldsymbol{\varphi},$ de fapt prin transformarea liniară diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei $\boldsymbol{\varphi},$ în punctul $M_0'(u_0, v_0, w_0),$ se obţin vectorii $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \mathbf{c}_3$

$$d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0; \mathbf{i}) = \mathbf{c}_1, \quad d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0; \mathbf{j}) = \mathbf{c}_2, \quad d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0; \mathbf{k}) = \mathbf{c}_3. \tag{8.267}$$

Când paralelipipedul din reperul $O'uvw$ este unul *elementar*, sau *infinitezimal*, adica un cub cu unul din vârfuri în punctul M_0' şi muchiile din M_0' reprezentanţii în acest punct ai respectiv vectorilor $\mathbf{i}du,\ \mathbf{j}dv,\ dw\,\mathbf{k},$ de volum $dudvdw,$ atunci paralelipipedul corespunzător din reperul $Oxyz$ are muchiile din vârful M_0 reprezentanţii în M_0 ai respectiv vectorilor $du\mathbf{c}_1,\ dv\mathbf{c}_2$ şi $dw\mathbf{c}_3$ şi volumul egal cu

$$\left|\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}_0)\right|\, du\, dv\, dw.$$

Definiţia 8.11.4. *Fie $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Omega, V),$ un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea $V \subset I\!R^3.$*

Terna $(u, v, w) \in \Omega$ corespunzătoare punctului $M(x, y, z) \in V$ prin aplicaţia $\boldsymbol{\varphi}$ se numeşte terna **coordonatelor curbilinii ale punctului** *$M \in V.$*

Observaţia 8.11.8. *Orice ecuaţie de forma $F(u, v, w) = 0,$ unde funcţia reală F satisface ipotezele teoremei funcţiilor implicite, este fie ecuaţia în coordonate carteziene a unei suprafeţe $(\Sigma),$ situată în mulţimea $\Omega,$ fie ecuaţia în coordonate curbilinii a unei suprafeţe (S) care este imaginea în V a suprafeţei (Σ) prin transformarea (8.248).*

Definiţia 8.11.5. *Sistemul de coordonate curbilinii pe* $V \subset I\!R^3$ *definit de ecuaţiile* (8.248) *se numeşte* **ortogonal** *dacă*

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0, \quad \forall\, (u,v,w) \in \overset{\circ}{\Omega}, \quad i \in \overline{1,3}, \quad j \in \overline{1,3}, \quad i \neq j, \tag{8.268}$$

unde

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial w}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u,v,w) \in \overset{\circ}{\Omega}\,. \tag{8.269}$$

Pe lângă vectorii $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3,$ punctului M de coordonate curbilinii (u,v,w) îi asociem şi numerele reale

$$g_{ij} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j, \tag{8.270}$$

unde indicii i şi j iau toate valorile de la 1 la $3.$

Definiţia 8.11.6. *Fie* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Omega, V)$ *un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea* $V \subset I\!R^3$ *şi* M *un punct arbitrar din* $\overset{\circ}{V}$ *de coordonate curbilinii* $u,v,w.$ *Matricea pătratică simetrică de ordinul al treilea* $G = \|g_{ij}\|_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}},$ *unde elementele* g_{ij} *sunt date de* (8.270), *se numeşte* **tensor metric local** *în punctul* $M.$

Observaţia 8.11.9. *Elementul de pe linia* i *şi coloana* j *al matricei* G *din Definiţia* 8.11.6 *este suma produselor elementelor corespunzătoare de pe coloanele* i *şi* j *ale matricei jacobiene* $J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}).$

Observaţia 8.11.10. *Un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea* $V \subset I\!R^3$ *este ortogonal dacă şi numai dacă tensorul metric local are formă diagonală în orice punct din interiorul acelei mulţimi.*

Observaţia 8.11.11. *Sistemul de coordonate carteziene în spaţiu este un sistem ortogonal de coordonate curbilinii cu tensorul metric egal cu matricea unitate de ordinul trei.*

O observaţie similară se poate face în legătură cu coordonatele carteziene din plan. Tensorul metric al unui sistem cartezian de coordonate este matricea unitate de ordinul doi.

Definiţia 8.11.7. *Fie* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ *un sistem de coordonate curbilinii pe mulţimea închisă* $D \subset I\!R^2.$ *Numerele pozitive* $h_1 = \|\mathbf{c}_1\|,$ $h_2 = \|\mathbf{c}_2\|,$ $h_3 = \|\mathbf{c}_3\|,$ *unde vectorii* $\mathbf{c}_1,$ $\mathbf{c}_2$ *şi* $\mathbf{c}_3$ *sunt definiţi de* (9.19) *se numescc* **parametrii lui Lamé**, *sau, în cazul când sistemul de coordonate curbilinii este ortogonal, factorii de scală asociaţi coordonatelor curbilinii* (u,v,w) *în punctul* $M.$

Denumirea de factori de scală pentru parametrii lui Lamé în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale poate fi motivată. În acest scop, considerăm paralelipipedul curbiliniu infinitezimal cu două din vârfurile opuse în punctele $M(u,v,w) \in \overset{\circ}{V}$ şi $N(u+du, v+dv, w+dw) \in \overset{\circ}{V},$ care este transformatul prin aplicaţia $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Omega, V)$ a paralelipipedului infinitezimal dreptunghic cu muchiile paralele cu axele reperului $O'uvw$ şi cu două din vârfurile opuse în $M'(u,v,w) \in \overset{\circ}{\Omega}$ şi $N'(u+du, v+dv, w+dw).$

Considerăm muchia $\overset{\frown}{MM_1}$ a paralelipipedului curbiliniu, unde $M_1(u+du, v, w).$ Notând cu x,y,z coordonatele carteziene ale ale punctului M şi cu $x+dx,$ $y+dy,$ $z+dz$ pe acelea ale lui $M_1,$ atunci

$$d\ell_1 = \|\, \overrightarrow{MM_1}\, \| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

şi, fiindcă această lungime este infinitezimală, poate fi considerată în acelaşi timp lungimea muchiei $\overset{\frown}{MM_1}$ a paralelipipedului infinitezimal.

Deoarece v şi w sunt constante pe $\overset{\frown}{MM_1}$, coordonatele x, y, z ale unui punct de pe această muchie sunt funcţii numai de parametrul u şi, în consecinţă,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du,$$

din care deducem că

$$d\ell_1 = \sqrt{\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2}\, du. \tag{8.271}$$

Să observăm că radicalul din (8.271) este parametrul lui Lamé h_1.

În mod similar, pentru lungimile $d\ell_2$ şi $d\ell_3$ ale muchiilor $\overset{\frown}{MM_2}$ şi $\overset{\frown}{MM_3}$, obţinem expresiile:

$$\begin{aligned} d\ell_2 &= \sqrt{\Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial v}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial v}\Big)^2}\, dv; \\ d\ell_3 &= \sqrt{\Big(\frac{\partial x}{\partial w}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial w}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial w}\Big)^2}\, dw. \end{aligned}$$

Aşadar, putem scrie

$$d\ell_1 = h_1 du, \quad d\ell_2 = h_2 dv, \quad d\ell_3 = h_3 dw. \tag{8.272}$$

Expresiile (8.272) motivează denumirea de factori de scală pentru parametrii lui Lamé în cazul unui sistem ortogonal de coordonate curbilinii deoarece înmulţirea creşterilor coordonatelor curbilinii u, v, w cu respectiv factorii h_1, h_2, h_3 conduce la creşterile parametrilor ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 care sunt lungimi de arc ale curbelor de coordonate.

Datorită faptului că sistemul de coordonate curbilinii folosit aici este ortogonal, aria $d\sigma_1$ a feţei $MM_2N_1M_3$ a paralelipipedului curbiliniu infinitezimal este egală cu produsul dintre $d\ell_2$ şi $d\ell_3$, adică

$$d\sigma_1 = h_2 h_3 dv dw. \tag{8.273}$$

În mod similar, ariile celorlalte două feţe ale paralelipipedului care pornesc din punctul M sunt exprimate prin:

$$d\sigma_2 = h_3 h_1 dw du; \quad d\sigma_3 = h_1 h_2 du dv. \tag{8.274}$$

În sfârşit, volumul $d\tau$ a paralelipipedului infinitezimal din spaţiul $Oxyz$ este

$$d\tau = d\ell_1 d\ell_2 d\ell_3 = h_1 h_2 h_3 du dv dw = \Big|\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u})\Big| du dv dw. \tag{8.275}$$

În cazul unui sistem ortogonal de coordonate curbilinii baza locală în fiecare punct este ortogonală. Vectorii

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{1}{h_1}\cdot \mathbf{c}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{h_2}\cdot \mathbf{c}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \frac{1}{h_3}\cdot \mathbf{c}_3, \tag{8.276}$$

constituie o bază locală ortonormată în punctul $M \in \overset{\circ}{V}$ şi deci orice vector definit în punctul M de coordonate curbilinii u, v, w poate fi exprimat ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului (8.276).

8.11.1 Coordonate polare în spaţiu, sau coordonate sferice

Considerăm un punct $M(x, y, z) \in I\!\!E^3$. Fie r distanţa de la acest punct la originea O a reperului cartezian $Oxyz$, $\theta \in [0, \pi]$ unghiul dintre raza vectoare $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ a punctului M şi versorul $\mathbf{k}$ al axei Oz şi $\varphi \in [0, 2\pi)$ unghiul orientat pe care versorul $\mathbf{i}$ al axei Ox îl face cu proiecţia ortogonală a vectorului $\mathbf{r}$ pe planul Oxy. Dacă punctul M nu se află pe axa $z'Oz$, atunci poziţia sa este unic determinată de numerele r, θ şi φ. Aceste trei numere definesc un sistem ortogonal de coordonate curbilinii în $I\!R^3$ mai puţin punctele de pe axa cotelor. Într-adevăr, dacă notăm cu M' proiecţia ortogonală a punctului M pe planul Oxy şi cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile aceluiaşi punct pe axele de coordonate ale reperului $Oxyz$, atunci

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3} = \\
&\| \overrightarrow{OM'} \| \cos\varphi \mathbf{i} + \| \overrightarrow{OM'} \| \sin\varphi \mathbf{j} + \| \overrightarrow{OM} \| \cos\theta \mathbf{k} = \\
&\| \overrightarrow{OM} \| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos\varphi \mathbf{i} + \| \overrightarrow{OM} \| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \sin\varphi \mathbf{j} + \| \overrightarrow{OM} \| \cos\theta \mathbf{k} = \\
&r \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + r \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + r \cos\theta \mathbf{k},
\end{aligned}
$$

de unde, ţinând cont de unicitatea exprimării unui vector într–o bază, rezultă

$$
\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases} \tag{8.277}
$$

unde

$$
(r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi) = \Omega. \tag{8.278}
$$

Astfel, am definit o transformare de la mulţimea $\Omega \subset I\!R^3$, definită în (8.278), în mulţimea $V = I\!R^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in I\!R\}$.

Axa cotelor este exclusă din această transformare pentru motivul că pentru orice $\varphi \in (0, 2\pi)$, avem

$$
\boldsymbol{\varphi}(r, 0, 0) = \boldsymbol{\varphi}(r, 0, \varphi), \quad \boldsymbol{\varphi}(r, \pi, 0) = \boldsymbol{\varphi}(r, \pi, \varphi),
$$

ceea ce ar însemna că transformarea φ nu ar mai fi injectivă, deci nici bijectivă.

În afirmaţiile de mai sus am subînţeles că
$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ şi

$$
\begin{cases} \varphi_1(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \cos\varphi, \\ \varphi_2(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \sin\varphi, \\ \varphi_3(r, \theta, \varphi) = r \cos\theta. \end{cases}
$$

Aceste funcţii sunt de clasă C^∞ pe $\overset{\circ}{\Omega}$ şi matricea jacobiană a funcţiei $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ este

$$
J_{\boldsymbol{\varphi}}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & r \cos\theta \cos\varphi & -r \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & r \cos\theta \sin\varphi & r \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.279}
$$

Jacobianul transformării $\boldsymbol{\varphi}$ este pozitiv în orice punct din interiorul mulţimii Ω şi are valoarea

$$
\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(r, \theta, \varphi)}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin\theta. \tag{8.280}
$$

Prin urmare, restricţia funcţiei $\boldsymbol{\varphi}$ la interiorul mulţimii Ω este un difeomorfism şi deci (8.277) defineşte un sistem de coordonate curbilinii în spaţiul Euclidian tridimensional raportat la un reper cartezian din care s–a scos axa cotelor, care se numeşte *sistemul coordonatelor polare în spaţiu*, sau *sistemul coordonatelor sferice*.

Interiorul mulţimii Ω din acest exemplu este un produs cartezian de intervale deschise în $I\!R$, şi anume $\overset{\circ}{\Omega} = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, iar imaginea prin difeomorfismul φ din (8.277) a acestei mulţimi este mulţimea $I\!R^3 \setminus \{(x, 0, z) \in I\!R^3 :\ x \geq 0,\ z \in I\!R\}$ care este mulţime deschisă în $I\!R^3$. Într–un punct $M_0 \in I\!E^3 \setminus \{M(x, 0, z) : x \geq 0,\ z \in I\!R\}$ care are coordonatele sferice $(r_0, \theta_0 . \varphi_0)$, coloanele matricei $J_{\boldsymbol{\varphi}}(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ definesc vectorii

$$
\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \mathbf{i} + \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \mathbf{j} + \cos\theta_0 \mathbf{k} = \dfrac{1}{r_0} \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{c}_2 = r_0 \cos\theta_0 \sin\varphi_0 \mathbf{j} - r_0 \sin\theta_0 \mathbf{k}, \\ \mathbf{c}_3 = -r_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \mathbf{i} + r_0\ \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \mathbf{j}, \end{cases} \tag{8.281}
$$

care sunt tangenţi la respectiv liniile de coordonate (vezi şi (8.285)): $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$; $r = r_0, \varphi = \varphi_0$; $r = r_0, \theta = \theta_0$.

Sistemul de vectori $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ este ortogonal deoarece $g_{ij} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0$ pentru $i \neq j$.

Factorii de scală în punctul M_0 sunt

$$h_1 = \|\mathbf{c}_1\| = 1, \quad h_2 = \|\mathbf{c}_2\| = r_0; \quad h_3 = \|\mathbf{c}_3\| = r_0 \sin\theta_0. \tag{8.282}$$

Din (8.280) şi (8.282) deducem că

$$h_1 h_2 h_3 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(r, \theta, \varphi)}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = r_0^2 \sin\theta_0. \tag{8.283}$$

Folosind acum relaţiile (8.283) şi (8.275) putem afirma că paralelipipedul elementar din $\overset{\circ}{\Omega}$, de volum egal cu $drd\theta d\varphi$, este transformat în paralelipipedul infinitezimal din $I\!R^3 \setminus \{(x, 0, z) \in I\!R^3 : \ x \geq 0, \ z \in I\!R\}$ al cărui volum este

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \tag{8.284}$$

Suprafeţele de coordonate care trec prin punctul M_0 nesituat pe axa cotelor sunt:

- *sfera* de rază r_0 cu centrul în origine, de ecuaţie curbilinie $r = r_0$;
- *semiplanul* limitat de axa $z'Oz$ care face unghiul φ_0 cu planul Ozx, de ecuaţie curbilinie $\varphi = \varphi_0$;
- *semipânza conică* cu vârful în origine, cu axa Oz ca axă de simetrie şi unghiul de la vârful conului egal cu $2\theta_0$, de ecuaţie curbilinie $\theta = \theta_0$.

Curbele de coordonate care trec prin punctul M_0 de coordonate curbilinii $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ sunt:

- *semidreaptă* limitată de origine care face ungiul θ_0 cu axa Oz şi a cărei proiecţie ortogonală pe planul Oxy face cu axa Ox unghiul φ_0;
- *semicerc* (*meridian*) cu diametrul, de lungime $2\,r_0$, situat pe axa $z'Oz$ şi centrul în origine, al cărui plan face unghiul φ_0 cu planul Oxz;
- *cerc* cu centrul pe Oz al cărui plan este perpendicular pe aceasta şi având raza egală cu $r_0 \sin\theta_0$.

Ecuaţiile în coordonate curbilinii ale acestor curbe de coordonate sunt, în ordinea prezentată mai sus, date de:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0. \end{cases} \tag{8.285}$$

Oricare dintre curbele de coordonate (8.285), care trece prin M_0, este intersecţia a două suprafeţe de coordonate care trec prin acel punct.

Inversa transformării (8.277) este

$$r = f_1(x, y, z), \quad \theta = f_2(x, y, z), \quad \varphi = f_3(x, y, z), \tag{8.286}$$

unde

$$f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{8.287}$$

$$f_2(x, y, z) = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{8.288}$$

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } y \geq 0 \text{ c si } \ x^2 + y^2 > 0, \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } \ y < 0 \text{ şi } x^2 + y^2 > 0. \end{cases} \tag{8.289}$$

Relaţiile (8.286), în care valorile funcţiilor care intervin sunt date în (8.287) – (8.289), reprezintă legătura dintre coordonatele polare şi cele carteziene.

Rremarcăm că pentru punctele de pe axa $z'Oz$, θ este 0, sau π, după cum punctul se află pe semiaxa pozitivă, sau pe cea negativă a axei cotelor, iar unghiul φ este nedeterminat.

Punctele din semiplanul $y = 0,\ x \geq 0$ au coordonata φ comună şi anume $\varphi = 0$.

Datorită aplicaţiilor coordonatelor sferice în astronomie, geodezie, etc, coordonata θ se numeşte *colatitudine*, iar coordonata φ se numeşte *longitudine*.

Din considerentele de mai sus putem afirma:

- $\mathbf{c}_1$ este vector normal la suprafaţa de coordonate $r = r_0$ în punctul M_0 al suprafeţei;
- vectorul $\mathbf{c}_2$ este normal la conul $\theta = \theta_0$, cea de a doua suprafaţă de coordonate care trece prin punctul M_0;
- $\mathbf{c}_3$ este vector normal în M_0 la suprafaţa de coordonate de ecuaţie $\varphi = \varphi_0$.

Prin vector normal la o suprafaţă într–un punct al ei se înţelege vectorul director al dreptei perpendiculare pe planul tangent al suprafeţei în acel punct.

8.11.2 Coordonate semipolare în spaţiu, sau coordonate cilindrice

Considerăm spaţiul afin punctual Euclidian tridimensional $\mathbb{E}^3$, raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\} = Oxyz$, unde $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este baza canonică din spaţiul vectorial asociat $\mathbb{R}^3$.

Introducem mărimile:

- $\rho \in (0, \infty)$, distanţa de la punctul $M(x, y, z)$, nesituat pe axa $z'Oz$, la axa cotelor;
- $\theta \in [0, 2\pi)$, unghiul, măsurat în sens direct trigonometric în planul Oxy, pe care proiecţia razei vectoare $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ îl face cu versorul $\mathbf{i}$ al axei $x'Ox$.

Coordonatele carteziene ale punctului M se exprimă în mod unic ca funcţii de variabilele ρ, θ şi z prin

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = z. \tag{8.290}$$

Observaţia 8.11.12. *Ecuaţiile* (8.290) *stabilesc un sistem ortogonal de coordonate curbilinii pe mulţimea* $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) :\ z \in \mathbb{R}\}$.

Într-adevăr, dacă notăm

$$\Omega = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}, \tag{8.291}$$

atunci transformarea

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) :\quad z \in \mathbb{R}\}), \tag{8.292}$$

unde

$$\begin{cases} \varphi_1(\rho, \theta, z) &= \rho\cos\theta, \\ \varphi_2(\rho, \theta, z) &= \rho\sin\theta, \\ \varphi_3(\rho, \theta, z) &= z, \end{cases}$$

este de clasă C^∞ pe $\overset{\circ}{\Omega} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Deoarece matricea jacobiană a transformării (8.292) de ecuaţii (8.290)

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.293}$$

este o matrice nesingulară pe $\overset{\circ}{\Omega}$, ecuaţiile (8.290) definesc un sistem de coordonate curbilinii pe $I\!R^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in I\!R\}$, numit *sistem de coordonate semipolare în spaţiu*, sau *sistemul coordonatelor cilindrice*.

Numerele ρ, θ şi z, introduse mai sus, se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului $M(x,y,z)$.

Ecuaţiile (8.290) stabilesc legătura dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice ale unui punct din spaţiu nesituat pe axa cotelor.

Punctele de pe axa cotelor au $\rho = 0,\; z \in I\!R$ însă θ este nedeterminat.

Jacobianul transformării (8.292) este

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(\rho,\theta,z)}(\rho,\theta,z) = \rho > 0, \quad \forall\,(\rho,\theta,z) \in \overset{\circ}{\Omega}\,.$$

În acest sistem, suprafeţele de coordonate corespunzătoare sistemului de coordonate cilindrice sunt:

(α) *cilindrii circulari coaxiali*, cu axa de rotaţie axa $z'Oz$, de ecuaţii $\rho =$ const. , unde $0 < \rho < \infty$;

(β) *semiplane* mărginite de axa $z'Oz$, de ecuaţii $\theta =$ const. , $\theta \in [0, 2\pi)$;

(γ) *plane* paralele cu planul Oxy, de ecuaţii $z =$ const. , $z \in I\!R$.

Curbele de coordonate care trec prin punctul M_0 de coordonate semipolare (ρ_0, θ_0, z_0) precum şi vectorii lor directori sunt:

(a) *semidreapta* perpendiculară pe $z'Oz$, de ecuaţii

$$\begin{cases} \theta &= \theta_0 \\ z &= z_0, \end{cases}$$

limitată de un punct de pe această axă, de vector director

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \rho}(\rho_0,\theta_0,z_0) = \cos\theta_0\,\mathbf{i} + \sin\theta_0\,\mathbf{j};$$

(b) *cercul* de rază ρ_0 cu centrul în punctul $(0,0,z_0)$, situat în planul $z = z_0$, paralel cu planul Oxy şi al cărui vector tangent în M_0 este

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta}(\rho_0,\theta_0,z_0) = -\rho_0\sin\theta_0\,\mathbf{i} + \rho_0\cos\theta_0\,\mathbf{j};$$

(c) *dreapta* paralelă cu $z'Oz$ având sensul vectorului

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z}(\rho_0,\theta_0,z_0) = \mathbf{k}.$$

Coloanele coordonatelor vectorilor $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$, pentru acest sistem de coordonate curbilinii, sunt respectiv prima, a doua şi a treia coloană a matricei jacobiene a funcţiei $\boldsymbol{\varphi}$ din (8.292), calculată în punctul M_0.

Sistemul $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ ce conţine vectorii tangenţi respectiv la curbele, sau liniile de coordonate descrise mai sus, este un sistem ortogonal de vectori, deoarece $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0$, pentru $i \neq j$.

Factorii de scală, calculaţi într–un punct arbitrar M, nesituat în semiplanul $y = 0,\; x \geq 0$, deci care are coordonatele cilindrice (ρ, θ, z), unde

$$\rho \in (0, +\infty), \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

sunt

$$h_1 = \|\mathbf{c}_1\| = 1, \quad h_2 = \|\mathbf{c}_2\| = \rho, \quad h_3 = \|\mathbf{c}_3\| = 1.$$

Factorul de scală pentru volumul elementar din $I\!R^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in I\!R\}$ este

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(\rho,\theta,z)}(\rho,\theta,z) = \rho = h_1 h_2 h_3.$$

Prin urmare,

$$d\tau = \rho d\rho d\theta dz.$$

Transformarea inversă a funcţiei $\boldsymbol{\varphi}_{/\overset{\circ}{\Omega}}$, unde $\boldsymbol{\varphi}$ este dat în (8.293), este funcţia vectorială $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ de argumentul vectorial

$$\mathbf{x} = (x,y,z) \in I\!R^3 \setminus \{(x,0,z) :\ x \geq 0,\ z \in I\!R\}$$

ale cărei componente sunt

$$\begin{cases} \rho = f_1(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 > 0, \\ \theta = f_2(x,y,z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \text{ dacă }\ x>0,\ y>0, \\ \dfrac{\pi}{2},\ \text{ dacă }\ x=0,\ y>0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \text{ dacă }\ x<0,\ y \in I\!R, \\ \dfrac{3\pi}{2},\ \text{ dacă }\ x=0,\ y<0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \text{ dacă }\ x>0,\ y<0, \end{cases} \\ z = f_3(x,y,z) = z. \end{cases} \tag{8.294}$$

Mulţimea valorilor funcţiei $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, unde funcţiile componente f_1, f_2, f_3 sunt date în (8.294), este mulţimea Ω din (8.291).

Relaţiile (8.293) reprezintă legătura dintre coordonatele cilindrice şi cele carteziene în spaţiu.

Bibliografie

[1] Adams, Robert, A. – *Calculus. A complete Course,* Forth ed., Addison–Wesley, 1999

[2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis. A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986.

[3] Calistru, N., Ciobanu, Gh. – *Curs de analiză matematică, Vol. I*, Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1988.

[4] Chiriţă, Stan – *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1989.

[5] Colojoară, Ion – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983.

[6] Craiu, M., Tănase, V. – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980.

[7] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, A., Fetecău, C. – *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare liniară*, Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1984.

[8] Crăciunaş, Petru Teodor – *Mathematical Analysis*, Polytechnic Institute of Iassy, Faculty of civil engineering, Iassy 1992.

[9] Cruceanu, Vasile – *Algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1973.

[10] Dieudonné, J. – *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier–Villars, Paris 1963.

[11] Dixon, C. – *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester·New York·Brisbane·Toronto 1981.

[12] Drăguşin, L., Drăguşin, C., Câşlan, C. – *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura TEORA, Bucureşti 1993.

[13] Flondor, P., Stănăşilă, O. – *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Ediţia a II–a, Editura ALL, Bucureşti 1996.

[14] Fulks, Watson – *Advanced calculus: an introduction to analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York 1978.

[15] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh.– *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. II*, Editura Tehnică, Bucureşti 1966

[16] Gheorghiu, N., Precupanu, T. – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1979.

[17] Hewitt, E., Stromberg, K. – *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York 1965.

[18] Marinescu, Gheorghe – *Analiză matematică, vol. I, Ediţia a V–a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980.

[19] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. – *Analiză matematică, vol. I, ediţia a patra*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1971.

[20] Olariu, Valter – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981.

[21] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983.

[22] Precupanu, Anca – *Bazele analizei matematice*, Editura Universităţii *Al. I. Cuza*, Iaşi 1993.

[23] Sburlan, Silviu – *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1991.

[24] Sireţchi, Gheorghe – *Calcul diferenţial şi integral, Vol. I, II,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985.

[25] Smirnov, Vladimir – *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxiéme Éditions,* Mir, Moscou 1972.

[26] Stănăşilă, Octavian – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981.

[27] Sykorski, Roman – *Advanced Calculus. Functions of several variables,* PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1969.

[28] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry,* 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988.

Index de noţiuni

Ion CRĂCIUN

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CALCUL INTEGRAL

EDITURA PIM
IAŞI 2007

Cuprins

Capitolul 1

Integrale improprii

1.1 Introducere

Definiţia *integrabilităţii Riemann* a unei funcţii reale de o variabilă reală, mărginită, $f : [a, b] \to I\!R$, ca limita finită a *sumelor integrale Riemann*

$$\sigma_\Delta(f, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

pentru lungimea celui mai mare interval $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ tinzând la zero, nu înglobează cazul când integrantul f este o *funcţie nemărginită* sau *intervalul de integrare* $[a, b]$ *este infinit.*

Lungimea celui mai mare interval $[x_{k-1}, x_k]$ se notează cu $\|\Delta\|$ şi se numeşte *norma diviziunii*

$$\Delta = \{x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\},\ x_{k-1} < x_k,\ k = \overline{1, n}$$

iar $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se numesc *puncte intermediare.*

Pentru ca funcţia reală mărginită f să fie integrabilă Riemann pe *compactul* $[a, b]$ trebuie ca limita sumelor integrale Riemann pentru $\|\Delta\| \to 0$ să fie finită şi să nu depindă de alegerea punctelor intermediare. Această limită se numeşte *integrala definită* şi se notează cu simbolul

$$\int_a^b f(x)dx,$$

deci putem scrie egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

În fizica matematică se întâlnesc atât integrale din funcţii nemărginite cât şi integrale pe domenii de integrare nemărginite.

Astfel de integrale se numesc *integrale improprii.*

Pentru a defini aceste tipuri de integrale nu este suficient să aplicăm o trecere la limită întro sumă integrală Riemann ci este necesar să folosim o trecere la limită suplimentară care să implice domeniul de integrare.

Pentru aceasta, domeniul iniţial de integrare, unde definiţia integrabilităţii Riemann nu se poate aplica, se înlocuieşte cu un subdomeniu pe care funcţia să fie integrabilă Riemann. Apoi, acest subdomeniu se extinde până coincide cu domeniul iniţial de integrare. Limita integralei luată pe subdomeniu, când acest subdomeniu tinde să devină mulţimea iniţială de definiţie a funcţiei, se numeşte *integrală improprie.*

Aceasta este ideea generală pe care se bazează definiţia integralelor improprii.

1.2 Definiţia integralei improprii

Fie elementele $a, b \in \overline{I\!R}$ cu proprietăţile $-\infty < a < b \leq +\infty$ şi

$$f : [a, b) \to I\!R, \tag{1.1}$$

o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a, t] \subset [a, b)$ şi nemărginită întro vecinătate a lui b dacă $b \in I\!R$.

Definiţia 1.2.1 *Limita în punctul $t = b$ a funcţiei*

$$F : [a, b) \to I\!R, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1.2}$$

se numeşte **integrală improprie cu limita superioară de integrare punct singular** *şi se notează cu simbolul*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.3}$$

Din această definiţie rezultă

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{t\to b} F(t) \;=\; \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx. \tag{1.4}$$

Definiţia 1.2.2 *Funcţia* f *se numeşte* **integrabilă în sens generalizat** *dacă există şi este finită limita funcţiei* F *pentru* $t \to b$.

Definiţia 1.2.3 *Dacă funcţia* (1.1) *este integrabilă în sens generalizat, spunem că integrala improprie* (1.3) *este* **convergentă***; dacă limita pentru* $t \to b$ *a funcţiei* (1.2) *este infinită sau nu există, integrala improprie* (1.3) *se numeşte* **divergentă**.

Definiţia 1.2.4 *Prin* **natura unei integrale improprii** *se înţelege proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.*

Observaţia 1.2.1 *Fie* $a_1 \in I\!R$ *astfel încât* $a < a_1 < b$. *Egalitatea*

$$\int_a^t f(x)dx \;=\; \int_a^{a_1} f(x)dx \;+\; \int_{a_1}^t f(x)dx$$

implică faptul că integralele improprii $\int_a^b f(x)dx$ *şi* $\int_{a_1}^b f(x)dx$ *sunt simultan convergente sau divergente. Astfel, când testăm convergenţa integralei improprii* (1.3), *o putem înlocui prin integrala improprie*

$$\int_{a_1}^b f(x)dx \tag{1.5}$$

În plus, dacă integrala improprie (1.3) *este convergentă, legătura sa cu integrala improprie* (1.5) *este*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^{a_1} f(x)dx \;+\; \int_{a_1}^b f(x)dx, \tag{1.6}$$

iar din (1.4) *şi* (1.6) *deducem*

$$\lim_{a_1\to b} \int_{a_1}^b f(x)dx = 0. \tag{1.7}$$

Dacă f este o funcţie continuă şi nenegativă pe segmentul $[a, b)$, atunci integralei improprii (1.3) i se poate da o interpretare geometrică. Considerăm regiunea Ω a planului Oxy limitată inferior de segmentul $[a, b)$, superior de graficul funcţiei f şi la stânga de segmentul închis paralel la axa Oy având extremităţile în punctele $A(a, 0)$ şi $A'(a, f(a))$. Definiţia măsurii sau a carabilităţii şi noţiunea de arie a unei figuri plane este inaplicabilă mulţimii Ω deoarece aceasta este nemărginită. Un segment paralel cu extremitatea stângă a domeniului Ω cu extremităţile în punctele $M(t, 0)$ şi $M'(t, f(t))$ taie din Ω trapezul curbiliniu $AMM'A'$ situat în stânga liniei considerate a cărui arie este integrala definită (1.2). Este natural să extindem noţiunea de carabilitate la domenii nemărginite dacă aria trapezului $AMM'A'$ tinde la o limită finită când $t \to b$. În acest caz spunem că Ω este *carabil*, iar limita de mai sus se numeşte *aria domeniului* Ω. Această arie se exprimă prin integrala improprie (1.3).

În mod analog se introduce *integrala improprie cu limita inferioară punct singular*.

Definiţia 1.2.5 *Simbolul*

$$\int_a^b g(x)dx \tag{1.8}$$

reprezintă notaţia pentru **integrala improprie cu limita inferioară punct singular** *dacă funcţia*

$$g : (a, b] \to I\!R, \quad -\infty \leq a < b < +\infty \tag{1.9}$$

este integrabilă Riemann pe orice compact $[t, b] \subset (a, b]$ *şi nemărginită când* $a \in I\!R$.

Definiţia 1.2.6 *Funcţia* (1.9) *se numeşte* **integrabilă în sens generalizat** *sau, altfel spus, integrala improprie* (1.8) *este* **convergentă** *dacă există şi este finită limita funcţiei*

$$G : (a, b] \to I\!R, \quad G(t) = \int_t^b g(x)dx \tag{1.10}$$

pentru $t \to a$. *În acest caz, simbolul* (1.8) *reprezintă numărul real*

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{t\to a} G(t) = \lim_{t\to a} \int_t^b g(x)dx. \tag{1.11}$$

Dacă funcţia (1.10) *nu are limită în* $t = a$, *sau limita* (1.11) *este infinită sau nu există, integrala improprie* (1.8) *se numeşte* **divergentă**.

Pentru integrala improprie cu limita inferioară punct singular au loc rezultate analoage celor din (1.6) şi (1.7), adică dacă (1.8) este convergentă, atunci integrala improprie $\int_a^{a_1} g(x)dx$ este convergentă oricare ar fi $a_1 \in (a, b]$ şi:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{a_1} g(x)dx + \int_{a_1}^b g(x)dx;$$

$$\lim_{a_1 \to a} \int_a^{a_1} g(x)dx = 0.$$

Definiţia 1.2.7 *Simbolul matematic*

$$\int_a^b h(x)dx \tag{1.12}$$

se numeşte integrală improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare dacă funcţia

$$h : (a, b) \to I\!R, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty \tag{1.13}$$

este integrabilă Riemann pe orice compact $[u, v] \subset (a, b)$ *şi nemărginită când cel puţin una din limitele de integrare este finită.*

Definiţia 1.2.8 *Funcţia h din* (1.13) *este* **integrabilă în sens generalizat** *sau, integrala improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare* (1.12) *este* **convergentă***, dacă pentru o alegere oarecare a punctului* $c \in (a, b)$ *integralele improprii:*

$$\int_a^c h(x)dx; \quad \int_c^b h(x)dx, \tag{1.14}$$

sunt convergente şi

$$\int_a^b h(x) = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx.$$

Dacă cel puţin una din integralele improprii (1.14) *este divergentă, atunci integrala improprie* (1.12) *este* **divergentă**.

Teorema 1.2.1 *Integrala improprie* (1.12) *este convergentă dacă şi numai dacă limitele*

$$\lim_{u \to a} \int_u^c h(x)dx, \quad \lim_{t \to b} \int_c^t h(x)dx \tag{1.15}$$

există şi sunt finite. În acest caz, valoarea integralei improprii (1.12) *este*

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{\substack{u \to a \\ t \to b}} \int_u^t h(x)dx. \tag{1.16}$$

Demonstraţie. Integralele improprii (1.14) sunt convergente dacă şi numai dacă limitele (1.15) există şi sunt finite. Pe de altă parte

$$\int_u^t h(x)dx = \int_u^c h(x)dx + \int_c^t h(x)dx. \tag{1.17}$$

Trecând la limită în (1.17) pentru $u \to a$ şi $t \to b$, din notaţia

$$\lim_{u\to a}\int_u^c h(x)dx + \lim_{t\to b}\int_c^t h(x)dx = \lim_{\substack{u\to a\\ t\to b}}\int_u^t h(x)dx$$

şi Definiţia 1.2.8 rezultă concluziile teoremei. ■

Observaţia 1.2.2 *Studiul integralelor improprii cu limita inferioară punct singular se reduce la studiul celor cu limita superioară punct singular.*

Într-adevăr, funcţia

$$\tilde{f} : [-b,-a) \to I\!\!R, \qquad -\infty < -b < -a \leq +\infty, \qquad \tilde{f}(x) \;=\; g(-x)$$

este integrabilă Riemann pe compactul $[-b,-t] \subset [-b,-a)$ şi avem

$$\int_t^b g(x)dx \;=\; \int_{-b}^{-t} g(-u)\,du \;=\; \int_{-b}^{-t} \tilde{f}(u)\,du. \tag{1.18}$$

Trecând la limită pentru $t \to a$ în (1.18), găsim relaţia

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{-b}^{-a} \tilde{f}(x)dx,$$

care arată că integrala improprie cu limita inferioară punct singular din (1.8) este egală cu o integrală improprie având limita superioară punct singular. ■

Observaţia 1.2.3 *Este posibil ca întro integrală improprie să existe şi alte puncte singulare nesituate în una sau ambele limite de integrare.Astfel, simbolul*

$$\int_a^b \varphi(x)dx \tag{1.19}$$

reprezintă o integrală improprie cu singularităţile în punctele $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$, c_n *unde*

$$-\infty \leq a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b \leq +\infty,$$

dacă funcţia reală de variabilă reală

$$\varphi : (a,b) \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

este integrabilă pe orice compact inclus în oricare din intervalele (c_{k-1}, c_k), $k = \overline{1,n}$.

Dacă toate integralele improprii

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi(x)dx, \qquad k = \overline{1,n}$$

sunt convergente, atunci integrala improprie (1.19) este convergentă şi

$$\int_a^b \varphi(x)dx \;\; = \;\; \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi(x)dx.$$

Definiţia 1.2.9 *Următoarele integrale improprii din funcţii mărginite definite pe intervale nemărginite:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.20}$$

se numesc integrale improprii **de prima speţă** *sau* **de tipul întâi**.

Conform Observaţiei 1.2.2, oricare din ultimele două integrale improprii (1.20) se reduce la una în care limita superioară de integrare este $+\infty$.

Definiţia 1.2.10 *Integralele improprii ale funcţiilor nemărginite definite pe intervale mărginite se numesc integrale improprii* **de a doua speţă** *sau* **de tipul al doilea**.

Aceste integrale au singularităţi finite situate în una sau ambele limite de integrare. Singularităţile, în număr finit, pot fi situate de asemeni în intervalul finit de integrare (a,b).

Definiţia 1.2.11 *Integralele improprii de forma* (1.12) *în care* $-\infty < a < b = +\infty$ *sau* $-\infty = a < b < +\infty$ *se numesc integrale improprii* **de speţa a treia**.

Observaţia 1.2.4 *O integrală improprie de speţa a treia este egală cu suma dintre o integrală improprie de prima speţă şi o alta de speţa a doua.*

Exemplul 1.2.1 *Integrala improprie de prima speţă* $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ *este divergentă.*

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \sin x dx = 1 - \lim_{t\to+\infty} \cos t$$

Deoarece funcţia cosinus nu are limită în punctul de la infinit, rezultă că această integrală improprie de primul tip este divergentă. ■

Exemplul 1.2.2 *Integrala improprie de primul tip cu ambele limite puncte singulare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

este convergentă şi valoarea sa este egală cu π.

Într-adevăr, limita din (1.16) există şi este finită deoarece

$$\lim_{\substack{t\to+\infty \\ u\to-\infty}} \int_u^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{u\to-\infty \\ t\to+\infty}} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} u) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Prin urmare, această integrală improprie este convergentă şi valoarea sa este π. ■

Exemplul 1.2.3 *Integrala improprie de speţa a doua cu ambele limite puncte singulare*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

este convergentă, iar valoarea sa este π.

Într-adevăr,

$$\lim_{\substack{u\to-1 \\ t\to1}} (\arcsin t - \arcsin u) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Acest rezultat, împreună cu Teorema 1.2.1, demonstrează că integrala improprie considerată este convergentă şi are valoarea π. ■

În exemplele următoare sunt prezentate integrale improprii utilizate în criteriile de comparaţie pentru testarea naturii unor integrale improprii.

Exemplul 1.2.4 *Integrala improprie de prima speţă*

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx, \tag{1.21}$$

unde $C \in I\!R$ şi $a > 0$ sunt constante date, este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Într-adevăr, avem

$$\int_a^t \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \ln \dfrac{t}{a}, & \text{pentru} \quad \alpha = 1 \\ \\ C\, \dfrac{t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

şi prin urmare,

$$I(\alpha) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C\, \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \text{pentru} \quad \alpha > 1 \\ \\ +\infty, & \text{pentru} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Rezultatele găsite arată că integrala improprie considerată este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$, iar când este convergentă, valoarea integralei este $\dfrac{C}{(\alpha - 1)a^{1-\alpha}}$. ∎

Exemplul 1.2.5 *Integralele improprii de speţa a doua:*

$$I_1(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx; \quad I_2(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx, \tag{1.22}$$

prima cu limita superioară punct singular, iar a doua cu singularitatea în limita inferioară, sunt convergente pentru $\alpha < 1$ şi divergente dacă $\alpha \geq 1$.

Într-adevăr, din

$$\int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} \Big(\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-t)^{\alpha-1}} \Big) & \text{dacă} \quad \alpha \neq 1 \\ \\ -\ln(b-t) + \ln(b-a) & \text{dacă} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

prin trecere la limită pentru $t \to b$, obţinem

$$\lim_{t\to b}\int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \text{dacă} \quad \alpha < 1 \\ \\ +\infty, & \text{dacă} \quad \alpha \geq 1, \end{cases}$$

rezultat care demonstrează afirmaţiile referitoare la prima integrală.

În mod similar se deduce

$$\lim_{u\to a}\int_u^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă} \quad \alpha \geq 1 \\ \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}. & \text{dacă} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

Din cele deduse mai sus rezultă că în cazul $\alpha < 1$, ambele integrale (1.22) sunt convergente, iar valorile lor sunt

$$I_1(\alpha) = I_2(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Pentru $\alpha \geq 1$, ambele integrale sunt divergente. ■

1.3 Formula Leibniz–Newton

Teorema 1.3.1 *Dacă funcţia $f : [a, b) \to I\!\!R$, integrabilă Riemann pe orice compact $[a, t] \subset [a, b)$, admite o primitivă continuă $\Phi : [a, b) \to I\!\!R$ pentru care există limita în $t = b$, atunci integrala improprie* (1.3) *este convergentă şi valoarea sa este*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b}\Phi(t) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.23}$$

Demonstraţie. Din ipotezele teoremei rezultă că pe orice compact $[a, t] \subset [a, b)$ are loc formula Leibniz–Newton de calcul a unei integrale definite

$$\int_a^t f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^t = \Phi(t) - \Phi(a), \quad t \in [a, b). \tag{1.24}$$

Din (1.24) şi (1.4) rezultă că integrala improprie (1.3) este convergentă dacă şi numai dacă există şi este finită limita în $t = b$ a funcţiei Φ. Dacă se introduce notaţia

$$\lim_{t \to b} \Phi(t) = \Phi(b) = \begin{cases} \Phi(b-0), & \text{dacă} \quad b \in I\!R, \\ \Phi(+\infty), & \text{dacă} \quad b = +\infty, \end{cases}$$

rezultă că pentru calculul unei integrale improprii cu limita superioară punct singular se poate utiliza formula (1.23) care se numeşte *formula Leibniz–Newton pentru calculul integralelor improprii.* ■

Formule analoage se pot scrie şi pentru integralele improprii cu limita inferioară punct singular sau cu ambele limite de integrare puncte singulare.

Exerciţiul 1.3.1 *Să se studieze integrala improprie* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

Soluţie. O primitivă a funcţiei

$$f : [2, \infty) \to I\!R, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

este funcţia

$$\Phi : [2, \infty) \to I\!R, \quad \Phi(x) = \operatorname{arctg}(x-1).$$

Această funcţie are limită în $+\infty$ şi limita $\Phi(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$. Conform Teoremei 1.3.1, rezultă că valoarea integralei improprii este

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \Phi(\infty) - \Phi(2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

■

1.4 Proprietăţi ale integralelor improprii

Având în vedere (1.4), deducem că proprietăţile integralelor improprii decurg din cele ale integralelor definite.

Teorema 1.4.1 *Mulţimea funcţiilor integrabile în sens generalizat pe* $[a, b)$ *este un spaţiu liniar real.*

Demonstraţie. Fie $f_1 : [a, b) \to I\!R$ şi $f_2 : [a, b) \to I\!R$ funcţii integrabile în sens generalizat şi λ_1, λ_2 numere reale arbitrare. Pe compactul $[a, t] \subset [a, b)$ are loc egalitatea

$$\int_a^t (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_a^t f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^t f_2(x) dx.$$

Trecând la limită în această egalitate, constatăm că funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : [a, b) \to I\!R$ este integrabilă în sens generalizat şi valoarea integralei improprii a acestei funcţii pe intervalul $[a, b)$ este

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

Acest rezultat demonstrează teorema. ■

Teorema 1.4.2 *Dacă integralele improprii cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^b f_1(x) dx, \quad \int_a^b f_2(x) dx \tag{1.25}$$

sunt convergente şi

$$f_1(x) \leq f_2(x), \quad x \in [a, b), \tag{1.26}$$

atunci are loc inegalitatea

$$\int_a^b f_1(x) dx \ \ \leq \ \ \int_a^b f_2(x) dx. \tag{1.27}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (1.26) şi o proprietate a integralei definite implică

$$\int_a^t f_1(x) dx \leq \int_a^t f_2(x) dx,$$

de unde, după trecerea la limită pentru $t \to b$ şi folosirea faptului că integralele improprii (1.25) sunt convergente, rezultă (1.27). ■

Teorema 1.4.3 *Dacă una din integralele improprii* (1.25) *este convergentă şi cealaltă este divergentă, suma lor este divergentă.*

Demonstraţie. Presupunând prin absurd că suma integralelor improprii (1.25) este integrală improprie convergentă, conform Teoremei 1.4.1, diferenţa dintre această sumă şi integrala improprie convergentă este o integrală improprie convergentă, fapt ce contrazice ipoteza. ■

Observaţia 1.4.1 *Dacă integralele improprii* (1.25) *sunt divergente, suma lor poate fi o integrală improprie divergentă sau convergentă.*

Într-adevăr, integralele improprii de speţa întâi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+2} dx$$

sunt divergente dar suma lor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+2} dx$$

este convergentă căci

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx = \lim_{t\to+\infty} \Big(\int_0^t \frac{1}{x+1} dx + \int_0^t \frac{-1}{x+2} dx \Big) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \Big(\ln \frac{x+1}{x+2} \Big)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty} \ln \frac{t+1}{t+2} + \ln 2 = \ln 2,$$

valoarea sa fiind $\ln 2$.

Considerând integralele improprii $\int_0^{\infty} \sin^2 x dx$ şi $\int_0^{\infty} \cos^2 x dx$, ambele divergente după cum se constată simplu folosind Definiţia 1.2.2, suma lor, $\int_0^{\infty} dx$, este o integrală improprie divergentă.

Prin urmare, suma a două integrale improprii divergente poate fi sau o integrală improprie convergentă sau una divergentă. ■

1.5 Reducerea integralelor improprii la şiruri şi serii numerice

Convergenţa unei integrale improprii cu limita superioară punct singular se poate reduce la convergenţa unui şir numeric sau a unei serii de numere reale. Pentru aceasta este suficient să aplicăm definiţia cu şiruri a limitei în punctul $t = b$ a funcţiei

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1.28}$$

de a cărei valoare depinde natura integralei improprii cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.29}$$

Observaţia 1.5.1 *Reamintim că funcţia* $F(t)$ *are limită finită în punctul* $t = b$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de numere reale* $(t_n)_{n\geq 0}$, *cu proprietăţile*

$$t_0 = a, \quad a < t_n < b, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = b, \tag{1.30}$$

şirul numeric $(F(t_n))$ *are limită finită şi această limită nu depinde de alegerea şirului* (t_n).

Teorema 1.5.1 *Integrala improprie* (1.29) *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice şir de puncte* $(t_n)_{n\geq 0}$, *cu proprietăţile* (1.30), *şirul numeric*

$$\Big(\int_a^{t_n} f(x)dx\Big)_{n\geq 1} \tag{1.31}$$

este convergent la aceeaşi limită finită. Dacă integrala improprie (1.29) *este convergentă, limita şirului de numere reale* (1.31) *este egală cu valoarea integralei improprii.*

Demonstraţie. Termenul general al şirului (1.31) este valoarea în t_n a funcţiei F din (1.28).

Concluziile teoremei rezultă din Observaţia 1.5.1. ■

Observaţia 1.5.2 *Termenii şirului* (1.30) *sunt sumele parţiale ale seriei numerice*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)dx. \tag{1.32}$$

Teorema 1.5.2 *Condiţia necesară şi suficientă ca integrala improprie cu limita superioară punct singular* (1.29) *să fie convergentă este ca pentru orice alegere a şirului de puncte* (1.30), *seria numerică* (1.32) *să fie convergentă, iar suma sa să fie independentă de alegerea particulară a şirului. Dacă integrala* (1.29) *este convergentă, atunci valoarea sa este suma seriei* (1.32).

Observaţia 1.5.3 Dacă *funcţia* f *schimbă de semn de o infinitate de ori pe intervalul* $[a, b)$, *convergenţa seriei numerice* (1.32) *pentru o anumită alegere a şirului de puncte* (1.30) *nu implică, în caz general, convergenţa integralei improprii* (1.29) *cu limita superioară punct singular.*

Într-adevăr, integrala improprie de speţa întâi din Exemplul 1.2.1 este divergentă deşi seria

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \sin x dx$$

este convergentă deoarece toţi termenii sunt egali cu zero. ■

Teorema 1.5.3 *Integrala improprie cu limita superioară punct singular a unei funcţii* $f : [a, b) \to I\!R$ *care păstrează semn constant pe* $[a, b)$ *este convergentă dacă şi numai dacă seria numerică* (1.32) *converge pentru cel puţin o alegere a unui şir monoton crescător de tipul* (1.30).

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din teorema precedentă.

Să demonstrăm că are loc şi reciproca teoremei.

În acest sens să presupunem că $f(x) \geq 0$ pentru toate valorile lui $x \in [a, b)$ şi că seria numerică (1.32) este convergentă pentru un şir de puncte monoton crescător de tipul (1.30). Atunci şirul sumelor parţiale al seriei este monoton crescător şi tinde la o limită finită J care este suma seriei.

Vom demonstra că pentru orice altă alegere a şirului de puncte

$$(t'_m)_{m\geq 0}, \quad t'_0 = a, \quad a < t'_m < b, \quad \lim_{m\to+\infty} t'_m = b,$$

seria numerică corespunzătoare

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \int_{t'_{m-1}}^{t'_m} f(x)dx \tag{1.33}$$

este convergentă şi suma sa este egală cu J.

Pentru a demonstra aceasta vom folosi sumele parţiale ale seriilor (1.32) şi (1.33). Deoarece J este totodată limita superioară a şirului sumelor parţiale ale seriei (1.32), rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există t_{n_0} astfel încât să aibă loc inegalitatea

$$J - \varepsilon < \int_a^{t_{n_0}} f(x)dx < J.$$

Să alegem numărul natural m_0 astfel încât pentru toţi $m \geq m_0$ să fie satisfăcută inegalitatea $t'_m \geq t_{n_0}$. Apoi, pentru orice t'_m există $t_{n_m} > t'_m$ şi prin urmare, inegalitatea

$$J - \varepsilon < \int_a^{t_{n_0}} f(x)dx \leq \int_a^{t'_m} f(x)dx \leq \int_a^{t_{n_m}} f(x)dx \leq J$$

are loc pentru toţi $m \geq m_0$, deoarece f este funcţie nenegativă. În consecinţă

$$\lim_{m\to+\infty}\int_a^{t'_m} f(x)dx = J,$$

care, în baza Teoremei 1.5.1, arată că integrala improprie cu limita superioară punct singular a unei funcţii pozitive pe intervalul de integrare este convergentă. ■

Exemplul 1.5.1 *Integrala improprie* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$, *unde*

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \textit{pentru} \quad n \leq x \leq n + \dfrac{1}{2^{2n}}, \qquad n \in I\!N^* \\ \\ 0 & \textit{pentru} \quad n + \dfrac{1}{2^{2n}} < x < n+1, \qquad n \in I\!N^* \end{cases} \tag{1.34}$$

este convergentă şi are valoarea 1.

Soluţie. Aplicând Teorema 1.5.3 pentru alegerea lui $t_n = n$, găsim

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

ceea ce arată că integrala improprie de speţa întâi

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

unde f este funcţia (1.34), este convergentă şi are valoarea 1. ■

Observaţia 1.5.4 *Exemplul de mai sus arată că chiar dacă funcţia f este nenegativă faptul că integrala improprie de prima speţă*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

este convergentă nu atrage că $f(x) \to 0$ când $x \to +\infty$.

Întradevăr, folosind criteriul de nonexistenţă a limitei unei funcţii întrun punct, rezultă că că funcţia definită prin (1.34) nu are limită în punctul de la infinit. ■

1.6 Criteriul integral al lui Cauchy

Teorema 1.6.1 *Dacă funcţia* $f : [1, +\infty) \to I\!R$, *integrabilă Riemann pe orice compact* $[1, t] \subset [1, \infty)$, *este pozitivă şi descrescătoare, atunci seria* $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *şi integrala improprie de speţa întâi* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Deoarece f este funcţie descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$ avem

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \;\; x \in [k, k+1], \;\; k \in I\!N^*$$

şi deci, după integrarea pe compactul $[k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \;\; k \in I\!N^*. \tag{1.35}$$

Sumând inegalităţile (1.35) după $k = \overline{1, n}$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

adică,

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n, \tag{1.36}$$

unde $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ este suma parţială de ordin n a seriei numerice

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n). \tag{1.37}$$

Din (1.36) rezultă că şirul sumelor parţiale (s_n) a seriei (1.37) este mărginit dacă şi numai dacă şirul de puncte

$$\Big(\int_1^{n} f(x)dx\Big) \tag{1.38}$$

este mărginit. Fiind şi monoton crescător, rezultă că şirul (s_n) este convergent, adică seria numerică $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (1.38) este convergent, adică dacă şi numai dacă integrala improprie de primul tip $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă. ■

Exemplul 1.6.1 *Seria numerică cu termeni pozitivi*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}, \quad \alpha > 0,$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \in (0, 1]$.

Soluţie. Se aplică criteriul integral al lui Cauchy, unde funcţia f este

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}, \quad \alpha > 0, \quad x \in [2, +\infty).$$

Integrala improprie de care avem nevoie pentru a aplica criteriul este

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int_{2}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^{\alpha} x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}}.$$

Ultima integrală este de tipul (1.21) în care $a = \ln 2$ şi $C = 1$. Prin urmare, integrala este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă când $\alpha \leq 1$. Conform criteriului integral al lui Cauchy, seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \in (0, 1]$. ∎

1.7 Metode de calcul ale integralelor improprii

Plecând de la observaţia că o integrală improprie se defineşte ca limită a unei integrale definite şi că pentru calculul acesteia din urmă se pot utiliza metode ca schimbarea de variabilă şi integrarea prin părţi, este natural să punem problema dacă aceste tehnici de calcul nu sunt aplicabile şi integralelor improprii.

1.7.1 Schimbarea de variabilă în integrala improprie

Teorema 1.7.1 *Dacă* $f : [a, b) \to \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b \leq +\infty$, *este o funcţie integrabilă Riemann pe orice compact* $[a, t] \subset [a, b)$ *şi*

$$\tau \mapsto x = \varphi(\tau) \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [\alpha, \beta), \quad -\infty < \alpha < \beta \leq +\infty,$$

este o funcţie strict crescătoare cu derivată continuă pe $[\alpha, \beta)$ *care satisface condiţiile:*

$$a = \varphi(\alpha); \quad \lim_{\tau \to \beta} \varphi(\tau) = b, \tag{1.39}$$

atunci integralele improprii:

$$\int_a^b f(x)dx; \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau$$

au aceeaşi natură. Dacă una din ele este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau$$

care se numeşte **formula schimbării de variabilă în integrala improprie**.

Demonstraţie. Fie $t \in [a, b)$ şi $u = \varphi^{-1}(t)$. Ţinând cont că intervalul compact $[\alpha, u] \subset [\alpha, \beta)$ este corespondentul prin aplicaţia φ^{-1} a compactului $[a, t] \subset [a, b)$, prin aplicarea formulei schimbării de variabilă în integrala definită, obţinem

$$\int_a^t f(x)dx = \int_\alpha^u f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau. \tag{1.40}$$

Din proprietăţile funcţiei φ rezultă că

$$\lim_{t \to b} \varphi^{-1}(t) = \beta. \tag{1.41}$$

Definiţia integralei improprii şi egalităţile (1.40), (1.41) demonstrează teorema. ∎

Observaţia 1.7.1 *Teorema se extinde uşor la celelalte tipuri de integrale improprii prezentate în primul paragraf.*

Observaţia 1.7.2 *Funcţia* φ *care realizează schimbarea de variabilă întro integrală improprie poate fi strict descrescătoare, derivabilă şi cu derivată continuă pe* $(\alpha, \beta]$. *În acest caz, condiţiile* (1.39) *devin*

$$a = \varphi(\beta); \quad \lim_{\tau \to \alpha} \varphi(\tau) = b,$$

iar formula schimbării de variabilă este

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau.$$

Observaţia 1.7.3 *Este posibil ca în urma unei schimbări de variabilă o integrală improprie să treacă întro integrală proprie şi reciproc.*

Exemplul 1.7.1 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos{(y \arcsin x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

unde y este un număr real pozitiv.

Soluţie. Pentru fiecare $y > 0$, funcţia

$$f : (-1,1) \to I\!\!R, \quad f(x) = \frac{\cos{(y \arcsin x)}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1),$$

este continuă, ca atare este integrabilă Riemann pe orice compact $[u,t] \subset (-1,1)$ şi putem spune că I este o integrală improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare. Funcţia

$$\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1,1), \quad x = \varphi(\tau) = \sin \tau$$

satisface condiţiile cerute de formula schimbării de variabilă în integrala improprie, iar

$$\lim_{\tau \to -\pi/2} \varphi(\tau) = -1, \quad \lim_{\tau \to \pi/2} \varphi(\tau) = 1.$$

Aplicarea formulei schimbării de variabilă conduce la

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos{(y \arcsin x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y\tau \, d\tau = \frac{1}{y} \sin y\tau \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{y} \sin \frac{\pi y}{2}.$$

Schimbarea de variabilă folosită a transformat integrala improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare în integrală definită (proprie). ■

Exemplul 1.7.2 *Să se calculeze integrala definită*

$$J = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Soluţie. Deoarece integrantul este funcţie periodică de perioadă $\dfrac{\pi}{2}$, avem

$$J = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx. \tag{1.42}$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = \tau$. Prin urmare, funcţiile φ şi φ' sunt

$$\varphi, \varphi' : [0, +\infty) \to I\!R, \quad \varphi(\tau) = \operatorname{arctg}\tau, \quad \varphi'(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}.$$

Prin această schimbare de variabilă, intervalul finit de integrare $[0, \frac{\pi}{2}]$ se transformă în intervalul infinit $[0, +\infty)$ şi

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tau^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\tau^2}{1+\tau^2}; \quad f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) = 4\frac{1+\tau^2}{1+\tau^4}.$$

Folosind schimbarea de variabilă menţionată, integrala proprie (1.42) devine integrala improprie de speţa întâi dintr–o funcţie raţională

$$J = 4\int_0^{+\infty} \frac{1+\tau^2}{1+\tau^4}\,d\tau. \tag{1.43}$$

Funcţia de integrat din (1.43) se descompune în fracţiile simple

$$\frac{4(1+\tau^2)}{1+\tau^4} = \frac{2}{\tau^2 + \tau\sqrt{2} + 1} + \frac{2}{\tau^2 - \tau\sqrt{2} + 1},$$

iar aceste fracţii simple admit ca primitive funcţiile

$$2\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\tau\sqrt{2}+1), \quad 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\tau\sqrt{2}-1)$$

care au limite finite în $\tau = +\infty$ şi fiecare din aceste limite este egală cu $\frac{\pi}{2}$.

Prin urmare, aplicând formula Leibniz–Newton (1.23), se găseşte că valoarea integralei proprii J este $J = \pi\sqrt{8}$. ■

Observaţia 1.7.4 *Studiul naturii unei integrale improprii pe un interval mărginit dintr–o funcţie nemărginită* (*integrală improprie de speţa a doua*) *se reduce la studiul naturii unei integrale improprii pe un interval nemărginit.*

Într-adevăr, schimbarea de variabilă

$$x = \varphi(\tau) = \frac{b\tau + a}{\tau + 1} \implies \tau = \varphi^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-x},$$

efectuată în integrala improprie de speţa a doua cu limita superioară punct singular din funcţia f conduce la integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^{+\infty} f\Big(\frac{b\tau + a}{\tau+1}\Big)\frac{d\tau}{(\tau+1)^2}$$

fapt care este evident.

Conform acestei observaţii, mai departe se pot studia doar integralele improprii de speţa întâi. ■

1.7.2 Integrarea prin părţi în integrala improprie

Teorema 1.7.2 *Dacă funcţiile*

$$u, v : [a, b) \to I\!R, \quad -\infty < a < b \le +\infty,$$

admit derivate continue pe $[a, b)$, *iar limita* $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x)$, *notată cu*

$$\lim_{x\to b} u(x)v(x) = u(b)v(b),$$

există şi este finită, atunci integralele improprii

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx, \quad \int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{1.44}$$

au aceeaşi natură. Dacă una din integralele (1.44) *este convergentă, atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx \;=\; u(x)v(x)\Big|_a^b \;-\; \int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{1.45}$$

care se numeşte **formula integrării prin părţi în integrala improprie**.

Demonstraţie. În ipotezele teoremei, are loc formula integrării prin părţi pe compactul $[a, t] \subset [a, b)$

$$\int_a^t u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^t - \int_a^t u'(x)v(x)dx. \tag{1.46}$$

Trecând la limită pentru $t \to b$ în (1.46), rezultă că integralele improprii (1.44) au aceeşi natură şi, în plus, are loc (1.45). ■

Exercițiul 1.7.1 *Să se calculeze următoarele integrale improprii de speța a doua*

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx, \qquad J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx. \tag{1.47}$$

Soluție. Prima integrală are limita inferioară punct singular iar cea de a doua are singularitatea în limita superioară, ambele singularități fiind înțelese în sensul că funcția de integrat este nemărginită în vecinătăți ale acestor limite de integrare.

Integrarea prin părți a primei integrale conduce la

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx. \tag{1.48}$$

De remarcat că integrala din membrul doi al relației (1.48) este proprie căci funcția de integrat $\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$ este continuă pe intervalul $(0, \pi/2)$ și are limite finite în extremități, deci este prelungibilă prin continuuitate la compactul $[0, \pi/2]$. Acest rezultat arată că integrala improprie I este convergentă. La fel se demonstrează că și J este integrală improprie convergentă.

Integralele I și J sunt egale deoarece după efectuarea substituției $x = \pi/2 - t$ în prima integrală se obține cea de a doua integrală. Apoi,

$$2I = I + J = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x dx. \tag{1.49}$$

Efectuând schimbarea de variabilă $2x = u$ în ultima integrală din (1.49), obținem

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u du. \tag{1.50}$$

Pe de altă parte, proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei definite conduce la

$$\int_0^{\pi} \ln \sin u du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u du. \tag{1.51}$$

Dacă în ultima integrală din (1.51) efectuăm schimbarea de variabilă $u = \pi - x$, găsim

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u \, du = -\int_{\pi/2}^{0} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = I. \tag{1.52}$$

Din (1.49), (1.50) şi (1.52) deducem

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

din care, ţinând cont şi de faptul că $I = J$, avem în final

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \ln\cos x dx \quad = \quad -\frac{\pi}{2}\ln 2. \tag{1.53}$$

Aşadar, valoarea comună a celor două integrale considerate este $\frac{\pi}{2}\ln 2$. ■

Exerciţiul 1.7.2 *Pornind de la integrala I din* (1.47) *şi folosind cele două metode de calcul ale integralelor improprii, să se determine valoarea integralei*

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

Soluţie. Schimbarea de variabilă $\sin x = t$ în integrala I din (1.47) aratağ că

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 (\ln t)(\arcsin t)' dt,$$

iar integrarea prin părţi în ultima integrală conduce la

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = (\ln t)(\arcsin t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}\, dt. \tag{1.54}$$

Folosind (1.53) şi (1.54) se găseşte

$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

cu menţiunea că integrala a cărei valoare am determinat–o este proprie, singularitatea în origine fiind aparentă deoarece funcţia continuă $t \mapsto \dfrac{\arcsin t}{t}$, $t \in (0,1]$ poate fi prelungită prin continuitate la compactul $[0,1]$. ■

1.8 Testul lui Cauchy de convergenţă a integralelor improprii

Convergenţa unei integrale improprii cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b} F(t) = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx \tag{1.55}$$

este echivalentă cu existenţa limitei în punctul $t = b$ a funcţiei F. Conform teoremei Bolzano–Cauchy, care asigură existenţa limitei finite într-un punct de acumulare a domeniului de definiţie a unei funcţii reale de variabilă reală, funcţia F are limită finită în punctul $t = b$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b(\varepsilon) \in [a, b)$ astfel încât

$$|F(t') - F(t'')| < \varepsilon \qquad (\forall)\ t' \in (b(\varepsilon), b) \quad \text{şi} \quad (\forall)\ t'' \in (b(\varepsilon), b). \tag{1.56}$$

Teorema 1.8.1 (**Testul lui Cauchy de convergenţă al unei integrale improprii cu limita superioară punct singular**) *Integrala improprie* (1.55) *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $b(\varepsilon) \in [a, b)$ *astfel încât inegalitatea*

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| < \varepsilon \tag{1.57}$$

are loc pentru orice $t', t'' \in (b(\varepsilon), b)$.

Demonstraţie. Convergenţa integralei improprii (1.55) este stabilită de comportarea valorilor funcţiei

$$F : [a, b) \to I\!R, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1.58}$$

în vecinătatea punctului $t = b$. Aplicând teorema lui Bolzano–Cauchy în care funcţia F este (1.58), din (1.55) şi (1.56) rezultă concluzia teoremei. ■

Observaţia 1.8.1 *Inegalitatea* (1.57) *este echivalentă cu condiţia*

$$\lim_{\substack{t'\to b\\ t''\to b}} \int_{t'}^{t''} f(x)dx = 0. \tag{1.59}$$

Exercițiul 1.8.1 *Folosind testul de convergență al lui Cauchy să se demonstreze că integrala improprie de speța întâi cu limita superioară punct singular*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{1.60}$$

este convergentă. Această integrală se numește **integrala lui Dirichlet**.

Soluție. Să remarcăm întâi că singularitatea în limita inferioară a acestei integrale este aparentă căci funcția

$$f_1 : (0, +\infty) \to I\!R, \quad f_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0, \tag{1.61}$$

poate fi prelungită prin continuitate luând pe 1 ca valoare în $x = 0$ a funcției f, prelungirea prin continuuitate a funcției f_1. Valoarea în $x = 0$ a funcției f este limita în origine a funcției f_1 din (1.61).

Atunci funcția

$$f : [0, +\infty) \to I\!R, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pentru} \quad x > 0, \\ 1 & \text{pentru} \quad x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe întreg domeniu de definiție deci se poate vorbi de integrala improprie (1.60).

Evaluarea integralei de tipul (1.59) folosind metoda integrării prin părți conduce la

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos t'}{t'} - \frac{\cos t''}{t''} - \int_{t'}^{t''} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Prin urmare,

$$\Big| \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx \Big| \le \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} + \Big| \int_{t'}^{t''} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \Big| \le$$

$$\le \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} + \Big| \int_{t'}^{t''} \frac{dx}{x^2} \Big| \le \frac{2}{t'} + \frac{2}{t''} \to 0$$

pentru $t' \to +\infty$ și $t'' \to +\infty$. Deci, în baza părții a doua a testului lui Cauchy de convergență a unei integrale improprii, integrala improprie de speța întâi (1.60) este convergentă. Mai târziu vom vedea că valoarea integralei lui Dirichlet este $\dfrac{\pi}{2}$. ∎

De remarcat că aplicarea testului lui Cauchy la o integrală improprie concretă este laborioasă, în schimb, în multe aplicaţii, acest test este folosit pentru stabilirea unor condiţii suficiente (criterii) de convergenţă.

Criteriile de convergenţă pe care le vom demonstra se vor referi la integrale improprii cu limita superioară punct singular, şi aceasta pentru că studiul oricărui alt tip de integrală improprie, printr–o schimbare de variabilă adecvată, se reduce la studiul uneia cu singularitatea în limita superioară.

Înainte de a trece la prezentarea acestor criterii vom introduce noţiunea de *integrală improprie absolut convergentă* care este asemănătoare noţiunii de serie numerică absolut convergentă.

1.9 Integrale improprii absolut convergente

Definiţia 1.9.1 *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă în sens generalizat pe intervalul* $[a, b)$ *şi integrala improprie cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.62}$$

Integrala improprie (1.62) *se numeşte* **absolut convergentă** *dacă integrala improprie*

$$\int_a^b |f(x)|dx \tag{1.63}$$

este convergentă.

Teorema 1.9.1 *Dacă integrala improprie* (1.62) *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Demonstraţie. Într-adevăr, integrala (1.63) fiind convergentă, rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $b(\varepsilon)$ astfel încât să avem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big| < \varepsilon, \ (\forall)\ t', t'' > b(\varepsilon). \tag{1.64}$$

Însă, întotdeauna avem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| \leq \Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big|. \tag{1.65}$$

Inegalităţile (1.64) şi (1.65) implică

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\Big| \leq \Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big| < \varepsilon \ (\forall)\ t', t'' > b(\varepsilon).$$

Fiind îndeplinite condiţiile testului lui Cauchy pentru integrala improprie (1.62), aceasta este convergentă şi teorema este demonstrată. ■

Observaţia 1.9.1 *Convergenţa integralei improprii* (1.62) *nu implică convergenţa absolută a sa, cu alte cuvinte reciproca Teoremei* 1.9.1 *nu este adevărată.*

Pentru a justifica această afirmaţie este suficient să dăm un exemplu. Folosind testul de convergenţă al lui Cauchy s–a demonstrat că integrala improprie de speţa întâi (1.60) este convergentă. Demonstrăm că integrala modulului

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

este divergentă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria numerică

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \tag{1.66}$$

este divergentă fapt ce se poate constata prin aplicarea criteriului de comparaţie pentru seriile numerice cu termeni pozitivi. Întradevăr, pentru $n \geq 1$, avem

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \Big| \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin x dx \Big| = \frac{2}{\pi(n+1)}, \tag{1.67}$$

iar seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tag{1.68}$$

este divergentă deoarece diferă de seria armonică prin factorul constant $\dfrac{2}{\pi}$.

Divergenţa seriei numerice (1.68) şi inegalitatea (1.67), împreună cu criteriul de comparaţie pentru seriile numerice cu termeni pozitivi, atrage divergenţa seriei numerice (1.66). ■

Definiţia 1.9.2 *Integrala improprie* (1.62) *se numeşte* **semiconvergentă** *sau* **simplu convergentă** *dacă ea este convergentă dar nu este absolut convergentă.*

Observaţia 1.9.2 *O integrală improprie se poate plasa în unul din cazurile: integrală improprie semiconvergentă; integrală improprie absolut convergentă; integrală improprie divergentă.*

Observaţia 1.9.3 *Integrala improprie cu limita superioară punct singular* (1.62) *este absolut convergentă dacă şi numai dacă integrala improprie*

$$\int_{a_1}^{b} f(x)dx, \tag{1.69}$$

unde $a < a_1 < b$, *este absolut convergentă.*

Într-adevăr, dacă una din integralele improprii (1.62) şi (1.69) este absolut convergentă, în baza Definiţiei 1.9.1 şi a testului de convergenţă al lui Cauchy, avem

$$\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \to 0 \quad \text{pentru} \quad t', t'' \to b. \tag{1.70}$$

Dar relaţia (1.70) este condiţie necesară şi suficientă de convergenţă şi pentru cealaltă integrală improprie din cele două menţionate mai sus. ∎

Exemplul 1.9.1 (Un exemplu de integrală semiconvergentă) *Pe segmentul* $[n-1, n] \subset I\!R$ *ca bază, se construieşte triunghiul isoscel* T_n, *de arie* $\dfrac{1}{n}$, *cu vârful în sus sau în jos, după cum* n *este număr întreg pozitiv impar sau par. Mulţimea laturilor egale ale triunghiurilor*

$$T_0, T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots$$

constituie graficul unei funcţii f *continue pentru* $x > 0$. *Să se arate că integrale improprie de prima speţă*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

este convergentă, în timp ce integrala

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$$

este divergentă.

Soluţie. Să considerăm un număr pozitiv x cu proprietatea că partea sa întreagă este $n-1$. Dacă n este par, putem scrie

$$\int_0^n f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{n-1} f(t)dt.$$

Dacă n este impar, avem inegalităţile contrarii

$$\int_0^{n-1} f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^n f(t)dt.$$

Dar, din interpretarea geometrică a integralei Riemann, avem

$$\int_0^{n-1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

dacă $x \to +\infty$, atunci $n \to +\infty$, iar

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2,$$

deci integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă şi are valoarea $\ln 2$.

Pe de altă parte, este uşor de văzut că

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \int_0^x f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

deci integrala $\displaystyle\int |f(x)|dx$ este divergentă deoarece seria numerică $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

Prin urmare, integrala improprie de speţa întâi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ este semiconvergentă. ■

1.10 Criterii de comparaţie ale integralelor improprii

Pentru studiul convergenţei absolute şi divergenţei unor integrale improprii de regulă se folosesc unele criterii în care sunt implicate două integrale improprii ale căror natură este comparată, motiv pentru care aceste criterii sunt numite *criterii de comparaţie*.

Teorema 1.10.1 (**Criteriul general de comparaţie**) *Dacă funcţiile*

$$f, g : [a, b) \to I\!R, \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

sunt integrabile Riemann pe orice segment $[a, t] \subset [a, b)$, *atunci au loc următoarele afirmaţii:*

1. *dacă există* $a_1 \in [a, b)$ *astfel încât are loc inegalitatea*

$$|f(x)| \leq g(x), \;\; x \in [a_1, b),$$

şi integrala improprie cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b g(x)dx \tag{1.71}$$

este convergentă, atunci integrala improprie (1.62) *este absolut convergentă;*

2. *dacă există* $a_2 \in [a, b)$ *astfel încât*

$$f(x) \geq g(x) \geq 0, \;\; x \in [a_2, b)$$

şi integrala improprie (1.71) *este divergentă, atunci integrala improprie* (1.62) *este divergentă.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima dintre afirmaţii să observăm că pe orice segment $[t', t''] \subset [a_1, b)$ avem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\Big| \leq \Big|\int_{t'}^{t''} g(x)dx\Big|. \tag{1.72}$$

În baza inegalităţii (1.72) şi a testului lui Cauchy de convergenţă a unei integrale improprii, rezultă că integrala improprie (1.63) este convergentă, deci în baza Definiţiei 1.9.1 integrala improprie (1.62) este absolut convergentă.

Demonstraţia celei de a doua afirmaţii se face prin reducere la absurd. Presupunând prin absurd că integrala improprie (1.62) este convergentă, în baza primei afirmaţii a acestei teoreme rezultă că integrala improprie (1.71) este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Din această teoremă rezultă câteva consecinţe care sunt foarte utile şi uşor de manevrat în stabilirea naturii unor integrale improprii.

Corolarul 1.10.1 (**Criteriul de comparaţie cu limită**) *Dacă în integralele improprii* (1.62) *şi* (1.71), *cu limita superioară punct singular, funcţiile f şi g sunt nenegative pe segmentul $[a, b)$ şi există*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

atunci au loc următoarele afirmaţii:

1. *dacă integrala improprie* (1.71) *este convergentă şi* $0 \leq k < +\infty$, *atunci integrala improprie* (1.62) *este convergentă;*

2. *dacă integrala improprie* (1.71) *este divergentă şi* $0 < k \leq +\infty$, *atunci integrala improprie* (1.62) *este divergentă.*

Demonstraţie. Pentru a arăta că prima afirmaţie este adevărată să observăm că din definiţia în limbajul "$\varepsilon - \delta$" a limitei unei funcţii reale de o variabilă realaă, într-un punct de acumulare a domeniului ei de definiţie, rezultă că există $a_1 \in [a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \;\; x \in [a_1, b) \implies f(x) < (k+1)g(x), \;\; x \in [a_1, b).$$

Convergenţa integralei (1.71) implică convergenţa integralei

$$\int_a^b (k+1)g(x)dx$$

şi în baza punctului **1** al Teoremei 1.10.1 rezultă afirmaţia **1** din acest corolar.

Pentru a demonstra punctul **2** să considerăm $k' \in (0, k)$. Definiţia limitei asigură existenţa lui $a_2 \in [a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k', \;\; x \in [a_2, b) \implies f(x) > k'g(x), \;\; x \in [a_2, b). \tag{1.73}$$

Inegalităţile (1.73), divergenţa integralei improprii (1.71) şi ipoteza de la punctul **2** al Teoremei 1.10.1 conduc la divergenţa integralei (1.62). ■

Observaţia 1.10.1 *Dacă* $0 < k < +\infty$, *atunci integralele* (1.62) *şi* (1.71) *au aceeaşi natură.*

Corolarul 1.10.2 (**Criteriu special de comparaţie**) *Pentru integrala improprie de speţa întâi cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad a > 0 \tag{1.74}$$

sunt adevărate următoarele afirmaţii:

1. *dacă există* $a_1 \in [a, +\infty)$, $\alpha > 1$ *şi* $C \geq 0$ *finit astfel încât*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}, \;\; x \in [a_1, +\infty),$$

   atunci integrala improprie (1.74) *este absolut convergentă;*

2. *dacă există* $a_2 \in [a, +\infty)$, $\alpha \leq 1$ *şi* $C > 0$ *astfel încât*

$$|f(x)| \geq \frac{C}{x^\alpha}, \;\; x \in [a_2, +\infty),$$

   iar funcţia f *are semn constant pe* $[a_2, +\infty)$, *atunci integrala improprie* (1.74) *este divergentă.*

Demonstraţie. Punând $g(x) = \dfrac{C}{x^\alpha}$ în criteriul general de comparaţie şi ţinând cont de faptul că integrala improprie

$$\int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi $a > 0$, deducem că integrala (1.74) este absolut convergentă. Să observăm că presupunerea $a > 0$ nu este restrictivă căci dacă se întâmplă ca în (1.74) limita inferioară de integrare să nu fie pozitivă, atunci a poate fi înlocuit prin $c > 0$, iar integralele improprii $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ şi $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)dx$ sunt simultan convergente sau divergente.

Pentru a demonstra cea de a doua afirmaţie, presupunem că există $a_2 > a$, $C > 0$ şi $\alpha \leq 1$ astfel încât $f(x) \geq \dfrac{C}{x^\alpha}$ pentru $x \in [a_2, +\infty)$. Dacă ţinem cont că în acest caz integrala improprie $\displaystyle\int_{a_2}^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx$ este divergentă şi aplicăm partea a doua a criteriului general de comparaţie, deducem că $\displaystyle\int_{a_2}^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă rezultat care, împreună cu Observaţia 1.2.1, implică divergenţa integralei improprii (1.74).

În cazul în care valorile funcţiei f sunt negative pe $[a_2, +\infty)$, dacă $f(x) \leq -\dfrac{C}{x^\alpha}$ pentru $x \geq a_2 \geq a > 0$, $C > 0$ şi $\alpha \leq 1$, putem pune $f^*(x) = -f(x)$.

Funcţia f^* are proprietatea $f^*(x) \geq \dfrac{C}{x^\alpha}$ pentru orice $x \geq a_2 \geq a > 0$.

În consecinţă, integrala $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^*(x)dx$ este divergentă, ceea ce atrage faptul că integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = -\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f^*(x)dx$$

este de asemeni divergentă, pentru că ultima limită nu există. ■

Corolarul 1.10.3 (**Criteriul de convergenţă în α cu limită**) *Dacă există limita*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)|\, x^\alpha = C,$$

atunci au loc următoarele afirmaţii:

1. *dacă* $0 \leq C < +\infty$ *şi* $\alpha > 1$, *integrala improprie* (1.74) *este absolut convergentă;*

2. *dacă* $0 < C \leq +\infty$, $\alpha \leq 1$ *şi funcţia* f *păstrează acelaşi semn pentru* $x \geq a_2$, *unde* $a_2 \geq a$, *integrala improprie* (1.74) *este divergentă.*

Demonstraţie. Din definiţia limitei cu vecinătăţi rezultă că dacă $0 \leq C < +\infty$, există $a_1 \geq a$ astfel încât au loc inegalităţile:

$$|f(x)|\, x^\alpha \leq 2C, \quad \text{pentru} \quad C > 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{2C}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty);$$

$$|f(x)|\, x^\alpha \leq 1, \quad \text{pentru} \quad C = 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty).$$

Prin urmare, în baza punctului **1** al Corolarului 1.10.2 integrala improprie de speţa întâi (1.74) este absolut convergentă.

Pentru a doua afirmaţie, dacă $0 < C \leq +\infty$ şi $\alpha \leq 1$, au loc următoarele inegalităţi

$$|f(x)|\, x^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{pentru} \quad C < +\infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| > \frac{C}{2x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty);$$

$$|f(x)|\, x^\alpha > 1, \quad \text{pentru} \quad C = \infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, +\infty) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| > \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty),$$

de unde, conform celei de a doua afirmaţii din Corolarul 1.10.2, rezultă că integrala improprie (1.74) este divergentă. ■

Exemplul 1.10.1 *Integrala improprie*

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \tag{1.75}$$

unde $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ *este un polinom de gradul* m *cu coeficienţi reali, iar* $Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ *un polinom real de grad* n*, care nu are rădăcini reale în intervalul de integrare* $[a, +\infty)$*, este convergentă dacă* $n > m + 1$.

Soluţie. Într-adevăr, funcţia de integrat se poate scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_m}{x^m}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \cdots + \dfrac{b_n}{x^n}}. \tag{1.76}$$

Efectuând produsul cu x^{n-m} în ambii membri ai relaţiei (1.76) şi trecând la limită pentru $x \to +\infty$, obţinem

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-m} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0},$$

care arată că dacă $n - m > 1$, integrala improprie (1.75) este convergentă. ■

Exerciţiul 1.10.1 *Să se studieze natura integralelor improprii de prima speţă:*

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}}, \qquad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Soluţie. Integrala I_1 este convergentă deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}} < \frac{1}{x^2}, \quad \text{iar} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{este convergentă.}$$

A doua integrală improprie este divergentă pentru că

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{x^{2/3}}{x} = \frac{1}{x^{1/3}}, \quad \text{iar integrala} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/3}} \quad \text{este convergentă.}$$

În studiul naturii ambelor integrale s–a folosit criteriul special de comparaţie din Corolarul 1.10.2. ■

Exemplul 1.10.2 *Integralele improprii de prima speţă:*

$$\int_a^{+\infty} e^{-k^2x}\sin mx dx; \qquad I_2 = \int_a^{+\infty} e^{-k^2x}\cos mx dx$$

sunt absolut convergente deoarece:

$$|e^{-k^2x}\sin mx| \leq e^{-k^2x}; \qquad |e^{-k^2x}\cos mx| \leq e^{-k^2x},$$

iar integrala improprie de speţa a doua

$$\int_a^{+\infty} e^{-k^2x} dx$$

este convergentă în baza definiţiei naturii unei integrale improprii.

■

Comparând integrala improprie de speţa a doua

$$\int_a^b f(x)dx, \quad -\infty < a < b < +\infty, \tag{1.77}$$

cu punctul singular în limita superioară (respectiv în limita inferioară) cu integrala improprie deja studiată

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad \Big(\text{respectiv} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\Big),$$

convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$, obţinem criterii de convergenţă în α ale integralelor improprii de speţa a doua.

Corolarul 1.10.4 (**Criteriu special de comparaţie pentru integrale improprii de speţa doua**) *Pentru integrala improprie* (1.77), *cu limita superioară* (*respectiv limita inferioară*) *punct singular, au loc următoarele afirmaţii:*

1. *dacă există* $a_1 \in [a, b)$, (*respectiv* $a_1 \in (a, b]$), $\alpha < 1$ *şi* $0 \leq C < +\infty$ *astfel încât*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^\alpha}, x \in [a_1, b)$$

$$\Big(\textit{respectiv } |f(x)| \leq \frac{C}{(x-a)^\alpha}, x \in (a, a_1]\Big),$$

atunci integrala improprie de speţa doua $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, *cu limita superioară* (*respectiv limita inferioară*) *punct singular, este absolut convergentă;*

2. *dacă există* $a_2 \in [a, b)$ (*respectiv* $a_2 \in (a, b]$), $\alpha \geq 1$ *şi* $C > 0$ *astfel încât*

$$|f(x)| > \frac{C}{(b-x)^\alpha}, x \in [a_2, b)$$

$$\Big(\textit{respectiv } \ |f(x)| > \frac{C}{(x-a)^\alpha}, x \in (a, a_2]\Big),$$

iar funcţia f *are semn constant pe* $[a_2, b)$ (*respectiv pe* $(a, a_2]$), *atunci integrala improprie de speţa doua* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, *cu limita superioară* (*respectiv limita inferioară*) *punct singular, este divergentă.*

Demonstraţie. Punând $g(x) = \dfrac{C}{(b-x)^\alpha}$ $\Big($respectiv $g(x) = \dfrac{C}{(x-a)^\alpha}\Big)$ în criteriul general de comparaţie din Teorema 1.10.1 şi ţinând cont de faptul că integrala improprie

$$\int_a^b \frac{C}{(b-x)^\alpha} dx = \frac{C\,(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

$$\Big(\text{respectiv } \int_a^b \frac{C}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{C\,(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\Big)$$

este convergentă pentru $\alpha < 1$ având valoarea scrisă alăturat, deducem că integrala improprie de speţa doua $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, cu limita superioară (respectiv limita inferioară) punct singular, este absolut convergentă şi deci prima afirmaţie este demonstrată.

Să presupunem că funcţia f este nenegativă. Atunci avem

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^{\alpha}} \Big(\text{respectiv } f(x) > \frac{C}{(x-a)^{\alpha}}\Big)$$

şi $\alpha \geq 1$ pentru toţi $x \in [a_2, b) \subset [a, b)$ (respectiv $x \in (a, a_2] \subset (a, b]$). În acest caz integrala improprie de speţa doua

$$\int_{a_2}^b \frac{C}{(b-x)^{\alpha}} dx \Big(\text{respectiv } \int_a^{a_2} \frac{C}{(x-a)^{\alpha}} dx\Big)$$

este divergentă. Aplicând partea a doua a criteriului general de comparaţie deducem că integrala improprie $\displaystyle\int_{a_2}^b f(x)dx \Big(\text{respectiv } \int_a^{a_2} f(x)dx\Big)$ este divergentă. Această ultimă integrală are aceeaşi natură cu integrala improprie de speţa doua cu limita superioară (respectiv limita inferioară) finită punct singular din (1.77), rezultat care implică divergenţa acestora.

În cazul în care funcţia f este negativă pe intervalul $[a_2, b) \subset [a, b)$ (respectiv $(a, a_2] \subset (a, b]$), dacă $f(x) < -\dfrac{C}{(b-x)^{\alpha}} \Big(\text{respectiv } f(x) < -\dfrac{C}{(x-a)^{\alpha}}\Big)$ pentru toţi $x \in [a_2, b)$ (respectiv $x \in (a, a_2]$), $C > 0$ şi $\alpha \geq 1$, introducem funcţia f^* ale cărei valori se determină după legea $f^*(x) = -f(x)$. Rezultă că $f^*(x) > \dfrac{C}{(b-x)^{\alpha}} \Big(\text{respectiv } f^*(x) > \dfrac{C}{(x-a)^{\alpha}}\Big)$ pentru orice $x \in [a_2, b)$ (respectiv $x \in (a, a_2]$) şi în consecinţă integrala $\displaystyle\int_a^b f^*(x)dx$ este divergentă. Prin urmare, integrala

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f^*(x)dx$$

este divergentă cea ce arată că şi cea de a doua afirmaţie din enunţul teoremei este adevărată. ■

Corolarul 1.10.5 (**Criteriul de convergenţă în α cu limită a integralelor improprii de speţa doua**) *În ipoteza că există limita*

$$\lim_{x \to b} |f(x)| \, (b-x)^{\alpha} = C,$$

au loc următoarele afirmaţii:

1. *dacă există* $a_1 \in [a, b)$, $\alpha < 1$ *şi* $0 \leq C < +\infty$, *atunci integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este absolut convergentă;*

2. *dacă* $0 < C \leq +\infty$, $\alpha \leq 1$ *şi funcţia* f *păstrează acelaşi semn pentru* $x \in [a_2, b)$, *unde* $a \leq a_2 < b$, *atunci integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este divergentă.*

Demonstraţie. Din definiţia limitei cu vecinătăţi rezultă că dacă $0 \leq C < +\infty$, există $a_1 \geq a$ astfel încât au loc inegalităţile:

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha \leq 2C, \quad \text{pentru} \quad C > 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{2C}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b);$$

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha \leq 1, \quad \text{pentru} \quad C = 0 \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b).$$

Prin urmare, în baza punctului **1** al Teoremei 1.10.1 integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este absolut convergentă şi deci prima afirmaţie este demonstrată.

Dacă $0 < C \leq +\infty$ şi $\alpha \leq 1$, avem

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{pentru} \quad C < +\infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| > \frac{C}{2(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b);$$

$$|f(x)|\,(b-x)^\alpha > 1, \quad \text{pentru} \quad C = \infty \quad \text{şi} \quad x \in [a_2, b) \quad \Longrightarrow$$

$$|f(x)| > \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b),$$

de unde, în baza punctului **2** al Teoremei 1.10.1, rezultă că integrala improprie de speţa doua cu limita superioară punct singular este divergentă, ceea ce arată că şi a doua afirmaţie este adevarată. ■

Observaţia 1.10.2 *Se poate enunţa criteriul în α cu limită de convergenţă a integralelor improprii de speţa doua cu limita inferioară punct singular. Pentru aceasta, în Corolarul* 1.10.5 *şi demonstraţia lui, funcţia* $(b-x)^\alpha$*, acolo unde apare, se trece în* $(x-a)^\alpha$*, iar segmentul* $[a_2, b)$ *se înlocuieşte cu segmentul* $(a, a_2] \subset (a, b]$.

Exerciţiul 1.10.2 *Să se calculeze integrala improprie*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}.$$

Soluţie. Se observă că integrantul este nemărginit întro vecinătate a punctului $x = 1$. Scriem integrala ca suma dintre o integrală improprie de speţa doua, cu limita superioară punct singular, şi o alta, de speţa treia, care are ambele limite de integrare puncte singulare. Avem:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = I_1 + I_2.$$

Integrala I_1 este convergentă, deoarece există $\alpha = 1/2 < 1$ cu proprietatea

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Integrala de speţa treia se descompune în două integrale, prima de speţa doua cu limita inferioară, finită, punct singular, iar a doua, integrală improprie de speţa întâi cu limita superioară punct singular. Ambele integrale sunt convergente în baza criteriului în α cu limită căci:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \ \text{pentru} \ \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = 1, \ \text{pentru} \ \alpha = 2 > 1.$$

Fiind o sumă de integrale convergente rezultă că I_2 este convergentă. Prin urmare, integrala iniţială este convergentă. Integrala I_1 se reduce la integrala

I_2 prin schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{y}$. Putem spune că integrala dată este egală cu de două ori integrala I_2. Pentru calculul lui I_2 facem schimbarea de variabilă $x + 1 = \dfrac{1}{t}$. Găsim:

$$I_2 = -\int_{1/2}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = \sqrt{1-2t}\Big|_{1/2}^{0} = 1.$$

Rezultatele stabilite arată că valoarea integralei date este 2. ■

1.11 Criterii de convergenţă ale integralelor improprii cu integrantul de semn variabil

Considerăm că funcţiile $f : [a,b) \to I\!\!R$ şi $h : [a,b) \to I\!\!R$, unde $-\infty < a < b \le +\infty$, sunt alese astfel încât f şi $f \cdot h$ sunt funcţii integrabile Riemann pe orice compact $[a,t] \subset [a,b)$.

Teorema 1.11.1 (**Criteriul lui Abel**) *Dacă integrala improprie cu limita superioară punct singular* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă şi funcţia* h *este monotonă şi mărginită pe* $[a,b)$*, atunci integrala improprie*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx, \tag{1.78}$$

cu limita superioară punct singular, este convergentă.

Demonstraţie. Fie $M = \sup\{|h(x)| : \; x \in [a,b)\} < +\infty$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. Primele două ipoteze ale teoremei referitoare la funcţia f şi testul general de convergenţă al lui Cauchy implică existenţa unui $b(\varepsilon) \in [a,b)$ astfel încât

$$\Big| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \Big| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{1.79}$$

oricare ar fi $t', t'' \in (b(\varepsilon), b)$. Se poate demonstra că există $\xi \in [t', t'']$ astfel încât

$$\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx = h(t') \int_{t'}^{\xi} f(x)dx + h(t'') \int_{\xi}^{t''} f(x)dx. \tag{1.80}$$

Luând modulul ambilor membri din (1.80) şi folosind pproprietăţile acestuia, obţinem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx\Big| \leq |h(t')|\Big|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\Big| + |h(t'')|\Big|\int_{\xi}^{t''} f(x)dx\Big|. \tag{1.81}$$

Deoarece $t', \xi, t'' \in (b(\varepsilon), b)$, din (1.79), (1.80) şi (1.81), deducem

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx\Big| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

care, împreună cu testul de convergenţă al lui Cauchy, arată că integrala improprie (1.79) este convergentă. ■

Teorema 1.11.2 (**Criteriul lui Dirichlet**) *Dacă funcţia*

$$t \mapsto F(t) = \int_a^t f(x)dx, \quad t \in [a, b),$$

este mărginită, funcţia h este monotonă şi

$$\lim_{x\to b} h(x) = 0,$$

atunci integrala improprie (1.78), *cu limita superioară punct singular, este convergentă.*

Demonstraţie. Din prima ipoteză rezultă existenţa constantei $K > 0$ astfel încât

$$\Big|\int_a^t f(x)dx\Big| \leq K, \quad t \in [a, b). \tag{1.82}$$

Din cea de a doua ipoteză rezultă că oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $b(\varepsilon) \in [a, b)$ astfel încât

$$|h(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad x \in (b(\varepsilon), b). \tag{1.83}$$

Din (1.82) obţinem

$$\Big|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\Big| = \Big|\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{t'} f(x)dx\Big| \leq$$

$$\Big|\int_a^{\xi} f(x)dx\Big| + \Big|\int_a^{\xi} f(x)dx\Big| \leq 2K.$$

În mod asemănător demonstrăm mărginirea celelaltei integrale care intervine în membrul al doilea al relaţiei (1.80).

Aşadar, avem:

$$\Big|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\Big| \leq 2K; \quad \Big|\int_{\xi}^{t''} f(x)dx\Big| \leq 2K. \tag{1.84}$$

Atunci, din (1.81), (1.83) şi (1.84) rezultă

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx\Big| < \varepsilon, \ \ (\forall)\ t', t'' \in (b(\varepsilon), b). \tag{1.85}$$

Testul de convergenţă al lui Cauchy şi (1.85) demonstrează teorema. ■

Exerciţiul 1.11.1 *Fie $a > 0$ şi $b \in I\!R^*$, numere reale arbitrare. Să se arate că integralele improprii*

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$$

sunt convergente şi să se determine valorile lor.

Soluţie. Pentru studiul naturii integralelor, folosim criteriul lui Dirichlet. Pentru ambele integrale, $h(x) = e^{-ax}$. Deoarece $a > 0$, rezultă că funcţia h este monoton descrescătoare şi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Pentru prima integrală, $f(x)$ din criteriul lui Dirichlet este $\cos bx$, iar pentru a doua $f(x) = \sin bx$. Rezultă că funcţiile $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ corespunzătoare sunt

$$F(x) = \int_0^x \cos bt dt = \frac{1}{b}\sin bx, \quad F(x) = \int_0^x \sin bt dt = \frac{1}{b}(1 - \cos bx).$$

Funcţia $|F|(x)$ este mărginită de $\dfrac{1}{|b|}$ în primul caz, iar în cel de al doilea este mărginită de $\dfrac{2}{|b|}$.

Conform criteriului lui Dirichlet, ambele integrale sunt convergente.

Pentru calculul acestor integrale, aplicăm de două ori formula integrării prin părţi şi obţinem $I_1 = \dfrac{a}{a^2+b^2}, \quad I_2 = \dfrac{b}{a^2+b^2}$. ■

Exemplul 1.11.1 *Integrala* $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ *este convergentă pentru* $\alpha > 0$ *deoarece, dacă în criteriul lui Dirichlet luăm* $f(x) = \sin x$ *şi* $h(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, *avem*

$$|F(t)| = \Big|\int_{\pi}^{t} f(x)dx\Big| = \Big|\int_{\pi}^{t}\sin x dx\Big| = |\cos\pi - \cos t| \leq 2$$

pentru $\pi \leq t \leq +\infty$, *iar* $h(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ *este o funcţie monoton descrescătoare care tinde la zero pentru* $t \to +\infty$ *şi* $\alpha > 0$.

Exerciţiul 1.11.2 *Să se cerceteze natura integralelor* **Fresnel**[1]

$$\int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)dx, \qquad \int_{0}^{+\infty}\cos(x^2)dx,$$

care sunt utilizate în optică.

Soluţie. Punând $x^2 = t$, obţinem

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)dx &= \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt,\\ \int_{0}^{+\infty}\cos(x^2)dx &= \int_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt.\end{aligned} \tag{1.86}$$

În criteriul lui Dirichlet, aplicat integralei improprii $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)h(t)dt$, luăm pe rând $f(t) = \sin t$ şi $f(t) = \cos t$, iar în ambele cazuri din (1.86), funcţia h o luăm de forma $h(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Funcţia h satisface ipotezele criteriului lui Dirichlet, iar un calcul simplu arată că valoarea absolută a funcţiei

$$u \mapsto F(u) = \int_{0}^{u} f(t)\,dt, \quad u \in (0, +\infty),$$

în ambele cazuri ale alegerii funcţiei f, este mărginită de $K = 2$. Atunci, conform criteriului lui Dirichlet, ambele integrale sunt convergente. ■

[1]Fresnel, Augustin Jean (1788 – 1827), geometru şi optician francez

Exemplul 1.11.2 *Considerând integrala improprie*

$$\int_c^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin x}{x},$$

unde $c > 0$, *şi luând*

$$f(x) = \sin x, \quad h(x) = \frac{\ln x}{x},$$

în baza criteriului lui Dirichlet, constatăm convergenţa acesteia.

Exerciţiul 1.11.3 *Să se cerceteze natura integralelor*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \qquad \alpha > 0. \tag{1.87}$$

Soluţie. Din criteriul lui Dirichlet rezultă că integralele

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \tag{1.88}$$

sunt convergente pentru $\alpha > 0$. Într-adevăr, considerând că $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, unde $x \in [1, +\infty)$, constatăm că aceste funcţii satisfac ipotezele criteriului lui Dirichlet dacă $\alpha > 0$, astfel că integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este convergentă.

Analog se demonstrează că integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ este convergentă pentru $\alpha > 0$.

Pe de altă parte, deoarece pentru $x > 1$ avem

$$\Big|\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big| \le \frac{1}{x^\alpha}, \quad \Big|\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big| \le \frac{1}{x^\alpha},$$

iar integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$, rezultă că integralele improprii (1.88) sunt absolut convergente pentru $\alpha > 1$.

Deoarece $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ este divergentă, iar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet, rezultă că integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\Big(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx\Big) \tag{1.89}$$

este divergentă. Dacă avem în vedere că $|\sin x| \geq \sin^2 x$ din (1.89) tragem concluzia că integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \tag{1.90}$$

este divergentă. La rezultatele de până acum adăugăm faptul că pentru orice $x \geq 1$ şi $\alpha \in (0,1)$ are loc inegalitatea evidentă

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{|\sin x|}{x}. \tag{1.91}$$

Din (1.90), (1.91) şi partea a doua a criteriului de comparaţie rezultă că integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ este divergentă pentru $\alpha \in (0,1)$.

Aşadar, prima integrală din (1.88) este simplu convergentă pemtru $\alpha \in (0,1)$. Analog se arată că a doua integrală din (1.88) este simplu convergentă.

Să ne ocupăm acum de integralele

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x^\alpha} dx. \tag{1.92}$$

Prima integrală din (1.92) este convergentă pentru $\alpha \in (0,1]$ deoarece

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \alpha \in (0,1) \\ 1 & \text{dacă} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Din $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\Big(\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big) = 1$ şi criteriul în α cu limită rezultă că prima integrală din (1.92) este convergentă pentru $1 < \alpha < 2$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 2$.

Prin urmare, integrala improprie (1.87) este semiconvergentă pentru $\alpha \in (0,2)$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 2$.

Deoarece pentru $\alpha > 0$ avem $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x^\alpha} = +\infty$, rezultă că a doua integrală din (1.92) este o integrală improprie cu limita inferioară punct singular pentru orice $\alpha > 0$. Apoi, din limta evidentă $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\Big(\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big) = 1$ şi Corolarul 1.10.3, rezultă că cea de a doua integrală din (1.92) este convergentă pentru orice $\alpha \in (0,1)$ şi divergentă pentru orice $\alpha \geq 1$.

Ultimul rezultat arată că cea de a doua integrală improprie din (1.87) este semiconvergentă pentru $\alpha \in (0,1)$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$. ■

1.12 Convergenţa în sensul valorii principale a unei integrale improprii

Definiţia 1.12.1 *Dacă integrala improprie de speţa întâi cu ambele limite de integrare puncte singulare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.93}$$

este divergentă dar există şi este finită

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx, \tag{1.94}$$

atunci spunem că funcţia $f : (-\infty, +\infty) \to I\!\!R$ *este* **integrabilă în sensul valorii principale** *sau că integrala* (1.93) *este* **convergentă în sensul valorii principale**, *iar*

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$$

se numeşte **valoarea principală** (*în sens Cauchy*) *a integralei* (1.93).

Fie funcţia $f : [a, b] \setminus \{c\} \to I\!\!R$ integrabilă Riemann pe orice compact $[u, t] \subset [a, c)$ sau $[u, t] \subset (c, b]$. În acest caz se poate vorbi de integrala improprie

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{1.95}$$

având punctul singular $c \in (a, b)$. Din cele prezentate în primul paragraf al acestui capitol rezultă că integrala improprie (1.95) este convergentă dacă fiecare din integralele improprii $\int_a^c f(x)dx$ şi $\int_c^b f(x)dx$ este convergentă. Aceasta înseamnă că limita de mai jos există şi este finită

$$\lim_{\substack{\eta\to c\\ \eta<c}}\int_{a}^{\eta} f(x)dx + \lim_{\substack{\xi\to c\\ \xi>c}}\int_{\xi}^{b} f(x)dx =$$

$$\lim_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0^+}}\Big(\int_{a}^{c-u} f(x)dx + \int_{c+v}^{b} f(x)dx\Big)$$

pentru ξ şi η (respectiv u şi v) tinzând independnt la limitele lor. În acest caz

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0^+}} \Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+v}^b f(x)dx \Big).$$

Definiţia 1.12.2 *Dacă integrala improprie* (1.95), *având punctul singular în* $c \in (a, b)$ *este divergentă, însă există şi este finită*

$$\lim_{u\to 0^+} \Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^b f(x)dx \Big),$$

atunci spunem că f *este* **integrabilă pe** $[a, b]$ **în sensul valorii principale a lui Cauchy** *sau că integrala improprie* (1.95) *este* **convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy** *iar*

$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to 0^+} \Big(\int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^b f(x)dx \Big),$$

se numeşte **valoarea principală** *în sens Cauchy a integralei* (1.95).

Exerciţiul 1.12.1 *Să se arate că dacă* $-\infty < a < c < b < +\infty$, *integrala improprie* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ *este divergentă, însă este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy.*

Soluţie. Punctul singular al integralei improprii considerate este în interiorul intervalului de integrare şi pentru a studia natura acesteia trebuie să determinăm limitele

$$\lim_{\lambda\to 0+0} \int_a^{c-\lambda} \frac{dx}{x-c} \quad \text{şi} \quad \lim_{\mu\to 0+0} \int_{c+\mu}^b \frac{dx}{x-c}.$$

Aceste două limite au respectiv valorile

$$-\ln(c-a) + \lim_{\lambda\to 0+0} \ln\lambda \quad \text{şi} \quad \ln(b-c) - \lim_{\mu\to 0+0} \ln\mu.$$

Prin urmare, avem

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\lambda\to 0+0\\ \mu\to 0+0}} \ln\frac{\lambda}{\mu}.$$

Însă limita de mai sus nu există ceea ce înseamnă că integrala improprie considerată este divergentă.

Considerând cazul particular $\lambda = \mu$, deducem că ultima limită este zero şi deci integrala improprie considerată este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy şi v.p. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}$. ■

Exemplul 1.12.1 *Integrala improprie de speţa a doua, cu ambele limite puncte singulare, a unei funcţii impare f este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy şi v.p.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$

Soluţie. Într-adevăr, funcţia f fiind impară avem că $\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)dx = 0$, oricare ar fi $t > 0$. În consecinţă există limita din (1.94), deci integrala improprie considerată este convergentă în sensul valorii principală a lui Cauchy şi are valoarea principală egală cu 0. ■

Exemplul 1.12.2 I*ntegrala improprie divergentă* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *a unei funcţii pare* $f : (-\infty, +\infty) \to I\!R$ *nu este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy.*

Soluţie. Într-adevăr, funcţia f fiind pară şi integrabilă Riemann pe orice compact de forma $[-t, t]$, $t > 0$, avem

$$\int_{-t}^{t} f(x)dx = 2\int_{0}^{t} f(x)dx = 2\int_{-t}^{0} f(x)dx.$$

Cum integrala improprie $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă, cel puţin una din integralele improprii $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ şi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă. Din această afirmaţie şi din egalitatea precedentă rezultă că nu există v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.■

Exemplul 1.12.3 *Să se aplice noţiunea de valoare principală în sensul lui Cauchy a unei integrale improprii divergente pentru a se calcula valoarea integralei improprii*

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}dx, \tag{1.96}$$

unde m şi n sunt întregi pozitivi cu $0 < m < n$.

Soluţie. Rădăcinile numitorului funcţiei de integrat, $f(x) = \dfrac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$, sunt rădăcinile de ordinul $2n$ ale numărului complex -1. Având în vedere că forma trigonometrică a acestui număr complex este $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, rezultă că rădăcinile numitorului funcţiei f au expresiile

$$x_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = a_k + ib_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1.$$

Prin urmare, cele $2n$ rădăcini ale ecuaţiei $1 + x^{2n} = 0$ nu sunt reale şi deci funcţia de integrat este definită pe întreaga axă a numerelor reale.

Integrala improprie (1.96) este convergentă deoarece, în baza Exemplul 1.10.1, diferenţa gradelor polinoamelor de la numitorul şi numărătorul funcţiei de integrat este mai mare decât 1, această diferenţă fiind cel puţin 2.

Cu menţiunea prealabilă că integrala Riemann a unei funcţii complexe de variabilă reală $u(x) + iv(x)$, unde u şi v sunt funcţii reale, este definită prin

$$\int_a^b [u(x) + iv(x)]dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx,$$

să calculăm integrala definită de la $-\ell$ la ℓ, unde $\ell > 0$, din funcţia f. În acest scop vom folosi descompunerea numitorului funcţiei f în factori primi complexi şi a funcţiei de integrat în suma de fracţii $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \dfrac{A_k}{x - x_k}$, unde coeficienţii A_k sunt daţi de raportul dintre valoarea numărătorului funcţiei f în $x = x_k$ şi valoarea, în acelaşi punct x_k, a derivatei polinomului de la numitor, adică $A_k = \dfrac{x_k^{2m}}{2nx_k^{2n-1}} = -\dfrac{1}{2n}x_k^{2m+1}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$.

Avem

$$\int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{(x - a_k) - ib_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \Big\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x - a_k}{(x-a_k)^2 + b_k^2}dx + i\int_{-\ell}^{\ell} \frac{b_k}{(x-a_k)^2 + b_k^2}dx \Big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \Big\{ \ln\frac{(\ell - a_k)^2 + b_k^2}{(\ell + a_k)^2 + b_k^2} + i\Big[\operatorname{arctg}\frac{\ell - a_k}{b_k} + \operatorname{arctg}\frac{\ell + a_k}{b_k}\Big]\Big\}.$$

Trecând la limită pentru $\ell \to +\infty$, obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \sum_{k=0}^{2n-1} \pm\pi i A_k,$$

unde semnul plus corespunde lui $b_k > 0$, iar semnul minus se ia când $b_k < 0$.

Integralele improprii cu ambele limite de integrare puncte singulare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-x_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}dx,$$

unde k ia valori întregi de la zero până la $2n-1$, sunt divergente, iar numerele

$$\lim_{\ell\to+\infty} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x-x_k} =$$

$$= \lim_{\ell\to+\infty} \Big\{ \ln \frac{(\ell-a_k)^2+b_k^2}{(\ell+a_k)^2+b_k^2} + i\Big[\operatorname{arctg} \frac{\ell-a_k}{b_k} + \operatorname{arctg} \frac{\ell+a_k}{b_k}\Big]\Big\},$$

egale cu $+\pi i$ sau $-\pi i$, după cum $b_k > 0$, respectiv $b_k < 0$, reprezintă valorile principale ale integralelor.

Se constată simplu că $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-1}$ sunt numere pozitive, iar următoarele, adică $b_n,\ b_{n+1},\ \cdots,\ b_{2n-1}$, sunt negative. Deci, putem scrie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \pi i\Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_k - \sum_{k=n}^{2n-1} A_k\Big\}. \tag{1.97}$$

Prima sumă din membrul doi al relaţiei (1.97) are expresia

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi}, \tag{1.98}$$

de unde constatăm că este suma a n termeni ai unei progresii geometrice cu raţia $q = e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}$ şi primul termen egal cu $e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}$. Efectuând calculul sumei din (1.98), găsim

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi} - e^{i\,\frac{(2m+1)(2n+1)}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi} - e^{i\,(2m+1)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi} - e^{i\,(2m+1)\pi} \cdot e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \end{aligned} \tag{1.99}$$

Însă factorul $e^{i\,(2m+1)\pi}$ de la numărătorul expresiei (1.99) a sumei $\sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k$ este -1. Ca urmare, suma devine

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}+e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \tag{1.100}$$

Să determinăm acum valorea celei de a doua sume. Avem

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=n}^{2n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=n}^{2n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi}.$$

Indicele de sumare de aici se poate scrie în forma $k = n + s$, unde s va lua valori de la zero până la $n-1$. Expresia celei de a doua sume devine acum

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\cdot e^{i\,(2m+1)\pi}\cdot\sum_{s=0}^{n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2s+1)}{2n}\pi}.$$

Dacă se ţine cont de faptul că $e^{i\,(2m+1)\pi} = -1$ şi de rezultatul stabilit în (1.98), (1.99) şi (1.100), rezultă că expresia finală a celei de a doua sume este

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = \frac{1}{2n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1} e^{i\,\frac{(2m+1)(2s+1)}{2n}\pi} = \frac{1}{n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \tag{1.101}$$

Din (1.97), (1.100) şi (1.101) rezultă

$$2J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = -\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{e^{i\,\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i\,2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{1.102}$$

Integrantul din (1.102) fiind o funcţie pară, rezultă valoarea unei alte integrale importante

$$J = \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{1.103}$$

care se va utiliza în calculul unei integrale improprii depinzând de un parametru. ■

Capitolul 2

Integrale depinzând de un parametru

2.1 Integrale proprii depinzând de un parametru

Fie f o funcţie reală de două variabile reale definită pe intervalul bidimensional închis

$$\Pi = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\},$$

cu proprietatea că restricţia sa la segmentul de dreaptă paralel cu axa Ox care trece prin punctul $(0, y)$

$$f(\cdot, y) : [a, b] \to I\!R$$

este funcţie integrabilă Riemann pentru orice valoare fixată a lui y din intervalul $[c, d]$.

Definiţia 2.1.1 *Funcţia reală de variabilă reală*

$$J : [c, d] \to I\!R, \qquad J(y) = \int_a^b f(x, y)dx, \tag{2.1}$$

se numeşte **integrală proprie depinzând de un parametru**. *Variabila* y *se numeşte* **parametru**.

Observaţia 2.1.1 *Pot fi introduse şi* **integrale proprii care depind de doi sau mai mulţi parametri**.

Definiţia 2.1.2 *O* **integrală proprie care depinde de mai mulţi parametri** *are forma*

$$\Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)dx. \tag{2.2}$$

Parametrii $y_1, y_2, \cdots, y_n$ pot fi consideraţi coordonatele în baza canonică din $I\!R^n$ ale vectorului **parametru y** care aparţine intervalului $n-$dimensional închis

$$I_n = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \cdots \times [c_n, d_n] \subset I\!R^n.$$

Observaţia 2.1.2 *Integrala proprie care depinde de mai mulţi parametri* (2.2) *poate fi prezentată ca o integrală depinzând de un parametru,*

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_a^b f(x, \mathbf{y})dx, \tag{2.3}$$

cu menţiunea că parametrul este vectorul $\mathbf{y} \in I_n$.

Ne propunem să studiem proprietăţile integralelor proprii care depind de un parametru.

Teorema 2.1.1 (**Continuitatea integralelor proprii depinzând de parametru)** *Dacă funcţia* f *este continuă pe intervalul bidimensional închis* Π, *atunci funcţia* $J : [c, d] \to I\!R$, *definită de integrala* (2.1), *este uniform continuă.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia $f(x, y)$ este continuă în intervalul bidimensional închis Π ea este uniform continuă. Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât inegalităţile

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon), \qquad |y' - y''| < \delta(\varepsilon)$$

implică inegalitatea

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{2.4}$$

Numărul δ depinde numai de ε fiind independent de poziţia ocupată de punctele (x', y') şi (x'', y'') în intervalul bidimensional închis Π.

În particular, luând $x' = x'' = x$ se constată că pentru orice y' şi $y'' = y$ din intervalului $[c, d]$ cu proprietatea

$$|y' - y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.5}$$

şi pentru orice $x \in [a, b]$, are loc inegalitatea

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{2.6}$$

Prin urmare, pentru orice y şi y' aparţinând intervalului $[c, d]$ care satisfac (2.5), avem

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y)| &= \Big| \int_a^b \Big(f(x, y') - f(x, y)\Big) dx \Big| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y)| dx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Din (2.6) şi (2.7) rezultă că pentru orice $y, y' \in [c, d]$ cu proprietatea (2.5) are loc

$$|J(y') - J(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon.$$

Această inegalitate demonstrează că funcţia J din (2.1) este *uniform continuă*. ■

Corolarul 2.1.1 *În ipotezele teoremei precedente, funcţia*

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx \tag{2.8}$$

este uniform continuă în intervalul închis tridimensional

$$\Pi^* = \{(u, v, y) \in I\!R^3 : \ a \leq u \leq b, \ a \leq v \leq b, \ c \leq y \leq d\}.$$

Demonstraţie. Din continuitatea funcţiei f pe intervalul bidimensional închis Π, care este o mulţime compactă în $I\!R^2$, deducem că f este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile, deci există constanta pozitivă şi finită C astfel încât

$$|f(x, y)| \leq C, \quad (x, y) \in \Pi.$$

Să evaluăm diferenţa valorilor funcţiei F în punctele

$$(u', v', y'), \quad (u'', v'', y'') \in \Pi^*,$$

adică

$$\Delta F = F(u', v', y') - F(u'', v'', y''). \tag{2.9}$$

Mai întâi, ΔF este diferenţa integralelor

$$\Delta F = \int_{u'}^{v'} f(x, y')dx - \int_{u''}^{v''} f(x, y'')dx.$$

În membrul al doilea a acestei diferenţe adunăm şi scădem integralele

$$\int_{u'}^{u''} f(x, y'')dx; \qquad \int_{v'}^{v''} f(x, y'')dx.$$

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul de integrare, diferenţa de integrale din membrul doi al relaţiei (2.9) se scrie

$$\Delta F = \int_{u'}^{v'} \Big(f(x, y') - f(x, y'')\Big)dx + \int_{u'}^{u''} f(x, y'')dx - \int_{v'}^{v''} f(x, y'')dx.$$

Luând modulul ambilor membri şi folosind proprietăţile integralelor definite, găsim

$$|\Delta F| \leq \Big| \int_{u'}^{v'} \Big|\Delta f(x, \Delta y)\Big|dx\Big| + \Big| \int_{u'}^{u''} |f(x, y'')|dx\Big| + \Big| \int_{v'}^{v''} |f(x, y'')|dx\Big|$$

unde, pentru simplitatea scrierii, s–a făcut pentru moment notaţia

$$\Delta f(x, \Delta y) = f(x, y') - f(x, y'').$$

Prin urmare, o nouă evaluare pentru valoarea absolută a diferenţei (2.9) este

$$|\Delta F| \leq \Big| \int_{u'}^{v'} \Big|f(x, y') - f(x, y'')\Big|dx\Big| + C\Big(|u'' - u'| + |v'' - v'|\Big).$$

Funcţia f fiind continuă în intervalul bidimensional închis Π, este uniform continuă, prin urmare pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_1(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $y', y'' \in [c, d]$ cu proprietatea

$$|y' - y''| < \delta_1(\varepsilon) \tag{2.10}$$

avem

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.11}$$

Să observăm că oriunde ar fi situat punctul (u', v') în intervalul bidimensional $[a,b] \times [a,b]$, diferenţa $|u' - v'| \leq b - a$ deci, folosind această observaţie şi (2.11), rezultă că oricare ar fi punctele $y', y'' \in [c,d]$ care satisfac (2.10), modulul diferenţei (2.9) se reevaluează după cum urmează

$$|\Delta F| < \frac{\varepsilon}{2} + C\Big(|u'' - u'| + |v'' - v'|\Big).$$

Analiza raţionamentului de mai sus conduce la concluzia că pentru orice $\varepsilon > 0$ există

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{4C}\}$$

astfel încât oricare ar fi punctele $(u', v', y'), (u'', v'', y'') \in \Pi^*$ ale căror coordonate satisfac inegalităţile

$$|u' - u''| < \delta(\varepsilon), \quad |v' - v''| < \delta(\varepsilon), \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon), \tag{2.12}$$

avem că

$$|F(u', v', y') - F(u'', v'', y'')| < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Din (2.12) şi (2.13) şi definiţia uniformei continuităţi a unei funcţii reale de trei variabile reale rezultă că funcţia $F : \Pi^* \to I\!R$ ale cărei valori sunt date de (2.8) este uniform continuă. ∎

Teorema 2.1.2 (**Derivabilitatea unei integrale proprii care depinde de un parametru.**) *Dacă f şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcţii continue pe intervalul bidimensional închis Π, atunci funcţia J definită de integrala depinzând de parametrul y (2.1) este derivabilă pe compactul $[c,d]$ şi are loc relaţia*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \quad y \in [c,d]. \tag{2.14}$$

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că raportul incrementar al funcţiei J în punctul y are limită în y şi această limită este chiar integrala din ultimul membru al lui (2.14), adică

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x,y)dx. \tag{2.15}$$

În acest scop vom demonstra că pentru $\Delta y \neq 0$ diferenţa

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

tinde la zero când $\Delta y \to 0$. Să remarcăm întâi că, în baza teoremei creşterilor finite a lui Lagrange, există numărul pozitiv şi subunitar θ astfel încât

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}dx = \int_a^b f'_y(x,y+\theta\Delta y)dx.$$

În consecinţă, putem scrie

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)dx = \int_a^b \Big(f'_y(x,y+\theta\Delta y) - f'_y(x,y)\Big)dx.$$

Să evaluăm diferenţa din membrul doi a acestei relaţii pentru valori suficient de mici ale lui $|\Delta y|$. Deoarece derivata $f'_y(x,y)$ este continuă în intervalul bidimensional închis Π ea este uniform continuă şi deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice creştere a lui y care satisface

$$|\Delta y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.16}$$

este adevărată inegalitatea

$$|f'_y(x,y+\Delta y) - f'_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \tag{2.17}$$

$(\forall)\ x \in [a,b]$ şi $(\forall)\ y,\ y+\Delta y \in [c,d]$. Cum $0 < \theta < 1$, din (2.16) avem şi

$$|\theta\Delta y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.18}$$

ceea ce, în baza lui (2.17), atrage

$$|f'_y(x,y+\theta\Delta y) - f'_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{2.19}$$

Atunci, luând în consideraţie relaţiile stabilite mai sus, avem inegalitatea

$$\Big|\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon, \tag{2.20}$$

adevărată pentru toate valorile lui Δy care satisfac (2.16). Rezultatul stabilit în (2.20) arată că are loc (2.15) şi teorema este demonstrată. ∎

Formula (2.14), cunoscută ca *regula lui Leibniz* de derivare a unei integrale depinzând de parametru, poate fi scrisă şi în forma

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \qquad y\in[c,d].$$

Observaţia 2.1.3 *Derivata unei integrale care depinde de un parametru este egală cu integrala derivatei parţiale a integrandului în raport cu variabila paramatru.*

Teorema 2.1.3 (**Derivabilitatea unei integrale proprii depinzând de parametru a cărei limite de integrare depind de parametru**) *Dacă funcţiile* f *şi* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sunt continue pe intervalul bidimensional închis* Π, *iar* $x = x_1(y)$ *şi* $x = x_2(y)$ *sunt funcţii derivabile pe intervalul* $[c,d]$ *cu valori în intervalul* $[a,b]$, *atunci integrala depinzând de parametrul* y

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \tag{2.21}$$

este o funcţie derivabilă pe compactul $[c,d]$ *şi are loc relaţia*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f\Big(x_2(y),y\Big)\cdot\frac{dx_2}{dy}(y) - f\Big(x_1(y),y\Big)\cdot\frac{dx_1}{dy}(y),$$

oricare ar fi parametrul $y\in[c,d]$.

Demonstraţie. Avem

$$J(y) = F\Big(x_1(y),x_2(y),y\Big), \tag{2.22}$$

unde funcţia F, definită în relaţia (2.8), posedă derivate parţiale continue pe paralelipipedul Π^* şi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v,y) \;=\; -\,f(u,y); \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v,y) \;=\; f(v,y); \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}(u,v,y) \;=\; \displaystyle\int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \end{cases} \tag{2.23}$$

Primele două relaţii din (2.23) există şi sunt egale cu expresiile din membrul al doilea ale acestora în baza rezultatului cunoscut de la integrale definite care afirmă că dacă funcţia $g : [a, b] \to I\!R$ este continuă, atunci funcţiile G_1 şi G_2 definite pe $[a, b]$ prin

$$G_1(t) \;=\; \int_a^t f(x)dx, \qquad G_2(t) \;=\; \int_t^b g(x)dx$$

sunt derivabile şi

$$G_1'(t) \;=\; f(t), \qquad G_2'(t) \;=\; -\,f(t), \;\; (\forall)\; t \in [a, b]. \tag{2.24}$$

După Teorema 2.1.2 este adevărată şi cea de–a treia egalitate din (2.23), iar din Corolarul 2.1.1 rezultă că toate derivatele parţiale din (2.23) sunt funcţii continue pe paralelipipedul Π^*. Deoarece funcţiile $x = x_1(y)$ şi $x = x_2(y)$ sunt derivabile, aplicând funcţiei $y \mapsto F\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big)$ regula de derivare a funcţiilor compuse de o variabilă, obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy}F\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big) = \frac{\partial F}{\partial u}\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big) \cdot \frac{dx_1}{dy}(y) + \\ &+\frac{\partial F}{\partial v}\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big) \cdot \frac{dx_2}{dy}(y) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x_1(y), x_2(y), y\Big). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Însă, funcţia J din (2.21) este astfel încât are loc egalitatea (2.22). Acum, din relaţiile (2.23), (2.25) şi (2.22) rezultă concluzia teoremei. ■

Exemplul 2.1.1 *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de un parametru cu limitele de integrare variabile, să se evalueze integrala*

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1 + yx)}{1 + x^2}dx. \tag{2.26}$$

Soluţie. Suntem în ipotezele Teoremei 2.1.3 astfel că putem scrie

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{\ln(1 + y^2)}{1 + y^2} + \int_0^y \frac{x}{(1 + yx)(1 + x^2)}dx.$$

Integrala din membrul doi este o integrală dintr–o funcţie raţională. Descompunând în fracţii simple această funcţie raţională, obţinem

$$\frac{x}{(1 + yx)(1 + x^2)} = -\frac{y}{1 + y^2} \cdot \frac{1}{1 + yx} + \frac{1}{1 + y^2} \cdot \frac{x + y}{1 + x^2}. \tag{2.27}$$

Deoarece, primitivele fracţiilor raţionale din membrul doi al egalităţii (2.27) se exprimă prin funcţii elementare, avem

$$\int_0^y \frac{x}{(1+yx)(1+x^2)}dx = -\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\cdot \operatorname{arctg} y.$$

În acest fel am obţinut

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\cdot \operatorname{arctg} y.$$

Trecând aici pe y în t, integrând apoi între 0 şi y şi ţinând cont că din (2.26) rezultă $J(0)=0$, obţinem

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}\,dt + \int_0^y \frac{t}{1+t^2}\cdot \operatorname{arctg} t\,dt.$$

Cea de a doua integrală de mai sus se calculează folosind metoda integrării prin părţi. Avem

$$\int_0^y \frac{t}{1+t^2}\cdot \operatorname{arctg} t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^y \operatorname{arctg} t\cdot \Big(\ln(1+t^2)\Big)'dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg} t\cdot \ln(1+t^2)\Big)\Big|_0^y - \int_0^y \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}\,dt.$$

Folosind acum ultimele două rezultate, deducem că expresia funcţiei J este

$$J(y) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\cdot \ln(1+y^2).$$

■

Teorema 2.1.4 (Integrabilitatea unei integrale proprii depinzând de parametru) *Dacă funcţia f este continuă pe intervalul bidimensional închis* Π, *atunci*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{2.28}$$

Demonstraţie. În locul egalităţii (2.28) vom demonstra o alta mult mai generală, şi anume

$$\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx = \int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy,\quad (\forall)\ t\in[a,b]. \tag{2.29}$$

Pentru aceasta, introducem notaţiile

$$\varphi(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x,y)dx, \quad \psi(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{2.30}$$

Atunci, relaţia (2.29), care o avem de demonstrat, este echivalentă cu relaţia

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad (\forall)\ t \in [a,b]. \tag{2.31}$$

Pentru a demonstra (2.31) este suficient să arătăm că au loc egalităţile:

$$\varphi'(t) = \psi'(t), \quad (\forall)\ t \in [a,b]; \tag{2.32}$$

$$\varphi(a) = \psi(a). \tag{2.33}$$

Egalitatea (2.33) este evidentă deoarece din expresiile (2.30) constatăm că

$$\varphi(a) = 0, \qquad \psi(a) = 0.$$

Pentru demonstraţia egalităţii (2.32) să introducem funcţiile $F(t,y)$ şi $\xi(x)$ prin:

$$F(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx; \qquad \xi(x) = \int_c^d f(x,y)dy. \tag{2.34}$$

Vedem acum că funcţiile φ şi ψ se exprimă cu ajutorul funcţiilor nou introduse din (2.34) în modul:

$$\varphi(t) = \int_c^d F(t,y)dy; \qquad \psi(t) = \int_a^t \xi(x)dx.$$

Conform Corolarului 2.1.1, funcţia F din (2.34) este continuă, iar derivata parţială a acesteia în punctul (t,y), faţă de variabila t este, în baza lui $(2.24)_1$, egală cu $f(t,y)$ şi această derivată este funcţie continuă pentru $(t,y) \in [a,b]\times[c,d]$. Aplicând Teorema 2.1.3 deducem că avem

$$\varphi'(t) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t,y)dy = \int_c^d f(t,y)dy. \tag{2.35}$$

Funcţia $\xi = \xi(x)$ fiind uniform continuă pe compactul $[a,b]$ în baza Teoremei 2.1.1, este continuă pe $[a,b]$. Fiind îndeplinite ipotezele Teoremei 2.1.3, prin aplicarea ei funcţiei ψ, găsim

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t \xi(x)dx = \xi(t) = \int_c^d f(t,y)dy.$$

Din această egalitate şi (2.35) rezultă că are loc (2.32) deci, în baza uneia din consecinţele teoremei creşterilor finite a lui Lagrange, funcţiile φ şi ψ diferă printr–o constantă C, constantă care este diferenţa valorilor acestor două funcţii în orice punct din domeniul lor de definiţie. Luând acest punct să fie $t = a$ şi având în vedere (2.33), deducem că are loc relaţia (2.31) şi drept urmare are loc şi egalitatea (2.29). În particular, $\varphi(b) = \psi(b)$, adică are loc egalitatea (2.28), care este ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţia 2.1.4 *Egalitatea* (2.28) *arată că pentru a integra pe intervalul* $[c, d]$ *integrala depinzând de un parametru* (2.1), *integrăm funcţia* $f(x, y)$ *în raport cu acest parametru pe acelaşi interval, iar rezultatul integrării, care va fi o funcţie de* x, *se integrează pe compactul* $[a, b]$.

Exemplul 2.1.2 *Folosind teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru, să se calculeze integrala proprie depinzând de doi parametri*

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \frac{x^{y_1} - x^{y_2}}{\ln x} dx.$$

Soluţie. Se observă că

$$\frac{x^{y_1} - x^{y_2}}{\ln x} = \int_{y_2}^{y_1} x^y dy. \tag{2.36}$$

Folosind această observaţie, rezultă

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 dx \int_{y_2}^{y_1} x^y dy.$$

În ultima iteraţie de integrale aplicăm teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de parametrul y şi obţinem

$$J(y_1, y_2) = \int_{y_2}^{y_1} dy \int_0^1 x^y dx = \int_{y_2}^{y_1} \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{1+y}.$$

Cum ultima integrală este imediată, avem în final

$$J(y_1, y_2) = \ln \frac{1 + y_1}{1 + y_2}.$$

■

Exemplul 2.1.3 *Să se determine funcţia J definită ca o integrală improprie depinzând de doi parametri a şi b*

$$J(a,b)=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\cdot \cos\ln\frac{1}{x}dx.$$

Soluţie. Folosim mai întâi rezultatul (2.36) în care $y_1=b$ şi $y_2=a$. Atunci, $J(a,b)$ se scrie

$$J(a,b)=\int_0^1 \cos\ln\frac{1}{x}dx\int_a^b x^y dy.$$

În membrul doi al acestei relaţii aplicăm teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru şi obţinem

$$J(a,b)=\int_a^b J_1(y)dy, \tag{2.37}$$

unde am introdus notaţia

$$J_1(y)=\int_0^1 x^y\,\cos\ln\frac{1}{x}dx. \tag{2.38}$$

Pentru calculul integralei (2.38), efectuăm schimbarea de variabilă

$$\ln x=t\implies x=e^t\implies dx=e^t\,dt,\quad t\in(-\infty,0].$$

Folosind formula schimbării de variabilă întro integrală improprie, suntem conduşi la

$$J_1(y)=\int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t}\cos t\,dt.$$

Dacă în ultima integrală se aplică de două ori formula integrării prin părţi, obţinem

$$J_1(y)=y+1-(y+1)^2J_1(y),$$

de unde deducem că valoarea lui $J_1(y)$ este

$$J_1(y)=\frac{y+1}{1+(y+1)^2}.$$

Folosind acum acest rezultat în (2.37), deducem

$$J(a,b)=\int_a^b\frac{y+1}{1+(y+1)^2}dy.$$

Ultima integrală este imediată şi are valoarea

$$J(a,b)=\frac{1}{2}\,\ln\Big(1+(y+1)^2\Big)\Big|_a^b=\frac{1}{2}\,\ln\frac{b^2+b+2}{a^2+a+2}.$$

■

2.2 Integrale improprii simple depinzând de un parametru

Teoremele demonstrate în paragraful precedent pot fi extinse fără dificultate la integralele improprii de tipul particular

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,g(x)dx, \tag{2.39}$$

unde funcţia $f : [a,b) \times [c,d] \to I\!R$ este continuă şi mărginită, iar funcţia $g : [a,b) \to I\!R$ poate fi discontinuă în caz general, însă integrala improprie $\int_a^b g(x)dx$, cu limita superioară punct singular, este absolut convergentă. Limita superioară poate fi finită sau infinită. Consideraţii analoage se pot face când a este punct singular.

Ipotezele pentru care teoremele din capitolul precedent sunt adevărate pentru integrale de tipul (2.39) le vom formula în teoremele care urmează. Aceste teoreme sunt folosite frecvent în fizica matematică şi în teoria integralelor Fourier.

Teorema 2.2.1 (Teoremă generalizată de continuitate a unei integrale improprii simple depinzând de un parametru) *Dacă funcţia reală de două variabile reale*

$$f : [a,+\infty) \times [c,d] \to I\!R \tag{2.40}$$

este continuă şi mărginită, iar integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^{+\infty} |g(x)|dx \tag{2.41}$$

este convergentă, atunci integrala improprie de speţa întâi depinzând de un parametru

$$J(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,g(x)dx \tag{2.42}$$

este funcţie uniform continuă de y pe intervalul $[c,d]$.

Demonstraţie. Fie $C > 0$ şi $K > 0$ constante reale cu proprietăţile:

$$\begin{aligned} &|f(x,y)| < C,\ (\forall)\ (x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]; \\ &\int_a^{+\infty} |g(x)|dx = K < +\infty, \end{aligned} \tag{2.43}$$

existenţa cărora rezultă din ipotezele teoremei. Fie acum $\varepsilon > 0$ luat arbitrar. Integrala improprie (2.41) fiind convergentă, există $\ell > a$, suficient de mare, astfel încât

$$2C\int_{\ell}^{+\infty}|g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.44}$$

Luând un astfel de ℓ încât să aibă loc inegalitatea (2.44) şi alegând arbitrar pe y' şi y'' din intervalul $[c,d]$, putem reprezenta diferenţa $J(y') - J(y'')$ în forma

$$J(y') - J(y'') = \int_a^{\ell}\Big(f(x,y') - f(x,y'')\Big)g(x)dx +$$

$$+\int_{\ell}^{+\infty}\Big(f(x,y') - f(x,y'')\Big)g(x)dx.$$

Deoarece funcţia f este continuă în intervalul bidimensional închis $[a,\ \ell\,]\times[c,d]$, ea este uniform continuă. Prin urmare, pentru $\varepsilon > 0$, ales arbitrar mai sus, există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât la orice alegere a lui y' şi y'' din compactul $[c,d]$ care să satisfacă inegalitatea

$$|y' - y''| < \delta(\varepsilon), \tag{2.45}$$

valorile corespunzătoare ale lui f în punctele (x,y') şi (x,y'') satisfac inegalitatea

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2K},\ \ (\forall)\ x \in [a,\ell\,].$$

Această egalitate, împreună cu (2.43), (2.44) şi (2.45), implică relaţiile

$$\begin{aligned}|J(y') - J(y'')| \ &\le\ \int_a^{\ell}|f(x,y') - f(x,y'')|\cdot|g(x)|dx +\\ &\quad+\int_{\ell}^{+\infty}\Big(|f(x,y')| + |f(x,y'')|\Big)|g(x)|dx <\\ &< \frac{\varepsilon}{2K}\int_a^{\ell}|g(x)|dx + 2\,C\int_{\ell}^{+\infty}|g(x)|dx <\\ &< \frac{\varepsilon}{2K}K + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

care arată că integrala improprie depinzând de parametrul y din (2.39) este o funcţie continuă pe compactul $[c,d]$, deci şi uniform continuă. ∎

Teorema 2.2.2 (Derivabilitatea unei integrale improprii simple depinzând de un parametru) *Dacă funcţia* (2.40) *şi derivata sa parţială în raport cu y*

$$\frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!R$$

sunt continue şi mărginite, iar integrala improprie de speţa întâi (2.41) *este convergentă, atunci integrala improprie simplă* (2.42), *de speţa întâi şi depinzând de parametrul y, este o funcţie derivabilă şi*

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) g(x) dx.$$

Exerciţiul 2.2.1 *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor improprii simple depinzând de un parametru, să se calculeze*

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} yx}{x\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Soluţie. Integrala improprie depinzând de un parametru din acest exemplu este de forma (2.39), unde:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} yx}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 2.2.2 astfel că, putem scrie

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{x}{x(1 + y^2x^2)\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + y^2x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

În ultima integrală efectuăm schimbarea de variabilă $x = \sin t$. Obţinem integrala

$$J'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + y^2 \sin^2 t}$$

care, după schimbarea de variabilă $u = \operatorname{tg} t$, devine

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (1 + y^2)u^2}.$$

O primitivă a funcţiei de integrat din ultima integrală improprie depinzând de un parametru este simplu de calculat. Prin urmare,

$$J'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \operatorname{arctg} (u\sqrt{1 + y^2})\Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Deoarece valoarea în $y = 0$ a funcţiei J este zero, avem

$$J(y) = \int_0^y J'(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Cum primitiva ultimei funcţii de integrat este $\ln{(t+\sqrt{1+t^2})}$, rezultă în final

$$J(y) = \frac{\pi}{2}\,\ln{(y+\sqrt{1+y^2})}.$$

■

Exerciţiul 2.2.2 *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor improprii simple depinzând de un parametru, să se calculeze*

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\ln{(1-x^2y)}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

unde parametrul y este astfel încât $|y| < 1$.

Soluţie. La fel ca în exerciţiul precedent, $J(y)$ este de forma (2.39), unde

$$f(x,y) = \ln{(1-x^2y)}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 2.2.2, deci

$$J'(y) = -\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2y)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Efectuând în ultima integrală schimbarea de variabilă $x = \sin t$, obţinem

$$J'(y) = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t dt}{1-y\sin^2 t},$$

după care, dacă schimbăm variabila folosind $u = \operatorname{tg} t$, deducem

$$J'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)[1+(1-y)u^2]}.$$

Noua funcţie de integrat se descompune în fracţii simple şi, după integrarea acestora, găsim

$$J'(y) = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{y\sqrt{1-y}}\Big).$$

Procedând asemănător ca la exerciţiul precedent, găsim că valoarea lui $J(y)$ este $J(y) = \pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-y}}{2}$. ■

Teorema 2.2.3 **(Integrabilitatea unei integrale improprii simple depinzând de un parametru)** *Dacă funcţia* (2.40) *este continuă şi mărginită, iar integrala improprie de speţa întâi* (2.41) *este convergentă, atunci integrala improprie simplă de speţa întâi* (2.42), *depinzând de parametrul* y, *este o funcţie de* y *integrabilă Riemann pe intervalul* $[c, d]$ *şi*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\, g(x)dx =$$

$$= \int_a^{+\infty} \Big(g(x) \int_c^d f(x,y)dy\Big)dx.$$

Operaţiile de derivare şi integrare ale integralelor improprii depinzând de un parametru de forma specială (2.42) se aplică pentru a calcula valorile unor integrale proprii sau improprii care nu conţin neapărat parametri dar în care, în prealabil, se introduc unul sau mai mulţi parametri.

Exemplul 2.2.1 *Să se evalueze integrala improprie de prima speţă depinzând de parametrul* $y \in [-A, A]$

$$J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\, xy}{x}\, e^{-\,\alpha x} dx, \tag{2.46}$$

unde α *este o constantă reală pozitivă fixată.*

Soluţie. Punând $f(x,y) = \dfrac{\sin\, xy}{x}$ şi $g(x) = e^{-\,\alpha x}$ observăm că $f(x,y)$ şi $f'_y(x,y)$ sunt funcţii continue şi mărginite pe intervalul bidimensional nemărginit

$$[0,\, +\infty) \times [-A,\, A\,],$$

iar integrala

$$\int_0^{+\infty} |g(x)|dx = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

este convergentă. Prin urmare, putem aplica Teorema 2.2.2. După derivarea sub semnul integrală în (2.46), obţinem

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha x} \cos\, xydx. \tag{2.47}$$

Integrând prin părţi de două ori în membrul al doilea al relaţiei (2.47), găsim

$$J'(y) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} \tag{2.48}$$

de unde, prin integrare de la 0 la y şi $J(0)=0$, obţinem

$$J(y)=\int_0^y J'(t)dt=\int_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\,dt=\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}. \tag{2.49}$$

Există şi o altă cale de calculare a integralei (2.46) pornind de la rezultatul intermediar (2.48) care constă mai întâi în determinarea unei primitive a funcţiei

$$y\mapsto \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}.$$

O asemenea primitivă poate fi $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\alpha}$ şi prin urmare vom avea

$$J(y)=C+\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}, \tag{2.50}$$

unde C este o constantă arbitrară. Punând $y=0$ în (2.50) şi ţinând cont că $J(0)=0$ găsim că $C=0$ şi din nou ajungem la (2.49).

Dacă în egalitatea (2.49) trecem la limită pentru $\alpha\to+0$ şi în rezultatul obţinut punem $y=1$, găsim valoarea integralei improprii a lui Dirichlet, a cărei natură am studiat–o anterior,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{2.51}$$

Desigur, pornind de la integrala (2.46), a cărei valoare este dată în (2.49), putem să dăm valorile altor integrale improprii. Ca exemplu, avem

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\,xy}{x}\,e^{-x}dx=\operatorname{arctg}y,$$

care se obţine din (2.46) şi (2.49) luând $\alpha=1$. ■

2.3 Integrale improprii depinzând de un parametru, uniform convergente

2.3.1 Definiţia integralelor improprii depinzând de un parametru, uniform convergente

Să considerăm o funcţie reală de două variabile reale

$$f:[a,+\infty)\times[c,d]\to I\!R \tag{2.52}$$

cu proprietatea că restricţia sa la orice paralelă la axa Ox care trece prin punctul $(0, y)$, adică funcţia $f(\cdot, y) : [a, +\infty) \to I\!R$, este integrabilă în sens generalizat, ceea ce este echivalent cu a spune că integrala improprie de speţa întâi depinzând de parametrul y

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \tag{2.53}$$

este convergentă. În baza definiţiei convergenţei unei integrale improprii, avem

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x, y)dx. \tag{2.54}$$

Integralele improprii de speţa a doua care depind de un parametru se definesc în mod asemănător. De exemplu, dacă

$$f : [a,\, b) \times [c, d] \subset I\!R^2 \to I\!R \tag{2.55}$$

este o funcţie reală de două variabile reale nemărginită în vecinătatea punctelor (b, y), iar integrala improprie

$$\int_a^b f(x, y)dx \tag{2.56}$$

este convergentă pentru orice valoare fixată a lui y din compactul $[c, d]$, atunci

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_a^{b-\lambda} f(x, y)dx \tag{2.57}$$

este o funcţie de y definită pe compactul $[c, d]$ care se numeşte *integrală improprie de speţa a doua care depinde de un parametru.*

În studiul integralelor improprii depinzând de un parametru (2.54) şi (2.57) un rol important îl are noţiunea de *uniformă convergenţă.*

Definiţia 2.3.1 *Spunem că integrala improprie de speţa întâi* (2.53), *depinzând de parametrul* y, *este* **uniform convergentă în raport cu parametrul** y **pe intervalul** $[c, d]$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $L = L(\varepsilon)$ *astfel încât inegalitatea*

$$\Big|J(y) - \int_a^\ell f(x, y)dx\Big| = \Big|\int_\ell^{+\infty} f(x, y)dx\Big| < \varepsilon$$

este satisfăcută simultan pentru toţi $\ell > L(\varepsilon)$ *şi* $y \in [c, d]$.

Uniforma convergenţă a unei integrale improprii de speţa a doua, de forma (2.57), care depinde de parametrul $y \in [c,d]$, se defineşte asemănător.

Definiţia 2.3.2 *Integrala improprie de speţa a doua* (2.57), *care depinde de parametrul* $y \in [c,d]$, *se numeşte* **uniform convergentă în raport cu parametrul** y **pe intervalul** $[c,d]$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât inegalitatea*

$$\Big| J^*(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx \Big| = \Big| \int_{b-\lambda}^{b} f(x,y)dx \Big| < \varepsilon$$

are loc simultan pentru toţi $\lambda < b-a$ *care satisfac condiţia* $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$ *şi pentru toţi* $y \in [c,d]$.

Exemplul 2.3.1 *Integrala improprie de speţa întâi depinzând de un parametru*

$$J(y) = \int_0^{+\infty} y\, e^{-xy} dx \tag{2.58}$$

este convergentă pentru fiecare $y \in [0,1]$, *însă nu este uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe compactul* $[0,1]$.

Într-adevăr, avem

$$\int_0^{\ell} y\, e^{-\,xy} dx = \int_0^{\ell y} e^{-\,u}\, du = -\, e^{-\,u}\Big|_0^{\ell y} = 1 - e^{-\,\ell y},$$

de unde deducem

$$\lim_{\ell \to +\infty} \int_0^{\ell y} e^{-\,xy} dx = \lim_{\ell \to +\infty} (1 - e^{-\,\ell y}) = 1$$

ceea ce arată că integrala improprie (2.58) este convergentă pentru fiecare $y \in [0,1]$.

Conform Definiţiei 2.3.1, pentru studiul convergenţei uniforme trebuie calculată diferenţa

$$J(y) - \int_0^{\ell} y\, e^{-\,xy} dx = \int_{\ell}^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx = \int_{\ell y}^{+\infty} e^{-\,u}\, du = e^{-\,\ell\, y}.$$

Pentru o valoare fixată şi arbitrar de mare $\ell > 0$, această diferenţă întrece pe $1/2$ pentru toate valorile lui y suficient de apropiate de zero şi, în consecinţă, pentru $\varepsilon = 1/2$ nu există $L(\varepsilon)$ astfel încât, pentru $\ell > L(\varepsilon)$ şi pentru toţi $y \in [0,1]$, să fie satisfăcută inegalitatea

$$\Big|\int_t^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx\Big| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Acest rezultat arată că integrala improprie de speţa întâi (2.58) nu este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[0,1]$.

Exerciţiul 2.3.1 *Să se arate că integrala improprie* (2.58) *este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul* $[\delta, 1]$, *cu* $0 < \delta < 1$.

Soluţie. Într-adevăr, avem

$$\int_\ell^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx = \int_{\ell\, y}^{+\infty} e^{-\,u}\, du = e^{-\,\ell\, y} \le e^{-\,\ell\,\delta}$$

pentru $0 < \delta \le y \le 1$ şi prin urmare inegalitatea

$$\Big|\int_\ell^{+\infty} y\, e^{-\,xy} dx\Big| < \varepsilon$$

are loc pentru orice

$$\ell > \frac{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}{\delta},\ \ 0 < \varepsilon < 1, \tag{2.59}$$

şi pentru toţi $y \in [\delta, 1]$, unde $0 < \delta < 1$. În baza Definiţiei 2.3.1, rezultă că integrala improprie (2.58), de speţa întâi şi depinzând de parametrul y, este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe compactul $[\delta, 1]$, cu $0 < \delta < 1$. ∎

2.3.2 Reducerea integralelor improprii depinzând de un parametru la şiruri de funcţii

O integrală improprie depinzând de un parametru poate fi redusă la un şir de funcţii, iar această reducere face posibilă demonstraţia teoremelor fundamentale referitoare la astfel de integrale în baza teoremelor corespunzătoare ale şirurilor de funcţii.

Dacă integrala (2.53) este convergentă pentru fiecare $y \in [c,d]$, atunci, pentru un şir numeric arbitrar, (ℓ_n), cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii incluşi în intervalul nemărginit $[a, +\infty)$, şirul de funcţii (F_n) definite pe intervalul $[c, d]$, cu termenul general

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_k} f(x, y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad c \le y \le d$$

este evident convergent la $J(y)$ pe intervalul $[c, d]$.

Pentru a se urmări cu eficienţă raţionamentele de mai jos se impune să reamnitim definiţiile convergenţei şi uniformei convergenţe ale unui şir de funcţii.

Definiţia 2.3.3 *Şirul de funcţii (f_n) se numeşte* **convergent** *la funcţia $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru orice valoare fixată $x \in [a, b]$ şirul numeric $(f_n(x))$ este convergent la numărul $f(x)$, adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $x \in [a, b]$ există un număr $N = N(\varepsilon, x)$ (care depinde de ε şi în general şi de x, care nu este neaparat număr natural) astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{pentru orice} \quad n > N(\varepsilon, x).$$

Dintre şirurile de funcţii convergente de o importanţă esenţială sunt aşa numitele şiruri *uniform convergente.*

Definiţia 2.3.4 *Şirul de funcţii (f_n) se numeşte* **uniform convergent** *la funcţia $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ (dependent de ε, însă independent de x şi care nu este neaparat număr natural) astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{pentru orice} \quad n > N(\varepsilon)$$

şi pentru orice $x \in [a, b]$.

Pentru demonstraţiile teoremelor care formulează proprietăţile integralelor improprii depinzând de un parametru, vom avea nevoie de trei rezultate stabilite la studiul şirurilor de funcţii pe care le reamintim mai jos.

Teorema 2.3.1 *Dacă şirul de funcţii continue (f_n) definite pe compactul $[a, b]$ este nedescrescător şi convergent la funcţia continuă $f(x)$, atunci convergenţa este uniformă.*

Teorema 2.3.2 *Dacă şirul de funcţii continuu diferenţiabile* (f_n) *este convergent la funcţia* f *pe* $[a, b]$, *iar şirul derivatelor* (f_n') *este uniform convergent la funcţia* $\varphi(x)$ *pe* $[a, b]$, *atunci funcţia* f *este derivabilă pe* $[a, b]$ *şi*

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x). \tag{2.60}$$

Teorema 2.3.3 *Dacă şirul de funcţii continue* (f_n) *este uniform convergent pe intervalul* $[a, b]$ *la funcţia* $f(x)$, *atunci şirul integralelor*

$$\Big(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\Big)$$

este uniform convergent pe intervalul $[a, b]$ *la funcţia definită prin integrala* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, *oricare ar fi* $x_0 \in [a, b]$.

Teorema de mai jos are loc în condiţia ca integrala (2.53) să fie convergentă pentru orice y aparţinând compactului $[c, d]$.

Teorema 2.3.4 *Pentru ca integrala* $J(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ *să fie uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe compactul* $[c, d]$, *este necesar şi suficient ca şirul de funcţii*

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.61}$$

să fie uniform convergent spre $J(y)$ *pe compactul* $[c, d]$ *oricare ar fi alegerea şirului* $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n, \cdots$, *cu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = +\infty$ *şi* $\ell_n \geq a$.

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe compactul $[c, d]$. Atunci, considerând $\varepsilon > 0$, arbitrar, există $L(\varepsilon) > a$, astfel încât pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ inegalitatea

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x, y)dx| < \varepsilon$$

este satisfăcută simultan pentru toţi $y \in [c, d]$.

Să considerăm şirul numeric (ℓ_n), cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii situaţi în intervalul $[a, +\infty)$. Considerându-l pe $L(\varepsilon)$ de mai sus, din teorema de caracterizare a limitei unui şir numeric, deducem că există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\ell_n > L(\varepsilon)$ pentru toţi $n > N(\varepsilon)$. În consecinţă, pentru un astfel de n, inegalitatea

$$|J(y) - F_n(y)| = |J(y) - \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

are loc pentru orice $y \in [c,d]$. Aceasta înseamnă că şirul de funcţii (F_n), având termenul general dat de (2.61), este uniform convergent la funcţia $J(y)$, definită de (2.53), pe intervalul $[c,d]$.

Suficienţa. Să arătăm că dacă orice şir de funcţii (F_n), având termenul general dat de (2.61), unde $\ell_n \to +\infty$, $\ell_n \geq a$, este uniform convergent la funcţia $J(y)$, definită de (2.53), pe intervalul $[c,d]$, atunci integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe acest interval.

Într-adevăr, dacă presupunem că (2.53), care prin ipoteză este convergentă pentru orice $y \in [c,d]$ fixat, converge neuniform în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$, atunci există ε_0 astfel încât pentru orice L arbitrar de mare există $\ell > L$ şi $y \in [c,d]$ aşa fel încât să avem

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x,y)dx| \geq \varepsilon_0.$$

Presupunând că L ia valorile $[a]+1$, $[a]+2$, $\cdots$, $[a]+n$, $\cdots$, obţinem şirul numeric (ℓ_n), cu $\ell_n > n$, şi un şir (y_n), cu $y_n \in [c,d]$, pentru care

$$|J(y_n) - \int_a^{\ell_n} f(x,y_n)dx| = |J(y_n) - F_n(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Aceasta înseamnă că şirul de funcţii (F_n), cu termenul general $F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx$, astfel construit, converge neuniform pe intervalul $[c,d]$, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Observaţia 2.3.1 *Dacă funcţia f nu schimbă de semn, atunci pentru ca integrala improprie (2.53) să fie uniform convergentă în raport cu parametrul $y \in [c,d]$ este suficient ca şirul de funcţii (2.61) să fie convergent la integrala $J(y)$ cel puţin pentru o alegere particulară a şirului numeric (ℓ_n), cu elementele din intervalul $[a,+\infty)$ şi cu limita $+\infty$.*

Într-adevăr, presupunând f funcţie nenegativă, avem

$$\int_a^{\ell} f(x,y)dx \geq \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx$$

pentru orice $\ell \geq \ell_n$. În consecinţă,

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x,y)dx| \leq |J(y) - \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

pentru orice $\ell > \ell_n$ şi pentru toţi $y \in [c,d]$ şi cu ℓ_n suficient de mare. ■

Observaţia 2.3.2 *Dacă funcţia f este continuă şi nu schimbă de semn (de exemplu, este nenegativă) şi integrala improprie (2.53) este funcţie continuă de parametrul $y \in [c,d]$, această integrală este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$.*

Într-adevăr, considerând şirul numeric crescător (ℓ_n) cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii situaţi în intervalul $[a,+\infty)$ ajungem la şirul de funcţii (F_n) având termenul general

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.62}$$

Funcţia f fiind nenegativă, şirul de funcţii (F_n) cu termenul general (2.62) este monoton nedescrescător, iar conform Teoremei 2.1.1, funcţiile $F_n(y)$ din (2.62) sunt continue. Mai mult, acest şir de funcţii converge la funcţia continuă

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{2.63}$$

pe intervalul $[c,d]$. Dar Teorema 2.3.1 implică convergenţa uniformă a şirului de funcţii (2.62) la funcţia limită (2.63) şi, în consecinţă, după Observaţia 2.3.1 integrala $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe acest interval. ■

Observaţia 2.3.3 *Integrala improprie de speţa a doua*

$$J^*(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx$$

se poate reduce în mod asemănător la şirul de funcţii (F_n^*), unde

$$F_n^*(y) = \int_a^{b-\lambda_n} f(x,y)dx,$$

iar (λ_n) este un şir numeric convergent la zero având termenii cuprinşi în intervalul $(0, b-a)$.

2.3.3 Proprietăţile integralelor improprii uniform convergente în raport cu parametrul y

În continuare prezentăm unele proprietăţi ale integralelor improprii de tipul (2.53) şi (2.57) din care vom constata că ipoteza suplimentara a uniformei convergenţe în raport cu parametrul y ale acestora implică continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea lor.

Teorema 2.3.5 (**Continuitatea unei integrale improprii depinzând parametru**) *Dacă funcţia* $f : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!R$ *este continuă şi integrala* (2.53) *este uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe intervalul* $[c, d]$, *atunci funcţia* $J(y)$ *din* (2.53) *este continuă pe acest interval.*

Demonstraţie. Considerăm şirul de funcţii (F_n) cu termenul general (2.62), unde $y \in [c, d]$. După Teorema 2.1.1, funcţiile (2.62) sunt continue pe intervalul $[c, d]$. Mai departe, Teorema 2.3.4 implică că şirul considerat este uniform convergent la integrala $J(y)$ din (2.53) şi, în consecinţă, funcţia $J(y)$ este continuă pentru că este limita unui şir de funcţii uniform convergent. ∎

Teorema 2.3.6 (**Derivabilitatea unei integrale improprii depinzând de parametru**) *Dacă funcţiile*

$$f : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!R \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty) \times [c, d] \to I\!R$$

sunt continue, integrala improprie (2.53) *este convergentă, iar integrala improprie depinzând de parametrul* y

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \tag{2.64}$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul y *pe intervalul* $[c, d]$, *atunci funcţia* (2.53) *este derivabilă pe* $[c, d]$ *şi*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \quad y \in [c, d]. \tag{2.65}$$

Demonstraţie. Considerăm din nou şirul de funcţii (F_n) cu termenul general (2.62), unde $y \in [c, d]$, convergent la integrala (2.53) pe intervalul $[c, d]$. Conform Teoremei 2.1.2, funcţiile $F_n(y)$ sunt derivabile şi are loc egalitatea

$$F_n'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^{\ell_n} f(x, y)dx = \int_a^{\ell_n} f_y'(x, y)dx, \tag{2.66}$$

unde $n = 1, 2, \cdots, \quad c \leq y \leq d,$ iar funcţiile $F'_n(y)$ sunt continue pe $[c, d]$.

Din ipoteze şi Teorema 2.3.4 rezultă că şirul de funcţii (F'_n) este uniform convergent la integrala improprie (2.64) şi $F'_n(y)$ sunt funcţii continue pe $[c, d]$. Constatăm că şirul de funcţii (F_n) satisface ipotezele din Teorema 2.3.2, prin urmare, integrala improprie $J(y)$ este o funcţie continuu diferenţiabilă pe $[c, d]$ şi relaţia

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$$

are loc pentru orice $y \in [c, d]$, ceea ce trebuia de demonstrat. ∎

Observaţia 2.3.4 *Având în vedere expresia* (2.53) *a funcţiei* $J(y)$, *rezultă că identitatea* (2.65) *se scrie*

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx,$$

de unde deducem că în ipotezele Teoremei 2.3.6 operaţiile de derivare şi integrare ale unei integrale improprii depinzând de un parametru sunt comutabile.

Teorema 2.3.7 (Integrabilitatea unei integrale improprii depinzând de un parametru) *Dacă funcţia* f *din* (2.52) *este continuă şi integrala improprie depinzând de un parametru* (2.53) *este uniform convergentă în raport cu parametrul* y *pe intervalul* $[c, d]$, *atunci funcţia* $J(y)$ *din* (2.53) *este integrabilă şi*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{2.67}$$

Demonstraţie. Pentru orice şir de numere

$$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n, \cdots, \quad (\ell_n \geq a, \lim_{n\to\infty} \ell_n = +\infty),$$

şirul de funcţii corespunzător

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

este uniform convergent la funcţia $J(y)$ pe $[c, d]$, aceasta rezultând din Teorema 2.3.4. După Teorema 2.1.1, toate funcţiile $F_n(y)$ sunt continue pe intervalul $[c, d]$. Fiindcă sunt îndeplinite ipotezele din Teorema 2.3.3, avem

$$\lim_{n\to+\infty} \int_c^d F_n(y)dy = \int_c^d J(y)dy.$$

Pe de altă parte, Teorema 2.1.4 implică egalităţile

$$\int_c^d F_n(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{\ell_n} f(x,y)dx = \int_a^{\ell_n} dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

În consecinţă, pentru orice alegere a şirului (ℓ_n), cu limita egală cu $+\infty$ şi termenii aparţinând intervalului nemărginit $[a, +\infty)$, avem

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{\ell_n} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d J(y)dy.$$

Aceasta înseamnă că integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy$$

este convergentă şi egalitatea

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

este satisfăcută şi astfel teorema este demonstrată. ■

Corolarul 2.3.1 *Dacă $f(x,y)$ este o funcţie continuă care nu schimbă de semn pentru $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$ (de exemplu, $f(x,y)$ este nenegativă), iar integrala*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

este o funcţie continuă de y pentru $c \leq y \leq d$, atunci relaţia (2.67) *este adevărată.*

Demonstraţie. Într Observaţia 2.3.2 implică convergenţa uniformă a integralei improprii $J(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ pe intervalul $c \leq y \leq d$ şi, în consecinţă, după Teorema 2.3.7, egalitatea (2.67) este adevărată. ■

Observaţia 2.3.5 E*galitatea* (2.67) *se mai poate scrie în forma*

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy,$$

din care deducem că în ipotezele Teoremei 2.3.7 cele două operaţii de integrare sunt comutabile.

Teorema 2.3.8 (Schimbarea ordinii de integrare întro integrală improprie iterată a unei funcţii de semn constant) *Dacă*

$$f:[a,+\infty)\times[c,+\infty)\to \mathbb{R} \tag{2.68}$$

este o funcţie continuă de semn constant, integralele improprii depinzând de parametrul y

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{şi} \quad J^*(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

sunt funcţii continue pe intervalele $[c,+\infty)$, respectiv $[a,+\infty)$, şi cel puţin una din integralele improprii:

$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx; \quad \int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy \tag{2.69}$$

este convergentă, atunci cealaltă integrală improprie din (2.69) *este convergentă şi*

$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \;=\; \int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Demonstraţie. Să considerăm că funcţia f este nenegativă şi că integrala improprie iterată

$$J=\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{2.70}$$

este convergentă. Trebuie să demonstrăm că

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_a^{\ell} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy = J = \int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{2.71}$$

Pentru aceasta vom arăta că valoarea absolută a diferenţei dintre cantitatea variabilă $\displaystyle\int_a^{\ell} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ şi cantitatea constantă

$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

poate fi făcută mai mică decât un $\varepsilon>0$ ales arbitrar.

Conform Corolarului 2.3.1, are loc egalitatea

$$\int_a^{\ell} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int_c^{+\infty} dy\int_a^{\ell} f(x,y)dx.$$

Funcţia $f(x,y)$ fiind nenegativă, putem scrie

$$\begin{aligned}
0 \ \leq & \ \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \\
= & \ \int_c^{+\infty} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx = \\
= & \ \int_c^{c_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx \leq \\
\leq & \ \int_c^{c_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

unde $c < c_1 < +\infty$.

Deoarece (2.70) este integrală improprie convergentă rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $c_1 > c$ astfel încât

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.73}$$

Din continuitaea integralei $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ pe intervalul $c \leq y < +\infty$ (vezi ipoteza) şi Observaţia 2.3.2 rezultă că integrala de mai sus este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe orice compact $[c, c_1]$. Prin urmare, pentru $\varepsilon > 0$ ales arbitrar mai sus există $L(\varepsilon) > a$ astfel încât pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ şi $y \in [c, c_1]$ are loc inegalitatea

$$\int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}. \tag{2.74}$$

Folosind acest rezultat constatăm că inegalitatea

$$\int_c^{c_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

are loc pentru toţi $\ell > L(\varepsilon)$. Acum, din (2.72), (2.73) şi iterata (2.74) tragem concluzia că

$$0 \leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy < \varepsilon$$

pentru toţi $\ell > L(\varepsilon)$, ceea ce trebuia să demonstrăm pentru a fi adevarată concluzia teoremei. ■

Dacă $f(x,y)$ din (2.68) nu are semn constant şi concluziile Teoremei 2.3.8 dorim să fie adevărate, atunci ipotezele Teoremei 2.3.8 trebuiesc modificate după cum urmează.

Teorema 2.3.9 **(Schimbarea ordinii de integrare întro integrală improprie iterată din funcţia** f **care schimbă de semn)** *Dacă* f *din* (2.68) *este o funcţie care îşi schimbă semnul de o infinitate de ori şi integralele improprii depinzând de un parametru:*

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx;\quad J^*(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

sunt uniform convergente pe orice interval finit $c\le y\le C$ *şi respectiv pe orice interval finit* $a\le x\le A$*, iar cel puţin una din integralele improprii iterate*

$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx;\qquad \int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} |f(x,y)|dy \tag{2.75}$$

este convergentă, atunci integralele iterate

$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx;\quad \int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy \tag{2.76}$$

sunt convergente şi

$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \;=\; \int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Demonstraţie. Pentru precizare, presupunem că cea de a doua integrală din (2.75) este convergentă. Aplicând criteriul de comparaţie funcţiilor $f(x,y)$, $|f(x,y)|$, precum şi funcţiilor

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx,\quad \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx,$$

deducem că cea de a doua integrală improprie din (2.76) este convergentă.

Mai avem de demonstrat că

$$\lim_{\ell\to+\infty}\int_a^{\ell} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{2.77}$$

Integrala improprie $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ fiind uniform convergentă, pe orice interval finit $[a,A]$ şi pentru orice număr finit $\ell>a$, avem

$$\int_a^{\ell} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} dy\int_a^{\ell} f(x,y)dx. \tag{2.78}$$

Să calculăm valoarea absolută a diferenţei dintre cantitatea variabilă $\int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ şi numărul $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ care intră în relaţia (2.77). Ţinând cont şi de (2.78), constatăm că au loc egalităţile şi inegalităţile

$$\begin{aligned}
&|\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy| = \\
= \; &|\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_c^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x,y)dx| = \\
= \; &|\int_c^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| = \\
= \; &|\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| \leq \\
\leq \; &|\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} |f(x,y)|dx \leq \\
\leq \; &|\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx| + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx
\end{aligned} \tag{2.79}$$

oricare ar fi $c_1 > c$. Din convergenţa integralei iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$$

rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $c_1 > c$ astfel încât

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.80}$$

Acum, fixând o valoare a lui $c_1 > c$ pentru care inegalitatea (2.80) are loc şi luând în consideraţie că integrala $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ este uniform convergentă, alegem, la fel ca în demonstraţia Teoremei 2.3.8, o cantitate $L(\varepsilon)$ astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea

$$\Big|\int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ şi pentru toţi $y \in [c, c_1]$. Atunci, avem

$$\Big|\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.81}$$

pentru orice $\ell > L(\varepsilon)$ şi, în consecinţă, în baza relaţiilor (2.79) (2.80) şi (2.81), se obţine inegalitatea

$$\Big|\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\ell} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy\Big| < \varepsilon$$

oricare ar fi $\ell > L(\varepsilon)$, ceea ce trebuia să demonstrăm. ∎

Observaţia 2.3.6 *Teoreme similare au loc pentru integrale improprii de speţa a doua care depind de un parametru.*

Exerciţiul 2.3.2 *Să se arate că integrala lui* **Poisson**

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{2.82}$$

are valoarea egală cu $\sqrt{\pi}/2$.

Soluţie. În (2.82) facem substituţia $x = ut$ şi apoi înmulţim în ambii membri cu e^{-u^2}. Obţinem

$$I\, e^{-u^2} = \int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} dt.$$

Integrând în raport cu u pe intervalul $[0, +\infty)$ ambii membri ai acestei egalităţi şi ţinând cont de definiţia lui I, găsim

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} dt\Big) du. \tag{2.83}$$

În baza Teoremei 2.3.8 se poate schimba ordinea de integrare în (2.83) astfel că putem scrie

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} du\Big) dt. \tag{2.84}$$

Dar integrala din interior din membrul doi al relaţiei (2.84) este imediată pentru că se cunoaşte o primitivă a funcţiei de integrat şi valoarea sa este

$$\int_0^{+\infty} u\, e^{-(1+t^2)u^2} du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}. \tag{2.85}$$

Din (2.84) şi (2.85) obţinem

$$I^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

de unde găsim în final că valoarea integralei lui Poisson este $\sqrt{\pi}/2$. ∎

2.4 Criterii de convergenţă uniformă

Teorema 2.4.1 (**Condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă a integralelor improprii de speţa doua care depind de un parametru**) *Integrala improprie*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{2.86}$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L = L(\varepsilon)$ astfel încât inegalitatea

$$\Big|\int_{\ell'}^{\ell''} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon \tag{2.87}$$

are loc simultan pentru orice ℓ', $\ell'' > L(\varepsilon)$ şi pentru orice $y \in [c,d]$.

Demonstraţie. Necesitatea. În ipoteza că integrala (2.4.1) este uniform convergentă, atunci aplicând Definiţia 2.3.1 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L = L(\varepsilon)$ astfel încât pentru toţi $\ell' > L(\varepsilon)$, $\ell'' > L(\varepsilon)$ şi $y \in [c,d]$ inegalităţile:

$$\Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}; \qquad \Big|\int_{\ell''}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sunt îndeplinite. Prin urmare, pentru orice ℓ', $\ell'' > L(\varepsilon)$ şi pentru orice $y \in [c,d]$ obţinem inegalitatea

$$\Big|\int_{\ell'}^{\ell''} f(x,y)dx\Big| = \Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{\ell''}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| \le$$

$$\le \Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| + \Big|\int_{\ell''}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suficienţa. Dacă inegalitatea (2.87) are loc pentru orice ℓ', $\ell'' > L(\varepsilon)$ şi pentru orice $y \in [c,d]$, conform criteriului general de convergenţă uniformă al lui Cauchy pentru integrale improprii, integrala improprie (2.86) este convergentă pentru orice $y \in [c,d]$. Prin urmare, trecând la limită pentru $\ell'' \to +\infty$ obţinem, pentru toţi $\ell' > L(\varepsilon)$, inegalitatea

$$\Big|\int_{\ell'}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| \le \varepsilon < 2\varepsilon, \tag{2.88}$$

care are loc $(\forall)\, y \in [c, d]$. Dar, în (2.88) recunoaştem definiţia uniformei convergenţe în raport cu parametrul y pe compactul $[c, d]$ a integralei improprii (2.86). ∎

Teorema 2.4.1 este cunoscută sub numele de **criteriul general de convergenţă uniformă al lui Cauchy**.

Teorema 2.4.2 (Criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă a unei integrale improprii depinzând de un parametru). *Dacă*

$$|f(x, y)| \leq g(x), \quad (\forall)\ x \in [a, +\infty),\ y \in [c, d] \tag{2.89}$$

şi integrala improprie de speţa întâi

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{2.90}$$

este convergentă, atunci integralele improprii

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \quad \textit{şi} \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx$$

sunt uniform convergente în raport cu parametrul y pe intervalul $[c, d]$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din convergenţa integralei improprii (2.90) şi criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a integralelor improprii deducem existenţa lui $L = L(\varepsilon) > 0$ astfel încât condiţia

$$\int_{\ell'}^{\ell''} g(x)dx < \varepsilon \tag{2.91}$$

este satisfăcută pentru toţi ℓ', $\ell'' > L(\varepsilon)$ cu $\ell'' > \ell'$. Pe de altă parte din (2.89) şi proprietăţile integralelor definite, avem

$$\Big| \int_{\ell'}^{\ell''} f(x, y)dx \Big| \leq \int_{\ell'}^{\ell''} |f(x, y)|dx \leq \int_{\ell'}^{\ell''} g(x)dx. \tag{2.92}$$

Atunci, din (2.91), (2.92) şi Teorema 2.4.1 rezultă concluzia teoremei. ∎

Criteriile corespunzătoare convergenţei uniforme a integralelor improprii depinzând de parametru din funcţii nemărginite şi limite finite de integrare se formulează şi se demonstrează întrun mod asemănător.

De exemplu, criteriul general al lui Cauchy de convergenţă uniformă a integralei improprii de speţa doua depinzând de un parametru, cu limita superioară punct singular, are formularea care urmează.

Teorema 2.4.3 (Condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă a integralelor improprii din funcţii nemărginite depinzând de un parametru). *Integrala improprie de speţa doua depinzând de un parametru*

$$J^*(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx, \quad c \le y \le d$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul y pe intervalul $[c,d]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice λ' şi λ'' aparţinând intervalului $(0, \min\{b-a, \delta(\varepsilon)\})$ inegalitatea

$$\Big| \int_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x,y)dx \Big| < \varepsilon$$

este satisfăcută pentru orice $y \in [c,d]$.

Exemplul 2.4.1 *Să se evalueze funcţia*

$$J(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in I\!R. \tag{2.93}$$

Soluţie. Conform criteriului lui Weierstrass, integrala improprie depinzând de parametrii α şi β, definită în (2.93), este uniform convergentă în raport cu parametrul β pe orice interval compact din $I\!R$ deoarece

$$|e^{-\alpha x^2}\cos\beta x| \le e^{-\alpha x^2}$$

şi $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx$ este convergentă. Este permisă derivarea în raport cu β sub semnul integrală în $J(\alpha,\beta)$ deoarece în baza aceluiaşi criteriu integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\Big)dx = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul β pe orice interval compact din $I\!R$. Avem deci

$$\frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} \sin\beta x\, \frac{d}{dx}\Big(e^{-\alpha x^2}\Big)dx.$$

Integrarea prin părţi în ultima integrală conduce la ecuaţia diferenţială simplă

$$\frac{\partial J}{\partial\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}\,J,$$

din care obţinem

$$J(\alpha,\beta) = C(\alpha)\, e^{-\dfrac{\beta^2}{4\,\alpha}}. \tag{2.94}$$

Rămâne să determinăm funcţia $\alpha \mapsto C(\alpha)$. Luând pentru β valoarea zero, găsim

$$C(\alpha) = J(\alpha, 0) = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha\, x^2} dx. \tag{2.95}$$

Ultima integrală se obţine din integrala lui Poisson după ce trecem pe x în $\sqrt{\alpha}x$:

$$J(\alpha,0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}\, x)^2} d(\sqrt{\alpha}\, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.96}$$

Din (2.94), (2.95) şi (2.96) rezultă

$$J(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\,\alpha\, x^2} \cos\beta x dx \;\; = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\dfrac{\beta^2}{4\,\alpha}}.$$

■

Exemplul 2.4.2 *Să se calculeze valorile integralelor lui* **Fresnel**

$$\int_0^{+\infty} \sin{(x^2)} dx \qquad \text{şi} \qquad \int_0^{+\infty} \cos{(x^2)} dx.$$

Soluţie. Punând $(x^2) = t$, obţinem:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin{(x^2)} dx &= \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt; \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos{(x^2)} dx &= \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt. \end{cases}$$

Din relaţiile (2.95) şi (2.96), în care punem $\alpha = t$ şi $x = u$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\,tu^2} du. \tag{2.97}$$

Înmulţind (2.97) cu funcţia $t \mapsto e^{-kt}\sin t$, $k > 0$, şi integrând pe $[0, +\infty)$ găsim

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, e^{-kt}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t\, du\Big) dt. \tag{2.98}$$

Dacă în (2.98) schimbăm ordinea de integrare şi ţinem cont de rezultatul

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\, dt = \frac{1}{1+(k+u^2)^2},$$

simplu de demonstrat folosind de două ori metoda integrării prin părţi, ajungem la concluzia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, e^{-kt}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(k+u^2)^2}\, dt. \tag{2.99}$$

Trecând la limită în (2.99) pentru $k \to 0$ deducem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.100}$$

În acest mod se găseşte în final că valorile celor două integrale Fressnel sunt egale şi

$$\int_0^{+\infty} \sin{(x^2)}dx \;=\; \int_0^{+\infty} \cos{(x^2)}dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

După cum s–a mai afirmat, integralele lui Fressnel sunt utilizate în optică. ∎

Exemplul 2.4.3 *Pornind de la valoarea integralei improprii de prima speţă studiată în Exemplul* 1.12.3, *să se demonstreze, în baza Teoremei 2.3.5, că pentru* $0 < p < 1$ *are loc relaţia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{2.101}$$

Soluţie. Din (1.103), avem $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$. Dacă în această integrală efectuăm substituţia $x = t^{\frac{1}{2n}}$, obţinem

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{2.102}$$

Cu notaţia $p = \dfrac{2m+1}{2n}$ egalitatea precedentă devine

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \tag{2.103}$$

în care deocamdată p este număr raţional. Să extindem valorile pe care le poate lua p între 0 şi 1, considerând că $p \in I\!\!R \cap (0,1)$ şi să observăm că funcţia reală de două variabile reale $f(t) = \dfrac{t^{p-1}}{1+t}$ este continuă pe mulţimea $(0,+\infty)\times(0,1)$. Despărţind intervalul de integrare în subintervalele $(0,1]$ şi $[1,+\infty)$ şi aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor improprii depinzând de parametrul p

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}dt \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$$

în care funcţiile $g(t)$ sunt respectiv egale cu

$$g(t) = \frac{t^{p_1-1}}{1+t} \quad \text{şi} \quad g(t) = \frac{t^{p_2-1}}{1+t},$$

unde $0 < p_1 \le p_2 < 1$, vedem că integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval compact $[p_1, p_2]$. În baza Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$ este o funcţie continuă de paramatrul p pe intervalul $(0,1)$. Cum orice număr real este limita unui şir de numere raţionale putem afirma că $p \in (0,1)$ este limita pentru $m \to +\infty$ şi $n \to +\infty$ a şirului numeric cu termenul general egal cu $\dfrac{2m+1}{2n}$, unde $0 < m < n$. Trecând la limită în (2.102) pentru $m \to +\infty$ şi $n \to +\infty$ ajungem la egalitatea (2.101), care trebuia să o demonstrăm. ∎

2.5 Integrale Cauchy–Frullani

Definiţia 2.5.1 *Se numeşte* **integrală Cauchy–Frullani**[1] *integrala improprie de speţa întâi depinzând de doi parametri*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}dx, \tag{2.104}$$

unde $0 < a < b < +\infty$.

[1]Frullani, Giuliano (1795 – 1834), matematician italian.

Teorema 2.5.1 *Dacă $f \in C^1([0,+\infty))$, derivata f' este integrabilă în sens generalizat şi f are limita finită $f(+\infty)$ când $x \to +\infty$, atunci*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \Big[f(+\infty)-f(0)\Big]\ln\frac{b}{a}. \tag{2.105}$$

Demonstraţie. Din ipotezele f' este integrabilă în sens generalizat şi f are limită la infinit, în urma aplicării formulei Leibniz-Newton de calcul a unei integrale improprii de speţa întâi convergente, deducem

$$\int_0^{+\infty} f'(x)dx = f(+\infty)-f(0). \tag{2.106}$$

În baza criteriului lui Cauchy, aceleaşi ipoteze asigură uniforma convergenţă a integralei improprii

$$J(u) = \int_0^{+\infty} f'(ux)dx \tag{2.107}$$

în raport cu parametrul u pe intervalul $[a,b]$.

Într-adevăr, din Teorema Bolzano–Cauchy de existenţă a limitei finite a funcţiei f în punctul de la infinit rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' > N(\varepsilon)$, avem

$$|f(x')-f(x'')| < a\varepsilon. \tag{2.108}$$

Schimbarea de variabilă $ux = t$ în integrala definită $\displaystyle\int_{A'}^{A''} f'(ux)dx$, urmată de integrarea prin părţi şi utilizarea inegalităţii (2.108), conduce la

$$\begin{aligned} \Big|\int_{A'}^{A''} f'(ux)dx\Big| &= \Big|\frac{1}{u}\int_{A'u}^{A''u} f'(t)dt\Big| \\ \Big|\frac{f(A''u)-f(A'u)}{u}\Big| &\leq \frac{1}{a}|f(A''u)-f(A'u)| < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.109}$$

oricare ar fi $A', A'' > \dfrac{1}{a}N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi u din intervalul $[a,b]$. În baza criteriului lui Cauchy de convergenţă uniformă a unei integrale improprii depinzând de un parametru rezultă că integrala (2.107) este uniform convergentă în raport cu parametrul u pe intervalul $[a,b]$, iar valoarea sa este

$$\int_0^{+\infty} f'(ux)dx = \frac{f(bx)-f(ax)}{x}. \tag{2.110}$$

Având în vedere (2.110), rezultă că putem scrie

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux) du. \tag{2.111}$$

Aplicând Teorema 2.3.7 în ultima integrală din (2.111), obţinem

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux) du = \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux) dx. \tag{2.112}$$

În ultima integrală din (2.112) efectuăm schimbarea de variabilă $ux = t$ şi folosim (2.106). Obţinem

$$\begin{aligned} \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux) dx = \int_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{u} du = \\ = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Relaţiile (2.112) şi (2.113) conduc la (2.105). ■

Teorema 2.5.2 *Dacă funcţia reală de variabilă reală* $f : [0, +\infty) \to I\!R$ *nu are limită finită în punctul de la infinit, însă integrala improprie de tipul întâi* $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, *unde* $A > 0$, *este convergentă şi* f *este derivabilă în origine, atunci*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{2.114}$$

Demonstraţie. Integralele depinzând de parametrul s :

$$\int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt; \quad \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt, \tag{2.115}$$

sunt proprii, singularitatea în origine fiind aparentă deoarece funcţia de sub semnul integrală poate fi prelungită la toată semiaxa $[0, +\infty)$ atribuindu–i ca valoare în origine limita sa în origine care este $f'(0)$, ce din ipoteză există. Efectuând schimbările de variabilă $t = ax$ în prima integrală (2.115) şi $t = bx$ în cea de a doua, avem

$$\begin{aligned} \int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^s \frac{f(ax) - f(0)}{x} dx, \\ \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^s \frac{f(bx) - f(0)}{x} dx. \end{aligned} \tag{2.116}$$

În consecinţă,

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx &= \int_{as}^{bs}\frac{f(t)}{t}dt - f(0)\int_{as}^{bs}\frac{dt}{t} = \\ &= \int_{as}^{bs}\frac{f(t)}{t}dt - f(0)\ln\frac{b}{a}.\end{aligned} \tag{2.117}$$

Ultima integrală din (2.117) poate fi facută oricât de mică de îndată ce s este foarte mare, ceea ce înseamnă că

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^s \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = -f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{2.118}$$

Definiţia convergenţei unei integrale improprii de speţa întâi şi relaţia (2.118) demonstrează egalitatea (2.114). ∎

Exerciţiul 2.5.1 *Folosind eventual integralele Cauchy–Frullani, să se studieze următoarele integrale improprii depinzând de parametri şi în caz de convergenţă să se precizeze valorile acestora:*

$$\begin{aligned}
&a)\quad I_1(a,b) &&= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx,\quad 0<a<b;\\
&b)\quad I_2(a,b,p,q) &&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{p+q\,e^{-bx}}{p+q\,e^{-ax}}dx,\ \ p,q>0,\quad 0<a<b;\\
&c)\quad I_3(a,b) &&= \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(bx)-\operatorname{arctg}(ax)}{x}dx,\quad 0<a<b;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d)\quad I_4(a,b) &&= \int_0^{+\infty}\frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x}dx,\quad 0<a<b;\\
&e)\quad I_5(\alpha,\beta) &&= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)}{x}dx,\ \ \alpha\neq\pm\beta;\\
&f)\quad I_6(a,b) &&= \int_0^{+\infty}\frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x^2}dx,\quad 0<a<b;
\end{aligned}$$

$$g)\quad I_7(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-b^2x^2} - e^{-a^2x^2}}{x^2}dx, \quad 0 < |a| < |b|;$$

$$h)\quad I_8(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+b^2x^2) - \ln(1+a^2x^2)}{x^2}dx, \quad 0 < |a| < |b|;$$

$$i)\quad I_9(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{a\ln(1+bx) - b\ln(1+ax)}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$j)\quad I_{10}(a,b) = \int_a^{b} \frac{1-\cos(bx)}{x}\cos(ax)dx, \quad a \neq b;$$

$$k)\quad I_{11}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{a\sin(bx) - b\sin(bx)}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$l)\quad I_{12}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx^n} - e^{-ax^n}}{x}dx, \quad n > 0, a > 0, b > 0;$$

$$m)\quad I_{13}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-bx} - e^{-ax})^2}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$n)\quad I_{14}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax} + x(b-a)e^{-ax}}{x^2}dx, \quad 0 < a < b;$$

$$o)\quad I_{15}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x}dx, \quad 0 < a < b.$$

Soluţie. După cum vom constata, unele din integralele de mai sus ori sunt integrale Cauchy–Frullani de tipul celor descrise în Teorema 2.5.1 şi Teorema 2.5.2, ori se reduc la una din acestea.

a) Fie $f : [a,+\infty) \to I\!\!R$, $f(x) = e^{-x}$. Rezultă că această funcţie satisface ipotezele Teoremei 2.5.1. Deci

$$I_1(a,b) = [f(+\infty) - f(0)]\ln\frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad I_1(a,b) = \ln\frac{a}{b};$$

b) Înlocuind logaritmul câtului cu diferenţ logaritmilor numărătorului şi numitorului se deduce că funcţia f din Teorema 2.5.1 este $f(x) = \ln(p + q\,e^{-x})$. Deoarece $f(0) = \ln(p+q)$ şi $f(+\infty) = \ln p$, rezultă că

$$I_2(p,q,a,b) = \ln(1+\frac{q}{p})\ln\frac{a}{b};$$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ f(0) = 0,\ f(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$, deci $I_3(a,b) = \dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{b}{a}$;

d) $f(x) = \cos x,\ f(0) = 1$. Nu există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, în schimb integrala improprie de speţa întâi $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$, unde $A > 0$, este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet (vezi Teorema 1.11.2)). Prin urmare, conform Teoremei 2.5.2, avem $I_4(a,b) = \ln\dfrac{a}{b}$.

e) Deoarece $\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \dfrac{\cos|\alpha-\beta|x - \cos|\alpha+\beta|x}{2}$, rezultă că $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x,\ a = |\alpha+\beta|$ şi $b = |\alpha-\beta|$. Prin urmare $I_5(a,b) = \dfrac{1}{2}\ln\Big|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\Big|$.

f) Scriind $\dfrac{1}{x^2} = \Big(-\dfrac{1}{x}\Big)'$ şi aplicând metoda integrării prin părţi, avem

$$\begin{aligned}
I_6(a,b) &= -\int_0^{+\infty}(\cos(bx)-\cos(ax))(\frac{1}{x})'dx = \\
&= -\frac{1}{x}(\cos(bx)-\cos(ax))\Big|_0^{+\infty} + \\
&+ \int_0^{+\infty}\frac{a\sin(ax)-b\sin(bx)}{x}dx = (a-b)\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.
\end{aligned}$$

Integrala la care s–a ajuns este integrala lui Dirichlet, a cărei valoare, conform relaţiei (2.51)), este $\dfrac{\pi}{2}$. Prin urmare, $I_6(a,b) = \dfrac{\pi}{2}(a-b)$.

g) Procedând ca la punctul precedent, obţinem

$$\begin{aligned}
I_7(a,b) &= -\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{a^2xe^{-a^2x^2}-b^2xe^{-b^2x^2}}{x}dx = \\
&= 2a^2\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2}dx - 2b^2\int_0^{+\infty}e^{-b^2x^2}dx = \\
&= 2(a-b)\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt.
\end{aligned}$$

Ultima integrală este integrala Euler-Poisson (vezi Exemplul 2.3.2) a cărei valoare este $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Deci, $I_7(a,b) = (a-b)\sqrt{\pi}$.

h) Se integrează prin părţi şi se găseşte

$$\begin{aligned} I_8(a,b) &= 2b^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+b^2x^2}dx - 2a^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2x^2}dx = \\ &= 2b\,\mathrm{arctg}\,(bx)\Big|_0^{+\infty} - 2a\,\mathrm{arctg}\,(ax)\Big|_0^{+\infty} = \pi(b-a). \end{aligned}$$

i) Pentru calculul integralei $I_9(a,b)$ observăm că se poate scrie

$$I_9(a,b) = ab\int_0^{+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+bx)}{bx} - \dfrac{\ln(1+ax)}{ax}}{x}dx.$$

Funcţia $f(x)$ din Teorema 2.5.1 este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dacă} \quad x\in[0,+\infty) \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ şi $f(0)=1$. Prin urmare, $I_9(a,b) = ab\ln\dfrac{a}{b}$.

j) Integrala $I_{10}(a,b)$ se poate scrie în forma

$$\begin{aligned} I_{10}(a,b) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax) - \cos(a+b)x}{x}dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(bx) - \cos|a-b|x}{x}dx. \end{aligned}$$

Ambele integrale fiind integrale Cauchy–Frullani de tipul celei din Teorema 2.5.1, rezultă că

$$I_{10}(a,b) = \frac{1}{2}\ln\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\ln\frac{a}{|a-b|} = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2}{|a^2-b^2|}.$$

k) Mai întâi, avem

$$I_{11}(a,b) = ab\int_0^{+\infty}\frac{\dfrac{\sin(ax)}{ax} - \dfrac{\sin(bx)}{bx}}{x}dx.$$

Apoi, se vede că funcţia f din Teorema 2.5.1 este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă} \quad x \in [0, +\infty) \\ \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$$

iar $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$. Prin urmare, $I_{11}(a,b) = ab \ln ab$.

l) Scriem întâi

$$I_{12}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\,bx^n} - e^{-\,ax^n}}{x} x^{n-1} dx$$

şi apoi efectuăm schimbarea de variabilă $x^n = t$. Obţinem

$$I_{12}(a,b) = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} dt.$$

Folosim acum $I_1(a,b)$. Prin urmare, $I_{12}(a,b) = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{a}{b}$.

m) Se aplică metoda integrării prin părţi şi obţinem

$$I_{13}(a,b) = 2a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2ax}}{x} dx + 2b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2bx}}{x} dx.$$

Ambele integrale sunt integrale Cauchy–Frullani care se încadrează în Teorema 2.5.1. În acest mod valoarea integralei iniţiale este

$$I_{13}(a,b) = \ln \frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}.$$

n) Se integrează prin părţi şi se ajunge la

$$I_{14}(a,b) = b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx - a(b-a) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx.$$

Prima integrală este integrală Cauchy–Frullani, iar a doua este imediată. Se obţine

$$I_{14}(a,b) = b \ln \frac{b}{a} + a - b.$$

o) $I_{15}(a,b)$ este diferenţa a două integrale Dirichlet. Într-adevăr,

$$I_{15}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\,(bx)}{bx} d(bx) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin\,(ax)}{ax} d(ax).$$

Fiecare integrală are valoarea $\frac{\pi}{2}$, deci $I_{15}(a, b) = 0$. Această integrală este totodată integrală Cauchy–Frullani care se încadrează în Teorema 2.5.2, funcţia f fiind $f(x) = \sin x$. Pentru că valoarea în $x = 0$ a funcţiei f este nulă rezultă că $I_{15}(a, b) = 0$. ∎

2.6 Integralele lui Euler

2.6.1 Definiţiile funcţiilor Beta şi Gama

Definiţia 2.6.1 *Integrala depinzând de parametrii p şi q,*

$$B(p.q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{2.119}$$

se numeşte **integrala Euler de primul tip** *sau* **funcţia Beta**.

Definiţia 2.6.2 *Integrala improprie depinzând de parametrul p,*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \tag{2.120}$$

se numeşte **integrala Euler de tipul al doilea** *sau* **funcţia Gama**.

Funcţiile (2.119) şi (2.120) joacă un rol important în diferite domenii ale matematicii şi ale matematicii fizice. După cum se va arăta, funcţia Beta se exprimă în funcţie de funcţia Gama şi din acest motiv vom prezenta mai întâi proprietăţile funcţiei Gama.

2.6.2 Proprietăţi ale funcţiei Gama

Teorema 2.6.1 *Integrala improprie* (2.120) *este convergentă pentru* $0 < p < +\infty$, *divergentă pentru* $p \leq 0$ *şi uniform convergentă în raport cu parametrul* p *pe orice compact* $[p_0, P]$, *unde* $0 < p_0 < P < +\infty$.

Demonstraţie. Dacă $p - 1 < 0$, integrandul din (2.120) are un punct singular în limita inferioară. Să despărţim intervalul de integrare în două subintervale, de exemplu $[0, 1]$ şi $[1, +\infty)$, prin intermediul punctului $x = 1$. Avem

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx. \tag{2.121}$$

Primul termen din membrul doi al egalităţii (2.121) este o integrală improprie de speţa a doua dacă $p-1<0$, cu punctul singular în limita inferioară. Scriind această integrală în forma $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}dx$ şi aplicând criteriul de comparaţie în α, formularea cu limită, deducem că integrala este convergentă dacă $1-p<1$, adică dacă $p>0$, şi divergentă dacă $p\leq 0$.

Cel de al doilea termen din membrul al doiea al egalităţii (2.121) este o integrală improprie de speţa întâi convergentă pentru toate valorile reale ale lui p. Într-adevăr, pentru a arăta aceasta să remarcăm că egalităţile

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 x^{p-1}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = (p+1)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

sunt satisfăcute pentru orice $p\in I\!R$.

În consecinţă, integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este convergentă pentru orice $p>0$ şi divergentă pentru $p\leq 0$.

Să demonstrăm că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval finit $[p_0,P_0]$, unde $0<p_0\leq P_0<+\infty$. Ca şi în cazul convergenţei obişnuite a acestei integrale, scriem $[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$ şi studiem convergenţa uniformă în raport cu parametrul p a integralelor improprii

$$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Când $p\geq p_0>0$ şi $x\in[0,1]$, funcţia de integrat satisface inegalitatea $x^{p-1}e^{-x}\leq x^{p_0-1}$, iar integrala $\displaystyle\int_0^1 x^{p_0-1}dx$ este convergentă dacă $p_0>0$ şi are valoarea $1/p_0$.

Conform criteriului lui Weierstrass de convergenţă a integralelor improprii depinzând de un parametru, rezultă că integrala $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe intervalul $[p_0,+\infty)$, unde $p_0>0$.

Evaluând integrala $\displaystyle\int_0^\lambda x^{p-1}e^{-x}dx$ pentru $p\to 0+0$ şi $\lambda=$const>0 se observă că

$$\int_0^\lambda x^{p-1}e^{-x}dx \geq e^{-1}\int_0^\lambda x^{p-1}dx = \frac{\lambda^p}{pe}\to+\infty$$

şi, în consecinţă, putem afirma că integrala $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ nu este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe intervalul $(0,+\infty)$.

Tot datorită criteriului lui Weierstrass rezultă că integrala improprie de speţa întâi $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval de forma $(-\infty, P_0]$, unde $P_0 < +\infty$, deoarece

$$x^{p-1}e^{-x} \leq x^{P_0-1}e^{-x} \quad \text{pentru} \quad 1 \leq x < +\infty, \quad -\infty < p \leq P_0$$

şi integrala $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{P_0-1}e^{-x}dx$ este convergentă.

Integrala improprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ nu converge uniform în raport cu parametrul p pe intervalul $(-\infty, +\infty)$. Pentru a justifica această afirmaţie, evaluăm integrala $\displaystyle\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ pentru $\ell > 1$ arbitrar, dar fixat şi pentru valori mari ale lui p, deci pentru $p \to +\infty$. Pentru orice număr întreg $N > 0$ găsim valori ale lui p astfel încât $p-1 > N$, deoarece $p \to +\infty$. Prin urmare, pentru astfel de p se poate scrie

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx > \int_\ell^{+\infty} x^N e^{-x}dx = -\, e^{-x}x^N\Big|_{x=\ell}^{+\infty} + N\int_\ell^{+\infty} x^{N-1}e^{-x}dx.$$

Aplicând repetat integrarea prin părţi pentru calculul integralei improprii $\displaystyle\int_\ell^{+\infty} x^{N-1}e^{-x}dx$ în final se găseşte

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx > (\ell^N + N\ell^{N-1} + N(N-1)\ell^{N-2} + \cdots + N!)e^{-1} \to +\infty$$

când $N \to +\infty$. În consecinţă,

$$\lim_{p\to+\infty}\int_\ell^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = +\infty, \quad (\forall)\ \ell > 0.$$

Astfel, integrala improprie $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval $[p_0, +\infty)$ cu $p_0 > 0$ arbitrar, dar fixat, iar integrala imroprie $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este uniform convergentă pe orice interval $(-\infty, P_0]$, unde P_0 este un număr finit, arbitrar.

Aşadar, ambele integrale sunt simultan uniform convergente în raport cu parametrul p pe orice compact $[p_0, P_0]$, unde $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$, ceea ce dovedeşte că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice compact $[p_0, P_0]$, ceea ce trebuia de demonstrat. ■

Teorema 2.6.2 *Funcţia* Γ *definită în* (2.120) *este o funcţie continuă pe intervalul* $(0, +\infty)$.

Demonstraţie. Funcţia de integrat, $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$, este continuă pe mulţimea $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, iar conform Teoremei 2.6.1 integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval finit $[p_0, P_0]$, unde $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$. Prin urmare, conform Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este funcţie continuă pe intervalul $(0, +\infty)$. ■

Teorema 2.6.3 *Funcţia* Γ *definită în* (2.120) *este infinit diferenţiabilă, derivata de ordin* k *exprimându–se prin integrala improprie depinzând de parametrul* p

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}dx, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.122}$$

Demonstraţie. Derivarea formală în raport cu parametrul p în (2.120) conduce la egalitatea

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx. \tag{2.123}$$

Egalitaea (2.123) poate fi justificată arătând că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice interval finit $[p_0, P_0]$, unde $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$, iar derivata parţială în raport cu variabila p a funcţiei de integrat $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$ este o funcţie continuă pe mulţimea $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Faptul că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul p pe orice compact $[p_0, P_0]$ se demonstrează aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor

$$\int_0^1 x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx,$$

funcţiile $g(x)$ din integralele $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ şi $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)dx$ fiind date respectiv de

$$g(x) = x^{P_0-1}|\ln x| \quad \text{şi} \quad g(x) = x^{P_0-1}|\ln x|e^{-x}.$$

Pentru obţinerea derivatei secunde a funcţiei $\Gamma(p)$ se aplică raţionamentul de mai sus funcţiei $\Gamma'(p)$ din (2.123). Din aproape în aproape se obţine (2.122) şi teorema este demonstrată. ■

Să stabilim acum o formulă de recurenţă pentru funcţia Γ. Aplicând în (2.120) formula integrării prin părţi, obţinem

$$p\Gamma(p) = \lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x} - \lim_{x\to 0+0} x^p e^{-x} + \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx.$$

Însă, aplicând o teoremă de tip Hospital, obţinem

$$\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x} = \lim_{x\to 0+0} x^p e^{-x} = 0,$$

deci

$$p\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx,$$

adică

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{2.124}$$

Aplicând în mod repetat această relaţie de recurenţă, obţinem

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\Gamma(p). \tag{2.125}$$

Din (2.125) rezultă că este suficient să cunoaştem valorile funcţiei Γ pentru orice p pozitiv şi subunitar pentru a obţine valorile lui Γ pentru toate celelalte valori pozitive ale lui p. De exemplu

$$\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}+2\Big) = \Big(\frac{1}{2}+2-1\Big)\Big(\frac{1}{2}+2-2\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big). \tag{2.126}$$

Pentru a finaliza relaţia (2.126) este necesar să ştim valoarea lui $\Gamma(p)$ pentru $p = \dfrac{1}{2}$,

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx. \tag{2.127}$$

Punând în (2.127) $x = t^2$ şi ţinând cont de integrala Poisson, obţinem

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \tag{2.128}$$

Din (2.126) şi (2.128) rezultă $\Gamma\Big(\dfrac{5}{2}\Big) = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Luând, în (2.125), $p = 1$ şi ţinând seama că

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \tag{2.129}$$

rezultă

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{2.130}$$

Cu alte cuvinte, funcţia Γ este, întrun anume sens, o generalizare a noţiunii de factorial; putem spune că prin intermediul funcţiei Γ noţiunea de factorial capătă sens pentru orice număr pozitiv.

Funcţia Γ este de cea mai mare importanţă în analiză. Ultima proprietate stabilită face să se întrevadă această importanţă.

Teorema 2.6.4 *Există o valoare p_0 a lui p, în intervalul $(1,2)$, astfel încât funcţia $\Gamma(p)$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0,p_0)$ şi strict crescătoare pe $(p_0,+\infty)$.*

Demonstraţie. Din expresia (2.119) a funcţiei $\Gamma(p)$ deducem că, pentru $p>0$, valorile sale sunt pozitive. De asemenea, din (2.124) avem

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

pentru $p>0$ şi deci $\Gamma(p)\to+\infty$ pentru $p\to 0+0$ deoarece $\Gamma(p+1)\to\Gamma(1)=1$ pentru $p\to 0+0$. Mai mult, se poate arăta că $\lim\limits_{p\to+\infty}\Gamma(p)=+\infty$.

Observând că din relaţiile (2.128) şi (2.129) avem că $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ şi folosind Teorema 2.6.1 şi Teorema 2.6.2, constatăm că pe intervalul $[1,2]$ funcţia Γ satisface ipotezele Teoremei lui Rolle. Conform acestei teoreme derivata $\Gamma'(p)$ se anulează întrun punct $p_0\in(1,2)$. Deoarece $\Gamma''(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^2 e^{-x}dx>0$ pentru orice $p>0$ rezultă că derivata $\Gamma'(p)$ este o funcţie monoton crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$. În consecinţă, derivata $\Gamma'(p)$ nu are alte rădăcini, în afară de p_0, în intervalul $(0,+\infty)$. În plus, $\Gamma'(p)<0$ pentru $p<p_0$ şi $\Gamma'(p)>0$ pentru $p>p_0$ deoarece $\Gamma'(p)$ este o funcţie monoton crescătoare. Deci, funcţia $\Gamma(p)$ are numai o valoare extremă pe intervalul $0<p<+\infty$, şi anume un minim în punctul $p=p_0$.

2.6.3 Proprietăţi ale funcţiei Beta

Teorema 2.6.5 *Integrala improprie de speţa a doua* (2.119) *este convergentă pentru $p>0$ şi $q>0$.*

Demonstraţie. Dacă $p\geq 1$ şi $q\geq 1$, funcţia de sub semnul integrală este continuă pe $[0,1]$, deci integrala are sens chiar pe $[0,1]$ ceea ce arată că (2.119) este o integrală definită sau proprie. Dacă cel puţin unul din numerele p şi q este mai mic decât 1, integrala (2.119) este una improprie de speţa a doua şi pentru studiul naturii acesteia vom descompune intervalul de integrare prin intermediul punctului 1/2.

Dacă $p < 1$, atunci din cele două integrale care rezultă după descompunerea intervalului $[0, 1]$, integrala

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} dx$$

este improprie de speţa a doua cu limita inferioară punct singular. Aplicând criteriul de comparaţie în α, în varianta cu limită, constatăm că pentru $1-p < 1$, deci pentru $p > 0$, această integrală este convergentă.

Dacă $q < 1$, atunci integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} dx$$

este improprie de speţa a doua cu limita superioară punct singular. Aplicând acelaşi criteriu de comparaţie, deducem că integrala este convergentă pentru $1 - q < 1$, deci pentru $q > 0$.

Deci, pentru $p > 0$, $q > 0$, integrala (2.119) este convergentă. Prin urmare, putem spune că funcţia $B(p, q)$ este definită în porţiunea de plan cu ambele coordonate strict pozitive. ■

Teorema 2.6.6 *Funcţia Beta este simetrică în variabilele sale p şi q, adică*

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{2.131}$$

Demonstraţie. În integrala (2.119) efectuăm schimbarea de variabilă $x = 1 - t$ şi constatăm că are loc (2.131). ■

Să aplicăm integralei (2.119) teorema de schimbare de variabilă pentru integrale pe interval necompact, punând

$$x = \varphi(u) = \frac{u}{1+u}. \tag{2.132}$$

Funcţia φ este derivabilă, cu derivată continuă pe $(0, +\infty)$, şi aplică intervalul $(0, +\infty)$ pe intervalul $(0, 1)$. Din faptul că derivata

$$\varphi'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$$

este pozitivă pe $(0,+\infty)$, rezultă că φ este funcţie strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci toate condiţiile pentru aplicarea schimbării de variabilă definită de (2.132) sunt îndeplinite. Avem

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p-1}(1+u)^{q-1}(1+u)^2}du =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du,$$

deci

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du. \tag{2.133}$$

Integrala din membrul doi al relaţiei (2.133) o scriem în forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du, \tag{2.134}$$

iar în cea de a doua integrală din membrul doi al acestei egalităţi efectuăm schimbarea de variabilă $u = \dfrac{1}{y}$. Obţinem

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy. \tag{2.135}$$

Din (2.133), (2.134) şi (2.135) deducem o nouă expresie pentru valorile funcţiei Beta, şi anume

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{u^{p-1}+u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$$

Această expresie arată că funcţia Beta este de fapt o integrală improprie cu punctul singular doar în limita inferioară.

Teorema 2.6.7 *Dacă $q > 1$, atunci funcţia Beta satisface relaţia de recurenţă*

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), \tag{2.136}$$

iar dacă $p > 1$, atunci

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q). \tag{2.137}$$

Demonstraţie. Să presupunem întâi că $q > 1$. Scriind că $x^{p-1} = \Big(\dfrac{x^p}{p}\Big)'$ şi aplicând integralei (2.119) teorema de integrare prin părţi pentru integrale improprii, obţinem

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx. \tag{2.138}$$

Utilizând în (2.138) identitatea $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$, deducem

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q),$$

de unde rezultă (2.136).

Ţinând seama de (2.136 şi presupunând că $p > 1$, în baza relaţiei de simetrie (2.131), avem (2.137) şi teorema este demonstrată. ■

Aplicând în mod succesiv formula (2.136) pentru diferite valori naturale ale lui q, obţinem

$$B(a,n) = \frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\cdots\frac{1}{p+1}\cdot B(p,1).$$

Însă $B(p,1) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}dx = 1/p$, deci, ţinând seama de (2.131), obţinem

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}. \tag{2.139}$$

Luând în rolul lui p un număr natural m, din (2.139) rezultă, multiplicând numărătorul şi numitorul cu $(m-1)!$,

$$B(m,n) = B(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

2.6.4 Relaţie între funcţiile Beta şi Gama

Să cercetăm acum dacă între funcţiile Beta şi Gama există vreo relaţie. Pentru aceasta vom avea nevoie de o altă expresie a funcţiei Γ şi în acest sens vom aplica integralei (2.120) teorema de schimbare de variabilă, punând $x = \varphi(u) = \ln\dfrac{1}{u}$. Această funcţie aplică intervalul $(0,1)$ pe intervalul $(+\infty, 0)$.

De asemeni, φ este strict monotonă pe $(0,1)$, derivabilă, cu derivată continuă pe $(0,1)$ şi $\varphi'(u) = -1/u$. Avem

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = -\int_1^0 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} e^{-\frac{1}{u}}\frac{1}{u}du =$$
$$= -\int_1^0 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} du = \int_0^1 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} du,$$

de unde rezultă

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \Big(\ln\frac{1}{u}\Big)^{p-1} du. \tag{2.140}$$

Pe de altă parte, funcţia $\ln\frac{1}{u}$ este limita unui şir de funcţii reale (f_n), cu termenul general funcţia continuă $f_n = n\Big(1 - u^{\frac{1}{n}}\Big)$, definită pe intervalul $(0,+\infty)$. Deci,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1 - u^{\frac{1}{n}}\Big) = \ln\frac{1}{u}. \tag{2.141}$$

Şirul de funcţii (f_n) este strict crescător deoarece funcţia reală de variabila reală x definită pe intervalul $(0,+\infty)$, cu valorile date de $\dfrac{1-e^x}{x}$ este crescătoare, având derivata pozitivă. În plus, funcţia $\ln\frac{1}{u}$ este continuă şi prin urmare, conform Teoremei 2.3.1, convergenţa şirului de funcţii (f_n) este uniformă. Putem deci aplica teorema de trecere la limită sub semnul integrală şi obţinem, în baza relaţiilor (2.140) şi (2.141),

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} n^{p-1}\int_0^1 \Big(1 - u^{\frac{1}{n}}\Big)du.$$

Făcând în ultima integrală schimbarea de variabilă $u = y^n$, obţinem

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} n^p \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{p-1}dy = \lim_{n\to+\infty} n^p B(n,p). \tag{2.142}$$

Ţinând seama de relaţia (2.139), rezultă

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} n^p \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}. \tag{2.143}$$

Relaţiile (2.142) şi (2.143) stabilesc, între funcţiile B şi Γ, o legătură mijlocită de o trecere la limită.

Să stabilim o legătură mai simplă între aceste două funcţii. În acest scop, aplicăm integralei (2.120) schimbarea de variabilă $x = ty$, unde $t \geq 0$. Obţinem

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-\,ty} dy. \tag{2.144}$$

Înlocuind în (2.144) pe p cu $p+q$, în care $q > 0$, şi pe t cu $1+t$, găsim

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-\,(1+t)y} dy. \tag{2.145}$$

Înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu t^{p-1} şi integrând, în raport cu t, pe intervalul $(0, +\infty)$, obţinem

$$\begin{aligned}&\Gamma(p+q) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-\,(1+t)y} dy.\end{aligned} \tag{2.146}$$

Însă, în baza relaţiei (2.133), integrala din primul membru al egalităţii (2.146) este egală cu $B(p,q)$, astfel că putem scrie

$$\Gamma(p+q) \cdot B(p,q) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}\, t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy. \tag{2.147}$$

Să demonstrăm acum că este permisă schimbarea ordinii de integrare în integrala din membrul al doilea al relaţiei (2.147) pentru $p > 1$ şi $q > 1$. Pentru aceasta trebuie să arătăm că cele cinci ipoteze ale Teoremei 2.3.8 asupra schimbării ordinii de integrare întro integrală iterată sunt îndeplinite. Întradevăr:

(a) funcţia

$$f(y,t) = y^{p+q-1}\, t^{p-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$$

este continuă pentru $0 \leq y < +\infty$, $0 \leq t < +\infty$;

(b) dacă $p > 1$ şi $q > 1$ integrala din membrul doi al relaţiei (2.146) este convergentă;

(c) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y,t) dy = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-\,(1+t)y} dy$$

este o funcţie continuă de variabila t pe intervalul $(0,+\infty)$ deoarece, în baza relaţiei (2.145), avem

$$\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-\,(1+t)y}dy = \Gamma(p+q)\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}},$$

iar Γ, după Teorema 2.6.1, este funcţie continuă;

(d) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-\,(1+t)y}dt \tag{2.148}$$

este de asemeni o funcţie continuă pe intervalul $(0,+\infty)$ deoarece din (2.148) avem mai întâi

$$\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = y^{p+q-1}e^{-\,y}\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-\,ty}dt,$$

iar apoi, după schimbarea de variabilă $u = ty$,

$$\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = y^{q-1}e^{-\,y}\cdot\Gamma(p), \tag{2.149}$$

membrul doi al acestei relaţii fiind o funcţie continuă de y pe intervalul $(0,+\infty)$;

(e) integrala improprie de prima speţă

$$\int_0^{+\infty} dy\int_0^{+\infty} f(y,t)dt$$

este convergentă deoarece, conform egalităţii (2.149) şi definiţiei (2.120) a funcţiei $\Gamma(q)$, avem

$$\int_0^{+\infty} dy\int_0^{+\infty} f(y,t)dt = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q), \tag{2.150}$$

iar membrul al doilea este număr real. În consecinţă, integrala iterată

$$\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} f(y,t)dy = \int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}\,t^{p-1}e^{-(1+t)y}dy \tag{2.151}$$

este convergentă şi egală cu integrala din primul membru al egalităţii (2.152). Aşadar, din (2.147), (2.152) şi (2.151) deducem că pentru $p>1$ şi $q>1$ are loc identitatea

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{2.152}$$

numită *formula lui Jacobi* ce dă legătura între funcţiile B şi Γ ale lui Euler.

Pentru a extinde relaţia (2.150) la toţi $p > 0$ şi $q > 0$ scriem din nou această relaţie pentru $p > 1$ şi $q > 1$ şi aplicăm apoi formulele de recurenţă (2.136) şi (2.137) membrului său stâng şi formula de recurenţă (2.124) membrului drept.

Dacă în relaţia (2.133) considerăm că $q = 1 - p$, atunci ea devine

$$B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{1+u} du, \tag{2.153}$$

unde $0 < p < 1$. În Exemplul 2.4.3 (vezi relaţia (2.101)) am arătat că integrala din (2.153) are valoarea $\dfrac{p}{\sin p\pi}$, prin urmare avem

$$B(p, 1-p) = \frac{p}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \tag{2.154}$$

Relaţia de recurenţă (2.152), împreună cu (2.129) şi (2.152) conduc la relaţia importantă

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \tag{2.155}$$

Exerciţiul 2.6.1 *Folosind funcţiile lui Euler, să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

Soluţie. Se observă că $I = B\Big(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\Big)$, iar dacă folosim relaţia (2.152), obţinem

$$I = \frac{\Gamma\Big(\dfrac{5}{4}\Big) \cdot \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big)}{\Gamma(2)}. \tag{2.156}$$

Conform relaţiei de recurenţă (2.124), avem:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \Gamma(\frac{1}{4}).$$

Dacă introducem aceste valori în (2.156) şi folosim (2.155), găsim

$$I = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

■

Exercițiul 2.6.2 *Să se calculeze integrala* $J = \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{5}{2}} x \cdot \cos^{\frac{3}{2}} x dx.$

Soluţie. Cu substituţia $\sin^2 x = z$ suntem conduşi la relaţia $J = 2B\Big(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{4}\Big)$ şi procedând ca la calculul integralei precedente, găsim $J = \dfrac{3\pi\sqrt{2}}{16}$. ■

Exercițiul 2.6.3 *Să se studieze integrala* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx,$ *unde* $p > 0$ *şi* $q > 0$.

Soluţie. Efectuând schimbarea de variabilă $\sin^2 x = z$, obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p}{2}-1}(1-z)^{\frac{q}{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}B\Big(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{p}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\dfrac{q}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{p+q}{2}\Big)}.$$

În particular, pentru $q = 1$, obţinem formula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{p}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{p+1}{2}\Big)}.$$

■

Capitolul 3

Integrale curbilinii

3.1 Drum, drum rectificabil, curbă

Fie xOy un reper cartezian în plan, $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$ versorii acestuia şi cercul de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.1}$$

Un punct $M(x, y)$ aparţinând acestui cerc poate fi considerat ca imaginea unui punct t prin funcţia vectorială de argument real

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} \tag{3.2}$$

definită pe intervalul compact $[0,\, 2\pi] \subset I\!\!R$ cu valori în $I\!\!R^2$, unde

$$\begin{cases} \varphi(t) = \cos t, \\ \psi(t) = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0,\, 2\pi]. \tag{3.3}$$

În această situaţie spunem că aplicaţia vectorială $\mathbf{r} : [0,\, 2\pi] \to I\!\!R^2$ ale cărei valori se determină după legea (3.2), unde funcţiile φ şi ψ sunt date în (3.3), realizează o *reprezentare parametrică* a cercului (3.1), iar argumentul t se numeşte *parametrul* acestei reprezentări.

Acest exemplu simplu sugerează introducerea de reprezentări parametrice şi pentru alte mulţimi de puncte din plan.

Definiţia 3.1.1 *Fie un interval compact* $[a, b] \subset I\!\!R$. *Se numeşte* **drum în plan** *o funcţie vectorială de variabilă reală, continuă,* $\mathbf{r} : [a, b] \to I\!\!R^2$.

Punctele A şi B de vectori de poziţie $\mathbf{r}(a)$ *şi* $\mathbf{r}(b)$ *se numesc* **capetele** *sau* **extremităţile drumului**. **Imaginea drumului** (d) *este submulţimea* $I(d) \subset \mathbb{R}^2$ *a tuturor punctelor* $M(x,y)$ *ale căror vectori de poziţie sunt valori ale funcţiei* $\mathbf{r}$, *adică*

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t), \ \ t \in [a,b].$$

Dacă notăm cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct $M(x,y) \in I(d)$, atunci

$$(d): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.4}$$

unde:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}; \qquad \mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j}. \tag{3.5}$$

Din ecuaţia (3.4) şi notaţiile (3.5), obţinem

$$(d): \ \begin{cases} x &= \ \varphi(t), \\ y &= \ \psi(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b]. \tag{3.6}$$

Definiţia 3.1.2 *Când t parcurge intervalul* $[a,b]$ *se spune că* (3.6) *constituie o* **reprezentare parametrică** *a imaginii drumului* $I(d)$ *şi a drumului* (d), *iar t se numeşte* **parametru**. *Relaţia* (3.4) *se numeşte* **ecuaţia vectorială** *a imaginii* $I(d)$ *sau a drumului* (d).

Definiţia 3.1.3 *Drumul* (d) *se numeşte* **închis** *dacă extremităţile sale coincid; dacă există* $t_1,\ t_2 \in [a,b]$, *cu* $t_1 \neq t_2$, *astfel încât* $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, *spunem că punctul* $M_1 \in I(d)$ *(sau* $M_2 \in I(d)$*) de vector de poziţie*

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{r}(t_1) \ (\text{sau} \quad \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{r}(t_2))$$

este **punct multiplu** *al drumului. Un drum fără puncte multiple se numeşte* **simplu**.

Definiţia 3.1.4 *Drumul* (d) *se numeşte* **neted** *dacă*

$$\varphi, \psi \in C^1\Big([a,b]\Big), \quad \Big(\frac{d\varphi}{dt}(t)\Big)^2 + \Big(\frac{d\psi}{dt}(t)\Big)^2 > 0, \quad t \in [a,b].$$

Deoarece membrul întâi a inegalităţii din Definiţia 3.1.4 este pătratul mărimii (normei) vectorului $\mathbf{r}'(t)$, definiţia poate fi reformulată în limbaj vectorial.

Definiţia 3.1.5 *Drumul* (d) *se numeşte* **neted** *dacă funcţiia vectorială* $\mathbf{r} \in C^1\Big([a,b]\Big)$ *şi peste tot în compactul* $[a,b]$ *este satisfăcută inegalitatea*

$$\Big\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\Big\| = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0.$$

Definiţia 3.1.6 *Drumurile* (d_1) *şi* (d_2) *definite de funcţiile vectoriale de variabilă reală* $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to I\!R^2$ *şi* $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to I\!R^2$ *se numesc* **juxtapozabile** *dacă* $b_1 = a_2$ *şi* $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$. *În acest caz funcţia*

$$\mathbf{r} : [a_1,\, b_2] \to I\!R^2, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{dacă} \quad t \in [a_1,\, b_1], \\ \mathbf{r}_2(t), & \text{dacă} \quad t \in [a_2,\, b_2] \end{cases}$$

defineşte un nou drum numit **juxtapunerea** *drumurilor* (d_1) *şi* (d_2) *şi este notat prin* $(d_1 \cup d_2)$.

Definiţia 3.1.7 *Un drum* (d) *se numeşte* **neted pe porţiuni** *dacă se poate obţine prin juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.*

Fie (d) drumul parametrizat în plan definit de (3.4) şi $\Delta \subset [a,b]$ mulţimea de puncte

$$\Delta = \{t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n\}. \tag{3.7}$$

Definiţia 3.1.8 *Mulţimea* Δ *se numeşte* **diviziune a intervalului** $[a,b]$ *dacă*

$$a = t_0 \,<\, t_1 \,<\, \cdots \,<\, t_{n-1} \,<\, t_n = b.$$

Totalitatea diviziunilor intervalulului $[a,b]$ va fi notată cu $\mathcal{D}([a,b])$.

Definiţia 3.1.9 **Norma diviziunii** Δ *este numărul pozitiv*

$$\nu(\Delta) = \|\Delta\| = \max\{t_1 - t_0,\, t_2 - t_1,\, \cdots,\, t_n - t_{n-1}\}.$$

Definiţia 3.1.10 *Punctele*

$$\begin{gathered} A(\varphi(a), \psi(a)) = A_0(\varphi(a), \psi(a)),\;\; A_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)), \ldots, \\ A_{n-1}(\varphi(t_{n-1}), \psi(t_{n-1})),\;\; B(\varphi(b), \psi(b)) = A_n(\varphi(b), \psi(b)) \end{gathered} \tag{3.8}$$

se spune că determină **linia poligonală** *cu* **vârfurile** *în imaginea drumului.*

Definiţia 3.1.11 *Prin* **lungimea** *drumului* Δ *se înţelege numărul nenegativ* ℓ_Δ *dat de*

$$\begin{aligned} \ell_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \parallel \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \parallel = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\Big)^2 + \Big(\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\Big)^2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definiţia 3.1.12 *Fie* Δ *şi* Δ' *două diviziuni ale intervalului* $[a, b]$*. Spunem că diviziunea* Δ' *este* **mai fină** *decât diviziunea* Δ*, şi scriem aceasta* $\Delta \subset \Delta'$*, dacă elementele mulţimii* Δ *din* (3.7) *sunt şi elemente ale mulţimii* Δ'*.*

Observaţia 3.1.1 *Dacă diviziunea* Δ' *este mai fină decât diviziunea* Δ*, atunci între normele acestora are loc inegalitatea* $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$*.*

Fie $\mathcal{L} = \{\ell_\Delta \,:\, \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\} \subset I\!R_+^*$.

Definiţia 3.1.13 *Drumul* (d) *se numeşte* **rectificabil** *dacă mulţimea* $\mathcal{L}$ *este mărginită superior. Marginea superioara a mulţimii* $\mathcal{L}$*, dacă există, se numeşte* **lungimea** *drumului* (d) *şi se notează cu* $\ell(d)$*. Deci,*

$$\ell(d) = \sup \mathcal{L}.$$

Teorema 3.1.1 *Fie* (d) *un drum neted din* $I\!R^2$ *a cărui imagine* $I(d)$ *are reprezentarea parametrică* (3.6)*. Atunci,* (d) *este rectificabil şi*

$$\begin{aligned} \ell(d) = \int_a^b \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt = \\ = \int_a^b \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big\|\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Demonstraţie. Fie Δ diviziunea (3.7) şi linia poligonală corespunzătoare (3.8) cu lungimea sa dată de (3.9). Deoarece φ şi ψ sunt derivabile, aplicând teorema creşterilor finite a lui Lagrange, există

$$\alpha_i,\, \beta_i \in (t_i,\, t_{i+1}),\ i \in \{0,\, 1,\, \cdots,\, n-1\}$$

astfel încât

$$\ell_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi'(\alpha_i)\Big)^2 + \Big(\psi'(\beta_i)\Big)^2}(t_{i+1} - t_i). \tag{3.11}$$

În membrul al doilea al egalităţii (3.11) adunăm şi scădem termenul

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}(t_{i+1}-t_i).$$

În felul acesta (3.11) devine

$$\ell_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}(t_{i+1}-t_i)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sqrt{\Big(\varphi'(\alpha_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\beta_i)\Big)^2}-\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}\Big)(t_{i+1}-t_i). \tag{3.12}$$

A doua sumă din membrul doi al egalităţii (3.12) poate fi făcută oricât de mică pentru Δ suficient de fină. Într-adevăr, funcţia

$$h:[a,b]\times[a,b]\to I\!R,\quad h(x,y)=\sqrt{((\varphi'(x))^2+(\psi'(y))^2},\tag{3.13}$$

fiind continuă pe mulţimea compactă $[a,b]\times[a,b]$, este uniform continuă şi deci $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$ astfel încât oricare ar fi punctele (x_1,y_1) şi (x_2,y_2) din intervalul bidimensional $[a,b]\times[a,b]$ cu

$$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon),\ |y_1-y_2|<\delta(\varepsilon)\tag{3.14}$$

are loc inegalitatea

$$|h(x_1,\,y_1)-h(x_2,\,y_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.\tag{3.15}$$

Considerând că $(x_1,y_1)=(\alpha_i,\beta_i)$ şi $(x_2,y_2)=(\tau_i,\tau_i)$ şi alegând diviziunea Δ astfel încât

$$\|\Delta\|<\delta(\varepsilon),\tag{3.16}$$

din (3.14) şi (3.15) rezultă

$$-\frac{\varepsilon}{b-a}<h(\alpha_i,\,\beta_i)-h(\tau_i,\,\tau_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}.\tag{3.17}$$

Prin sumarea după i de la 0 până la $n-1$ în extremitatea dreaptă a inegalităţilor (3.17), obţinem

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sqrt{\Big(\varphi'(\alpha_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\beta_i)\Big)^2}-\sqrt{\Big(\varphi'(\tau_i)\Big)^2+\Big(\psi'(\tau_i)\Big)^2}\Big)(t_{i+1}-t_i)<\varepsilon.\tag{3.18}$$

Prima sumă din (3.12) este o sumă Riemann corespunzătoare funcţiei integrabile (3.13), diviziunii Δ cu proprietatea (3.16) şi punctelor intermediare

$$\tau_i \in [t_i,\, t_{i+1}],\;\; i = \overline{0, n-1}.$$

Fie subşirul de numere naturale $(k_n)_{n\geq 0}$ şi

$$\Delta_n = \{t_0^n = a, t_1^n, \cdots, t_{k_{n-1}}^n, t_{k_n}^n = b\}$$

un şir de diviziuni cu proprietatea că şirul normelor este convergent la zero, adică

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0. \tag{3.19}$$

Făcând în (3.12) pe $n \to \infty$, al doilea termen din membrul doi tinde la zero în baza lui (3.18) şi (3.19), iar primul termen are ca limită integrala Riemann

$$\int_a^b \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt = \int_a^b \Big\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\Big\|\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt. \tag{3.20}$$

Din acest rezultat deducem că şirul (ℓ_{Δ_n}), corespunzător şirului de diviziuni (Δ_n), are limită finită şi aceasta este integrala din (3.20), deci drumul (d) este rectificabil şi are loc (3.10). ■

Definiţia 3.1.14 *Drumurile (d_1) şi (d_2) definite de funcţiile vectoriale de variabilă reală $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to I\!\!R^2$ şi $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to I\!\!R^2$ se numesc* **echivalente** *dacă există o funcţie $\alpha : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ continuă, strict crescătoare şi surjectivă, astfel încât*

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\alpha(t)), \quad (\forall)\, t \in [a_1, b_1]. \tag{3.21}$$

Observaţia 3.1.2 *Dacă drumul (d_1) este echivalent cu drumul (d_2), atunci (d_2) este echivalent cu (d_1), aplicaţia din Definiţia* 3.1.14 *fiind funcţia inversă* α^{-1}.

Observaţia 3.1.3 *Dacă (d_1) este echivalent cu (d_2), atunci $I(d_1) = I(d_2)$, adică imaginea drumului este invariantă la relaţia de echivalenţă a drumurilor în plan. De asemenea, noţiunile de drum simplu şi de drum închis sunt invariante la această relaţie.*

Propoziţia de mai jos va demonstra că noţiunea de drum rectificabil şi lungimea unui drum sunt invariante la relaţia de echivalenţă în mulţimea drumurilor în plan.

Propoziţia 3.1.1 *Dacă drumurile în plan* (d_1) *şi* (d_2) *definite de funcţiile vectoriale de variabilă reală* $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \to I\!R^2$ *şi* $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \to I\!R^2$ *sunt echivalente, iar* (d_1) *este rectificabil, atunci* (d_2) *este rectificabil şi* $\ell(d_1) = \ell(d_2)$.

Demonstraţie. Să considerăm că cele două funcţii care definesc respectiv cele două drumuri sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \varphi_1(t)\mathbf{i} + \psi_1(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a_1,\, b_1]; \\ \mathbf{r}_2(\tau) &= \varphi_2(\tau)\mathbf{i} + \psi_2(\tau)\mathbf{j}, \quad \tau \in [a_2,\, b_2]. \end{aligned}$$

Fie $\alpha : [a_1,\, b_1] \to [a_2,\, b_2]$ funcţia continuă, strict crescătoare şi surjectivă cu proprietatea (3.21). Dacă $\Delta' \in \mathcal{D}([a_2, b_2])$,

$$\Delta' = \{a_2 = \tau_0,\, \tau_1,\, \cdots,\, \tau_{n-1},\, \tau_n = b_2\}, \quad \tau_i < \tau_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{3.22}$$

atunci există o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a_1,\, b_1])$,

$$\Delta = \{a_2 = t_0,\, t_1,\, \cdots,\, \cdots,\, t_{n-1},\, t_n = b_2\}, \quad t_i < t_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{3.23}$$

astfel încât

$$\alpha(t_i) = \tau_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Reciproc, dacă $\Delta \in \mathcal{D}([a_1,\, b_1])$ de forma (3.23), atunci imaginile prin funcţia α ale punctelor lui $\Delta \in \mathcal{D}([a_2,\, b_2])$ de forma (3.22). Ţinând cont de (3.21) şi de cele deduse mai sus, avem

$$\begin{aligned} \ell_\Delta &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi_1(t_{i+1}) - \varphi_1(t_i)\Big)^2 + \Big(\psi_1(t_{i+1}) - \psi_1(t_i)\Big)^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Big(\varphi_2(\tau_{i+1}) - \varphi_2(\tau_i)\Big)^2 + \Big(\psi_2(\tau_{i+1}) - \psi_2(\tau_i)\Big)^2} = \ell_{\Delta'}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Din (3.24) rezultă că

$$\{\ell_\Delta \mid \Delta \in \mathcal{D}([a_1,\, b_1])\} = \{\ell_{\Delta'} \mid \Delta' \in \mathcal{D}([a_2,\, b_2])\}. \tag{3.25}$$

Prin ipoteză (d_1) este drum rectificabil ceea ce înseamnă că mulţimea din membrul stâng al egalităţii (3.25) este mărginită superior. Va rezulta că şi mulţimea din membrul al doilea al egalităţii (3.25) este mărginită superior, adică (d_2) este rectificabilă. În plus, marginile lor superioare lor coincid, deci $\ell(d_1) = \ell(d_2)$. ■

Observaţia 3.1.4 *Relaţia de echivalenţă în mulţimea drumurilor din plan este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Rezultă că această relaţie împarte mulţimea drumurilor în clase de echivalenţă. Vom spune că două drumuri aparţin aceleiaşi clase dacă şi numai dacă sunt echivalente.*

Definiţia 3.1.15 *Se numeşte* **curbă plană** *o clasă de drumuri în plan echivalente.*

Observaţia 3.1.5 *Deoarece următoarele noţiuni: drum simplu; drum închis; imaginea unui drum; drum neted; drum neted pe porţiuni; drum rectificabil şi lungimea unui drum sunt invariante la relaţia de echivalenţă, pentru curbele în plan vom introduce corespunzător noţiunile:* **curbă simplă** *sau* **arc simplu de curbă***;* **curbă închisă***;* **imaginea unei curbe***;* **curbă netedă** *sau* **curbă regulată***;* **curbă netedă pe porţiuni***;* **curbă rectificabilă** *şi* **lungimea unei curbe** *sau* **lungimea unui arc de curbă rectificabilă***.*

De exemplu,

Definiţia 3.1.16 *Se numeşte* **imaginea curbei** *imaginea unui drum din clasa de echivalenţă care defineşte curba respectivă.*

Definiţia dată este corectă deoarece toate drumurile dintr–o clasă au aceeaşi imagine. În cele ce urmează o curbă se va nota fie prin C fie specificându–i extremităţile imaginii sale în cazul când nu este închisă, adică (AB).

Definiţia 3.1.17 *Prin* **ecuaţia vectorială a unei curbe în plan** *şi* **ecuaţii parametrice ale unei curbe în plan** *înţelegem ecuaţia vectorială respectiv ecuaţii parametrice ale oricărui drum din clasa de echivalenţă care defineşte curba.*

Definiţia 3.1.18 *Curbele C_1 şi C_2 se numesc* **juxtapozabile**, *dacă există drumurile $(d_1) \in C_1$ şi $(d_2) \in C_2$ cu (d_1) şi (d_2) juxtapozabile. În acest caz, clasa de echivalenţă a drumului $(d_1 \cup d_2)$ se numeşte* **juxtapusa** *curbelor C_1 şi C_2 şi se notează cu $(C_1 \cup C_2)$. Curba C se numeşte* **netedă pe porţiuni** *dacă este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede.*

În cele ce urmează, identificând drumurile echivalente între ele, vom folosi termenul de *imaginea curbei* în aceeaşi accepţiune ca termenul *imaginea drumului.* Noţiunea de *drum* sau cea de *curbă* va fi desemnată de cel mai multe ori printr–o reprezentare parametrică. În loc de *imaginea curbei* vom spune tot *curbă* dacă acest lucru nu creează confuzii.

Observaţia 3.1.6 *Toate consideraţiile de mai sus se transpun fără dificultate pentru* **curbe în spaţiul tridimensional** *sau* **curbe în spaţiu** *cu modificările impuse de apariţia celei de a treia coordonate. Spre exemplu, dacă*

$$(d): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [a,b], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

este reprezentarea parametrică a drumului neted (d) în spaţiu, lungimea sa va fi

$$\ell(d) = \int_a^b \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2}\, dt = \int_a^b \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big\|\, dt,$$

unde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ este ecuaţia vectorială a drumului, $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}$, iar $\mathbf{k}$ este cel de al treilea versor al reperului cartezian $Oxyz$ din $I\!R^3$.

Observaţia 3.1.7 *O curbă admite o infinitate de reprezentări parametrice.*

În continuare vom pune în evidenţă o parametrizare importantă a curbelor rectificabile şi anume *parametrizarea naturală.*

În acest sens fie $t \in [a,b]$ oarecare căruia îi corespunde punctul M pe imaginea curbei netede sau netede pe porţiuni C din spaţiu. Presupunem că extremităţile A şi B sunt corespunzătoare respectiv valorilor $t = a$ şi $t = b$ şi fie $\mathbf{r}(\tau)$ vectorul de poziţie al unui punct curent P de pe imaginea curbei astfel încât P să se găsească între A şi M. Aceasta înseamnă că $\tau \in [a,t]$. Putem vorbi de lungimea arcului de curbă (AM) pe care o notăm cu s şi care este o funcţie $s : [a, b] \to [0, L]$, unde L este lungimea curbei considerate. Valorile funcţiei $s = s(t)$ sunt date de

$$s(t) = \int_a^t \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau) \Big\| d\tau = \int_a^t \sqrt{\big(\varphi'(\tau)\big)^2 + \big(\psi'(\tau)\big)^2 + \big(\chi'(\tau)\big)^2} d\tau \tag{3.26}$$

şi $s'(t) = \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2}$, de unde deducem că funcţia s este diferenţiabilă, iar diferenţiala sa, numită şi *element de arc al curbei*, este

$$ds = \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big\| dt = \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2}\, dt. \tag{3.27}$$

Se observă de asemeni că

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \|d\mathbf{r}\|. \tag{3.28}$$

Deoarece $s'(t) > 0$, rezultă că funcţia $s = s(t)$ este strict crescătoare. Fiind injectivă, funcţia $s = s(t)$ este inversabilă.

Să notăm $\beta = \beta(s)$ inversa funcţiei s.

Atunci, funcţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\beta(s)) \tag{3.29}$$

caracterizează un drum din aceeaşi clasă care defineşte curba. Astfel, am introdus o nouă parametrizare a curbei care se numeşte *parametrizarea naturală*.

Dacă $\mathbf{r}(\beta(s)) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}$, atunci *ecuaţiile parametrice naturale* ale unei curbe în spaţiu C, rectificabilă şi de lungime L, sunt

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s), \end{cases} \qquad s \in [0,\, L]. \tag{3.30}$$

Dacă arcul de curbă rectificabil C este în planul xOy, atunci are ecuaţiile parametrice naturale

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \end{cases} \qquad s \in [0,\, L], \tag{3.31}$$

iar elementul de arc al său este dat de

$$ds = \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \|d\mathbf{r}\|. \tag{3.32}$$

Din expresiile (3.27), (3.28) şi (3.32) rezultă $\left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right\| = 1$, ceea ce arată că vectorul

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \quad \text{sau} \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{3.33}$$

al cărui reprezentant în punctul P al curbei are direcţia şi sensul tangentei în P la curbă, este un versor care se numeşte *versorul tangentei* la curbă în punctul P al curbei corespunzător valorii s a parametrului natural.

Exemplul 3.1.1 *Să se determine elementul de arc şi lungimea curbei plane*

$$C: \begin{cases} x &= \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}, \\ y &= \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}}, \end{cases} \qquad t \in \Big[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\Big].$$

Soluţie. După un calcul simplu găsim $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sin t}$ şi $\psi'(t) = \dfrac{1}{\cos t}$. Atunci, elementul de arc este

$$ds = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}}\, dt = \frac{dt}{\sin t \cos t} = \frac{2dt}{\sin 2t}.$$

Lungimea L a curbei C este

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2dt}{\sin 2t} = \ln \operatorname{tg} t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln 3.$$

■

3.2 Definiţia integralei curbilinii de primul tip

Fie (AB) o curbă plană netedă sau netedă pe porţiuni şi $f(M)$ o funcţie definită pe un domeniu D din planul xOy care include imaginea curbei.

Considerăm o partiţie Δ a curbei în subarcele (părţile) $(A_{i-1}A_i)$, $i = \overline{1,n}$, prin intermediul punctelor de diviziune

$$A = A_0,\, A_1,\, \cdots,\, A_{n-1},\, A_n = B$$

şi alegem un punct arbitrar M_i pe fiecare din arcele $(A_{i-1}A_i)$. Cu aceste date formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i, \tag{3.34}$$

unde Δs_i este lungimea arcului $(A_{i-1}A_i)$, numită *sumă integrală* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ şi alegerii $M_i \in (A_{i-1}A_i)$ a *punctelor intermediare.*

Definiţia 3.2.1 *Funcţia f se numeşte* **integrabilă în raport cu arcul pe curba** (AB) *dacă sumele integrale* (3.34) *admit limita finită I când cel mai mare dintre Δs_i tinde la zero şi această limită nu depinde de alegerea punctelor intermediare $M_i \in (A_{i-1}A_i)$.*

Definiţia 3.2.2 *Dacă funcţia f este integrabilă în raport cu arcul pe curba* (AB), *limita I a sumelor integrale* (3.34) *când cel mai mare dintre Δs_i tinde la zero se numeşte* **integrala curbilinie de primul tip** *a funcţiei $f(M)$ pe curba (AB) şi se notează cu simbolul*

$$I = \int_{(AB)} f(M)ds. \tag{3.35}$$

Punctele curbei (AB) fiind determinate de coordonatele (x, y) în reperul cartezian Oxy, valoarea $f(M)$ a funcţiei f în punctul $M \in (AB)$ se poate nota prin $f(x, y)$, astfel că integrala curbilinie de prima speţă (3.35) se poate scrie în forma echivalentă

$$I = \int_{(AB)} f(x, y)ds.$$

Variabilele x şi y nu sunt independente; punctul $M(x, y)$ aparţinând curbei (AB), coordonatele sale x şi y trebuie să satisfacă ecuaţia curbei.

Putem arăta că integrala curbilinie de primul tip sau *integrala curbilinie de prima speţă* nu diferă în mod esenţial de cea a integralei definite dintr–o funcţie de o variabilă independentă şi, mai mult, vom arăta că o integrală curbilinie de primul tip se reduce la o integrală definită. În acest sens să considerăm parametrizarea naturală a curbei (AB) cu originea de arc în A şi având lungimea L. Această parametrizare naturală este dată de (3.31). Restricţia funcţiei arbitrare $f(x, y)$ în punctele arcului (AB) este o funcţie compusă de o singură variabilă, şi anume

$$f\Big(x(s), y(s)\Big), \quad s \in [0, L].$$

Fie ${s_i}^*$ valoarea parametrului s corespunzătoare punctului M_i, adică ${s_i}^*$ este lungimea arcului (AM_i). Suma integrală (3.34) se poate scrie acum în forma

$$\sum_{i=1}^{n} f\Big(x({s_i}^*),\, y({s_i}^*)\Big)\Delta s_i, \tag{3.36}$$

unde $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, valoarea lui s_0 fiind zero deoarece considerăm că punctul A este originea de arc pe curbă. Constatăm că (3.36) este o sumă integrală corespunzătoare integralei definite $\int_0^L f\Big(x(s),\, y(s)\Big)ds$. Sumele integrale (3.34) şi (3.36) fiind egale, integralele definite legate de acestea sunt egale, prin urmare

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_0^L f\Big(x(s),\, y(s)\Big)ds \tag{3.37}$$

ambele integrale existând sau neexistând simultan. În consecinţă, dacă funcţia $f(M)$ este continuă sau continuă pe porţiuni şi mărginită de–a lungul curbei netede sau netedă pe porţiuni (AB), integrala curbilinie de primul tip (3.35) există deoarece integrala definită (Riemann) din membrul doi al relaţiei (3.37) există.

Observaţia 3.2.1 *Deşi integrala curbilinie de prima speţă se reduce direct la o integrală definită există o distincţie netă între cele două noţiuni. Conţinutul acestei distincţii constă în aceea că lungimile Δs_i ale arcelor $(A_{i-1}A_i)$ sunt pozitive indiferent care din extremităţile A sau B a fost aleasă ca origine. Deci, orientarea curbei (AB), adică alegerea unui anumit sens de parcurs pe curbă începând de la origine către cealaltă extremitate, nu afectează valoarea integralei* (3.35) *şi, în consecinţă, avem*

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

După cum se ştie, integrala definită pe compactul $[a,\, b] \subset I\!R$ dintr–o funcţie de variabila $x \in [a,\, b]$ schimbă de semn când limitele de integrare se schimbă între ele.

Când reducem o integrală curbilinie de primul tip la o integrală definită corespunzătoare putem folosi la fel de bine orice parametru al curbei în locul lungimii de arc s. Presupunem aşadar că o curbă netedă (AB) este dată prin ecuaţiile paramaetrice

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \le t \le b, \tag{3.38}$$

unde funcţiile φ şi ψ sunt astfel încât $\varphi, \psi \in C^1\Big([a,b]\Big)$ şi $\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2 > 0$. În aceste condiţii, putem introduce ca parametru pe curbă lungimea de arc s măsurată de la punctul A al curbei corespunzător lui $t = a$ şi astfel arcul s creşte odată cu parametrul t, aceasta însemnând că s este o funcţie strict crescătoare de $t \in [a,b]$.

Pornind de la *formula de calcul* (3.37), efectuând în integrala definită din membrul al doilea al acestei formule schimbarea de variabilă

$$t \mapsto s = s(t), \;\; t \in [a,b], \;\; s(t) \in [0, L] \tag{3.39}$$

şi având în vedere notaţiile $x(s(t)) = \varphi(t)$, $y(s(t)) = \psi(t)$, obţinem

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_0^L f\Big(x(s),\, y(s)\Big)ds =$$

$$= \int_a^b f\Big(\varphi(t),\, \psi(t)\Big)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\,dt.$$

În acest mod am demonstrat

Teorema 3.2.1 *Dacă (AB) este o curba netedă din domeniul $D \subset I\!R^2$, de ecuaţii parametrice* (3.38), *şi $f : D \to I\!R$ o funcţie reală de două variabile reale continuă în punctele $M(x,y)$ ale curbei, atunci are loc egalitatea*

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_a^b f\Big(\varphi(t),\, \psi(t)\Big)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\,dt \tag{3.40}$$

ori de câte ori integralele care intră în ea există; integrala curbilinie din membrul stâng există dacă şi numai dacă integrala definită din membrul al doilea există.

Când curba (AB) este reprezentată prin ecuaţia carteziană explicită

$$y = y(x), \;\;\; a \,\leq\, x \,\leq\, b,$$

se poate lua ca parametru pe curbă abscisa x şi formula (3.40) devine

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_a^b f\Big(x,\, y(x)\Big)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx. \tag{3.41}$$

Un *reper polar* în plan este ansamblul format de un punct O, numit *pol*, şi o semidreaptă cu originea în pol, de direcţie definită de versorul $\mathbf{i}$, numită *axă polară*. *Raza vectoare* a unui punct M din plan este vectorul cu originea în pol şi extremitatea în M, iar *unghiul polar* al puctului M este unghiul dintre versorul $\mathbf{i}$ şi raza vectoare a acelui punct. Perechile (r, θ) se numesc *coordonate polare* în plan. Dacă polul reperului polar coincide cu originea reperului cartezian Oxy, iar axa sa polară este axa absciselor, legătura dintre coordonatele carteziene şi cele polare ale unui punct este

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad r \in [0, +\infty), \;\; \theta \in [0, 2\pi).$$

Să presupunem că arcul de curbă (AB) este reprezentat în coordonate polare prin ecuaţia polară explicită

$$r = r(\theta), \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \tag{3.42}$$

unde r este *mărimea razei vectoare* iar θ este *unghiul polar* măsurat în radiani şi cuprins între 0 şi 2π. În ipoteza că cele două repere sunt legate precum am menţionat, putem scrie o reprezentare parametrică a arcului de curbă (AB) în care parametrul pe curbă să fie unghiul polar

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{3.43}$$

Pentru calculul integralei curbilinii de primul tip în plan când curba (AB) este dată de (3.43) vom folosi (3.40) în care în locul lui t avem acum θ, iar funcţiile φ şi ψ sunt cele din membrii doi ai relaţiilor (3.43). Calculând radicalul care apare în egalitatea (3.40) se găseşte

$$\sqrt{\Big(\varphi'(\theta)\Big)^2 + \Big(\psi'(\theta)\Big)^2} = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}.$$

Rezultă că în cazul când arcul de curbă plană netedă (AB) este reprezentat în coordonate polare, formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip este

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f\Big(r(\theta)\cos\theta,\, r(\theta)\sin\theta\Big)\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta. \tag{3.44}$$

Integrala definită a unei funcţii nenegative f pe compactul $[a, b]$ are ca interpretare geometrică aria trapezului curbiliniu limitat de dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox şi graficul arcului de curbă (AB) de ecuaţie $y = f(x)$.

Observaţia 3.2.2 *Plecând de la interpretarea geometrică dată integralei definite, putem afirma că integrala curbilinie de primul tip a unei funcţii pozitive $f(x,y)$ pe arcul (AB) este aria porţiunii din suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curba directoare arcul (AB), porţiune limitată de arcul (AB) şi de mulţimea de puncte de coordonate $(x,y,f(x,y))$, unde $M(x,y) \in (AB)$.*

Observaţia 3.2.3 *Definiţia şi formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip pe o curbă plană se transpun direct la cazul când funcţia $f(M)$ este definită în punctele $M(x,y,z)$ unui arc (AB) al curbei în spaţiu sau curbei strâmbe reprezentat parametric prin*

$$(AB): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad a \le t \le b, \\ z = \chi(t), \end{cases} \tag{3.45}$$

integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei $f(M)$ de–a lungul curbei (AB) se reduce la o integrala definită

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_a^b f\Big(\varphi(t),\, \psi(t),\, \chi(t)\Big)\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{3.46}$$

Observaţia 3.2.4 *Rezultatele stabilite rămân adevărate când curba C este netedă pe porţiuni, iar funcţia de integrat este continuă şi mărginită pe fiecare porţiune netedă a curbei. În această situaţie, integrala curbilinie de primul tip este suma integralelor curbilinii de speţa întâi pe porţiunile netede care prin juxtapunere dau curba C.*

Exerciţiul 3.2.1 *Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip*

$$I = \int_C (x^2 + y^2)\, \ln z\, ds$$

unde curba C pe care se efectuează integrarea funcţiei $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)\ln z$ este reprezentată parametric de

$$C: \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \qquad t \in [0,1]. \\ z = e^t, \end{cases}$$

Soluţie. Vom aplica formula de calcul (3.46). Pentru aceasta trebuie calculate derivatele funcţiilor care definesc curba şi apoi radicalul sumei pătratelor acestor derivate. Găsim

$$\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} = e^t\sqrt{3}.$$

Conform formulei de calcul (3.46), avem

$$I = \sqrt{3}\int_0^1 t\, e^{3t}\, dt.$$

Integrala definită la care s–a redus integrala curbilinie dată se calculează aplicând metoda integrării prin părţi şi se găseşte

$$I = \frac{1 + 2\, e^3}{3\sqrt{3}}.$$

După prezentarea aplicaţiilor integralelor curbilinii în mecanică, rezultatul găsit poate fi interpretat. Mai precis, valoarea integralei este momentul de inerţie faţă de axa Oz al unui fir material care are configuraţia curbei (C) şi a cărui densitate în fiecare punct $M(x, y, z)$ al curbei este $\ln z$. ■

3.3 Proprietăţile integralelor curbilinii

Proprietăţile integralelor curbilinii de primul tip sunt analoage celor ale integralelor definite şi sunt implicate direct de către acestea din urmă prin formulele de calcul (3.37) şi (3.46) care dau legăturile integralelor curbilinii de primul tip în plan şi respectiv în spaţiu cu integrale definite.

1. (*liniaritatea*). Dacă funcţiile $f(M)$ şi $g(M)$ sunt integrabile de–a lungul curbei (AB) şi λ şi μ sunt constante reale arbitrare, atunci funcţia $(\lambda\, f + \mu\, g)(M)$ este integrabilă pe (AB) şi are loc egalitatea

$$\int_{(AB)} (\lambda\, f + \mu\, g)(M) ds = \lambda \int_{(AB)} f(M) ds + \mu \int_{(AB)} g(M) ds.$$

2. (*monotonia*). Dacă $f(M)$ este o funcţie nenegativă integrabilă pe curba (AB), atunci

$$\int_{(AB)} f(M) ds \;\geq\; 0.$$

3. (*aditivitatea*). Dacă arcul (AB) este juxtapunerea a două arce netede sau netede pe porţiuni (AC) şi (CB), egalitatea

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(AC)} f(M)ds + \int_{(CB)} f(M)ds$$

are loc când integralele care apar există; integrala din membrul stâng există dacă şi numai dacă ambele integrale din membrul drept există.

4. (*evaluarea modulului integralei curbilinii*). Dacă $f(M)$ este integrabilă pe (AB), atunci funcţia $|f|(M) = |f(M)|$ este de asemenea integrabilă pe (AB) şi

$$\Big|\int_{(AB)} f(M)ds\Big| \leq \int_{(AB)} |f(M)|\, ds.$$

5. (*teorema valorii medii*). Dacă $f(M)$ este funcţie continuă pe o curbă netedă sau netedă pe porţiuni de lungime L, atunci există un punct $M^* \in (AB)$ astfel încât

$$\int_{(AB)} f(M)ds = f(M^*)\, L.$$

6. (*independenţa integralei curbilinii de primul tip de orientarea arcului de curbă pe care se integrează*). Alegerea sensului de parcurs pe arcul de curbă neted sau neted pe porţiuni (AB) nu influenţează valoarea integralei curbilinii de primul tip pe (AB), în sensul că

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds,$$

fapt ce a fost menţionat şi în paragraful precedent.

3.4 Aplicaţii ale integralelor curbilinii de primul tip

Vom pune în evidenţă unele probleme tipice ale căror rezolvări naturale implică integralele curbilinii de primul tip.

3.4.1 Masa şi centrul de greutate ale unui fir material

Definiţia 3.4.1 *Se numeşte* **fir material** *ansamblul dintre o curbă netedă sau netedă pe porţiuni* (AB) *şi o funcţie pozitivă şi continuă* ρ *definită în punctele curbei. Curba* (AB) *se numeşte* **configuraţia firului material**, *iar funcţia* ρ *se numeşte* **densitatea firului material**, *valoarea acesteia în punctul* $M \in (AB)$ *numindu–se* **densitatea de materie** *sau* **densitatea materială** *în punctul* M. *Firul material se numeşte* **omogen** *sau* **neomogen** *după cum densitatea este funcţia constantă sau nu.*

Este posibil să precizăm densitatea materială întrun punct fie prin $\rho(x, y)$, dacă curba (AB) se află în planul Oxy, fie prin $\rho(x, y, z)$ dacă (AB) este o curbă în spaţiu.

Densitatea materială în punctul $M \in (AB)$ este limita raportului dintre masa Δm a arcului de curbă (MM') şi lungimea Δs a acestuia când M' tinde la M pe curbă.

Împărţim arcul (AB) în n subarce cu ajutorul diviziunii Δ formată de punctele de diviziune $\Delta = \{A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n = B\})$ şi pe fiecare arc $(A_{i-1}A_i)$, $i = \overline{1, n}$, luăm un punct M_i în care densitatea are valoarea $\rho(M_i)$. Dacă

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1} = \ell(AA_i) - \ell(AA_{i-1}), \;\; i = \overline{1, n}$$

reprezintă lungimea arcului $(A_{i-1}A_i)$, atunci masa firului material de configuraţie $(A_{i-1}A_i)$ poate fi aproximată prin $\rho(M_i)\,\Delta s_i$.

În acest mod, firul material continuu de configuraţie arcul (AB) şi densitate $\rho(M)$ se poate înlocui cu n puncte materiale izolate, situate pe arc,

$$M_1, M_2, \ldots, M_n,$$

având masele

$$\rho(M_1)\,\Delta s_1, \quad \rho(M_2)\,\Delta s_2, \quad \cdots, \quad \rho(M_n)\,\Delta s_n.$$

Presupunând că punctele M_i au coordonatele $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, rezultă că suma

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\,\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

este o valoare aproximativă a masei firului material (AB) care corespunde diviziunii Δ a arcului (AB) şi alegerii arbitrare a punctelor $M_i \in (A_{i-1}A_i)$.

Dacă considerăm un şir de diviziuni (Δ_n) ale arcului (AB) cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$$

şi presupunem densitatea de materie funcţie continuă pe arcul (AB), atunci

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\,\Delta s_i$$

există şi reprezintă masa firului material cu configuraţia curba netedă sau netedă pe porţiuni (AB). Ţinând seama de definiţia integralei curbilinii de primul tip avem că masa totală $\mathcal{M}$ a firului material considerat este

$$\mathcal{M} = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} \rho(M)ds = \int_{(AB)} \rho(x,y,z)ds.$$

În cazul în care arcul de curbă se află în planul Oxy, masa firului material de configuraţie (AB) şi densitate $\rho(x,y)$ în punctul $M(x,y) \in (AB)$ este

$$\mathcal{M} = \int_{(AB)} \rho(M)ds = \int_{(AB)} \rho(x,y)ds.$$

Observaţia 3.4.1 *Când firul material este omogen, cu densitatea constantă ρ_0, masa firului material corespunzător este $\mathcal{M} = \rho_0 \int_{(AB)} ds$.*

Pe de altă parte, când firul este omogen, $\mathcal{M} = \rho_0\, L$, unde $L = \ell(AB)$ este lungimea firului. De aici deducem că lungimea unui arc de curbă netedă sau netedă pe porţiuni se poate prezenta ca integrala curbilinie de primul tip

$$\ell(AB) = \int_{(AB)} ds = \int_a^b \Big\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \Big\|\, dt.$$

Din statică, se ştie că date n puncte materiale

$$M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), \cdots, M_n(x_n,y_n,z_n),$$

de mase corespunzătoare $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$, coordonatele centrului de greutate G al sistemului format de cele n puncte materiale sunt:

$$x_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i};\quad y_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i};\quad z_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Să considerăm din nou firul material (AB) căruia îi aplicăm o divizare prin punctele $A = A_0,\ A_1, \cdots,\ A_n = B$. Atunci, firul se poate înlocui cu un sistem de n puncte materiale $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, cu ponderile $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$, unde $i = \overline{1,n}$. Ponderea reprezintă masa firului material omogen $(A_{i-1}A_i)$ a cărui densitate este valoarea funcţiei $\rho(x, y, z)$ în punctul $M_i^*(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ales arbitrar pe arcul $(A_{i-1}A_i)$. Coordonatele centrului de greutate pentru acest sistem de puncte materiale vor fi

$$\bar{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}; \qquad \bar{y}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i};$$

$$\bar{z}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i}.$$

În aceleaşi ipoteze asupra arcului (AB) şi asupra densităţii de materie pe care le-am întâlnit la determinarea masei firului material, avem:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} x\,\rho(x, y, z) ds; \\ \lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} y\,\rho(x, y, z) ds; \\ \lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i = \int_{(AB)} z\,\rho(x, y, z) ds; \end{cases}$$

Astfel, coordonatele centrului de greutate al firului material neomogen (AB) sunt:

$$x_G = \frac{\int_{(AB)} x\,\rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds}; \qquad y_G = \frac{\int_{(AB)} y\,\rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds};$$

$$z_G = \frac{\int_{(AB)} z\,\rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds}.$$

Dacă firul material este omogen, atunci coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_{(AB)} x\,ds; \qquad y_G = \frac{1}{L}\int_{(AB)} y\,ds; \qquad z_G = \frac{1}{L}\int_{(AB)} z\,ds,$$

unde $L = \displaystyle\int_{(AB)} ds$ este lungimea arcului de curbă (AB).

În cazul în care arcul de curbă se află în planul Oxy, centru de greutate G va avea coordonatele:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} x\,\rho(x,y,z)ds}{\displaystyle\int_{(AB)} \rho(x,y,z)ds}; \qquad y_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} y\,\rho(x,y,z)ds}{\displaystyle\int_{(AB)} \rho(x,y,z)ds},$$

iar dacă firul este omogen coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} x\,ds}{L}; \qquad y_G = \frac{\displaystyle\int_{(AB)} y\,ds}{L}. \tag{3.47}$$

Ultima relaţie din (3.47) se scrie în forma

$$y_G\,L = \int_{(AB)} y\,ds$$

sau în forma

$$2\,\pi\,y_G\,L = 2\,\pi\int_{(AB)} y\,ds. \tag{3.48}$$

Dacă avem în vedere că expresia ariei S a suprafeţei de rotaţie generate prin rotirea arcului

$$(AB)\,:\,y = y(x),\ x \in [a,\,b],$$

în jurul axei Ox este

$$S = 2\,\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \;=\; \int_{(AB)} y\,ds,$$

putem scrie relaţia (3.48) în forma

$$2\,\pi\,y_G\,L = S.$$

În felul acesta rezultă *prima teoremă a lui Guldin.*

Teorema 3.4.1 *Dacă se roteşte un arc rectificabil plan (AB) în jurul unei drepte (D) din plan care nu intersectează arcul, aria suprafeţei obţinute este egală cu produsul dintre lungimea arcului (AB) şi lungimea cercului descris prin rotaţia în jurul dreptei (D) de centrul de greutate al arcului (AB).*

Exerciţiul 3.4.1 *Să se calculeze masa şi centrul de greutate ale firului material omogen cu densitatea constantă egală cu unitatea şi configuraţia imaginea curbei*

$$C:\ \begin{cases} x &= \sqrt{\pi^2-t^2}\,\cos t,\\ y &= \sqrt{\pi^2-t^2}\,\sin t, \qquad\qquad t\in[-\pi,\pi].\\ z &= \sqrt{4\pi^2-1}\sqrt{\pi^2-t^2}, \end{cases}$$

Soluţie. Analizând datele problemei constatăm că integralele curbilinii de primul tip care definesc masa $\mathcal{M}$ şi coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_g există şi avem

$$\mathcal{M}=\int_C \rho(x,y,z)ds=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2+t^2}{\sqrt{\pi^2-t^2}}dt;$$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_C x\,ds=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt;\\ y_G=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_C y\,ds=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt;\\ z_G=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_C z\,ds=\dfrac{1}{\mathcal{M}}\int_{-\pi}^{\pi}\chi(t)\sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2+\Big(\psi'(t)\Big)^2+\Big(\chi'(t)\Big)^2}dt. \end{cases}$$

Înlocuind funcţiile care definesc reprezentarea parametrică a curbei C, găsim

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\cos t\,dt;\\ y_G &= \dfrac{1}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\sin t\,dt;\\ z_G &= \dfrac{\sqrt{4\pi^2-1}}{\mathcal{M}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\,dt. \end{cases}$$

Integrala care dă valoarea masei este una improprie, convergentă în baza criteriului de comparaţie în α. Mai mult, pentru că funcţia de integrat este pară, putem scrie

$$\mathcal{M} = 2\int_0^{\pi} \frac{\pi^2 + t^2}{\sqrt{\pi^2 - t^2}}.dt$$

Această integrală devine o integrală definită dacă se efectuează schimbarea de variabilă $t = \pi\cos\tau$. Obţinem

$$\mathcal{M} = 2\pi^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2\tau)\, d\tau = \frac{3\pi^3}{2}.$$

Cota centrului de greutate se determină simplu, ordonata este zero pentru că funcţia de integrat din expresia sa este impară şi intervalul de integrare este simetric faţă de origine, iar abscisa centrului de greutate se determină uşor dacă în integrala care dă expresia acestuia se integrează de două ori prin părţi. Se găseşte:

$$x_G = -\frac{8}{3\pi^2};\ y_G = 0;\ z_G = \frac{16}{9}\sqrt{4\pi^2 - 1},$$

remarcând totodată că centrul de greutate G se află în planul Oxz. ∎

3.4.2 Momente de inerţie ale unui fir material

Definiţia 3.4.2 *Se numeşte* **moment de inerţie** *faţă de un element geometric al spaţiului al unui punct material* $M_0(x_0, y_o, z_0)$, *de masă* m_0, *produsul dintre masa* m_0 *şi pătratul distanţei de la punctul* M_0 *la elementul respectiv.*

Elementul geometric poate fi o dreaptă, un plan sau un punct şi, de cele mai multe ori, acestea sunt legate de elementele reperului cartezian $Oxyz$. Vom avea deci *momente de inerţie axiale* când se aleg ca drepte axele de coordonate ale reperului, *momente de inerţie planare* când planele alese sunt planele de coordonate şi *moment de inerţie central* când se alege ca punct al spaţiului originea reperului.

Definiţia 3.4.3 *Se numeşte* **moment de inerţie** *faţă de un punct* P (*o dreaptă* (D) *sau un plan* (Π)) *al unui sistem de* n *puncte materiale*

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \cdots,\ M_n(x_n, y_n, z_n),$$

având masele m_1, m_2, $\cdots$, m_n, *suma tuturor momentelor de inerţie corespunzătoare fiecărui punct faţă de punctul* P (*dreapta* (D) *sau planul* (Π)).

Din definiţiile de mai sus rezultă că momentul de inerţie al sistemului de puncte considerat faţă de originea axelor $O(0, 0, 0)$ este

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)\, m_k.$$

Momentele de inerţie al aceluiaşi sistem de puncte faţă de axele Ox, Oy, Oz sunt

$$I_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} (y_k^2 + z_k^2) m_k, \quad I_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 + y_k^2) m_k, \quad I_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) m_k,$$

în timp ce momentele de inerţie ale sistemului de puncte în discuţie faţă de planele de coordonate Oxy, Oyz, Oxz au expresiile

$$I_{Oxy} = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 m_k; \quad I_{Oyz} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 m_k; \quad I_{Oxz} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 m_k.$$

Firul material din spaţiu, cu configuraţia (AB) şi densitatea materială $\rho(x, y, z)$, poate fi înlocuit cu sistemul de puncte materiale M_k având masele

$$m_k = \rho(M_k)\Delta s_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Raţionând ca la determinarea masei firului material deducem că momentele de inerţie ale firului material faţă de originea, axele şi planele reperului de coordonate $Oxyz$ sunt respectiv

$$I_O = \int_{(AB)} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Ox} = \int_{(AB)} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) ds, \quad I_{Oy} = \int_{(AB)} (z^2 + x^2)\rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Oz} = \int_{(AB)} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Oxy} = \int_{(AB)} z^2 \rho(x, y, z) ds; \quad I_{Oyz} = \int_{(AB)} x^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Oxz} = \int_{(AB)} y^2 \rho(x, y, z) ds.$$

Dacă firul material se află în planul Oxy, vom putea vorbi doar de momentele de inerţie axiale:

$$I_{Ox} \;=\; \int_{(AB)} y^2\rho(x,y)ds, \qquad I_{Oy} \;=\; \int_{(AB)} x^2\rho(x,y)ds$$

şi de momentul de inerţie central

$$I_O \;=\; \int_{(AB)} (x^2+y^2)\rho(x,y)ds.$$

Definiţia 3.4.4 *Mărimea infinitezimală $dm = \rho(M)ds$ se numeşte* **element de masă filiformă**.

Observaţia 3.4.2 *Formulele care dau masa, coordonatele centrului de greutate şi momentele de inerţie ale unui fir material se pot scrie astfel încât să se pună în evidenţă elementul de masă filiformă.*

Observaţia 3.4.3 *Formulele care dau coordonatele centrului de greutate ale unui fir material în plan şi în spaţiu se pot scrie întruna singură*

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\mathcal{M}}\int_{(AB)} \mathbf{r}\, dm,$$

unde $\mathbf{r}_G$ este vectorul de poziţie al centrului de greutate, iar $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct care descrie configuraţia firului material.

Exemplul 3.4.1 Să *se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz a firului material neomogen având configuraţia curbei*

$$C: \;\; x = t\cos t,\;\; y = t\sin t,\;\; z = t, \quad t \in [0,1]$$

şi densitatea în fiecare punct egală cu cota acelui punct.

Soluţie. Rezultă că densitatea este $\rho(x,y,z) = z$. Pentru calculul momentului de inerţie I_{Oz} trebuie să calculăm integrala curbilinie de primul tip

$$I_{Oz} = \int_C (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)ds = \int_C (x^2+y^2)\,z\,ds.$$

Avem $\varphi(t) = t\cos t$, $\psi(t) = t\sin t$ şi $\chi(t) = t$. Calculând elementul de arc găsim $ds = \sqrt{2+t^2}\,dt$. Atunci, momentul de inerţie cerut este

$$I_{Oz} = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Făcând substituţia $\sqrt{2+t^2}=u$, obţinem

$$I_{Oz}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u^2(u^2-2)\,du=\Big(\frac{u^5}{5}-\frac{2u^3}{3}\Big)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{5}+\frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

■

3.5 Definiţia integralei curbilinii de al doilea tip

Pentru o funcţie reală f definită şi mărginită pe un interval compact $[a,b]$ s–a introdus integrala Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$. Vom vedea în continuare cum extinderea integralei definite conduce la *integrala curbilinie de al doilea tip* sau *integrala curbilinie în raport cu coordonatele*. Compactul $[a,b]$ din integrala definită se va înlocui acum cu o curbă netedă sau netedă pe porţiuni, iar în locul funcţiei f va apare o funcţie vectorială de argument vectorial definită pe un domeniu din planul xOy sau din spaţiu care conţine curba. Introducerea acestui tip de integrală a fost sugerată de probleme întâlnite în practică cum ar fi lucrul mecanic al unui câmp de forţe de–a lungul unei curbe sau circulaţia unui fluid pe o curbă.

3.5.1 Lucrul mecanic al unui câmp de forţe

Vom introduce integrala curbilinie de al doilea tip pornind de la o problemă practică, din fizică.

Să considerăm două puncte A şi B ale spaţiului, de vectori de poziţie $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_1=x_1\,\mathbf{i}+y_1\,\mathbf{j}+z_1\,\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_2=x_2\,\mathbf{i}+y_2\,\mathbf{j}+z_2\,\mathbf{k}.$$

Aceste puncte, de coordonate $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, definesc vectorul $\overrightarrow{AB}$ a cărui expresie analitică în reperul $Oxyz$ este

$$\overrightarrow{AB}\;=\;\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\;=\;(x_2-x_1)\,\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\,\mathbf{k}.$$

Considerăm de asemeni un vector constant $\mathbf{F}$ de coordonate P, Q, R,

$$\mathbf{F}\;=\;P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k},$$

care din punct de vedere fizic poate fi interpretat ca o forţă care acţionează în fiecare punct $M(x, y, z)$ al segmentului de dreaptă AB.

Lucrul mecanic $\mathcal{L}$ efectuat de forţa constantă $\mathbf{F}$ care acţionează asupra unui punct material pentru a–l deplasa din punctul A în punctul B pe segmentul de dreaptă AB este produsul dintre mărimea forţei, lungimea segmentului AB şi cosinusul unghiului θ dintre vectorii $\mathbf{F}$ şi $\overrightarrow{AB}$

$$\mathcal{L} = \|\mathbf{F}\| \cdot \| \overrightarrow{AB} \| \cdot \cos\theta.$$

Dar expresia din membrul al doilea este produsul scalar al vectorilor $\mathbf{F}$ şi $\overrightarrow{AB}$

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

şi având în vedere că produsul scalar a doi vectori este suma produselor coordonatelor de acelaşi nume, rezultă că lucrul mecanic $\mathcal{L}$ este

$$\mathcal{L} = (x_2 - x_1)\, P + (y_2 - y_1)\, Q + (z_2 - z_1)\, R.$$

Să găsim acum expresia lucrului mecanic în cazul general când forţa $\mathbf{F}$ este variabilă ca direcţie, mărime şi sens, iar traiectoria mişcării punctului $M(x, y, z)$ este o curbă.

Considerăm în acest sens curba netedă C de ecuaţii parametrice

$$C : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b] \tag{3.49}$$

sau de ecuaţie vectorial ă

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b], \tag{3.50}$$

unde $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\, \mathbf{i} + \psi(t)\, \mathbf{j} + \chi(t)\, \mathbf{k}$, şi o forţă

$$\mathbf{F} : D \subset I\!R^3 \to I\!R^3, \quad \mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k} \tag{3.51}$$

ale cărei componente P, Q, R sunt funcţii reale de variabilele reale x, y, z definite pe un domeniu $D \subset I\!R^3$ care conţine imaginea curbei C şi care sunt funcţii continue în punctele imaginii curbei C.

Pentru a defini integrala curbilinie de al doilea tip introducem noţiunea de *curbă orientată.* Fie în acest sens $M\Big(\varphi(t),\, \psi(t),\, \chi(t)\Big)$, sau $M(\mathbf{r}(t))$, punctul de pe imaginea curbei C corespunzător lui $t \in [a,b]$ prin (3.49), respectiv (3.50). Când t parcurge în mod continuu intervalul $[a,b]$ de la a la b, punctul corespunzător parcurge imaginea $I(C)$ a curbei C întrun sens pe care–l numim *sens direct.* Dacă valorii $t = a$ îi corespunde punctul A de pe imaginea curbei C, iar lui $t = b$ îi corespunde punctul $B \in I(C)$, atunci sensul direct este de la A către B, adică este sensul imprimat de creşterea parametrului t. Când t parcurge intervalul $[a,b]$ de la b către a, punctul corespunzător M parcurge $I(C)$ în *sens indirect* sau *sens negativ.*

Definiţia 3.5.1 *O curbă împreună cu unul din sensurile de parcurgere al imaginii sale se numeşte* **curbă orientată**.

Curba C împreună cu sensul direct de parcurgere a lui $I(C)$ se notează cu C^+. În mod asemănător se defineşte C^-.

Observaţia 3.5.1 *Dacă ţinem seama de faptul că funcţia α din definiţia echivalenţei a două drumuri este continuă şi strict crescătoare, rezultă că sensul de parcurgere a lui $I(C)$ nu depinde de alegerea drumului din clasa de echivalenţă care defineşte curba* (C), *ceea ce înseamnă că odată ales un sens de parcurs al curbei* (C), *trecerea la o altă parametrizare a ei nu modifică sensul de parcurs.*

Împărţim arcul de curbă orientată C de extremităţi A şi B în n subarce prin intermediul punctelor

$$A = A_0, \quad A_1, \quad \cdots, \quad A_{n-1}, \quad A_n = B \tag{3.52}$$

şi considerăm linia poligonală cu vârfurile în aceste puncte. Putem considera că forţa $\mathbf{F}$ din (3.51) are o valoare constantă de–a lungul fiecărui segment orientat $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, egală cu $\mathbf{F}(M_i)$, unde M_i este un punct oarecare, dar fixat, de pe arcul de curbă $(A_{i-1}A_i)$. Calculăm acum lucrul mecanic corespunzător mişcării punctului material de–a lungul liniei poligonale, considerând că pe fiecare segment de extremităţi A_{i-1} şi A_i, $i = \overline{1,n}$ acţionează forţa $\mathbf{F}(M_i)$. Dacă $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $A_i(x_i, y_i, z_i)$ şi

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}, \tag{3.53}$$

atunci lucrul mecanic corespunzător mişcării punctului material de–a lungul segmentului orientat cu originea în A_{i-1} şi extremitatea A_i este

$$\Delta\mathcal{L}_i = \mathbf{F}(M_i)\cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i + R(M_i)\,\Delta z_i,$$

iar lucrul mecanic total $\mathcal{L}_\Delta$ corespunzător deplasării de–a lungul liniei poligonale este

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i + R(M_i)\,\Delta z_i. \tag{3.54}$$

Ultima sumă poate fi luată ca expresie aproximativă a lucrului mecanic efectuat de către câmpul de forţe $\mathbf{F}(M)$ de–a lungul curbei (AB). Pentru a obţine valoarea exactă a lucrului mecanic trebuie să trecem la limită în suma (3.54) când lungimea celui mai mare dintre arcele $(A_{i-1}A_i)$ tinde la zero. O astfel de trecere la limită în formă generală conduce la un nou tip de integrală curbilinie.

3.5.2 Definiţia integralei curbilinii de al doilea tip

Fie $C^+ = (AB)$ o curbă netedă sau netedă pe porţiuni de reprezentare parametrică (3.49) şi câmpul vectorial $\mathbf{F}$ din (3.51). Împărţim curba (AB) în n arce cu ajutorul punctelor de diviziune (3.52) şi formăm suma integrală

$$T = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i + R(M_i)\,\Delta z_i, \tag{3.55}$$

unde $M_i(\xi_i,\, \eta_i,\, \zeta_i) \in (A_{i-1}A_i)$, iar Δx_i, Δy_i şi Δz_i sunt date în (3.53).

Definiţia 3.5.2 *Dacă sumele integrale* (3.55) *admit o limită finită I când cea mai mare lungime a arcelor $(A_{i-1}A_i)$ tinde la zero, funcţia vectorială $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ se numeşte* **integrabilă în raport cu coordonatele pe curba** $C = (AB)$, *iar limita I se numeşte* **integrala curbilinie de tipul al doilea** *sau* **integrala curbilinie în raport cu coordonatele** *a funcţiei vectoriale* $\mathbf{F}$ *şi se notează*

$$I = \int_{(AB)} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz \tag{3.56}$$

sau, folosind coordonatele punctului curent M,

$$I = \int_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{3.57}$$

De multe ori integrala curbilinie de al doilea tip se notează fără a mai menţiona coordonatele funcţiilor componente ale câmpului vectorial $\mathbf{F}$, deci

$$I = \int_{(AB)} P\,dx + Qdy + Rdz.$$

Având în vedere că expresia de sub semnul integrală din (3.56) este produsul scalar dintre câmpul vectorial (3.51) şi vectorul $d\,\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$, rezultă că integrala curbilinie de al doilea tip a funcţiei vectoriale $\mathbf{F}(M)$ de–a lungul curbei orientate direct $C^+ = (AB)$ poate fi notată şi în forma

$$I = \int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r}.$$

Observaţia 3.5.2 *Integrala curbilinie de al doilea tip a funcţiei vectoriale de trei variabile reale* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *de–a lungul curbei orientate* C^+ *este suma integralelor curbilinii de tipul al doilea*

$$\int_{C^+} P(M)dx, \quad \int_{C^+} Q(M)dy, \quad \int_{C^+} R(M)dz,$$

corespunzătoare câmpurilor vectoriale

$$(P, 0, 0), \quad (0, Q, 0), \quad (0, 0, R),$$

care sunt proiecţiile funcţiei vectorială $\mathbf{F}$ *pe respectiv versorii* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *şi* $\mathbf{k}$ *ai reperului* $Oxyz$*.*

Observaţia 3.5.3 *Integrala curbilinie de al doilea tip nu trebuie confundată cu integrala unui câmp vectorial în raport cu una din variabilele sale pe un interval compact din* $\mathbb{R}$ *situat pe axa variabilei.*

Dacă domeniul D de definiţie a funcţiei $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ conţine intervalul $[a, b] \subset Ox$, atunci

$$\int_a^b \mathbf{F}(x, y, z)dx = \mathbf{i}\int_a^b P(x, y, z)dx + \mathbf{j}\int_a^b Q(x, y, z)dx + \mathbf{k}\int_a^b R(x, y, z)dx.$$

Integralele din membrul doi sunt integrale proprii depinzând de doi parametri, iar rezultatul integrării este o funcţie vectorială ce depinde de variabilele y şi z.

3.6 Legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii

Integrala curbilinie de al doilea tip se poate reduce la integrala curbilinie de primul tip, legătura dintre ele fiind descrisă în teorema de mai jos.

Teorema 3.6.1 *Fie $C^+ = (AB)$ curba netedă de ecuaţii parametrice* (3.49) *şi câmpul vectorial* (3.51) *definit şi mărginit pe un domeniu $D \subset I\!R^3$ care include curba C şi continuu în punctele curbei. Atunci, avem egalitatea*

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(M) \cdot \boldsymbol{\tau}(M) ds, \tag{3.58}$$

unde $\boldsymbol{\tau}(M)$ este versorul tangentei la curba orientată C^+ în punctul curent $M(x, y, z)$ al curbei, cu condiţia ca integralele curbilinii care apar să existe. Integrala curbilinie din primul membru al egalităţii (3.58) *există dacă şi numai dacă există integrala curbilinie de primul tip din membrul doi.*

Demonstraţie. Să demonstrăm mai întâi egalitatea

$$\int_{C^+} P(M)dx = \int_C P(M) \cos\alpha(M) ds, \tag{3.59}$$

unde $\cos\alpha(M)$ este mărimea algebrică a proiecţiei versorului $\boldsymbol{\tau}(M)$ pe direcţia versorului $\mathbf{i}$ al axei Ox, adica $\cos\alpha(M) = \boldsymbol{\tau}(M) \cdot \mathbf{i}$. Integrala din primul membru al egalităţii (3.59) este, prin definiţie, limita sumelor integrale de forma

$$T = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\, \Delta x_i. \tag{3.60}$$

Să considerăm că originea de arc pe curba C^+ coincide cu extremitatea A corespunzătoare valorii $t = a$ şi să comparăm suma integrală (3.60) cu suma integrală

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} P(M_i) \cos\alpha(M_i) \Delta s_i,$$

unde s_i este lungimea arcului (AA_i), $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, iar $\alpha(M_i)$ este unghiul pe care îl face cu axa Ox tangenta în punctul $M_i \in (A_{i-1}A_i)$ la curba C^+. Să considerăm că parametrizarea curbei (AB) este cea naturală

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \qquad t \in [0,\, L], \\ z = z(s), \end{cases}$$

unde L este lungimea arcului (AB). Versorul $\boldsymbol{\tau}(M)$ este legat de parametrul natural s al curbei C^+, unde s este lungimea arcului (AM), prin relaţia

$$\boldsymbol{\tau}(M) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(M),$$

unde vectorul $\mathbf{r}$ care apare în exprimarea lui $\boldsymbol{\tau}(M)$ este vectorul de poziţie al punctului curent $M(x, y, z)$ al curbei

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte, expresia analitică a oricărui versor se poate scrie în forma

$$\boldsymbol{\tau}(M) = \cos\alpha(M)\,\mathbf{i} + \cos\beta(M)\,\mathbf{j} + \cos\gamma(M)\,\mathbf{k},$$

unde $\beta(M)$ şi $\gamma(M)$ sunt unghiurile dintre versorul tangentei $\boldsymbol{\tau}(M)$ şi axele Oy, respectiv Oz. Atunci,

$$\Delta x_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{dx}{ds}(M)ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \cos\alpha(M)\,ds. \tag{3.61}$$

Aplicând teorema valorii medii în integrala Riemann (3.61), găsim

$$\Delta x_i = \cos\alpha(M_i^*)\,\Delta s_i, \quad M_i^* \in (A_{i-1}A_i).$$

În aceste condiţii, diferenţa dintre sumele T şi T^* este

$$T - T^* = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)[\cos\alpha(M_i^*) - \cos\alpha(M_i)]\,\Delta s_i. \tag{3.62}$$

Luând valoarea absolută în ambii membri ai lui (3.62) şi folosind proprietăţile funcţiei modul, obţinem

$$\Big|T - T^*\Big| \le \sum_{i=1}^{n} \Big|P(M_i)\Big| \cdot \Big|\cos\alpha(M_i^*) - \cos\alpha(M_i)\Big|\Delta s_i. \tag{3.63}$$

Funcţia $\cos\alpha(M)$ este continuă deoarece curba C^+ este netedă. Ca mulţime de puncte, curba C^+ este o mulţime mărginită şi închisă, deci este o mulţime compactă în $I\!R^3$. Cum o funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă, deducem că funcţia $\cos\alpha(M)$ este uniform continuă şi prin urmare, dat un $\varepsilon > 0$, inegalitatea

$$\Big|\cos\alpha(M_i^*) - \cos\alpha(M_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{L\ \sup|P|} \tag{3.64}$$

este satisfăcută pentru orice partiţie a curbei $C^+ = (AB)$ a cărei normă (cel mai mare dintre numerele Δs_i) este destul de mică. Din (3.63) şi (3.64) rezultă

$$\Big|T - T^*\Big| < \frac{\varepsilon}{L \sup|P|} \sup|P| \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \varepsilon. \tag{3.65}$$

Inegalitatea (3.65) demonstrează că sumele integrale T^* şi T au aceeaşi limită când norma diviziunii $\Delta = \{A_0 = A,\, A_1,\, \cdots,\, A_{n-1},\, A_n = B\}$ tinde la zero şi ca urmare egalitatea (3.59) este demonstrată.

În mod asemănător se demonstrează egalităţile

$$\begin{aligned} &\int_{C^+} Q(M)dy = \int_C Q(M)\cos\beta\, ds,\\ &\int_{C^+} R(M)dy = \int_C R(M)\cos\gamma\, ds. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Sumând membru cu membru egalităţile (3.59) şi (3.66) se obţine (3.58) şi teorema este demonstrată. ∎

Observaţia 3.6.1 *Când curba $C^+ = (AB)$ este în planul xOy legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii este*

$$\int_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;\;=\;\; \int_C \Big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha\Big)ds,$$

unde $\alpha = \alpha(M)$ este unghiul dintre direcţia pozitivă a axei Ox şi tangenta la curba (AB) în punctul M al ei.

3.7 Formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip

Teorema care dă formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip şi cea care dă legătura dintre integralele curbilinii de primul şi cel de al doilea tip implică următorul rezultat pe care, din motive de simplitate a scrierii formulelor, îl vom formula pentru cazul în care curba se află în planul Oxy.

Teorema 3.7.1 *Fie $C^+ = (AB)$ o curbă netedă de ecuaţii parametrice*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a,b]$$

şi $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ *o funcţie vectorială de două variabile reale definită întrun domeniu plan* D *care conţine arcul* C*. Atunci, avem următoarea relaţie*

$$\begin{gathered}\int_{C^+} Pdx + Qdy = \\ = \int_a^b \Big[P\Big(\varphi(t),\, \psi(t)\Big)\, \varphi'(t) + Q\Big(\varphi(t),\, \psi(t)\Big)\, \psi'(t)\Big] dt,\end{gathered} \tag{3.67}$$

dacă integralele care intră în componenţa ei există. Mai mult, integrala din membrul stâng a lui (3.67) *există dacă integrala definită din membrul al doilea există.*

Teorema de mai sus rămâne adevărată dacă arcul de curbă C^+ este neted pe porţiuni. Ea poate fi uşor transpusă la cazul în care curba (AB) este în spaţiu şi este reprezentată paramatric de ecuaţiile (3.49) iar câmpul vectorial **F** este (3.51). Avem

$$\begin{gathered}\int_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \int_a^b \Big[P\Big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\Big)\varphi'(t) + Q\Big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\Big)\psi'(t) + \\ + R\Big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\Big)\chi'(t)\Big] dt.\end{gathered} \tag{3.68}$$

Formulele de calcul (3.67) şi (3.68) se pot scrie vectorial în forma

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

cu menţiunea că în cazul integralei curbilinii în planul xOy, mărimile care intervin au expresiile

$$\begin{cases} \mathbf{F}(M) &= P(M)\,\mathbf{i} + Q(M)\,\mathbf{j}, \\ d\mathbf{r} &= dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}(t) &= \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, \\ \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= \mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\,\mathbf{i} + \psi'(t)\,\mathbf{j}, \end{cases}$$

iar în cazul integralei curbilinii în spaţiu, aceleaşi mărimi au semnificaţiile

$$\begin{cases} \mathbf{F}(M) & = & P(M)\,\mathbf{i} + Q(M)\,\mathbf{j} + R(M)\,\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} & = & dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}(t) & = & \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k} \\ \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t) & = & \mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\,\mathbf{i} + \psi'(t)\,\mathbf{j} + \chi'(t)\,\mathbf{k}. \end{cases}$$

Să considerăm unele cazuri particulare importante ale formulei de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea în plan.

Dacă curba $C^+ = (AB)$ din planul xOy este determinată de ecuaţia

$$y = y(x), \;\; x \in [a, b]$$

formula (3.68) devine

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy \;\; = \;\; \int_a^b [P(x,\, y(x)) + Q(x,\, y(x))\, y'(x)]dx.$$

În particular, dacă (AB) este un segment de dreaptă paralelă cu axa Ox, deci de ecuaţie $y = y_0, \;\; x \in [a, b]$, fapt ce implică $y'(x) = 0$, atunci formula de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea este

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, y_0)dx.$$

În mod similar, pentru o curbă plană determinată de ecuaţia

$$x = x(y), \;\; y \in [c,\, d],$$

formula corespunzătoare de calcul a integralei curbilinii este

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy \;\; = \;\; \int_c^d [P(x(y),\, y)\, x'(y) + Q(x(y),\, y)]dy. \tag{3.69}$$

Dacă (AB) este un segment de dreaptă paralel cu axa Oy, descris de ecuaţia

$$x = x_0, \;\; y \in [c,\, d],$$

avem $x'(y) = 0$ şi formula de calcul (3.69) devine

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy \;\; = \;\; \int_c^d Q(x_0, y)dy.$$

Exercițiul 3.7.1 Să *se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în plan*

$$I = \int_C xydx - y^2dy, \text{ unde } C: \; x = t^2, \; y = t^3, \; t \in [0, 1].$$

Soluție. Avem $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t^3$ $(0 \leq t \leq 1)$. Funcțiile φ și ψ sunt derivabile și cu derivată continuă și $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = 3t^2$. Funcțiile P și Q sunt date de $P(x, y) = xy$ și $Q(x, y) = -y^2$, deci sunt continue în tot planul. Putem deci aplica formula de calcul (3.67). Avem:

$$P(\varphi(t), \psi(t)) = t^5, \; Q(\varphi(t), \psi(t)) = -\,t^6;$$

$$I = \int_0^1 (2\,t^6 - 3\,t^8)\,dt = \Big(\frac{2}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^9\Big)\Big|_0^1 = -\,\frac{1}{21}.$$

■

Exercițiul 3.7.2 *Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în spațiu*

$$I = \int_C z\sqrt{a^2 - x^2}dx + xzdy + (x^2 + y^2)dz, \text{ unde}$$

$$C: \; x = a\cos t, \; y = a\sin t, \; z = bt, \quad t \in [0, \pi/2], \; a > 0, \; b > 0.$$

Soluție. Funcțiile care definesc reprezentarea parametrică a curbei sunt derivabile și admit derivată continuă pe intervalul de variație al parametrului t. Funcția P este definită și continuă pe porțiunea spațiului în care abscisele punctelor satisfac dubla inegalitate $-a \leq x \leq a$. Funcțiile Q și R sunt definite și continue pe întreg spațiul. Deoarece avem $-a \leq \varphi(t) \leq a$ pentru $t \in [0, \pi/2]$, rezultă că imaginea curbei C este conținută în domeniul comun de definiție al funcțiilor P, Q și R, deci integrala dată există. Aplicând formula de calcul (3.68), obținem

$$I = a^2b\int_0^{\pi/2}(t\cos 2t + 1)\,dt = \frac{a^2b}{2}(\pi - 1).$$

■

3.8 Proprietăţi ale integralelor curbilinii de al doilea tip

Din modul cum a fost definită integrala curbilinie de al doilea tip

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.70}$$

deducem că un factor constant poate fi scos în afara semnului de integrală şi că integrala unei sume de funcţii vectoriale este suma integralelor funcţiilor termeni. Ambele proprietăţi pot fi exprimate prin egalitatea

$$\int_{C^+} \Big(\lambda\, \mathbf{F}(M) + \mu\, \mathbf{G}(M)\Big) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_{C^+} \mathbf{G}(M) \cdot d\mathbf{r}, \tag{3.71}$$

unde λ şi μ sunt constante reale arbitrare, iar $\mathbf{F}$ şi $\mathbf{G}$ sunt câmpuri vectoriale integrabile pe curba C^+ în raport cu coordonatele.

O altă proprietate importantă a integralei curbilinii de al doilea tip (3.70) este dependenţa sa de orientarea curbei, fapt care se exprimă prin egalitatea

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C^-} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.72}$$

a cărei demonstraţie este simplă. Într-adevăr, dacă schimbăm direcţia în care curba $C^+ = (AB)$ este parcursă trebuie să înlocuim cantităţile Δx_i şi Δy_i, care intră în suma integrală (3.55), prin $-\Delta x_i$ şi respectiv $-\Delta y_i$. Această înlocuire schimbă semnul sumelor integrale (3.55) şi, în consecinţă, semnul limitei lor ceea ce conduce la (3.72).

Dependenţă de orientarea curbei a integralei curbilinii de al doilea tip este în concordanţă cu interpretarea fizică a acesteia care reprezintă lucrul mecanic al unui câmp de forţe de–a lungul unei curbe.

Întradevăr, lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe schimbă de semn dacă sensul de parcurs al curbei se schimbă.

3.9 Integrale curbilinii de tipul al doilea pe curbe închise

Pe o curbă simplă închisă C este esenţial să specificăm sensul de parcurs al curbei deoarece, după cum s–a văzut, valoarea integralei curbilinii de al doilea tip depinde de sensul de parcurs al curbei. Extremităţile unei asemenea curbe fiind identice, în general nu se poate desprinde din context care este sensul de parcurs al curbei. De regulă, sensul pozitiv de parcurs al unei curbe plane închise este sensul invers acelor de ceasornic, iar pentru integrala curbilinie de al doilea tip pe o astfel de curbă se foloseşte un simbol special şi anume cel de integrală prevăzut cu un cerc la mijlocul ei, cerc pe care se figurează o săgeată reprezentând sensul de parcurs al curbei. Când nu se figurează săgeata pe cercul plasat pe semnul integrală, deci când aceasta se notează cu simbolul $\oint$, vom înţelege că integrarea se efectuează pe o curbă închisă parcursă în sens pozitiv.

3.10 Independenţa de drum a integralei curbilinii de al doilea tip

3.10.1 Formularea problemei

Fie D domeniul de definiţie al câmpului vectorial $\mathbf{F}$ şi (AB) un arc de curbă, neted pe porţiuni, inclus în întregime în mulţimea D. Când se studiază integrala curbilinie de al doilea tip în plan sau în spaţiu

$$I = \int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.73}$$

este posibil ca în anumite cazuri valoarea sa fie independentă de forma drumului de integrare şi să fie determinată doar de extremităţile A şi B ale drumului. Cu alte cuvinte numărul real I exprimat prin (3.73) este acelaşi pentru toate căile de integrare care au originea în A şi extremitatea în punctul B.

Definiţia 3.10.1 *Integrala curbilinie în raport cu coordonatele a câmpului vectorial* $\mathbf{F}$ *se numeşte* **independentă de drum** *în domeniul D dacă are loc egalitatea*

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r}, \tag{3.74}$$

oricare ar fi curbele netede pe porţiuni γ_1 şi γ_2, incluse în D, având origine comună în A şi extremitate comună în B, punctele A şi B fiind alese arbitrar în domeniul D.

Ne propunem să determinăm condiţii care să implice independenţa de drum pe domeniul D a unei integrale curbilinii de tipul al doilea sub forma generală (3.73). Vom vedea că această problemă este legată de determinarea unei funcţii U, diferenţiabile pe domeniul D, a cărei diferenţială să fie egală cu expresia diferenţială de sub semnul integralei din (3.73), adică

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{3.75}$$

Pentru simplitatea scrierii formulelor şi relaţiilor matematice vom considera cazul plan, transpunerea rezultatelor pentru cazul spaţial fiind simplă. În acest caz funcţia vectorială $\mathbf{F}$ are două componente P şi Q, iar integrala din (3.73) se scrie

$$\int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{3.76}$$

sau, mai simplu,

$$\int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy. \tag{3.77}$$

3.10.2 Cazul unui domeniu plan simplu conex

Definiţia 3.10.2 *Un domeniu plan D se numeşte* **simplu conex** *dacă orice curbă simplă închisă cu imaginea inclusă în interiorul lui D este frontiera unei submulţimi incluse în întregime în D.*

Teorema 3.10.1 *Dacă funcţiile P şi Q şi derivatele lor parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue pe domeniul simplu conex $D \subset \mathbb{R}^2$, atunci următoarele patru condiţii sunt echivalente:*

1. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial* $\mathbf{F} = (P, Q)$ *de–a lungul oricărei curbe închise* (C), *netedă sau netedă pe porţiuni, inclusă în D este egală cu zero*

$$\int_C Pdx + Qdy = 0;$$

2. *integrala curbilinie de tipul al doilea* (3.76) *este independentă de alegerea căii de integrare de extremităţi A şi B, puncte fixate dar alese arbitrar în D;*

3. *expresia diferenţială*
$$\omega = Pdx + Qdy \tag{3.78}$$
este diferenţiala totală (exactă) a unei funcţii reale de două variabile reale U definită şi diferenţiabilă pe D, adică avem (3.75);

4. *relaţia*
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{3.79}$$
are loc în orice punct $M(x,y) \in D$.

Demonstraţie. Vom arăta că prima condiţie implică pe cea de a doua, a doua condiţie implică cea de a treia condiţie, a treia condiţie implică condiţia a patra şi, la sfârşit, condiţia a patra implică prima condiţie. Atunci, echivalenţa celor patru condiţii este stabilită.

Arătăm întâi că **1** $\Longrightarrow$ **2**. Pentru aceasta considerăm două drumuri de integrare situate în domeniul D cu origine comună în A, punct fixat dar arbitrar din D, şi extremitate comună în punctul B, ales de asemenea arbitrar în D. Primul drum îl vom nota cu (ACB), iar cel de al doilea va fi notat cu (AEB). Juxtapunerea acestor drumuri este un drum închis pe care îl vom considera parcurs în sensul de la A către B prin C şi apoi din B către A prin E şi îl vom nota cu $(ACBEA)$. Conform ipotezei, integrala curbilinie luată pe acest contur este egală cu zero şi deci

$$\int_{ACBEA} Pdx + Qdy = 0.$$

Însă, folosind proprietăţile integralei curbilinii de al doilea tip, avem

$$\int_{ACBEA} Pdx + Qdy = \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BEA} Pdx + Qdy =$$
$$= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{AEB} Pdx + Qdy$$

şi, în consecinţă,

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{AEB} Pdx + Qdy,$$

ceea ce arată că implicaţia **1** $\Longrightarrow$ **2** este demonstrată. Implicaţia rămâne adevărată şi atunci când cele două căi de integrare au puncte în comun.

Să demonstrăm că **2** $\Longrightarrow$ **3**. Presupunem că integrala curbilinie (3.76) nu depinde de calea de integrare situată în domeniul plan simplu conex D, ci doar de extremităţile A şi B ale acesteia. Atunci, dacă fixăm punctul A, integrala poate fi considerată o funcţie de coordonatele x şi y ale punctului variabil B, aflat oriunde în domeniul D. Dacă notăm această funcţie cu U, atunci valoarea sa $U(x,y)$ în punctul $B(x,y)$ este

$$U(x,y) = \int_{AB} P dx + Q dy. \tag{3.80}$$

Să arătăm că funcţia $U : D \to I\!R$ ale cărei valori se determină după legea (3.80) este diferenţiabilă şi că are loc (3.75). Pentru a demonstra aceasta este suficient să arătăm că funcţia U din (3.80) este derivabilă parţial în D, iar valorile derivatelor parţiale în punctul B

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$$

sunt egale respectiv cu $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$. Pentru derivabilitatea parţială a funcţiei U trebuie să cercetăm existenţa limitelor:

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(x+t,\, y)-U(x,y)}{t}; \quad \lim_{t\to 0}\frac{U(x,\, y+t)-U(x,y)}{t}. \tag{3.81}$$

Cantitatea de la numărătorul primei limite este egală cu integrala expresiei diferenţiale $Pdx+Qdy$ de–a lungul unui drum de integrare care leagă punctele $B(x,y)$ şi $B_1(x+t,\, y)$ drum care este paralel cu axa Ox. Folosind formulele de calcul ale integralelor curbilinii de al doilea tip în cazul în care calea de integrare este paralelă cu una din axele de coordonate, găsim:

$$\left\{\begin{array}{lcl} U(x+t,y)-U(x,y) & = & \displaystyle\int_x^{x+t} P(\tau,\, y)\, d\tau; \\ U(x,y+t)-U(x,y) & = & \displaystyle\int_y^{y+t} Q(x,\, \tau)\, d\tau. \end{array}\right. \tag{3.82}$$

Funcţiile P şi Q fiind continue, ele sunt în acelaşi timp parţial continue şi ca atare integranţii din (3.82) sunt funcţii continue. Rezultă că integralelor din membrul doi a lui (3.82) li se poate aplica teorema valorii medii. Obţinem

$$\left\{\begin{array}{lcl} U(x+t,y)-U(x,y) & = & t\, P(x+\theta_1 t,\, y); \\ U(x,y+t)-U(x,y) & = & t\, Q(x,\, y+\theta_2 t). \end{array}\right. \tag{3.83}$$

Din (3.83) şi continuitatea funcţiilor P şi Q deducem că limitele din (3.81) există, ceea ce atrage că funcţia U este derivabilă parţial pe D şi derivatele parţiale sunt date de

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \tag{3.84}$$

În baza faptului că funcţiile P şi Q sunt continue deducem că derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei U sunt continue pe D. Ori, o funcţie care posedă derivate parţiale continue pe domeniul D este diferenţiabilă pe D. Având în vedere (3.84) rezultă că diferenţiala funcţiei U în punctul $B(x,y)$ este dată de (3.75).

Urmează să arătăm că **3** $\Longrightarrow$ **4**. Dacă expresia diferenţială (3.78) este diferenţiala totală exactă a funcţiei U în punctul $B(x,y)$, atunci din unicitatea expresiei diferenţialei unei funcţii avem (3.84). Din ipotezele acestei părţi a teoremei avem că există derivatele parţiale mixte secunde ale funcţiei U în punctul $B(x,y)$ şi că acestea sunt continue pe domeniul D deoarece continue pe D sunt derivatele parţiale ale funcţiei Q în raport cu x şi ale funcţiei P în raport cu y. Conform criteriului lui Schwarz, derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiei U sunt egale oriunde în D ceea ce atrage că avem (3.79) în orice punct al domeniului D.

Rămâne să mai demonstrăm că **4** $\Longrightarrow$ **1**. Presupunem că egalitatea (3.79) este satisfăcută peste tot în domeniul D şi fie C o curbă închisă, arbitrară, netedă sau netedă pe porţiuni, inclusă în domeniul D. Domeniul D fiind unul conex, submulţimea D_1 a lui $\mathbb{R}^2$ care are ca frontieră curba închisă C este în acelaşi timp submulţime a domeniului D, iar pe această submulţime derivatele faţă de y a lui P şi faţă de x a lui Q sunt definite şi continue. Prin urmare, în baza formulei integrale a lui Green, care o vom demonstra în capitolul următor, integrala curbilinie

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{3.85}$$

poate fi transformată întro integrală dublă prin relaţia

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy. \tag{3.86}$$

În baza ipotezei, exprimată prin egalitatea (3.79), integrala din membrul drept a relaţiei (3.86) este egală cu zero. În consecinţă, integrala curbilinie

(3.85) este egală cu zero pe orice curbă închisă C, netedă sau netedă pe porţiuni, situată în întregime în domeniul D. Cu aceasta teorema enunţată este complet demonstrată. ■

3.10.3 Cazul unui domeniu în spaţiu simplu conex

Rezultatele demonstrate în Teorema 3.10.1 pot fi transpuse şi în cazul spaţial. Pentru aceasta ar trebui mai întâi să definim noţiunea de domeniu tridimensional simplu conex.

Definiţia 3.10.3 *Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte* **simplu conex** *dacă orice suprafaţă S închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, cu imaginea inclusă în interiorul lui D este frontiera unei submulţimi inclusă în întregime în D.*

Dăm mai jos enunţul teoremei similare care transpune în spaţiu rezultatele demonstrate în Teorema 3.10.1.

Teorema 3.10.2 *Dacă funcţiile P, Q şi R şi derivatele lor parţiale:*

$$\frac{\partial R}{\partial y};\quad \frac{\partial Q}{\partial z};\quad \frac{\partial P}{\partial z};\quad \frac{\partial R}{\partial x};\quad \frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial P}{\partial y}$$

sunt definite şi continue pe domeniul tridimensional simplu conex D, atunci următoarele patru condiţii sunt echivalente:

1. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$ de–a lungul oricărei curbe închise (C), netede sau netede pe porţiuni, inclusă în D, este egală cu zero*

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

2. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ este independentă de alegerea căii de integrare de extremităţi A şi B, puncte fixate dar alese arbitrar în D.*

3. *expresia diferenţială*

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy\; +\; R(x,y,z)dz$$

este diferenţiala totală (exactă) a unei funcţii reale de trei variabile reale U definită şi diferenţiabilă pe D, adică avem

$$d\,U(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy\; +\; R(x,y,z)dz.$$

4. relaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) & = & \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) & = & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) \end{cases} \tag{3.87}$$

au loc în orice punct $M(x,y,z) \in D$.

3.10.4 Operatorul rotor

Teorema 3.10.2 sugerează folosirea operatorului diferenţial $\boldsymbol{\nabla}$ a lui Hamilton cu ajutorul căruia unele din concluziile teoremei se vor scrie mai simplu. Deşi acest operator a fost introdus anterior, preferăm să reamintim şi să prezentăm unele chestiuni care au legătură cu subiectul tratat şi anume cu independenţa de drum a integralelor curbilinii.

Definiţia 3.10.4 *Se numeşte* **rotorul câmpului vectorial diferenţiabil**

$$\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} \in C^1(D),$$

vectorul notat cu simbolul rot $\mathbf{F}$ *a cărui expresie analitică în baza* $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ *este*

$$rot\,\mathbf{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k}. \tag{3.88}$$

Observaţia 3.10.1 *Expresia rotorului câmpului vectorial* $\mathbf{F}$ *poate fi scrisă convenabil ca determinantul simbolic*

$$rot\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{3.89}$$

unde, în formula de calcul a determinantului după elementele primei linii, înmulţirea uneia din operaţiile $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ *şi* $\dfrac{\partial}{\partial z}$ *cu o funcţie înseamnă derivata parţială a acelei funcţii în raport cu variabila corespunzătoare: de exemplu,* $\dfrac{\partial}{\partial x}\,Q$ *înseamnă derivata în raport cu* x *a funcţiei* Q, *adică* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Observaţia 3.10.2 *Având în vedere că expresia analitică a operatorului vectorial* $\boldsymbol{\nabla}$ *este*

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

şi ţinând cont de expresia produsului vectorial a doi vectori, deducem că rotorul unui câmp vectorial $\mathbf{F}$ *este produsul vectorial al operatorului* $\boldsymbol{\nabla}$ *cu vectorul* $\mathbf{F}$. *Prin urmare relaţiile* (3.88) *şi* (3.89) *se scriu în forma*

$$\mathit{rot}\ \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}.$$

Definiţia 3.10.5 *Câmpul vectorial* $\mathbf{F} \in C^1(D)$ *se numeşte* **irotaţional** *dacă egalitatea* $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ *are loc în toate punctele lui* D.

Observaţia 3.10.3 *Câmpul vectorial diferenţiabil* $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$ *este irotaţional pe domeniul tridimensional* D *dacă şi numai dacă au loc relaţiile* (3.87).

Folosind rezultatele de mai sus, o parte a Teoremei 3.10.2 se poate reformula.

Teorema 3.10.3 *Integrala curbilinie de tipul al doilea a câmpului vectorial*

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) \in C^1(D)$$

este independentă de drumul de integrare situat în domeniul simplu conex D *dacă şi numai dacă câmpul vectorial* $\mathbf{F}$ *este irotaţional.*

Aşadar, după ce verificăm dacă domeniul pe care este definit câmpul diferenţiabil $\mathbf{F}$ este simplu conex, independenţa de drum pe D a integralei curbilinii în raport cu coordonatele din câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este funcţie de rotorul acestui câmp. Dacă $\mathbf{F}$ este câmp irotaţional şi D este domeniu simplu conex, atunci integrala curbilinie (3.73) este independentă de drum pe D.

3.11 Primitiva unei expresii diferenţiale

În demonstraţia Teoremei 3.10.1 am rezolvat implicit următoarea problemă: dată expresia diferenţială (3.78) să se găsească o funcţie reală diferenţiabilă U, de două variabile reale, a cărui diferenţială totală să coincidă cu expresia (3.78), adică să avem (3.75). Odată găsită o astfel de funcţie U, oricare alta cu aceeaşi proprietate diferă de U printr–o constantă.

Definiţia 3.11.1 *Fie* $\mathbf{F} = (P,\, Q,\, R)$ *un câmp vectorial definit pe domeniul* $D \subset I\!\!R^3$ *pentru care există rotorul* $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ *care să fie funcţie continuă. Se numeşte* **primitiva** *expresiei diferenţiale*

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

funcţia reală de trei variabile reale U *definită şi diferenţiabilă pe* D *care are proprietatea*

$$d\,U(x,y,z) = \omega.$$

Observaţia 3.11.1 *Dacă domeniul tridimensional* D *este simplu conex şi câmpul vectorial* $\mathbf{F}$ *este irotaţional, integrala curbilinie din expresia diferenţială* ω *este independentă de drum pe* D*, iar funcţia*

$$U\,:\,D \to I\!\!R, \quad U(x,y,z) = \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz, \tag{3.90}$$

unde A *este un punct fixat din* D *şi* $B(x,y,z)$ *este punct variabil al lui* D*, este o primitivă a expresiei diferenţiale* ω.

Observaţia 3.11.2 *Fiindcă integrala din* (3.90) *nu depinde de calea de integrare, putem considera că* (AB) *este o linie poligonală paralelă cu axele de coordonate. Considerând că punctele* A *şi* B *au coordonatele* $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$ *şi* $B(x,y,z)$*, linia poligonală* $(ACDB)$ *este paralelă cu axele de coordonate dacă* $C(x,\, y_0,\, z_0)$ *şi* $D(x,\, y,\, z_0)$.

Să calculăm integrala curbilinie din expresia diferenţială ω pe linia poligonală $(ACDB)$. Avem

$$U(x,\, y\, z) = \int_{(AC)} \omega + \int_{(CD)} \omega + \int_{(DB)} \omega. \tag{3.91}$$

Dar pe drumul (AC), $y = y_0$ (constant), $z = z_0$ (constant), deci $d\,y = 0$, $d\,z = 0$ şi

$$\int_{(AC)} \omega = \int_{(AC)} Pdx + Qdy + Rdz \;=\; \int_{x_0}^{x} P(t,\, y_0,\, z_0)\, dt. \tag{3.92}$$

Pe drumul (segmentul de dreaptă) (CD), $x = x$ (constant), $z = z_0$ (constant), deci $d\,x = 0$, $d\,z = 0$ şi

$$\int_{(CD)} \omega = \int_{(CD)} Pdx + Qdy + Rdz \;=\; \int_{y_0}^{y} Q(x,\, t,\, z_0)\, dt.$$

În sfârşit, pe ultima porţiune netedă de drum (DB), $x = x$ (constant), $y = y$ (constant), deci $d\,x = 0$, $d\,y = 0$ şi

$$\int_{(DB)} \omega = \int_{(DB)} Pdx + Qdy + Rdz \;=\; \int_{z_0}^{z} R(x,\, y,\, t)\, dt. \tag{3.93}$$

Folosind (3.92) – (3.93) în (3.91), obţinem că funcţia

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\, y_0,\, z_0)\, dt \;+\; \int_{y_0}^{y} Q(x,\, t,\, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x,\, y,\, t)\, dt \tag{3.94}$$

este o primitivă a expresiei diferenţiale $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ şi anume acea primitivă care se anulează în punctul $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$.

Să remarcăm că o formulă analoagă formulei (3.94) se obţine dacă se integrează expresia diferenţială ω pe oricare alte trei muchii paralele cu axele de coordonate ale paralelipipedului cu două din vărfurile opuse $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$ şi $B(x,y,z)$. De exemplu, dacă drumul de integrare este $(AEFB)$, unde $E(x_0,\, y,\, z_0)$ şi $F(x_0,\, y,\, z)$, primitiva din (3.94) se scrie în forma unei sume de trei integrale curbilinii pe segmente de drepte

$$U(x,y,z) = \int_{(AE)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{(EF)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{(FB)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii în spaţiu, găsim că o altă expresie a primitivei expresiei diferenţiale $\omega = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ este

$$U(x,y,z) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y,t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)dt. \tag{3.95}$$

În cazul plan, două din primitivele expresiei diferenţiale (3.78) sunt:

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\, y_0)\, dt \;+\; \int_{y_0}^{y} Q(x,\, t)\, dt;$$

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\, y)\, dt \;+\; \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\, t)\, dt$$

şi se obţin respectiv când integrăm ω pe linia poligonală (ACB) cu $C(x,\, y_0)$ şi pe calea de integrare rezultată din reuniunea segmentelor de dreaptă (AD) şi (DB), unde $D(x_0,\, y)$.

Exerciţiul 3.11.1 *Se dă expresia diferenţială*

$$\omega = \Big(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2+z^2}\Big) z dx \,+\, \frac{z}{xy^2} dy + \Big(\frac{x}{x^2+z^2} \,-\, \frac{1}{xy}\Big) dz$$

definită pe orice domeniu tridimensional D, simplu conex, care nu intersectează planele de coordonate Oyz şi Ozx. Să se arate că expresia de mai sus este o diferenţială totală exactă şi să se determine funcţiile primitive ale sale.

Soluţie. Funcţiile $P,\ Q$ şi R au valorile

$$P(x,y,z) = \Big(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2+z^2}\Big) z, \quad Q(x,y,z) = \frac{z}{xy^2},$$

$$R(x,y,z) = \frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}$$

şi, după cum se vede, sunt continue şi derivabile pe domeniul simplu conex D. Trebuie să mai verificăm că $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{F} = (P,\ Q,\ R)$. Efectuând derivatele parţiale ale funcţiilor coordonate P, Q, R, găsim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{xy^2},\\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2+z^2)^2},\\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{z}{x^2 y^2},
\end{aligned}$$

deci câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este irotaţional pe D. Pentru determinarea unei primitive vom lua $A(x_0,\ y_0,\ 0)$ cu $x_0 \cdot y_0 \neq 0$ şi $B(x,y,z)$ şi aplicăm formula (3.95). Avem

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\ y_0,\ 0)\, dt \,+\, \int_{y_0}^{y} Q(x,\ t,\ 0)\, dt + \int_0^z R(x,\ y,\ t)\, dt.$$

Primele două integrale sunt nule pentru că în puncte ale planului xOy funcţiile P şi Q au valori egale cu zero. Calculând cea de a treia integrală, găsim

$$U(x,y,z) = \int_0^z \Big(\frac{x}{x^2+t^2} - \frac{1}{xy}\Big) dt.$$

Rezultă că primitiva expresiei diferenţiale ω care se anulează în punctele domeniului D situate în planul xOy este

$$U(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{z}{x} - \frac{z}{xy},$$

oricare altă primitivă fiind $V(x,y,z) = U(x,y,z)+C$, unde C este o constantă reală arbitrară. ■

Exerciţiul 3.11.2 *Fie expresia diferenţială*

$$\omega = \Big(\frac{y}{x^2+y^2} + 2\,y\Big)dx + \Big(2\,x - \frac{x}{x^2+y^2}\Big)dy$$

definită întrun domeniu plan simplu conex D care nu conţine originea. Să se arate că ω este diferenţială totală exactă pe D şi să se determine funcţia diferenţiabilă $U : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $d\,U(x,y) = \omega$.

Soluţie. Funcţiile reale de două variabile reale P şi Q au valorile date de:

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + 2\,y; \quad Q(x,y) = 2\,x - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Derivatele parţiale $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ au valorile egale, şi anume

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2,$$

deci integrala curbilinie de tipul al doilea din expresia diferenţială ω nu depinde de drumul de integrare situat în D. Funcţia U a cărei diferenţială este ω şi care se anulează în punctul $A(a,\,b)$ are valorile:

$$U(x,y) = \int_a^x \Big(\frac{b}{x^2+b^2} + 2b\Big)dt + \int_b^y \Big(2x - \frac{x}{x^2+t^2}\Big)dt;$$

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{t}{b}\Big|_{t=a}^{t=x} + 2bt\Big|_{t=a}^{t=x} + 2xt\Big|_{t=b}^{t=y} - \operatorname{arctg}\frac{t}{x}\Big|_{t=b}^{t=y};$$

$$U(x,y) = 2xy + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2ab - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Oricare altă primitivă V a expresiei diferenţiale date este de forma

$$V(x,y) = 2xy + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C,$$

unde C este o constantă reală arbitrară. ■

Capitolul 4

Integrala dublă

4.1 Elemente de topologie în $I\!R^2$

În acest paragraf vom reaminti unele noţiuni de topologie în spaţiul euclidian $I\!R^2$. Între punctele acestui spaţiu şi cele ale unui plan în care s–a ales o pereche de axe perpendiculare Ox şi Oy, de versori $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ şi respectiv $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, există o corespondenţă biunivocă.

Definiţia 4.1.1 *Se numeşte* **disc deschis** *cu centrul în* $\mathbf{a} = (a, b)$ *şi rază* $\varepsilon > 0$ *mulţimea*

$$B(\mathbf{a}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} = (x, y) \in I\!R^2 : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\},$$

unde d *este metrica euclidiană pe* $I\!R^2$ *şi* $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ *este distanţa dintre punctele* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{a}$.

Pentru simplitatea expunerii, discului deschis îi vom spune simplu **disc**.

Definiţia 4.1.2 *Un punct* $\mathbf{a} \in I\!R^2$ *se numeşte* **punct interior** *al mulţimii* $D \subset I\!R^2$ *dacă există un* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset D$.

Observaţia 4.1.1 U*n punct interior al mulţimii* D *aparţine acesteia.*

Definiţia 4.1.3 *Submulţimea* $D \subset I\!R^2$ *se numeşte mulţime* **deschisă** *dacă toate elementele sale sunt puncte interioare.*

Definiţia 4.1.4 *Spunem că mulţimea $D \subset I\!\!R^2$ este* **mulţime conexă** *dacă oricare două puncte ale lui D pot fi unite printr–un arc de curbă conţinut în întregime în D.*

Definiţia 4.1.5 *O mulţime deschisă şi conexă se numeşte* **domeniu**.

De exemplu, discul cu centrul în origine şi rază 1, adică totalitatea punctelor (x, y) care satisfac inegalitatea $x^2 + y^2 < 1$, este un domeniu, în timp ce mulţimea rezultată din reuniunea a două discuri

$$\{(x, y) \in I\!\!R^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \quad \cup \quad \{(x, y) \in I\!\!R^2 \,|\, (x-3)^2 + y^2 < 1\}$$

nu este un domeniu deoarece, deşi este mulţime deschisă, nu este mulţime conexă întru–cât există perechi de puncte ale sale care nu pot fi unite printr–un arc de curbă conţinut în întregime în această mulţime.

Definiţia 4.1.6 *Un punct* $\mathbf{a} \in I\!\!R^2$ *se numeşte* **punct frontieră** *al mulţimii D dacă orice vecinătate a sa conţine atât puncte ale lui D cât şi puncte care nu aparţin lui D. Totalitatea punctelor frontieră ale unei mulţimi se numeşte* **frontiera** *acelei mulţimi.*

Observaţia 4.1.2 *Un punct frontieră al unei mulţimi D poate să aparţină sau să nu aparţină lui D. În particular, o mulţime deschisă nu conţine nici unul din punctele frontierei sale.*

Definiţia 4.1.7 *O mulţime care îşi conţine toate punctele frontieră se numeşte* **mulţime închisă**.

Observaţia 4.1.3 *Fiecărei mulţimi i se poate ataşa o mulţime închisă, care se numeşte* **închiderea** *acelei mulţimi, care constă din toate punctele mulţimii la care se adaugă punctele sale frontieră.*

În particular, când adăugăm unui domeniu D punctele sale frontieră obţinem o mulţime închisă pe care putem să o numim **domeniu închis** sau **continuu**.

Definiţia 4.1.8 *Punctul* $\mathbf{a} \in I\!\!R^2$ *se numeşte* **punct limită** *sau* **punct de acumulare** *al mulţimii $D \subset I\!\!R^2$ dacă există un şir de puncte din D, cu termeni diferiţi de* $\mathbf{a}$, *convergent la* $\mathbf{a}$.

Observaţia 4.1.4 *Un punct limită al unei mulţimi D poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii D.*

Se ştie că o mulţime este închisă dacă şi numai dacă îşi conţine toate punctele de acumulare.

Definiţia 4.1.9 *Mulţimea $D \subset I\!R^2$ se numeşte* **mărginită** *dacă poate fi inclusă întrun disc cu centrul întrun punct oarecare al spaţiului $I\!R^2$ deci, indiferent de $\mathbf{x}_0 \in I\!R^2$, există $r > 0$ astfel încât*

$$D \ \subset \ B(\mathbf{x}_0, r).$$

Definiţia 4.1.10 *O mulţime mărginită şi închisă în $I\!R^2$ se numeşte* **mulţime compactă** *în $I\!R^2$.*

Dacă D este o mulţime mărginită în $I\!R^2$, atunci mulţimea tuturor distanţelor $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ între punctele arbitrare $\mathbf{x} \in D$ şi $\mathbf{y} \in D$ este o mulţime de numere reale nenegative mărginită deoarece oricare din aceste distanţe nu poate fi mai mare decât diametrul discului în care este inclusă mulţimea D. Prin urmare, putem vorbi de marginea superioară a acestei mulţimi de numere.

Definiţia 4.1.11 *Se numeşte* **diametrul** *mulţimii mărginită $D \subset I\!R^2$ marginea superioară a mulţimii de numere nenegative $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in D,\ \mathbf{y} \in D\}$.*

Definiţia 4.1.12 *Fie D şi E două mulţimi arbitrare din $I\!R^2$. Se numeşte* **distanţa dintre mulţimile** *D şi E marginea inferioară $d(D, E)$ a mulţimii de numere reale nenegative $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, unde $\mathbf{x} \in D$, iar $\mathbf{y} \in E$.*

Dacă mulţimile D şi E au cel puţin un punct în comun (au intersecţie nevidă), atunci $d(A, B) = 0$. Reciproca acestei afirmaţii nu are loc în general. De exemplu, distanţa între hiperbola echilateră $x \cdot y = 1$ şi axa Ox este zero deşi aceste două mulţimi de puncte nu au nici un punct comun deoarece axa Ox nu intersectează hiperbola, ea fiind însă asimptota hiperbolei. În legătură cu această afirmaţie avem următorul rezultat.

Teorema 4.1.1 (**Separabilitatea mulţimilor închise**) *Dacă mulţimile D şi E sunt compacte şi disjuncte în $I\!R^2$, atunci $d(D, E) > 0$.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, adică $d(D,E) = 0$. Din Definiţia 4.1.12 şi teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi, rezultă că pentru fiecare $n \in I\!N^*$ există punctele $\mathbf{x}_n \in D$ şi $\mathbf{y}_n \in E$ astfel încât

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \;<\; \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Deoarece mulţimea D este mărginită rezultă că şirul de puncte $(\mathbf{x}_n)$ este mărginit şi, după lema lui Cesaro, admite un subşir

$$\mathbf{x}_{k_1},\;\; \mathbf{x}_{k_2},\;\; \cdots,\;\; \mathbf{x}_{k_n},\;\; \cdots$$

convergent la un punct $\mathbf{x}_0$. Corespunzător, şirul de puncte

$$\mathbf{y}_{k_1},\;\; \mathbf{y}_{k_2},\;\; \cdots,\;\; \mathbf{y}_{k_n},\;\; \cdots,$$

subşir al şirului $(\mathbf{y}_n)$, este convergent conform lui (4.1) la acelaşi punct $\mathbf{x}_0$.

Să demonstrăm că punctul $\mathbf{x}_0$ aparţine mulţimii D. Într-adevăr, pot exista două posibilităţi. Ori subşirul $(\mathbf{x}_{k_n})$ conţine o infinitate de puncte distincte, fapt care arată că $\mathbf{x}_0$ este punct limită al mulţimii D, prin urmare $\mathbf{x}_0 \in D$ deoarece D este o mulţime închisă ori, de la un rang înainte, toţi termenii subşirului sunt egali cu $\mathbf{x}_0$, caz în care limita este de asemeni $\mathbf{x}_0$, care din nou aparţine lui D. Limita celui de al doilea subşir este tot $\mathbf{x}_0$ şi aparţine lui E, deoarece şi E este mulţime închisă. Atunci, D şi E au un punct în comun ceea ce contrazice ipoteza teoremei. ∎

4.2 Aria figurilor plane

Prin **mulţime poligonală** înţelegem mulţimea constituită dintr–un număr finit de submulţimi ale lui $I\!R^2$ ale căror frontiere sunt linii frânte închise. Noţiunea de **arie a unei mulţimi poligonale** este bine cunoscută din geometria elementară. Aria unei mulţimi poligonale este un număr nenegativ care posedă următoarele proprietăţi:

1. (*monotonie*) Dacă P şi Q sunt două mulţimi poligonale, iar $P \subset Q$, atunci

   $$\text{aria } P \leq \text{aria } Q;$$

2. (*aditivitate*) Dacă P_1 şi P_2 sunt două mulţimi poligonale disjuncte şi $P_1 \cup P_2$ este reuniunea acestora, atunci
$$\text{aria }(P_1 \cup P_2) = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2;$$
3. (*invarianţă*) Dacă două mulţimi poligonale P_1 şi P_2 sunt congruente, atunci
$$\text{aria } P_1 = \text{aria } P_2.$$

Să extindem noţiunea de arie, cu păstrarea celor trei proprietăţi, la o clasă mai amplă de mulţimi plane. În acest scop considerăm mulţimea F, o submulţime a mulţimii $\mathbb{R}^2$. Vom considera de asemeni toate mulţimile poligonale P incluse în F şi toate mulţimile poligonale Q care includ mulţimea F. Primele mulţimi se vor numi **mulţimi scufundate** în mulţimea F, iar mulţimile din cea de a doua categorie formează ceea ce se numeşte **înfăşurătoarea** mulţimii F. Ariile mulţimilor scufundate în mulţimea F sunt mărginite superior, un majorant fiind aria oricărei mulţimi mărginite care face parte din înfăşurătoarea lui F. Mulţimea de numere reale nenegative care reprezintă ariile mulţimilor scufundate, fiind o mulţime majorată, admite o margine superioară
$$S_* = S_*(F) = \sup\{(\text{aria } P) : P \subset F\},$$
iar mulţimea ariilor mulţimilor care constituie înfăşurătoarea lui F posedă evident minoranţi şi ca atare admite margine inferioară
$$S^* = S^*(F) = \inf\{(\text{aria } Q) : Q \supset F\}.$$
Cantitatea S_* este cunoscută ca *măsura Jordan interioară* a mulţimii F, iar numărul S^* se numeşte *măsura Jordan exterioară* a aceleiaşi mulţimi. Aria oricărei mulţimi scufundate în F nu întrece aria oricărei mulţimi care înfăşoară pe F şi, ca urmare, avem
$$S_* \;\le\; S^*.$$
Dacă $S_* = S^* = S$, atunci valoarea comună S se numeşte *măsura Jordan* a mulţimii F. În acest caz mulţimea F se zice că este *carabilă* sau *măsurabilă Jordan*.

Astfel, am extins conceptul de arie de la o mulţime poligonală, care este evident o mulţime carabilă, la o mulţime mărginită oarecare din plan. Vom demonstra că cele trei proprietăţi ale ariilor mulţimilor poligonale se conservă şi pentru ariile mulţimilor oarecare mărginite din plan.

Vom stabili acum o condiţie necesară şi suficientă ca o mulţime mărginită să fie carabilă.

Teorema 4.2.1 *O figură plană mărginită F este carabilă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există două mulţimi poligonale $P \subset F$ şi $Q \supset F$ astfel încât*

$$\textit{aria}\ Q - \textit{aria}\ P < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă aceste mulţimi P şi Q există, atunci din (4.2) şi din

$$\text{aria}\ P \leq S_* \leq S^* \leq \text{aria}\ Q$$

rezultă

$$0 \leq S^* - S_* < \varepsilon > 0$$

şi fiindcă $\varepsilon > 0$ este ales arbitrar rezultă că $S_* = S^*$.

Reciproc, dacă $S_* = S^*$, atunci după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară şi superioară, pentru orice $\varepsilon > 0$ dat există o mulţime poligonală P, scufundată în F, şi o mulţime Q din înfăşurătoarea lui F, astfel încât

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{aria}\ P \leq S_*, \quad S^* \leq \text{aria}\ Q < S^* + \frac{\varepsilon}{2},$$

care implică (4.2), ceea ce completează demonstraţia teoremei. ∎

Mulţimea punctelor care aparţin unei mulţimi poligonale Q care înfăşoară mulţimea F şi nu aparţin mulţimii poligonale P, scufundată în F, este o mulţime poligonală având aria egală cu diferenţa dintre aria lui Q şi aria lui P. Această mulţime de puncte conţine frontiera mulţimii F. În consecinţă, condiţia din Teorema 4.2.1 implică că F este carabilă dacă şi numai dacă frontiera sa poate fi scufundată întro mulţime poligonală cu arie arbitrar de mică.

Cu ajutorul Teoremei 4.2.1 se poate stabili măsurabilitatea Jordan a unor mulţimi diferite de cele poligonale. O astfel de mulţime poate fi discul de rază r. Mulţimile P şi Q pentru disc pot fi mulţimile mărginite de poligoane regulate înscrise şi respectiv circumscrise discului, numărul n al laturilor acestor poligoane fiind suficient de mare. De altfel, acesta este modul în care, în geometria elementară, se obţine formula ariei discului de rază r.

Definiţia 4.2.1 *O mulţime de puncte din* $\mathbb{R}^2$ *se numeşte* **mulţime de arie nulă** *dacă ea poate fi scufundată într-o mulţime poligonală de arie arbitrar de mică.*

Observaţia 4.2.1 *O curbă în planul* Oxy *este o mulţime de arie nulă.*

Noţiunea din Definiţia 4.2.1 face ca Teorema 4.2.1 să poată fi reformulată în următoarea formă echivalentă.

Teorema 4.2.2 *Necesar şi suficient pentru ca mulţimea* F *să fie măsurabilă Jordan este ca frontiera sa să fie de arie nulă.*

Bazat pe această teoremă putem prezenta o clasă suficient de vastă de mulţimi carabile la care vom face referire în consideraţiile ulterioare. Pentru aceasta să ne amintim că o curbă plană (C) reprezentată parametric prin ecuaţiile

$$(C)\quad \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}\quad \alpha\leq t\leq\beta,$$

unde funcţiile $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ şi $\psi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ sunt continue, derivabile, cu derivate continuie sau continuie pe porţiuni este o curbă rectificabilă, lungimea L a acesteia fiind dată de integrala definită

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Lema 4.2.1 *Orice curbă plană rectificabilă este o mulţime de arie nulă.*

Demonstraţie. Fie (C) o curbă plană rectificabilă de lungime L. Divizăm curba în n părţi prin $n+1$ puncte astfel încât lungimea fiecărei părţi să fie L/n şi construim un pătrat de latură $2L/n$ cu centrul de simetrie în punctul de diviziune de ordin k, unde k ia toate valorile de la 1 până la $n+1$. Reuniunea acestor pătrate este o mulţime poligonală care înfăşoară curba (C) şi a cărei arie nu întrece suma ariilor pătrateleor construite, prin urmare nu este mai mare decât

$$\frac{4L^2}{n^2}(n+1).$$

Deoarece L este fixat şi n poate lua valori numere naturale oricât de mari dorim, curba (L) poate fi scufundată întro mulţime poligonală de arie extrem de mică şi ca atare aria lui (C) este egală cu zero. ∎

Corolarul 4.2.1 *Orice mulţime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe plane rectificabile este mulţime măsurabilă Jordan.*

Aceasta este clasa de mulţimi care o vom considera în continuare.

Observaţia 4.2.2 *Orice mulţime de puncte din plan, cu frontiera reprezentată ca o reuniune finită de curbe plane definite printr–o ecuaţie carteziană explicită de forma*

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

sau printr–o ecuaţie carteziană explicită de forma

$$x = g(y), \quad c \leq x \leq d,$$

unde funcţiile f şi g sunt funcţii continue, cu derivate continue pe porţiuni, este o mulţime măsurabilă în sens Jordan.

Avem acum pregătite toate condiţiile pentru a arăta că noţiunea de arie a unei mulţimi plane mărginită satisface proprietăţile de monotonie, aditivitate şi invarianţă.

În ce priveşte monotonia aceasta este implicată de însăşi definiţia ariei, demonstraţia sa putând fi uşor efectuată. Să stabilim aditivitatea.

Teorema 4.2.3 *Fie F_1 şi F_2 două figuri măsurabile Jordan având interioarele disjuncte şi fie F reuniunea lor. Atunci, F este carabilă şi*

$$\textit{aria } F = \textit{aria } F_1 + \textit{aria } F_2. \tag{4.3}$$

Demonstraţie. Măsurabilitatea Jordan a mulţimii F rezultă din Teorema 4.2.2 şi din faptul că frontiera lui F este o mulţime de arie nulă deoarece această frontieră este inclusă în reuniunea frontierelor mulţimilor F_1 şi F_2. Prin urmare, pentru a completa demonstraţia, trebuie să deducem egalitatea (4.3). Pentru aceasta considerăm mulţimile poligonale P_1 şi P_2 scufundate în respectiv mulţimile F_1 şi F_2 şi mulţimile poligonale Q_1 şi Q_2 care înfăşoară F_1 şi F_2 respectiv. Deoarece mulţimile poligonale P_1 şi P_2 nu se intersectează, aria mulţimii poligonale P rezultată din reuniunea acestora este egală cu suma ariilor lor. Reuniunea Q a mulţimilor Q_1 şi Q_2, care pot avea intersecţie nevidă, are arie care nu întrece suma ariilor acestora. Prin urmare, avem:

$$\text{aria } P = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 \leq \text{aria } F \leq \text{aria } Q \leq \text{aria } Q_1 + \text{aria } Q_2;$$

$$\text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 \leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2 \leq \text{aria } Q_1 + \text{aria } Q_2.$$

Deoarece diferenţele (aria Q_1 − aria P_1) şi (aria Q_2 − aria P_2) pot fi făcute arbitrar de mici rezultă că are loc egalitatea (4.3). Astfel aditivitatea este demonstrată. ■

Proprietatea de invarianţă a măsurabilităţii Jordan a unei mulţimi din $I\!R^2$ este de asemeni evidentă. În plus, remarcăm o altă proprietate a mulţimilor plane mărginite şi măsurabile Jordan.

Teorema 4.2.4 *Intersecţia a două mulţimi din* $I\!R^2$*, măsurabile în sensul lui Jordan, este o mulţime carabilă.*

Demonstraţie. Dacă F_1 şi F_2 sunt două mulţimi carabile şi F este intersecţia lor, atunci fiecare punct frontieră este un punct frontieră al cel puţin uneia din frontierele mulţimilor F_1 şi F_2. Afirmaţia teoremei rezultă din Teorema 4.2.2 şi din faptul că aria unei reuniuni de mulţimi de arie nulă este egală cu zero. ■

Noţiunea de arie a fost introdusă în conformitate cu ideea lui Jordan, deşi această introducere are unele dezavantaje. Într-adevăr, după cum s–a arătat, reuniunea a două mulţimi carabile este o mulţime carabilă. Aceasta implică imediat că reuniunea unui număr finit de mulţimi carabile este o mulţime carabilă. Proprietatea însă nu se mai păstrează dacă numărul mulţimilor măsurabile în sens Jordan este infinit. Această situaţie face necesară introducerea unei alte măsuri în care să se păstreze proprietatea de mai sus. O astfel de măsura poate fi *măsura Lebesgue*, pe care nu o vom prezenta aici deoarece în continuare vom considera doar integrabilitatea funcţiilor definite pe mulţimi măsurabile în sens Jordan.

4.3 Definiţia integralei duble

Fie D o mulţime mărginită şi carabilă din planul cartezian raportat la reperul ortogonal xOy şi

$$f : D \to I\!R \tag{4.4}$$

o funcţie reală de două variabile reale definită şi mărginită pe mulţimea D.

Definiţia 4.3.1 *Se numeşte* **partiţie** *sau* **divizare** *a mulţimii D mulţimea*

$$\Delta = \{D_1,\ \ D_2,\ \ \cdots,\ \ D_n\} \tag{4.5}$$

de submulţimi a lui D cu proprietăţile:

1. *interioarele oricăror două mulţimi distincte sunt disjuncte;*
2. *reuniunea tuturor mulţimilor partiţiei, numite* **elemente**, *în număr de* $n \in I\!N^*$, *este mulţimea* D.

Observaţia 4.3.1 *O partiţie a mulţimii mărginite* $D \subset I\!R^2$, *măsurabilă în sens Jordan, se poate realiza cu ajutorul unor elemente a două familii uniparametrice de curbe plane. De exemplu, aceste curbe plane pot fi unele paralele la axele de coordonate* Ox *şi* Oy.

Deoarece mulţimea D este mărginită rezultă că fiecare din elementele partiţiei Δ este mărginită şi ca atare mulţimea tuturor diametrelor $d(D_i)$ are un cel mai mare element.

Definiţia 4.3.2 *Fie mulţimea mărginită şi carabilă* D *şi* Δ *o partiţie a acesteia. Se numeşte* **norma** *sau* **fineţea** *divizării* Δ *numărul real* $\nu(\Delta)$ *sau* $\|\Delta\|$ *egal cu cel mai mare dintre diametrele elementelor partiţiei.*

Considerăm o partiţie Δ a mulţimii D şi suma de forma

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, S_i, \tag{4.6}$$

unde S_i este aria lui D_i, iar (ξ_i, η_i) este un punct arbitrar aparţinând lui D_i, numit **punct intermediar**.

Definiţia 4.3.3 *Sumele din relaţia* (4.6) *se numesc* **sume integrale** *asociate funcţiei* f *din* (4.4), *modului de divizare* Δ *de forma* (4.5) *al mulţimii* D *şi sistemului de puncte intermediare* $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ *ales arbitrar.*

Definiţia 4.3.4 *O partiţie* $\Delta' = \{D'_1, D'_2, \cdots, D'_n\}$ *a mulţimii* D *se spune că este o* **rafinare** *a divizării* Δ *din* (4.5) *dacă fiecare element* D_i *al partiţiei* Δ *este sau element al partiţiei* Δ' *sau reuniunea câtorva elemente* D'_j *din partiţia* Δ'.

Observaţia 4.3.2 *Există o infinitate de sume integrale căci există o infinitate de moduri de a diviza mulţimea* D *şi în cadrul fiecărei partiţii există o infinitate de posibilităţi de a alege punctele intermediare.*

Introducem următoarea definiţie a limitei sumelor integrale (4.6).

Definiţia 4.3.5 *Numărul real J este* **limita sumelor integrale** (4.6) *când $\|\Delta\| \to 0$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi partiţia Δ a mulţimii D cu*

$$\|\Delta\| \;<\; \delta \tag{4.7}$$

şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ să avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \;-\; J| \;<\; \varepsilon. \tag{4.8}$$

Inegalitatea (4.8) trebuie să fie adevărată pentru toate sumele integrale $\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$ care corespund partiţiei Δ din (4.5) ce satisface condiţia (4.7), indiferent de alegerea punctelor intermediare.

Definiţia 4.3.6 *Funcţia* (4.4) *se numeşte* **integrabilă** *pe D dacă limita sumelor integrale* (4.6) *pentru $\|\Delta\| \to 0$ există şi este finită.*

Definiţia 4.3.7 *Dacă funcţia* (4.4) *este integrabilă pe D, atunci numărul real*

$$J = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, S_i \tag{4.9}$$

se numeşte **integrala dublă a funcţiei** f **pe mulţimea** D *şi se notează cu unul din simbolurile*

$$J = \iint\limits_D f(x, y) d\omega; \quad J = \iint\limits_D f(x, y) dxdy. \tag{4.10}$$

Funcţia f se numeşte *integrand*, D se numeşte *domeniu de integrare*, iar expresiile $f(x, y)d\omega$ şi $f(x, y)dxdy$ se numesc *elemente de integrare*.

Să găsim condiţii care, impuse funcţiei (4.4), asigură existenţa integralei duble (4.10). Aceste condiţii le vom numi condiţii de integrabilitate.

Pentru a stabili condiţii de integrabilitate introducem *sumele Darboux inferioară şi superioară*. În acest sens notăm prin M_i şi m_i marginea superioară şi respectiv marginea inferioară a valorilor restricţiei funcţiei f la elementul D_i al partiţiei Δ din (4.5).

Definiţia 4.3.8 *Sumele:*

$$\Omega = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, S_i; \quad \omega = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, S_i \tag{4.11}$$

se numesc respectiv **suma Darboux superioară** *şi* **suma Darboux inferioară** *a funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ a mulţimii carabile D.*

Observaţia 4.3.3 *Din modul cum au fost definite sumele Darboux* (4.11) *rezultă că oricare ar fi divizarea* Δ *a mulţimii* D, *avem*

$$\Omega \;\geq\; \omega.$$

Să enumerăm proprietăţile fundamentale ale sumelor Darboux.

1. Pentru orice divizare Δ a mulţimii D şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare, suma integrală corespunzătoare se află cuprinsă între suma Darboux inferioară şi suma Darboux superioară corespunzătoare partiţiei Δ,

$$s_\Delta(f) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\, S_i \;\leq\; S_\Delta(f).$$

2. În procesul de rafinare a divizării mulţimii D, sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc. Aceasta înseamnă că dacă ω şi Ω sunt sumele Darboux corespunzătoare modului de divizare Δ, iar ω' şi Ω' sunt sumele Darboux corespunzătoare partiţiei Δ', atunci
$$\omega \;\leq\; \omega' \;\leq\; \Omega' \;\leq\; \Omega.$$

3. Fie Δ' şi Δ'' două diviziuni arbitrare a mulţimii D şi fie ω', Ω' şi ω'', Ω'', sumele Darboux corespunzătoare asociate acestor partiţii. Atunci, avem
$$\omega' \leq \Omega'' \quad \text{şi} \quad \omega'' \leq \Omega'$$
adică orice sumă Darboux inferioară asociată funcţiei f şi corespunzătoare unui mod de divizare nu poate întrece suma Darboux superioară asociată aceleiaşi funcţii şi corespunzătoare oricărui alt mod de divizare a mulţimii D.

4. Mulţimea tuturor sumelor Darboux superioare corespunzătoare funcţiei (4.4) este mărginită inferior, un minorant al acesteia fiind oricare dintre sumele Darboux inferioare asociate aceleiaşi funcţii.

5. Mulţimea tuturor sumelor Darboux inferioare corespunzătoare funcţiei f din (4.4) este mărginită superior, un majorant al acestei mulţimi fiind oricare din sumele Darboux superioare asociate funcţiei f.

6. Dacă notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea divizărilor mulţimii D, atunci există numerele reale:

$$\overline{J} = \inf\{S_\Delta(f) : \Delta \in \mathcal{D}\}; \quad \underline{J} = \sup\{s_\Delta(f) : \Delta \in \mathcal{D}\},$$

care se numesc *integralele Darboux superioară* şi respectiv *inferioară* ale funcţiei $f : D \subset I\!R^2 \to I\!R$.

Teorema 4.3.1 *Integralele Darboux inferioară şi superioară ale funcţiei reale de două variabile reale f definită pe mulţimea carabilă $D \subset I\!R^2$ satisfac inegalitatea*

$$\underline{J} \ \leq \ \overline{J}.$$

Demonstraţie. Presupunem contrariul şi anume că $\underline{J} > \overline{J}$. Atunci, există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\underline{J} \ - \ \overline{J} \ > \ \varepsilon \ > \ 0. \tag{4.12}$$

Pe de altă parte, după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară şi superioară, putem spune că pentru $\varepsilon > 0$ de mai sus există o sumă Darboux superioară Ω_1 şi o sumă Darboux inferioară ω_2 astfel încât

$$\Omega_1 - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{şi} \quad \underline{J} - \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde deducem

$$\Omega_1 \ - \ \omega_2 + (\underline{J} \ - \ \overline{J}) \ < \ \varepsilon.$$

În consecinţă, în conformitate cu (4.12), avem

$$\Omega_1 \ - \ \omega_2 \ < \ 0$$

care contrazice proprietatea 3. a sumelor Darboux. ∎

4.4 Condiţii de integrabilitate

Proprietăţile sumelor Darboux inferioare şi superioare permit stabilirea unei condiţii necesare şi suficiente pentru integrabilitatea funcţiei reale f definită şi mărginită pe o mulţime carabilă din $I\!R^2$.

Lema 4.4.1 (**Darboux**) *Integrala superioară* $\overline{J}$ (*respectiv integrala inferioară* $\underline{J}$) *este limita pentru* $\|\Delta\| \to 0$ *a sumelor Darboux superioare* (*respectiv a sumelor Darboux inferioare*).

Demonstraţie. Introducem mai întâi noţiunea de **frontieră** a partiţiei Δ a mulţimii D. Dacă partiţia $\Delta \in \mathcal{D}$ este compusă din submulţimile D_i, atunci reuniunea $\partial\Delta$ a frontierelor ∂D_i ale mulţimilor D_i se numeşte frontiera partiţiei Δ. Prin urmare,

$$\partial\Delta = \partial D_1 \ \cup \ \partial D_2 \ \cup \ \cdots \cup \ \partial D_n.$$

Frontierele ∂D_i fiind de arie nulă oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$, rezultă că frontiera divizării $\partial\Delta$ este de arie nulă.

În plus, putem afirma că frontiera $\partial\Delta$ se poate prezenta în cele din urmă ca reuniune de curbe închise, care sunt mulţimi închise în $\mathbb{R}^2$, şi ca urmare $\partial\Delta$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}^2$.

Având în vedere cine este $\overline{J}$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o divizare Δ^* a mulţimii D cu proprietatea că suma Darboux superioară Ω^* satisface condiţia

$$0 \ \leq \ \Omega^* \ - \ \overline{J} \ < \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Frontiera $\partial\Delta^*$ a divizării Δ^* poate fi scufundată întro mulţime poligonală Q de arie mai mică decât $\varepsilon/(2M)$, unde $M = \sup\{\,|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$, incluziunea $\partial\Delta^* \subset Q$ fiind strictă. Frontiera $\partial\Delta^*$ şi frontiera mulţimii poligonale Q sunt două mulţimi închise în $\mathbb{R}^2$ care nu au puncte comune. În consecinţă, distanţa dintre aceste mulţimi este un număr pozitiv α. Considerăm acum o partiţie arbitrară $\Delta \in \mathcal{D}$ cu proprietatea $\|\Delta\| < \alpha$. Elementele partiţiei Δ, deci mulţimile D_i, au următoarea proprietate evidentă: dacă D_i şi $\partial\Delta^*$ au cel puţin un punct în comun, atunci mulţimea D_i este strict inclusă în interiorul mulţimii poligonale Q. Asemenea mulţimi componente ale partiţiei Δ vor fi numite *elemente frontieră*, iar toate celelalte elemente, care nu se încadrează în această categorie, le vom numi *elemente interioare*. Să arătăm acum că oricărei partiţii $\Delta \in \mathcal{D}$ cu $\|\Delta\| < \alpha$, corespunde o sumă Darboux superioară Ω care diferă de integrala Darboux superioară $\overline{J}$ cu mai puţin decât ε. Pentru aceasta împărţim termenii care intră în definiţia sumei Ω în două grupe de termeni

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} M_i\, S_i = \sum{}' M_i'\, S_i' + \sum{}'' M_i''\, S_i'',$$

unde sumarea în penultima sumă se extinde la toate elementele interioare în timp ce, în ultima sumă, sumarea se referă la elementele frontieră. Să evaluăm separat fiecare din aceste sume. Fiecare element interior al partiţiei Δ este strict inclus întrun element al partiţiei Δ^*. Fiindcă marginea superioară M_i' a valorilor funcţiei $f(x,y)$, pe un element interior al divizării Δ, nu depăşeşte marginea superioară a aceleiaşi funcţii pe elementul divizării Δ^* care conţine elementul interior respectiv, rezultă că partea din suma Darboux superioară Ω referitoare la elementele interioare nu poate întrece pe Ω^*, adică

$$\sum{}' M_i' \, S_i' \;\; \leq \;\; \Omega^*.$$

Mai departe, avem inegalităţile evidente:

$$|M_i''| \leq M\,; \quad \sum{}'' S_i'' < \text{aria } Q < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

În consecinţă, vom avea satisfăcută inegalitatea

$$|\sum{}'' M_i'' S_i''| \;\; < \;\; \frac{\varepsilon}{2}$$

şi ca urmare,

$$\Omega = \sum{}' M_i' \, S_i' + \sum{}'' M_i'' \, S_i'' \;\; \leq \;\; \Omega^* + \frac{\varepsilon}{2} \;\; < \;\; \overline{J} + \varepsilon.$$

Aşadar am demonstrat că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un număr α care depinde de ε încât oricare ar fi divizarea Δ cu $\|\Delta\| < \alpha$, avem

$$\Omega \;\; - \;\; \overline{J} \;\; < \;\; \varepsilon$$

rezultat care arată că limita, pentru norma divizărilor tinzând la zero, a sumelor Darboux superioare este integrala superioară Darboux. În mod asemănător se demonstrează şi cealaltă afirmaţie a lemei. ■

Teorema 4.4.1 (**Criteriul de integrabilitate a lui Darboux**). *O funcţie mărginită $f(x,y)$ definită pe o mulţime mărginită şi carabilă $D \subset I\!\!R^2$ este integrabilă pe D dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi partiţia Δ a mulţimii D cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, să avem*

$$S_\Delta(f) \;\; - \;\; s_\Delta(f) \;\; < \;\; \varepsilon. \tag{4.13}$$

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Dacă f este o funcţie mărginită şi integrabilă pe mulţimea plană mărginită şi carabilă D, atunci există numărul real J

$$J = \iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

iar acest număr este limita sumelor integrale Riemann pentru $\|\Delta\| \to 0$, care nu depinde de alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, unde $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ este o divizare a mulţimii D. De aici rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$ cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ are loc inegalitatea

$$|\,\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \; - \; J\,| \; < \; \frac{\varepsilon}{2},$$

care poate fi scrisă şi în forma echivalentă

$$J \; - \; \frac{\varepsilon}{2} \; < \; \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \; < \; J \; + \; \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.14}$$

De asemenea, ştim că sumele Darboux superioară şi inferioară corespunzătoare partiţiei $\Delta \in \mathcal{D}$ sunt respectiv marginea superioară şi marginea inferioară a sumelor integrale Riemann asociate acelei divizări. Prin urmare, putem lua o divizare fixată $\Delta \in \mathcal{D}$ şi să alegem punctele intermediare $(\xi_i', \eta_i') \in D_i$ şi $(\xi_i'', \eta_i'') \in D_i$ astfel încât să fie satisfăcute următoarele inegalităţi:

$$\Omega - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i', \eta_i')\, S_i < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'', \eta_i'')\, S_i - \omega < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Fiecare din cele două sume integrale Riemann din (4.15) satisface condiţia (4.14) şi, ca urmare, din (4.15) obţinem rezultatul dorit, adică (4.13).
Condiţia este suficientă. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$ cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ să avem (4.13), atunci $\underline{J} = \overline{J}$.

Într-adevăr, din proprietăţile sumelor Darboux avem

$$s_\Delta(f) \; \leq \; \underline{J} \; \leq \; \overline{J} \; \leq \; S_\Delta(f) \tag{4.16}$$

pentru orice diviziune Δ a lui D. Dacă $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, din inegalitatea (4.16) şi din condiţia (4.13), obţinem

$$0 \; \leq \; \overline{J} \; - \; \underline{J} \; \leq \; S_\Delta(f) \; - \; s_\Delta(f) \; < \; \varepsilon$$

adică $0 \leq \overline{J} - \underline{J} < \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost presupus arbitrar rezultă că $\underline{J} = \overline{J}$.

Să notăm valoarea comună a cantităţilor $\underline{J}$ şi $\overline{J}$ cu J şi să arătăm că J este limita pentru $\|\Delta\| \to 0$ a sumelor integrale Riemann asociate funcţiei f, adică este integrala dublă a funcţiei f pe domeniul de integrare D. După lema lui Darboux, J este limita comună pentru $\|\Delta\| \to 0$ a sumelor Darboux inferioare şi superioare asociate funcţiei f şi modurilor de divizare $\Delta \in \mathcal{D}$, adică

$$J = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s_\Delta(f) \;=\; \lim_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta(f). \tag{4.17}$$

Pe de altă parte, avem

$$s_\Delta(f) \;\leq\; \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \;\leq\; S_\Delta(f) \tag{4.18}$$

oricare ar fi divizarea $\Delta \in \mathcal{D}$ şi oricare ar fi punctele intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.

Trecerea la limită în (4.18) pentru $\|\Delta\| \to 0$ şi folosirea lui (4.17) conduce la rezultatul dorit. ∎

Observaţia 4.4.1 *Din criteriul de integrabiliate a lui Darboux rezultă că o funcţie reală f, definită şi mărginită pe o mulţime mărginită şi carabilă din $I\!R^2$, este integrabilă pe D, dacă şi numai dacă integralele Darboux corespunzătoare, $\underline{J}$ şi $\overline{J}$ sunt egale. Valoarea comună a celor două integrale $J = \underline{J} = \overline{J}$ este tocmai integrala lui f pe domeniul de integrare D.*

4.5 Clase de funcţii integrabile

În cele ce urmează vom considera funcţii definite pe mulţimi mărginite şi închise, deci mulţimi compacte în $I\!R^2$, care sunt carabile.

Aplicând Teorema 4.4.1, vom stabili integrabilitatea unor clase importante de funcţii prima dintre ele fiind clasa funcţiilor continue.

Teorema 4.5.1 *Orice funcţie continuă f definită pe mulţimea compactă $D \subset I\!R^2$ este integrabilă pe D.*

Demonstraţie. Fie $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ o divizare oarecare a lui D. Deoarece funcţia f este continuă pe D, va fi funcţie continuă pe fiecare domeniu compact D_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Însă, o funcţie continuă pe o mulţime compactă este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile. Prin urmare, funcţia f este mărginită pe D_i şi îşi atinge marginile. Putem afirma că există două puncte $\mathbf{x}'_i = (x'_i, y'_i)$ şi $\mathbf{x}''_i = (x''_i, y''_i)$ din D_i astfel încât să avem:

$$m_i = f(x'_i, y'_i); \quad M_i = f(x''_i, y''_i).$$

Rezultă

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\, S_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i))\, S_i.$$

Deoarece f este continuă pe o mulţime compactă ea este mărginită şi uniform continuă pe acea mulţime. Uniforma continuitate a funcţiei f implică că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice două puncte $\mathbf{x}' = (x', y')$ şi $\mathbf{y} = (x'', y'')$ cu

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ < \ \delta(\varepsilon)$$

să avem

$$|\, f(x', y') \ - \ f(x'', y'')\,| \ < \ \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Pentru orice diviziune Δ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ avem

$$d(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}''_i) \ < \ \delta(\varepsilon)$$

şi deci

$$|\, f(x'_i, y'_i) \ - \ f(x''_i, y''_i)\,| \ < \ \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Aşadar, dacă $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \sum_{i=1}^{n} |\, f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i)\,|\, S_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \cdot \text{aria } D = \varepsilon$$

adică $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, $(\forall)\ \Delta$, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$. Deci f este integrabilă pe D. ■

Condiţia de continuitate a integrantului este destul de restrictivă. De aceea, teorema următoare stabileşte existenţa integralei duble pentru o clasă de funcţii discontinue.

Teorema 4.5.2 *Dacă funcţia $f(x, y)$ este mărginită pe mulţimea compactă D şi este continuă peste tot în D cu excepţia unei mulţimi de arie nulă, atunci ea este integrabilă pe D.*

Demonstraţie. Luăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din ipoteză, $f(x,y)$ este mărginită, aceasta însemnând că există un număr real K astfel încât $|f(x,y)| \leq K$. Să scufundăm partea din mulţimea D, unde funcţia f este discontinuă, întro mulţime poligonală Q de arie mai mică decât $\varepsilon/(4K)$, astfel încât această mulţime să fie strict inclusă în mulţimea poligonală Q. Notăm cu $\widetilde{D}$ partea din domeniul de integrare D care nu este inclusă în interiorul lui Q. Punctele frontieră ale mulţimii poligonale Q care aparţin lui D sunt situate în $\widetilde{D}$ şi prin urmare $\widetilde{D}$ este mulţime închisă şi mărginită deci compactă. Restricţia funcţiei f la mulţimea compactă $\widetilde{D}$ este continuă prin urmare este uniform continuă. Alegem $\delta > 0$ astfel încât oscilaţia funcţiei f în orice parte a mulţimii $\widetilde{D}$, cu diametrul mai mic decât δ, să fie mai mică decât $\varepsilon/(2S)$, unde S este aria lui D. Considerăm acum o partiţie $\Delta = \{D_i : i = \overline{1,n}\}$ a domeniului de integrare D cu proprietatea ca primul element D_1 să coincidă cu Q, iar toate celelalte element să aibă diametrele mai mici decât δ şi să evaluăm diferenţa $\Omega - \omega$ pentru această divizare. Avem

$$\Omega - \omega = M_1S_1 - m_1S_1 + \sum_{i=2}^{n}(M_i - m_i)S_i < (M_1 - m_1)\frac{\varepsilon}{4K} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\varepsilon}{2S}\,S_i.$$

Însă $M_1 - m_1 \leq 2K$ şi $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{\varepsilon}{2S}\,S_i < S$, astfel că

$$\Omega - \omega \;<\; 2K\frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2S}\,S = \varepsilon.$$

Numărul $\varepsilon > 0$ fiind ales arbitrar, în baza Teoremei 4.4.1 funcţia f este integrabilă pe submulţimea compactă D a lui $\mathbb{R}^2$. ∎

4.6 Proprietăţile integralei duble

Proprietăţile fundamentale ale integralei duble sunt complet analoage proprietăţilor integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx$$

şi de aceea vom enumera aceste proprietăţi urmând a da demonstraţia doar pentru una din ele.

1. Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile pe domeniul de integrare D, iar λ şi μ sunt constante reale arbitrare, atunci funcţia $\lambda\, f+\mu\, g$ este integrabilă pe D şi

$$\iint\limits_{D} (\lambda\, f + \,\mu\, g)(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy + \mu \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy.$$

   Aceasta este proprietatea de *liniaritate* a integralei duble.

2. Dacă $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1, D_2 sunt mulţimi compacte în $I\!R^2$ care nu au puncte interioare comune şi funcţia $f : D \to I\!R$ este integrabilă pe D, atunci f este integrabilă pe fiecare din mulţimile D_1 şi D_2 şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

   Aceasta este proprietatea de *aditivitate* a integralei duble ca funcţie de domeniu de integrare.

3. Dacă f este integrabilă pe D şi

$$f(x,y) \;\;\geq\;\; 0, \quad (\forall)\;\, (x,y) \in D,$$

   atunci integrala dublă din funcţia f satisface inegalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \;\;\geq\;\; 0.$$

4. Dacă f şi D sunt integrabile pe D şi

$$f(x,y) \;\;\leq\;\; g(x,y), \quad (\forall)\;\, (x,y) \in D,$$

   atunci între integralele celor două funcţii avem inegalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \;\;\leq\;\; \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy.$$

   Aceasta este proprietatea de *monotonie* a integralei duble. Ea implică următoarele două proprietăţi.

5. (*evaluarea valorii absolute a integralei duble*). Dacă f este integrabilă pe D, atunci funcţia valoarea absolută a lui f este integrabilă pe D şi

$$\Big| \iint\limits_D f(x,y)dxdy\Big| \ \leq \ \iint\limits_D |\, f(x,y)\,| dxdy.$$

6. (*teorema valorii medii*). Dacă o funcţie f este integrabilă pe D şi satisface inegalitatea

$$m \ \leq \ f(x,y) \ \leq \ M, \quad (\forall)\ (x,y) \in D,$$

iar S este aria lui D, atunci

$$m\,S \ \leq \ \iint\limits_D f(x,y)dxdy \ \leq \ M\,S.$$

Dacă funcţia f este în plus continuă pe D, atunci teorema valorii medii devine

7. Dacă f este funcţie continuă pe domeniul compact de integrare D, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$, astfel încât

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\,S.$$

8. Este evidentă egalitatea

$$\iint\limits_D dxdy = \text{aria } D = S.$$

Demonstraţia teoremei valorii medii pentru funcţii continue. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D, rezultă că f este mărginită pe D şi îşi atinge marginile. Prin urmare, există punctele $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1) \in D$, $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2) \in D$ astfel încât

$$m = f(x_1,y_1), \quad M = f(x_2,y_2),$$

unde m şi M sunt marginile lui f. Pentru simplitate, să presupunem că ambele puncte sunt în interiorul domeniului de integrare D, demonstraţia fiind ceva mai complicată dacă unul sau ambele puncte $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ se situează pe frontiera lui D. În baza uneia din proprietăţile de mai sus, avem

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS,$$

de unde rezultă

$$m \;\leq\; \frac{\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S} \;\leq\; M.$$

Notând

$$\mu = \frac{\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S}$$

avem evident inegalităţile

$$m \;\leq\; \mu \;\leq\; M.$$

Fie Γ o curbă a cărei imagine este complet conţinută în D şi având capetele $A_1(x_1,x_2)$ şi $A_2(x_2,y_2)$. Existenţa unei astfel de curbe rezultă chiar din definiţia noţiunii de domeniu. Dacă

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\,, \\ y = \psi(t)\,, \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

este o reprezentare parametrică a lui Γ, atunci funcţia compusă

$$g : [a,b] \to I\!R\,, \quad g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

este continuă pe compactul $[a,b]$. Din $f(x_1,y_1) = m$ şi $f(x_2,y_2) = M$ rezultă $g(a) = m$ şi $g(b) = M$.

Din proprietatea lui Darboux a funcţiilor continue deducem existenţa unei valori $t_0 \in [a,b]$ aşa fel încât $g(t_0) = \mu$, adică

$$f(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = \mu.$$

Dacă luăm $\xi = \varphi(t_0)$ şi $\eta = \psi(t_0)$ avem $\mu = f(\xi,\eta)$ şi teorema valorii medii pentru cazul când funcţia de integrat este continuă este demonstrată. ∎

4.7 Evaluarea integralei duble

4.7.1 Integrala dublă pe intervale bidimensionale închise

Teorema 4.7.1 *Dacă funcţia reală mărginită, de două variabile reale,*

$$f : [a, b] \times [c, d] \to I\!R, \quad -\infty < a < b < +\infty, \ -\infty < c < d < +\infty$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional închis

$$I_2 = [a, b] \times [c, d]$$

şi pentru orice $x \in [a, b]$ *există numărul real* $F(x)$ *definit de integrala depinzând de parametrul* x

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad x \in [a, b], \tag{4.19}$$

atunci funcţia $F : [a, b] \to I\!R$, *ale cărei valori sunt date în* (4.19), *este integrabilă Riemann şi are loc egalitatea*

$$\iint_{I_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y) dy \Big) dx. \tag{4.20}$$

Demonstraţie. Fie d' şi d'' diviziuni ale respectiv intervalelor $[a, b]$ şi $[c, d]$

$$\begin{aligned} d' &= \{x_0, x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n\}, \\ d'' &= \{y_0, y_1, \cdots, y_j, y_{j+1}, \cdots, y_m\}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

unde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_m = d.$$

Aceste diviziuni definesc diviziunea Δ a intervalului bidimensional închis I_2

$$\Delta = \{I_{00},\, I_{10},\, \cdots\, I_{ij},\, \cdots\, I_{nm}\}, \tag{4.22}$$

unde I_{ij} sunt intervalele bidimensionale închise

$$I_{ij} = [x_i,\, x_{i+1}] \times [y_j,\, y_{j+1}], \qquad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Notăm

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y):\ (x,y)\in I_{ij}\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y):\ (x,y)\in I_{ij}\}.$$

Aceste cantităţi sunt numere reale deoarece funcţia f este mărginită pe fiecare din intervalele bidimensioanle închise I_{ij}.

Deoarece se urmăreşte a se demonstra că funcţia F definită de (4.19) este integrabilă Riemann va trebui să considerăm sumele integrale Riemann corespunzătoare tuturor diviziunilor d' de forma (4.20) ale intervalului $[a,b]$, pentru alegeri arbitrare ale punctelor intermediare $\xi_i \in [x_i,\, x_{i+1}]$. Aceste sume au forma

$$\sigma_{d'}(F,\,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1}-x_i). \tag{4.23}$$

Dacă ţinem seama de modul cum este definită funcţia F şi de proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei Riemann, avem

$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i,\,y)dy\ =\ \sum_{i=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,\,y)dy. \tag{4.24}$$

Aplicând formula de medie pentru integralele simple care intră în membrul al doilea din (4.24) deducem că există numerele reale μ_{ij}, cu $m_{ij}\le\mu_{ij}<M_{ij}$, astfel încât

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,\,y)dy = \mu_{ij}(y_{j+1}-y_j). \tag{4.25}$$

Folosind acum (4.25) în (4.23) constatăm că suma Riemann $\sigma_{d'}(F,\,\xi_i)$ se scrie în final în forma

$$\sigma_{d'}(F,\,\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\mu_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Dacă ţinem seama de inegalităţile

$$m_{ij}\le\mu_{ij}\le M_{ij},\quad (i=\overline{0,n-1},\quad j=\overline{0,m-1})$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)\le\sigma_{d'}(F,\,\xi_i)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Dar prima sumă din aceste inegalităţi este tocmai suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la diviziunea Δ din (4.22)

$$s_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Ultima sumă din inegalităţile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la aceeaşi diviziune Δ

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Avem deci inegalăţile $s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{d'}(F,\, \xi_i) \leq S_{\Delta}(f)$ pentru orice diviziune Δ de forma (4.22) şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i.

Fie acum $(d'_k)_{k\in I\!N^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că şirul normelor acestor diviziuni $(\|d\text{"}_k\|)_{k\in I\!N^*}$ este convergent la zero. Fie de asemeni $(d''_k)_{k\in I\!N^*}$ un şir de diviziuni ale lui $[c,d]$ cu $\|d''_k\| \to 0$. Notăm cu Δ_k diviziunea intervalului bidimensional închis $I_2 = [a,b]\times[c,d]$ definită de diviziunile d'_k şi d''_k. Se vede imediat că din condiţiile $\|d'_k\| \to 0$ şi $\|d''_k\| \to 0$ rezultă $\|\Delta_k\| \to 0$. Pentru fiecare k avem inegalităţile

$$s_{\Delta_k}(f) \leq \sigma_{d'_k}(F,\, \xi_i) \leq S_{\Delta_k}(f). \tag{4.26}$$

Funcţia f fiind presupusă integrabilă pe I_2, aplicând criteriul de integrabilitate a lui Darboux, avem

$$\lim_{k\to\infty} S_{\Delta_k}(f) = \lim_{k\to\infty} s_{\Delta_k}(f) = \iint_{I_2} f(x,y)dxdy. \tag{4.27}$$

Trecând la limită în (4.26) pentru $k \to +\infty$ şi ţinând cont de (4.27) obţinem

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{d'_k}(F,\, \xi_i) = \iint_{I_2} f(x,y)dxdy. \tag{4.28}$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei pentru funcţiile reale de o variabilă reală

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{d'_k}(F,\, \xi_i) = \int_a^b F(x)dx. \tag{4.29}$$

Din egalităţile (4.28) şi (4.29) obţinem (4.21). De obicei se foloseşte notaţia

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{4.30}$$

Folosind notaţia (4.30) constatăm că (4.21) se scrie în forma

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{4.31}$$

Putem spune că (4.22) sau (4.31) reprezintă *formula de calcul a integralei duble pe un interval bidimensional închis.* Observăm că integrala dublă pe un interval bidimensional închis este o iteraţie de integrale simple adică un calcul succesiv a două integrale Riemann ale unor funcţii reale de o variabilă reală, prima dintre ele fiind o integrală depinzând de parametru. ∎

În mod asemănător se demonstrează

Teorema 4.7.2 *Dacă funcţia reală mărginită, de două variabile reale,*

$$f : [a,b] \times [c,d] \to I\!R, \quad -\infty < a < b < +\infty, \ -\infty < c < d < +\infty$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional închis $I_2 = [a,b] \times [c,d]$ *şi pentru orice* $y \in [c,d]$ *există numărul real* $G(y)$ *definit de integrala depinzând de parametrul* y

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

atunci funcţia

$$G : [c,d] \to I\!R, \quad G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \ \ y \in [c,d]$$

este integrabilă Riemann şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy. \tag{4.32}$$

Folosind şi aici o notaţie asemănătoare lui (4.30), şi anume

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

vedem că relaţia (4.32) se scrie în forma

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{4.33}$$

Relaţia (4.33) reprezintă de asemeni o formulă de calcul a integralei duble din funcţia f pe intervalul bidimensional închis I_2.

Observaţia 4.7.1 *Când sunt satisfăcute ipotezele din ambele teoreme de mai sus, avem*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy. \tag{4.34}$$

Prima egalitate din (4.34) *a fost demonstrată în teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru.*

Observaţia 4.7.2 *Dacă* $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ *şi* $g : [a,b] \to I\!R$, $h : [c,d] \to I\!R$ *sunt integrabile Riemann, atunci* f *este integrabilă pe intervalul bidimensional închis* $I_2 = [a,b] \times [c,d]$ *şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy,$$

relaţie care arată că în acest caz particular integrala dublă este un produs de integrale simple.

4.7.2 Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa Oy

Definiţia 4.7.1 *Mulţimea* $D_y \subset I\!R^2$ *definită de*

$$D_y = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \ (\forall)\, x \in [a,b]\}, \tag{4.35}$$

unde φ_1 *şi* φ_2 *sunt funcţii continue pe* $[a,b]$, *se numeşte* **domeniu simplu în raport cu axa** Oy.

Observaţia 4.7.3 *Frontiera domeniului simplu în raport cu axa Oy definit în relaţia* (4.35) *este curba netedă pe porţiuni* (C^+) *compusă din arcele* (AB), (CD) *şi din segmentele de dreaptă* $\overline{BC}$ *şi* $\overline{DA}$, *unde*

$$\begin{cases} (AB) = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ a \le x \le b, \ y = \varphi_1(x), \ x \in [a,b]\}, \\ \overline{BC} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ x = b, \ \varphi_1(b) \le y \le \varphi_2(b)\}, \\ (CD) = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ x \in [b,\, a], \ y = \varphi_2(x), \ x \in [b,\, a]\}, \\ \overline{DA} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ x = a, \ y \in [\varphi_2(b),\, \varphi_1(a)]\}. \end{cases} \tag{4.36}$$

Aşa cum a fost definită în (4.36), frontiera (C^+) a domeniului simplu în raport cu axa Oy este o curbă orientată pozitiv căci un observator care parcurge această frontieră în sensul indicat de (4.36) *vede* mulţimea D_y mereu la stânga sa. Să menţionăm în plus că este posibil ca unul sau ambele segmente de dreaptă din (4.36) să se reducă la un punct. Aceasta se va întâmpla când funcţiile φ_1 şi φ_2 au valori egale în $x = a$ sau (şi) în $x = b$.

Observaţia 4.7.4 *Dacă D_y este un domeniu simplu în raport cu axa Oy, atunci orice paralelă la axa Oy prin punctul $M(x,\, 0)$, unde $a < x < b$, intersectează frontiera acestei mulţimi în două puncte distincte P şi Q de coordonate: $P(x,\, \varphi_1(x))$; $Q(x,\, \varphi_2(x))$. Acestor puncte le vom spune: $P-$* **punct de intrare în** D_y; $Q-$ **punct de ieşire din** D_y.

Regula de calcul a unei integrale duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy este dată de teorema care urmează.

Teorema 4.7.3 *Fie D_y un domeniu simplu în raport cu axa Oy definit de inegalităţile:*

$$a \leq x \leq b; \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

şi f o funcţie reală mărginită definită pe mulţimea D_y.
Dacă f este integrabilă pe D_y şi pentru orice $x \in [a, b]$, fixat, există integrala depinzând de parametrul x

$$J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

atunci funcţia $J : [a, b] \to I\!\!R$ este integrabilă şi

$$\int_a^b J(x) dx = \iint\limits_{D_y} f(x, y) dx dy.$$

Demonstraţie. Înainte de a începe demonstraţia propriuzisă să observăm că având în vedere expresia valorii în $x \in [a, b]$ a funcţiei J, integrala definită a acesteia se poate scrie în una din următoarele forme

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \Big) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Concluzia teoremei devine

$$\iint\limits_{D_y} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \tag{4.37}$$

care reprezintă *formula de calcul a integralei duble* pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy.

Să procedăm acum la demonstraţia teoremei.

Fie $c = \min\{\varphi_1(x);\ x \in [a,b]\}$ şi $d = \max\{\varphi_2(x);\ x \in [a,b]\}$ care sunt numere reale în baza faptului că funcţiile φ_1 şi φ_2 sunt continue pe mulţimea compacă $[a,b]$. După teorema lui Weierstrass, funcţiile φ_1 şi φ_2 sunt mărginite şi îşi ating efectiv marginile. Atunci, intervalul bidimensional $I_2 = [a,b]\times[c,d]$ include domeniul simplu D_y.

Funcţia auxiliară

$$f^* : I_2 \to \mathbb{R}, \quad f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D_y \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \in I_2 \setminus D_y. \end{cases} \tag{4.38}$$

satisface ipotezele Teoremei 4.7.1. Într-adevăr, deoarece valorile sale coincid cu cele ale funcţiei f pe mulţimea D_y, rezultă că f^* este integrabilă pe D_y. Restricţia lui f^* la mulţimea $I_2 \setminus D_y$ fiind funcţia identic nulă, rezultă că este funcţie integrabilă pe $I_2 \setminus D_y$. Dacă la aceste două rezultate adăugăm proprietatea de aditivitate a integralei duble, deducem că funcţia f^* din (4.38) este integrabilă. Mai mult, avem

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_y} f^*(x,y)dxdy &= \iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy \\ \iint\limits_{I_2\setminus D_y} f^*(x,y)dxdy &= 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

În baza proprietăţii de aditivitate a integralei duble, din (4.39) rezultă

$$\iint\limits_{I_2} f^*(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy. \tag{4.40}$$

Pentru fiecare valoare a lui x situat între a şi b, are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_c^d f^*(x,y)dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)dy + \\ &+ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \end{aligned} \tag{4.41}$$

deoarece fiecare din integralele din membrul doi există. Apoi, dat fiind faptul că pe segmentele de dreaptă incluse în I_2 şi care unesc respectiv perechile de puncte (x, c), $(x, \varphi_1(x))$ şi $(x, \varphi_2(x))$, (x, d), valorile funcţiei f^* sunt egale cu zero, deducem că prima şi a treia integrală din membrul doi al relaţiei (4.41) sunt nule, fapt ce conduce la egaliatatea

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{4.42}$$

Funcţia f^* definită pe intervalul bidimensional I_2 satisface ipotezele Teoremei 4.7.1 şi, în consecinţă, integrala dublă din ea peste I_2 poate fi redusă la iteraţia de integrale simple

$$\iint\limits_{I_2} f^*(x, y) dxdy \;=\; \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y)\, dy. \tag{4.43}$$

Din (4.43), (4.40) şi (4.42), rezultă are loc relaţia (4.37). ■

4.7.3 Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa Ox

Definiţia 4.7.2 *Mulţimea $D_x \subset I\!\!R^2$ definită de*

$$D_x = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \; c \le y \le d, \; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \; (\forall)\, y \in [c, d]\},$$

unde ψ_1 şi ψ_2 sunt funcţii continue pe $[c, d]$ se numeşte **domeniu simplu în raport cu axa** Ox.

Observaţia 4.7.5 *Dacă D_x este un domeniu simplu în raport cu axa Ox, atunci orice paralelă la axa Ox prin punctul $M(0,\, y)$, unde $c < y < d$, intersectează frontiera acestei mulţimi în două puncte distincte P şi Q de coordonate: $P(\psi_1(y),\, y)$; $Q(\psi_2(y),\, y)$. Ca şi la domenii simple în raport cu cealaltă axă de coordonate, acestor puncte le vom spune: $P-$* **punct de intrare în** D_x; $Q-$ **punct de ieşire din** D_x.

Regula de calcul a unei integrale duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox este asemănătoare cu aceea prezentată în concluzia teoremei precedente şi este dată de teorema care urmează.

Teorema 4.7.4 *Fie D_x un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi f o funcţie reală mărginită definită pe mulţimea D_x. Dacă f este integrabilă pe D_x şi pentru orice $y \in [c, d]$ există integrala depinzând de parametrul y*

$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx,$$

atunci funcţia $I : [a, b] \to I\!R$ este integrabilă şi are loc egalitatea

$$\int_c^d I(y)dy = \iint\limits_{D_x} f(x, y)dxdy. \tag{4.44}$$

Observaţia 4.7.6 *Având în vefere că integrala definită din funcţia I pe intervalul $[c, d]$ se poate scrie în una din formele*

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx\Big)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$$

rezultă că egalitatea (4.44) *se poate scrie în forma echivalentă*

$$\iint\limits_{D_x} f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{4.45}$$

care constituie formula de calcul a integralei duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox.

Observaţia 4.7.7 *Dacă domeniul de integrare D nu este simplu în raport cu una din axele de coordonate, atunci descompunem pe D prin paralele la axele de coordonate întrun număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \cdots, D_n$, simple în raport cu aceeaşi axă de coordonate, astfel încât interioarele oricăror două astfel de domenii D_i şi D_j, cu $i \neq j$, să fie disjuncte, iar reuniunea lor să fie mulţimea D. Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei duble în raport cu domeniul de integrare, avem*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x, y)dxdy, \tag{4.46}$$

urmând ca, pentru toate integralele duble din membrul doi al egalităţii (4.46), *să se aplice una din formulele de calcul* (4.37) *sau* (4.45).

Exercițiul 4.7.1 *Să se scrie integrala dublă*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

unde D *este domeniul mărginit de curbele*

$$y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad y = \sqrt{2ax}, \quad x = 2a, \quad a > 0,$$

ca o iterație de integrale simple, în ambele ordini de integrare.

Soluție. Domeniul D este mărginit de semicercul superior (aflat în semiplanul $y \geq 0$) al cercului de rază a cu centrul în punctul $C(a, 0)$, de un segment din parabola cu vârful în origine având axa de simetrie semiaxa pozitivă Ox și de un segment din dreapta de ecuație $x = 2a$, paralelă cu axa Oy. Constatăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Oy deoarece putem scrie

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ 0 \leq x \leq 2a; \ \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}\}.$$

Prin urmare, folosind (4.37), avem

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\, dy.$$

Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Ox. Paralela $y = a$ la axa Ox descompune D în trei domenii D_1, D_2, D_3, simple în raport cu axa Ox, unde:

$$\begin{array}{lcl} D_1 & = & \{(x,y) \in I\!R^2 : \ 0 \leq y \leq a; \ \dfrac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2}\}; \\ D_2 & = & \{(x,y) \in I\!R^2 : \ 0 \leq y \leq a; \ a + \sqrt{a^2 - x^2} \leq x \leq 2a\}; \\ D_3 & = & \{(x,y) \in I\!R^2 : \ a \leq y \leq 2a; \ \dfrac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a\}, \end{array}$$

Ținând cont de (4.46), rezultă

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy,$$

integralele din membrul al doilea scriindu–se ca iteraţii de integrale simple, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy &= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}\}} f(x,y)dx;\\
\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy &= \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-x^2}}^{2a} f(x,y)dx;\\
\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy &= \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.
\end{aligned}$$

Astfel, am scris integrala dublă ca iteraţie de integrale simple în ambele ordini. De remarcat că prima scriere este mai simplă. ■

4.8 Formula integrală Riemann–Green

În anumite condiţii există o legătură între integrala curbilinie şi integrala dublă. Pentru a stabili această legătură introducem noţiunea de *frontieră orientată* a unui domeniu plan compact.

Definiţia 4.8.1 *Fie $D \subset I\!R^2$, un domeniu compact având frontiera $\Gamma = \partial D$ formată dintr–o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porţiuni. Sensul dat pe Γ de un observator care prin deplasare pe această curbă lasă la stânga domeniul D se numeşte* **sensul direct** *sau* **pozitiv** *de parcurgere a lui Γ. Curba Γ împreună cu sensul direct de parcurgere se numeşte curbă orientată direct sau pozitiv şi se notează cu Γ_+ sau cu Γ^+. În mod asemănător se introduce şi Γ_-.*

Când pe curba $\Gamma = \partial D$ s–a ales un sens de parcurs, curba devine orientată.

Definiţia 4.8.2 *Un domeniu plan a cărui frontieră este formată dintr–o singură curbă închisă netedă sau netedă pe porţiuni Γ se numeşte* **pozitiv orientat** *dacă curba Γ este pozitiv orientată. Dacă domeniul D este pozitiv orientat, atunci el se notează cu D_+ sau cu D^+. Analog se defineşte domeniul* **negativ orientat** *notat cu D_- sau D^-.*

Este posibil ca frontiera unui domeniu plan să fie formată din mai multe curbe plane închise netede sau netede pe porţiuni, disjuncte.

Definiţia 4.8.3 *Fie curbele plane simple, închise şi netede sau netede pe porţiuni* $\Gamma_0,\ \Gamma_1, \cdots,\ \Gamma_p$ *cu proprietăţile:*

1. *mulţimea din plan care are ca frontieră pe* Γ_0 *conţine în interiorul ei toate celelalte curbe* $\Gamma_i,\ i = \overline{1,p}$;

2. *oricare două curbe* Γ_i *şi* Γ_j *cu* $i \neq j,\ i,j \in \overline{1,p}$, *nu au puncte comune.*

Se numeşte **domeniu** $p+1$ **conex** *mulţimea* D *limitată de curba* Γ_0 *din care s–au scos mulţimile limitate de curbele* $\Gamma_1,\ \Gamma_2, \cdots,\ \Gamma_p$. *Frontiera unui astfel de domeniu* D *este reuniunea tuturor curbelor* $\Gamma_k,\ k \in \overline{0,n}$. *Domeniul se numeşte în plus* **compact** *dacă îşi conţine frontiera.*

Definiţia 4.8.4 *Domeniul compact* $p+1$ *conex* D *se numeşte* **pozitiv orientat** *dacă observatorul care se deplasează pe frontiera lui* D *vede mereu pe* D *la stânga sa.*

Un domeniu compact $p+1$ conex, pozitiv orientat, care se notează cu D_+, are *frontiera exterioară* Γ_0 orientată în sens contrar acelor de ceasornic în timp ce toate celelalte curbe $\Gamma_i,\ i = \overline{1,p}$, sunt parcurse de observator în sensul acelor de ceasornic. Pentru a intui forma unui domeniu $p+1$ conex am putea să spunem că acesta prezintă *găuri* sau *goluri*. Dacă $p = 1$, deci D are un gol, el se numeşte *dublu conex*, iar cel cu două goluri se va numi *domeniu triplu conex*. Domeniile simple în raport cu una din axele de coordonate sunt domenii simplu conexe. Un gol poate fi şi un punct.

În scopul stabilirii formulei integrale Riemann–Green pentru un domeniu compact oarecare, vom prezenta două rezultate ajutătoare, valabile în cazul domeniilor simple în raport cu una din axele de coordonate.

Teorema 4.8.1 *Fie* P *o funcţie reală definită şi continuă pe un domeniu compact pozitiv orientat* D_y, *simplu în raport cu axa* Oy *şi având frontiera* Γ_y. *Dacă derivata parţială a funcţiei* P *în raport cu variabila* y *există şi este continuă pe* D_y, *atunci are loc egalitatea*

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x,y)dx = \iint\limits_{D_y^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy. \tag{4.47}$$

Demonstraţie. Deoarece domeniul D_y este simplu în raport cu axa Oy, frontiera acestuia Γ_y este formată mai întâi din curbele netede pe porţiuni:

$$y = \varphi_1(x), \quad x \in [a, b]; \tag{4.48}$$

$$y = \varphi_2(x), \quad x \in [b, a], \tag{4.49}$$

unde funcţiile φ_1 şi φ_2 care definesc cele două porţiuni netede din frontiera Γ_y sunt continue, admit derivate continue pe porţiuni şi sunt astfel încât

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in [a, b]. \tag{4.50}$$

Cealaltă parte a frontierei Γ_y este constituită din două segmente de dreaptă situate respectiv pe drepte paralele cu axa Oy :

$$x = a, \quad \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a); \tag{4.51}$$

$$x = b, \quad \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b). \tag{4.52}$$

Pentru primul segment de dreaptă, abscisele punctelor sale sunt egale cu a, iar ordonatele sale y au proprietatea $\varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)$, în timp ce, pe cel de al doilea segment de dreaptă, abscisele punctelor sale sunt egale cu b, ordonatele fiind astfel încât $\varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)$. Dacă introducem punctele:

$$A(a, \varphi_1(a)); \quad B(b, \varphi_1(b)); \quad C(b, \varphi_2(b)); \quad D(a, \varphi_2(a)), \tag{4.53}$$

atunci frontiera pozitiv orientată Γ_y^+ a domeniului D_y^+ se poate scrie evident sub forma

$$\Gamma_y^+ = ABCDA,$$

în care sensul de parcurs este de la A spre B, apoi spre C, de aici spre D şi din nou la A.

Existenţa celor două integrale din (4.47) este asigurată de continuitatea funcţiilor de sub semnul integrală şi de ipoteza făcută asupra lui D.

Să calculăm integrala din membrul al doilea din (4.47). Avem,

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_y^+} -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy = \\ &= \int_a^b -P(x, y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b \Big(P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))\Big) dx. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_y^+} P(x,y)\,dx = \int_{AB} P(x,y)\,dx + \int_{\overline{BC}} P(x,y)\,dx + \\ + \int_{CD} P(x,y)\,dx + \int_{\overline{DA}} P(x,y)\,dx, \end{aligned} \tag{4.55}$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este cel specificat mai sus.

Integralele curbilinii de speţa a doua pe $\overline{BC}$ şi pe $\overline{DA}$ sunt nule, deoarece aici x este constant, fapt care se vede din (4.51) şi (4.52). Prin urmare, $dx = 0$.

O reprezentare parametrică a arcului de curbă plană AB este dată de ecuaţiile

$$AB : \begin{cases} x = t, \\ y = \varphi_1(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{4.56}$$

Având în vedere reprezentarea parametrică (4.56) şi formula de calcul a unei integrale curbilinii de a doua speţă, deducem

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt. \tag{4.57}$$

Pentru porţiunea de frontieră formată din arcul de curbă CD, avem reprezentarea paramatrică

$$CD : \begin{cases} x = \tau, \\ y = \varphi_1(\tau), \end{cases} \quad \tau \in [b,a]. \tag{4.58}$$

Această reprezentare parametrică (4.58) şi formula de calcul a unei integrale curbilinii de a doua speţă conduc la

$$\int_{CD} P(x,y)\,dx = \int_b^a P(t,\varphi_2(t))\,dt = -\int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt. \tag{4.59}$$

Prin urmare, valoarea integralei curbilinii din membrul întâi a relaţiei de demonstrat (4.47) este

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x,y)\,dx = \int_a^b \Big(P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))\Big)\,dt. \tag{4.60}$$

Din relaţiile (4.54) şi (4.60), rezultă (4.47) şi în acest fel teorema este demonstrată. ∎

Teorema 4.8.2 *Fie Q o funcţie reală definită şi continuă pe un domeniu compact pozitiv orientat D_x, simplu în raport cu axa Ox a cărui frontieră este curba închisă pozitiv orientată Γ_x^+. Dacă derivata parţială a funcţiei Q în raport cu variabila x există şi este continuă pe D_x, atunci are loc egalitatea*

$$\int_{\Gamma_x^+} Q(x,y)dx = \iint\limits_{D_x^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy. \tag{4.61}$$

Demonstraţie. Să considerăm întâi integrala dublă din membrul doi al egalităţii (4.61). După cum ştim, un domeniu simplu în raport cu axa Ox poate fi prezentat astfel

$$D_x = \{(x,y) \in I\!R^2 :\ c \le y \le d;\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}, \tag{4.62}$$

unde funcţiile ψ_1 şi ψ_2 sunt continue şi derivabile pe porţiuni. Dacă scriem domeniul de integrare în forma (4.62), atunci integrala dublă ce o avem de calculat este dată de

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_y^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \\ &= \int_c^d \Big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\Big)dy.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Să notăm cu A_1, B_1, C_1 şi D_1 punctele lui Γ_x^+ de coordonate:

$$A_1(c,\psi_1(c));\quad B_1(c,\psi_2(c));\quad C_1(d,\psi_2(d));\quad D_1(d,\psi_1(d)). \tag{4.64}$$

Atunci, frontiera pozitiv orientată Γ_x^+ a domeniului D_x^+ se poate scrie sub forma

$$\Gamma_x^+ = A_1B_1C_1D_1A_1,$$

în care sensul de parcurs este de la A_1 spre B_1, apoi spre C_1, de aici spre D_1 şi din nou la A_1. Porţiunile $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{C_1D_1}$ ale frontierei Γ_x^+ sunt segmente de drepte paralele cu axa Ox şi ca urmare pe aceste segmente avem $dy = 0$ ceea ce atrage

$$\int_{\overline{A_1B_1}} Q(x,y)\, dy = \int_{\overline{C_1D_1}} Q(x,y)\, dy = 0. \tag{4.65}$$

Integrala definită din membrul al doilea al relaţiei (4.63) poate fi privită ca suma a două integrale curbilinii pe arce de curbă corespunzătoare, după cum urmează

$$\int_c^d \Big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\Big)dy = \int_{B_1C_1} Q(x,y)\,dy + \int_{D_1A_1} Q(x,y)\,dy. \tag{4.66}$$

Dacă la membrul doi al relaţiei (4.66) adăugăm integralele curbilinii din (4.65), obţinem

$$\begin{aligned}\int_c^d \Big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\Big)dy &= \int_{\overline{A_1B_1}} Q(x,y)dy+\\ &+ \int_{B_1C_1} Q(x,y)dy + \int_{\overline{C_1D_1}} Q(x,y)dy+\\ &+ \int_{D_1A_1} Q(x,y)dy = \int_{\Gamma_x^+} Q(x,y)dy.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Din relaţiile (4.63) şi (4.67) rezultă (4.61) şi teorema este demonstrată.■

Egalitatea (4.47) a fost demonstrată pentru un domeniu de o formă specială, însă ea poate fi extinsă la un domeniu arbitrar care poate fi divizat întrun număr finit de domenii simple în raport cu axa Oy.

Astfel, dacă un domeniu oarecare D, cu frontiera Γ, este descompus în n subdomenii D_{iy}, $i = \overline{1,n}$, simple în raport cu axa Oy şi cu interioarele oricăror două dintre ele disjuncte, conform Teoremei 4.8.1, pentru fiecare din domeniile D_{iy} are loc relaţia

$$\int_{\Gamma_{iy}^+} P(x,y)\,dx \;=\; \iint\limits_{D_{iy}^+} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy, \quad \Gamma_{iy} = \partial D_{iy}. \tag{4.68}$$

Putem suma acum de la 1 la n relaţiile (4.68) obţinându–se în membru drept o integrală dublă pe domeniul D din aceeaşi funcţie de integrat ca în (4.68), iar în membrul stâng o sumă de n integrale curbilinii de speţa a doua din expresia diferenţială $P(x,y)\,dx$. Însă fiecare contur Γ_{iy}^+ constă atât din anumite arce ale frontierei lui D^+ cât şi din porţiuni de curbe auxiliare care servesc pentru divizarea domeniului D în părţile D_{iy}, cu i de la 1 până la n. Fiecare arc al unei curbe auxiliare intră în exact două contururi de tipul D_{iy} şi este parcurs în sensuri contrare când ne raportăm la cele două contururi vecine. Prin urmare, când sumăm toate integralele curbilinii de forma

$$\int_{\Gamma_{iy}^+} P(x,y)\,dx, \tag{4.69}$$

integralele curbilinii luate pe arcele auxiliare se anulează reciproc şi deci va rămâne numai integrala pe frontiera Γ^+ a domeniului D^+ din expresia diferenţială $P(x,y)\,dx$. Astfel, obţinem egalitatea

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx = \iint\limits_{D^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy, \quad \Gamma_{iy} = \partial D_{iy}. \tag{4.70}$$

Să observăm că divizarea lui D în domenii simple în raport cu axa Oy se poate efectua prin paralele la axa Oy care să fie eventual tangente în anumite puncte ale frontierei Γ sau să aibă în comun cu Γ doar un punct dacă acesta este punct unghiular.

Printr–un raţionament asemănător celui efectuat pentru demonstraţia relaţiei (4.61), deducem că egalitatea

$$\int_{\Gamma^+} Q(x,y)dy = \iint\limits_{D^+} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy \tag{4.71}$$

are loc pentru orice domeniu compact care se reprezintă ca reuniune finită de domenii simple în raport cu axa Ox. Descompunerea unui domeniu compact în domenii simple în raport cu axa Ox este posibilă întotdeauna şi se poate efectua prin construcţia unor paralele la axa Ox, paralele care, eventual, pot avea un punct comun cu frontiera domeniului.

Prin construcţia descrisă mai sus cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate, orice domeniu plan compact D^+, simplu sau multiplu conex, pozitiv orientat, având frontiera Γ^+ o reuniune finită de curbe închise netede sau netede pe porţiuni care satisfac condiţiile din Definiţia 4.8.3, se poate scrie ca reuniune finită de domenii simple în raport cu una, oricare, din axele de coordonate. Pentru astfel de domenii, pe care prescurtat le vom numi mai departe *domenii plane simple*, au loc relaţiile (4.70) şi (4.71). Sumând aceste două relaţii, obţinem formula integrală

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D^+} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy \tag{4.72}$$

cunoscută sub numele de *formula integrală Riemann–Green.* În acest fel am demonstrat

Teorema 4.8.3 *Fie D un domeniu plan simplu conex şi P, Q două funcţii reale definite şi continue pe compactul D. Dacă derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$*

există şi sunt continue pe D, atunci are loc formula integrală Riemann–Green (4.72).

Din modul cum s–a efectuat demonstraţia Teoremei 4.8.3 rezultă câteva observaţii pe care le dăm în continuare.

Observaţia 4.8.1 *Dacă frontiera Γ^+ a domeniului simplu D^+ este compusă dintr–un număr finit de contururi separate, ceea ce înseamnă că suntem în cazul unui domeniu multiplu conex, simbolul*

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy \tag{4.73}$$

trebuie înţeles ca sumă de integrale curbilinii luate pe toate conturile care alcătuiesc frontiera domeniului, fiecare contur fiind parcurs în sensul în care un observator vede domeniul D^+ la stânga sa.

Observaţia 4.8.2 *Când s–a demonstrat formula integrală Rieman– Green s–a presupus că funcţiile P şi Q precum şi derivatele parţiale ale lor $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue nu numai în interiorul domeniului D^+ dar şi pe frontiera acestuia Γ^+. Se constată însă că este suficient ca aceste funcţii împreună cu derivatele menţionate să fie continue şi mărginite în interiorul lui D^+.*

Observaţia 4.8.3 *Având în vedere că la schimbarea sensului de parcurs al unei curbe integrala curbiline de speţa a doua schimbă de semn, rezultă că formula integrală Riemann–Green se poate scrie şi în forma*

$$\int_{\Gamma^-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = -\iint\limits_{D^+} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy. \tag{4.74}$$

Când nu se precizează orientarea domeniului de integrare şi nici a frontierei sale, formula integrală Riemann–Green trebuie scrisă astfel

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \pm\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy, \tag{4.75}$$

urmând ca semnul din membrul al doilea să se stabilească în funcţie de orientarea domeniului de integrare a integralei duble în raport cu orientarea frontierei: semnul plus corespunde când $D = D^+$ şi $\Gamma = \Gamma^+$; semnul minus se ia când D şi Γ au orientări diferite. Evident, este posibil să întâlnim formula integrală Riemann–Green şi sub forma

$$\oint_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \pm \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy, \tag{4.76}$$

caz în care în membrul doi se alege semnul plus dacă $D = D^+$ sau semnul minus când D este negativ orientat.

Ca o aplicaţie a formulei integrale Riemann–Green să exprimăm aria S a unui domeniu plan simplu D, care ştim că se calculează cu integrala dublă

$$S = \int_D dxdy, \tag{4.77}$$

cu ajutorul unei integrale curbilinii pe frontiera Γ a acestuia. Pentru aceasta să considerăm integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma^+} x\,dy. \tag{4.78}$$

Aplicând formula integrală Riemann–Green, din (4.78) obţinem

$$\int_{\Gamma^+} x\,dy = \int_D dxdy = S. \tag{4.79}$$

În mod asemător obţinem formula

$$S = -\int_{\Gamma^+} y\,dx. \tag{4.80}$$

Combinând aceste formule deducem o altă formulă de calcul ariei unui domeniu plan simplu în care integrările în raport cu x şi y sunt implicate simetric:

$$S = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\,dy - y\,dx. \tag{4.81}$$

Exemplul 4.8.1 *Să se calculeze aria domeniului plan simplu delimitat de* **astroida cu braţe egale** *de ecuaţii parametrice*

$$\begin{cases} x = a\,\cos^3 t, \\ y = a\,\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{4.82}$$

Soluţie. Aplicând formula (4.81) obţinem

$$\begin{aligned} S = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \\ \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

■

Exemplul 4.8.2 *Folosind integrala curbilinie, să se calculeze aria domeniului plan limitat de elipsa de semiaxe a şi b.*

Soluţie. Dacă centrul de simetrie al elipsei se află în originea reperului Oxy din plan şi axele sale de simetrie coincid cu axele de coordonate ale reperului, atunci ecuaţia carteziană explicită a elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

O reprezentare parametrică a acestei elipsei C, orientată pozitiv, poate fi

$$C: \begin{cases} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{cases}$$

unde parametrul t parcurge intervalul $[0, 2\pi]$.

Domeniul plan D, delimitat de elipsă, este simplu în raport cu ambele axe, deci pentru calculul ariei lui D putem aplica formula

$$2\text{Aria}(D) = \int_C xdy - ydx = ab\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 2\pi ab,$$

de unde deducem că aria elipsei este πab. ■

4.9 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Fie Ω un domeniu plan simplu conex situat în planul $O'uv$ având frontiera Γ' o curbă simplă închisă şi netedă pe porţiuni. Dacă

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega \tag{4.84}$$

este o transformare punctuală regulată (difeomorfism) de la planul $O'uv$ la planul xOy, atunci $D = T(\Omega) = \operatorname{Im} T$ este un domeniu simplu conex din planul xOy, iar curba $\Gamma = T(\Gamma')$ este o curbă simplă închisă, netedă pe porţiuni şi în plus $\partial D = \Gamma$.

Transformarea punctuală regulată T se numeşte *directă*, dacă un punct care se deplasează în sens invers acelor de ceasornic pe curba Γ' este transformat prin T, întrun punct care se deplasează pe Γ, tot în sensul invers acelor de ceasornic. Dacă cel de–al doilea sens de mişcare este cel al acelor de ceasornic, atunci transformarea punctuală regulată T se spune că este *indirectă* sau *inversă*.

Jacobianul transformării punctuale regulate T din (4.84) este funcţia reală nenulă $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$ ale cărei valori se determină după legea

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}. \tag{4.85}$$

Teorema 4.9.1 *Dacă funcţiile $\varphi : \Omega \to I\!R$ şi $\psi : \Omega \to I\!R$ care definesc difeomorfismul T sunt astfel încât admit derivate parţiale mixte de ordinul doi continue, iar jacobianul lui T este pozitiv pe Ω*

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) > 0, \quad (\forall)\ (u,v) \in \Omega, \tag{4.86}$$

atunci T este o transformare punctuală regulată directă.

Demonstraţie. Să presupunem că o reprezentare parametrică a curbei orientate Γ' este

$$\Gamma' : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{4.87}$$

Atunci, curba $\Gamma = T(\Gamma')$ va avea o reprezentare parametrică dată de

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi\big(u(t), v(t)\big), \\ y = \psi\big(u(t), v(t)\big), \end{cases} \quad t \in [a,b]. \tag{4.88}$$

Convenim ca sensul direct sau pozitiv de parcurs al curbei închise Γ să fie sensul imprimat de creşterrea parametrului t. Atunci, folosind un rezultat din paragraful precedent şi formula de calcul a integralelor curbilinii de speţa a doua, deducem

$$\text{aria}\, D = \oint_{\Gamma} x\, dy = \int_a^b \varphi\big(u(t), v(t)\big)\, \frac{dy}{dt}(t)\, dt. \tag{4.89}$$

Însă

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\, \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\, \frac{dv}{dt}(t) \tag{4.90}$$

Înlocuind (4.90) în (4.89) găsim o altă exprimare a ariei lui D

$$\begin{aligned} \text{aria}\, D = \int_a^b \varphi\big(u(t), v(t)\big)\Big(\frac{\partial \psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\, \frac{du}{dt}(t) + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\, \frac{dv}{dt}(t)\Big) dt. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Integrala din membrul al doilea din (4.91) este de fapt o integrală curbilinie pe Γ', astfel că putem scrie

$$\text{aria}\, D = \int_{\Gamma'} \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)\, du + \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)\, dv. \tag{4.92}$$

Ultimei integrale îi aplicăm formula integrală Riemann–Green (4.75) adaptată la variabilele independente u şi v

$$\int_{\Gamma'} P(u, v)\, du + Q(u, v) dv = \pm \iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v)\Big) du dv, \tag{4.93}$$

unde semnul plus corespunde sensului direct pe Γ', iar semnul minus corespunde sensului invers pe Γ'. Din relaţiile (4.92) deducem că funcţiile $P(u, v)$ şi $Q(u, v)$ din (4.93) au expresiile:

$$P(u, v) = \varphi(u, v)\, \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v); \quad Q(u, v) = \psi(u, v)\, \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \tag{4.94}$$

şi deci expresia integrantului din membrul al doilea a egalităţii (4.93) va fi

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, \frac{\partial \psi}{\partial v} + \varphi\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, \frac{\partial \psi}{\partial u} - \varphi\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}. \tag{4.95}$$

În baza criteriului lui Schwarz, derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte sunt egale şi deci (4.95) devine

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}. \tag{4.96}$$

În felul acesta, am obţinut egalitatea

$$\text{aria}\, D = \pm \iint\limits_{\Omega} \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\, dudv. \tag{4.97}$$

Deoarece aria $D > 0$, în faţa ultimei integrale trebuie luat semnul plus, adică în ultima integrală curbilinie pe curba închisă Γ' din şirul de egalităţi (4.92) trebuie luat sensul direct.

În mod asemănător se arată că dacă jacobianul transformării punctuale regulate T este negativ, atunci în cea de a doua integrală curbilinie din (4.92) trebuie luat sensul invers pe curba Γ'. ■

Observaţia 4.9.1 *Din demonstraţia teoremei precedente, rezultă că putem scrie egalitatea*

$$\textit{aria}\, D = \iint\limits_{\Omega} \Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|\, dudv \tag{4.98}$$

indiferent dacă transformarea punctuală regulată T este directă sau inversă.

Funcţia de sub semnul integrală din (4.98), fiind continuă, putem aplica teorema de medie pentru integrala dublă, de unde rezultă existenţa unui punct $(u_0, v_0) \in \Omega$ astfel încât

$$\text{aria}\, D = \Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|_{(u_0,v_0)} \cdot \text{aria}\, \Omega. \tag{4.99}$$

Observaţia 4.9.2 *Egalitatea* (4.99) *are o analogie remarcabilă în cazul domeniilor unidimensionale. Dacă $f : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ este o funcţie Rolle cu derivata nenulă, atunci teorema creşterilor finite a lui Lagrange se poate transcrie în forma*

$$l([a,b]) = |f'(\xi)| \cdot l([\alpha,\beta]), \tag{4.100}$$

unde $\xi \in (\alpha,\beta)$, $l([a,b])$ este lungimea intervalului $[a,b]$, iar $l([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha$ este lungimea intervalului $[\alpha,\beta]$. Egalitatea (4.100) *este analoaga unidimensională a egalităţii* (4.99).

Teorema 4.9.2 *Dacă T este transformarea punctuală regulată* (4.84) *şi f este o funcţie reală definită şi continuă pe D, atunci are loc egalitatea*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega f\Big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\Big)\Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|\,dudv \tag{4.101}$$

numită **formula schimbării de variabile în integrala dublă** *sau* **formula de transport**.

Demonstraţie. Existenţa integralelor din egalitatea (4.101) rezultă din faptul că funcţia f este continuă pe D, iar T este transformare punctuală regulată în $I\!R^2$. Fie acum

$$\Delta' = \{D_1', D_2', \cdots, D_n'\} \tag{4.102}$$

o diviziune a oarecare a domeniului Ω pe care este definită transformarea punctuală regulată T. Această transformare punctuală regulată duce D_i' în domeniul $D_i \subset D$ astfel încât

$$\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\} \tag{4.103}$$

este o diviziune a lui $D = T(\Omega)$.

Pentru fiecare domeniu D_i aplicăm formula (4.99). Rezultă în acest fel că pentru fiecare indice i cu valori de la 1 până la n putem scrie

$$\text{aria}\, D_i = \Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|_{(u_i,v_i)} \cdot \text{aria}\, D_i'. \tag{4.104}$$

Formăm acum suma integrală Riemann a funcţiei f corespunzătoare modului de divizare Δ şi alegerii punctelor intermediare $(\xi_i,\eta_i) \in D_i$, unde

$$\xi_i = \varphi(u_i,v_i), \quad \eta_i = \psi(u_i,v_i). \tag{4.105}$$

Avem

$$\sigma_\Delta(f;\xi_i,\eta_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\cdot \text{aria}D_i. \tag{4.106}$$

Considerăm funcţia

$$F:\Omega\to D, \quad F(u,v) = f\Big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\Big)\Big|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\Big|. \tag{4.107}$$

Din (4.106) şi (4.107) deducem

$$\sigma_{\Delta}(f;\xi_i,\eta_i)=\sum_{i=1}^{n}F(u_i,v_i)\cdot \text{aria}D_i'=\sigma_{\Delta'}(F;u_i,v_i). \tag{4.108}$$

Din (4.108) rezultă că suma integrală Riemann a funcţiei f relativă la modul de divizare Δ din (4.103), şi pentru alegerea (4.105) a punctelor intermediare, este egală cu o suma integrală Riemann a funcţiei F din (4.107), corespunzătoare modului arbitrar Δ' de divizare a lui Ω şi punctelor intermediare (u_i,v_i) care intră în relaţiile (4.104).

Fie $(\Delta_k')_{k\geq 1}$ un şir de diviziuni ale lui Ω cu proprietatea $\nu(\Delta_k')\to 0$. Din continuitatea lui T pe mulţime compactă Ω rezultă uniforma continuitate a sa şi i deci condiţia $\nu(\Delta_k')\to 0$ implică $\nu(\Delta_k)\to 0$, unde Δ_k este diviziunea lui D corespunzătoare diviziunii Δ_k' a lui Ω. Atunci, pentru fiecare număr natural $k\geq 1$, putem scrie egalitatea

$$\sigma_{\Delta_k}(f;\xi_i^k,\eta_i^k)=\sigma_{\Delta_k'}(F;u_i^k,v_i^k). \tag{4.109}$$

Din existenţa celor două integrale care intră în (4.101) şi prin trecerea la limită în relaţia (4.109), obţinem formula de transport (4.101) şi teorema este demonstrată. ∎

Observaţia 4.9.3 *Formula schimbării de variabilă în integrala dublă se aplică ori de câte ori integrala dublă din membrul al doilea al relaţiei* (4.101) *este mai simplă decât cea din membrul întâi.*

Observaţia 4.9.4 *Schimbarea de variabile* (4.84) *se alege astfel încât să se simplifice fie domeniul de integrare, fie funcţia de integrat, fie ambele. Alegerea schimbării de variabile este sugerată de integrala din membrul stâng al egalităţii* (4.101).

Exemplul 4.9.1 *Să se calculeze aria domeniului plan D mărginit de curbele:*

$$\begin{aligned} &xy=a;\quad xy=b;\quad b>a>0\\ &y=\alpha x;\quad y=\beta x,\quad \beta>\alpha>0, \end{aligned} \tag{4.110}$$

situat în primul cadran al sistemului de coordonate xOy.

Soluţie. Aria domeniului D, calculată cu ajutorul integralei duble, este

$$\text{aria}\, D = \iint\limits_D dxdy. \tag{4.111}$$

Dacă scriem domeniul D în forma

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 :\ a \le x\,y \le b\,;\ \alpha \le \frac{y}{x} \le \beta\}, \tag{4.112}$$

atunci pentru calculul integralei duble ni se sugerează transformarea punctuală

$$T^{-1} :\ \begin{cases} u = x\,y, \\ v = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad (u,v) \in [a,b] \times [\alpha,\beta], \quad (x,y) \in D, \tag{4.113}$$

care se vede că este inversa transformării punctuale

$$T\ :\ \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \end{cases} \qquad (u,v) \in [a,b] \times [\alpha,\beta], \quad (x,y) \in D. \tag{4.114}$$

Ambele transformări punctuale sunt regulate, iar difeomorfismul T transformă intervalul bidimensional $\Omega = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ în domeniul D. Cum T şi T^{-1} sunt transformări punctuale regulate inverse una alteia rezultă

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & -\dfrac{y}{x^2} \\ x & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\dfrac{y}{x}} = \frac{1}{2v}. \tag{4.115}$$

Deci aria căutată va fi

$$\text{aria}\, D = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_\Omega \frac{dudv}{v} = \frac{1}{2} \int_a^b du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v} = \frac{b-a}{2} \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.116}$$

■

Trecerea la coordonate polare este una dintre cele mai des utilizate schimbări de variabile şi este definită de transformarea

$$T\ :\ \begin{cases} x = \rho\, \cos\theta, \\ y = \rho\, \sin\theta, \end{cases} \tag{4.117}$$

unde $(\rho, \theta) \in \Omega \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ şi $(x, y) \in D$.

Se constată simplu că transformarea (4.117) este o transformare punctuală regulată, iar

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \tag{4.118}$$

care este pozitiv în toate punctele din interiorul lui Ω.

Formula schimbării de variabile în integrala dublă când se trece de la coordonatele carteziene la variabilele polare date de relaţiile (4.117) este

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega f\Big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\Big)\,\rho\, d\rho\, d\theta. \tag{4.119}$$

Exemplul 4.9.2 *Să se calculeze integrala dublă*

$$I(R) = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy, \tag{4.120}$$

unde D este discul închis cu centrul în origine de rază R. Folosind rezultatul stabilit să se arate că

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.121}$$

Soluţie. Pentru calculul integralei duble efectuăm schimbarea de variabile (4.117). Se vede imediat că Ω este intervalul bidimensional $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi)$. Aplicând formula (4.119), obţinem

$$I(R) = \iint\limits_\Omega \rho\, e^{-\rho^2} d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\, e^{-\rho^2}\,d\rho = \pi(1 - e^{-\rho^2}). \tag{4.122}$$

Din acest rezultat, prin trecere la limită pentru $R \to +\infty$, găsim

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi. \tag{4.123}$$

Să considerăm acum intervalul bidimensional închis $\Omega = [-a, a] \times [-a, a]$, cu $a > 0$, şi integrala dublă

$$J(a) = \iint\limits_\Omega e^{-x^2-y^2}dxdy. \tag{4.124}$$

Evident, Ω este intervalul bidimensional cu laturile egale cu $2a$ şi cu centrul de simetrie în originea reperului xOy. Avem

$$J(a)=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx\int_{-a}^{a}e^{-y^2}dy=\Big(\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt\Big)^2=\Big(2\int_{0}^{a}e^{-t^2}dt\Big)^2. \quad (4.125)$$

Trecând la limită pentru $a\to+\infty$ în egalitatea

$$J(a)=\Big(2\int_{0}^{a}e^{-t^2}dt\Big)^2, \quad (4.126)$$

obţinem o altă evaluare a integralei duble pe întreg planul din funcţia $e^{-x^2-y^2}$ care, în analogie cu integralele improprii, putem să o numim *integrală dublă improprie*. După trecerea la limită, găsim

$$\iint\limits_{I\!R^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy=4\Big(\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dt\Big)^2. \quad (4.127)$$

Din (4.123) şi (4.127) deducem (4.121), rezultat utilizat în teoria probabilităţilor. ∎

4.10 Aplicaţii ale integralei duble în mecanică şi geometrie

4.10.1 Masa şi centrul de greutate ale unei plăci

Considerăm că întrun plan s–a ales reperul cartezian xOy şi considerăm în acesta domenii simple despre care se ştie că sunt mulţimi carabile.

Definiţia 4.10.1 *Se numeşte* **placă materială** *în planul xOy ansamblul $\mathcal{P}$ dintre un domeniu simplu $D\subset I\!R^2$ şi funcţia reală ρ definită şi continuă pe D. Mulţimea D se numeşte* **configuraţia plăcii** *iar funcţia ρ este denumită* **densitatea** *de distribuţie a materiei în placă. Placa materială se numeşte* **omogenă** *dacă ρ este funcţia constantă pe D şi* **neomogenă** *când densitatea acesteia este variabilă de la punct la punct.*

Observaţia 4.10.1 *Dacă placa $\mathcal{P}$ este omogenă şi are densitatea egală cu constanta ρ_0, atunci masa $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ a acesteia este produsul dintre densitatea constantă ρ_0 şi aria domeniului D, deci*

$$\mathcal{M}(\mathcal{P})=\rho_0\cdot aria\,D. \quad (4.128)$$

Să determinăm masa unei plăci materiale neomogene $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$. Pentru aceasta, să efectuăm o divizare a domeniului D şi în fiecare parte componentă D_i a diviziunii alegem un punct de coordonate (ξ_i, η_i). Masa fiecărei plăci componente $\mathcal{P}_i = \{D_i; \rho\}$ poate fi aproximată cu masa plăcii omogene care are configuraţia D_i şi densitatea constantă egală cu $\rho(\xi_i, \eta_i)$. Atunci, o valoare aproximativă a masei întregii plăci poate fi

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}\,D_i. \tag{4.129}$$

Pentru a obţine masa exactă a plăcii materiale este necesar să trecem la limită, pentru norma divizării lui D tinzând la zero, în suma integrală Riemann din (4.129). Deoarece ρ este funcţie continuă, iar D este un domeniu simplu rezultă că în locul lui (4.129) vom avea

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \iint\limits_{D} \rho(x, y)dxdy = \iint\limits_{D} dm, \tag{4.130}$$

unde

$$dm = \rho(x, y)dxdy \tag{4.131}$$

se numeşte **element de masă** al plăcii.

Să determinăm coordonatele centrului de greutate a plăcii $\mathcal{P}$. Pentru aceasta, divizăm iarăşi domeniul D cu ajutorul divizării Δ care constă din domeniile $D_1,\ D_2, \cdots, D_n$, alegem în fiecare domeniu component punctul $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ şi notăm:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n); \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n).$$

Considerînd că porţiunea D_i din placă este una omogenă cu densitatea constantă şi egală cu $\rho(\xi_i, \eta_i)$, masa m_i a acestei plăci omogene va fi

$$m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}\,D_i. \tag{4.132}$$

Gândind aproximativ, putem asimila placa $\mathcal{P}$ cu sistemul de puncte materiale

$$M_1, M_2, \ldots, M_n$$

care au respectiv ponderile $m_1,\ m_2, \cdots, m_n$. Atunci, putem scrie expresiile bine cunoscute ale coordonatelor $x_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ şi $y_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ ale centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale:

$$x_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,\rho(\xi_i,\eta_i)\,\mathrm{aria}\,D_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\,\mathrm{aria}\,D_i};\quad y_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,\rho(\xi_i,\eta_i)\,\mathrm{aria}\,D_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\,\mathrm{aria}\,D_i}. \tag{4.133}$$

Pentru a obţine valorile exacte ale coordonatelor centrului de greutate a plăcii $\mathcal{P}$, trebuie să trecem la limită în relaţiile (4.133) când norma divizării Δ tinde la zero. Numitorii expresiilor din membrul drept al egalităţilor (4.133) sunt egali cu suma Riemann a funcţiei ρ corespunzătoare divizării Δ şi alegerii $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ a punctelor intermediare. Numărătorul primei expresii de mai sus este suma integrală Riemann $\sigma_\Delta(x\,\rho;\xi_i,\eta_i)$, iar cel de al doilea numărător este $\sigma_\Delta(y\,\rho;\xi_i,\eta_i)$. Deoarece funcţiile $\rho(x,y)$, $x\,\rho(x,y)$ şi $y\,\rho(x,y)$ sunt continue, aceste expresii au limită pentru $\nu(\Delta)\to 0$ şi aceste limite sunt integralele duble ale funcţiilor de mai sus pe domeniul Δ. Notând cu x_G şi y_G valorile exacte ale coordonatelor centrului de greutate al plăcii, avem:

$$x_G=\lim_{\nu(\Delta)\to 0}x_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta});\quad y_G=\lim_{\nu(\Delta)\to 0}y_G(\Delta;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{4.134}$$

După trecerea la limită şi folosirea relaţiilor (4.130), (4.131) şi (4.134) deducem că expresiile coordonatelor centrului de greutate G al plăcii $\mathcal{P}$ sunt

$$x_G=\frac{1}{\mathcal{M}(\mathcal{P})}\iint\limits_D x\,dm;\quad y_G=\frac{1}{\mathcal{M}(\mathcal{P})}\iint\limits_D y\,dm. \tag{4.135}$$

Dacă placa materială este omogenă, formulele pentru coordonatele centrului de greutate se simplifică şi devin

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\displaystyle\iint\limits_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint\limits_D dxdy} = \dfrac{1}{\mathrm{aria}\,D}\displaystyle\iint\limits_D x\,dxdy,\\[2ex] y_G = \dfrac{\displaystyle\iint\limits_D y\,dm}{\displaystyle\iint\limits_D dxdy} = \dfrac{1}{\mathrm{aria}\,D}\displaystyle\iint\limits_D y\,dxdy. \end{cases} \tag{4.136}$$

Exemplul 4.10.1 *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene* $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$, *cu densitatea constantă şi egală cu unitatea, unde*

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \leq a^2, \ x^2 + y^2 \geq ax, \ y \geq 0\}, \ (a > 0). \quad (4.137)$$

Soluţie. Configuraţia plăcii $\mathcal{P}$ este domeniul plan închis D inclus în semiplanul superior a cărui frontieră se compune din: semicercul superior al cercului cu centrul în origine şi raza egală cu a; segmentul de dreaptă de pe Ox cu abscisele $-a \leq x \leq 0$; semicercul superior al cercului cu centrul în punctul $(a/2, 0)$ şi rază $a/2$.

Prin trecerea la coordonate polare

$$T: \ x = \rho\,\cos\theta, \ y = \rho\,\sin\theta, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \rho \geq 0 \qquad (4.138)$$

domeniul D se transformă în domeniul $\Omega = D_1' \cup D_2'$ unde:

$$D_1' = \{(\rho, \theta) : \ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \ \ a\,\cos\theta \leq \rho \leq a\}; \qquad (4.139)$$

$$D_2' = \{(\rho, \theta) : \ \ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \ \ 0 \leq \rho \leq a\}. \qquad (4.140)$$

Observăm că domeniul D_1' este transformatul prin T din (4.138) a porţiunii D_1 a lui D aflată în primul cadran al reperului xOy, D_2' este transformatul părţii D_2 a lui D situată în cadranul al doilea şi $D = D_1 \cup D_2$.

Pentru calculul integralelor duble care urmează vom efectua schimbarea de variabile (4.138).

Placa $\mathcal{P}$ fiind omogenă, are masa $\mathcal{M}$ dată de integrala dublă

$$\mathcal{M} = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_\Omega \rho\,d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a\cos\theta}^a \rho\,d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (a^2 - a^2\cos^2\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} a^2\,d\theta = \frac{3\pi\,a^2}{8}.$$

Coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ sunt

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D x\,dx\,dy = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_\Omega \rho^2 \cos\theta\,d\rho d\theta =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} \rho^2\,d\rho +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} (1-\cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta + \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\,d\theta = -\frac{a}{6},$$

$$y_G = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega \rho^2 \sin\theta\,d\rho d\theta = \iint\limits_{D_1'} \rho^2 \sin\theta\,d\rho d\theta =$$

$$\iint\limits_{D_2'} \rho^2 \sin\theta\,d\rho d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} \rho^2\,d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} (1-\cos^3\theta)\sin\theta\,d\theta + \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\,d\theta = \frac{14\,a}{9\pi}.$$

Prin urmare, centrul de greutate al plăcii consideratere coordonatele $(-a/6, 14\,a/(9\pi))$. ■

4.10.2 Momente de inerţie ale unei plăci

După cum bine se ştie, momentul de inerţie al unui punct material de pondere m faţă de un element geometric, care în plan poate fi o dreaptă sau un punct, este egal cu produsul dintre masa acestuia şi pătratul distanţei dintre punctul material şi acel element. Momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale faţă de un element geometric este suma momentelor fiecărui punct material în parte faţă de acelaşi element geometric.

Să determinăm momentele de inerţie ale plăcii $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$ faţă de elementele reperului cartezian xOy, adică faţă de axele sale şi faţă de originea O.

În acest scop divizăm din nou placa $\mathcal{P}$ în plăcile componente $\mathcal{P}_i = \{D_i, \rho\}$, unde $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ este o divizare a lui D, apoi fiecare dintre aceste plăci o considerăm placă omogenă cu densitatea egală cu $\rho(\xi_i, \eta_i)$, unde $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, după care putem aproxima placa $\mathcal{P}_i$ cu punctul material M_i având ponderea m_i dată în (4.132). Momentele de inerţie ale acestui sistem de puncte materiale faţă de axele de coordonate Ox, Oy, conform celor stabilite mai sus, sunt

$$\begin{aligned} I_x(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2\, m_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria}\, D_i, \\ I_y(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\, m_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\, \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria}\, D_i. \end{aligned} \tag{4.141}$$

Observăm că

$$I_x(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sigma_\Delta(y^2\rho; \xi_i, \eta_i), \quad I_y(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sigma_\Delta(x^2\rho; \xi_i, \eta_i).$$

Momentul de inerţie al aceluiaşi sistem de puncte materiale faţă de originea O a reperului este

$$\begin{aligned} I_O(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} (\xi^2 + \eta_i^2) m_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} &(\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i)\, \text{aria}\, D_i = \\ &= \sigma_\Delta((x^2 + y^2)\rho; \xi_i, \eta_i). \end{aligned} \tag{4.142}$$

Trecând la limită în (4.141) şi (4.142) când norma divizării Δ tinde la zero şi ţinând cont că funcţiile $y^2\rho(x, y)$, $x^2\rho(x, y)$ şi $(x^2 + y^2)\rho(x, y)$ sunt continue pe D, deci integrabile, constatăm că limitele din membrul doi există şi sunt integralele duble pe D din funcţiile indicate. Prin urmare, există şi limitele din membrul întâi ale relaţiilor (4.141) şi (4.142), pe care le notăm cu I_x, I_y şi I_O şi care sunt momentele de inerţie faţă de respectiv axele de coordonate şi faţă de originea reperului. Avem

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D y^2 dm, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D x^2 dm,$$
$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dm.$$

Se observă că are loc relaţia

$$I_O = I_x + I_y. \tag{4.143}$$

Exemplul 4.10.2 *Să se determine momentele de inerţie ale plăcii* $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ *în raport cu elementele reperului de coordonate* xOy, *unde*

$$D = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \;\; x + y \leq 1, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0\} \tag{4.144}$$

şi densitatea este $\rho(x, y) = xy$.

Soluţie. Configuraţia plăcii $\mathcal{P}$ este domeniul închis D având frontiera triunghiul isoscel dreptunghic cu catetele de lungime 1 situate pe axele de coordonate în porţiunea lor pozitivă. Rezultă că D este simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Prezentându–l ca domeniu simplu în raport cu Ox şi respectiv în raport cu Oy, avem

$$D = D_x = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \; 0 \leq y \leq 1, \;\; 0 \leq x \leq 1 - y\}; \tag{4.145}$$

$$D = D_y = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1 - x\}. \tag{4.146}$$

În calculul momentului de inerţie I_x, în raport cu axa Ox, vom considera că D are forma (4.145), iar pentru calculul lui I_y vom lua pe D sub forma (4.146). Deci:

$$I_x = \iint\limits_{D_x} y^2 \,\rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} x y^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y^2) y^3 \, dy = \frac{1}{120};$$

$$I_y = \iint\limits_{D_y} x^2 \,\rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) x^3 dx = \frac{1}{120}.$$

Aşadar, momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate sunt egale, iar cel în raport cu originea reperului, I_O, este suma $I_O = I_x + I_y = \dfrac{1}{60}$. ■

4.10.3 Momente statice ale unei plăci

Momentele statice M_x şi M_y ale plăcii materiale $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ în raport cu axele de coordonate Ox şi Oy, se exprimă prin formulele

$$M_x = \iint\limits_{D} y \,\rho(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint\limits_{D} x \,\rho(x, y) dx dy. \tag{4.147}$$

Exemplul 4.10.3 *Să se calculeze momentele statice în raport cu axele de coordonate ale plăcii $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$, mărginită de dreapta $x + y = 2$ şi de parabola $y = x^2$ ştiind că densitatea este $\rho(x, y) = y$.*

Soluţie. Domeniul D este simplu în raport cu Oy căci poate fi definit de inegalităţile

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 2 - x. \tag{4.148}$$

Aplicând formulele (4.147) de calcul ale momentelor statice şi ţinând cont de inegalităţile (4.148), avem:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_D y\,\rho(x, y)dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y^2\,dy = \\ &= \frac{1}{3}\int_{-2}^{1}\Big((2-x)^3 - x^6\Big)dx = -\frac{1}{3}\Big(\frac{(x-2)^4}{4} + \frac{x^7}{7}\Big)\Big|_{-2}^{1} = \frac{423}{28}; \end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint\limits_D x\,\rho(x, y)dxdy = \int_{-2}^{1} x\,dx \int_{x^2}^{2-x} y\,dy = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} x\Big((2-x)^2 - x^4\Big)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x^3 - 4x^2 + 4x - x^5)dx = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 - \frac{x^6}{6}\Big)\Big|_{-2}^{1} = -\frac{45}{8}. \end{aligned} \tag{4.150}$$

În cazul în care D s–ar considera domeniu simplu în raport cu Ox, volumul de calcul al integralelor duble pe $D = D_x$ este mai mare deoarece trebuie să scriem D_x ca o reuniune de două domenii, ambele simple în raport cu Ox. ■

4.10.4 Flux luminos incident pe o placă

Considerăm că placa $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$ este situată în planul xOy a reperului spaţial $Oxyz$ şi că în punctul $(0, 0, z_0)$ de pa axa Oz se află o sursă luminoasă de intensitate constantă în toate direcţiile notată cu I. Ne propunem să calculăm fluxul luminos incident pe placa $\mathcal{P}$.

Fluxul luminos dF primit de placa elementară de arie ds este egal cu $I\,d\omega$, unde $d\omega$ este *unghiul solid* în punctul $(0, 0, z_0)$ subântins de elementul de suprafaţă $ds = dxdy$ asociat punctului plăcii de coordonate (x, y). Unghiul solid $d\omega$ este egal cu produsul raportului dintre aria ds a elementului de suprafaţă şi pătratul distanţei de la acest element la sursa de lumină, şi cosinusul unghiului φ dintre normala la elementul de suprafaţă şi direcţia spre care se află sursa. Avem evident

$$\cos\varphi = \frac{z_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}}. \tag{4.151}$$

Valoarea derivatei $\dfrac{dF}{ds}$ în punctul (x, y) al plăcii este cunoscută ca *intensitatea de luminozitate* în acest punct şi este notată cu $A(x, y)$. Rezultă că

$$A(x, y) = \frac{dF}{ds} = \frac{I\,d\omega}{ds} = \frac{I z_0}{\left(x^2 + y^2 + z_0^2\right)^{3/2}}. \tag{4.152}$$

Procedând similar ca în cazul determinării masei plăcii constatăm că fluxul luminos total F primit de placă este integrala dublă pe D din funcţia $A(x, y)$

$$F = \iint\limits_D A(x, y)dxdy = I z_0 \iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x^2 + y^2 + z_0^2\right)^{3/2}}. \tag{4.153}$$

4.10.5 Debitul unui fluid prin secţiunea transversală a unui canal

Considerăm un fluid care curge întrun canal şi o secţiune transversală a sa D, perpendiculară pe direcţia de curgere a fluidului. Introducând sistemul de coordonate cartezian xOy în planul secţiunii transversale, putem privi viteza V a fluidului, în fiecare punct al secţiunii, ca fiind o funcţie de x şi y, coordonatele carteziene ale acelui punct.

Ne propunem să determinăm cantitatea de fluid care trece prin secţiune în unitatea de timp.

În acest scop, în punctul (x, y) al secţiunii transversale considerăm un element inmfinitezimal ds al acesteia de arie $dxdy$. Cantitatea de fluid care străbate elementul de plan ds în unitatea de timp este egală evident cu masa unui cilindru elementar, care conţine fluid, cu baza egală cu ds şi înălţimea egală cu viteza fluidului în punctul (x, y) al secţiunii transversale. Aşadar, *debitul elementar* dQ al fluidului este

$$dQ = \rho(x, y)V(x, y)dxdy, \tag{4.154}$$

unde $\rho(x, y)$ este densitatea fluidului în punctul (x, y). Pentru a găsi debitul $Q(D)$ prin secţiunea D ar trebui să sumăm toate debitele elementare, sumare care conduce la integrala dublă pe domeniul D din funcţia ρV. Prin urmare,

$$Q(D) = \iint_D \rho(x, y)V(x, y)dxdy. \tag{4.155}$$

4.10.6 Volumul unui cilindroid

Definiţia 4.10.2 *Fie D un domeniu simplu aflat în planul xOy al reperului cartezian spaţial $Oxyz$ şi $f : D \to I\!R^+$ o funcţie reală, de două variabile reale, pozitivă şi continuă pe D. Se numeşte* **cilindroid** *mulţimea $\mathcal{C}$ a punctelor din spaţiu definită prin*

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D; \ 0 \le z \le f(x, y)\}. \tag{4.156}$$

Mulţimile D şi $\mathcal{B}_s = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D; \ z = f(x, y)\}$ sunt prin definiţie **bazele** *cilindroidului.*

Dacă considerăm o divizare $\Delta = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ a domeniului D şi în fiecare domeniu component D_i al acesteia alegem un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, atunci putem considera corpurile prismatice Π_i

$$\Pi_i = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D_i; \ 0 \le z \le f(\xi_i, \eta_i)\} \tag{4.157}$$

care are baza D_i şi înălţimea h_i egală cu valoarea funcţiei f în punctul (ξ_i, η_i). Volumul $\mathcal{V}(\Pi_i)$ a unui asemenea corp prismatic este

$$\mathcal{V}(\Pi_i) = f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}\, D_i. \tag{4.158}$$

Suma

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\Pi_i) \tag{4.159}$$

reprezintă o valoare aproximativă a volumului cilindroidului $\mathcal{C}$. O aproximare mai bună a volumului cilindroidului se va obţine dacă se va considera o diviziune Δ' mai fină decât diviziunea Δ. Mai mult, analiză modului de abordare a celorlalte aplicaţii ale integralei duble conduce la observaţia următoare.

Observaţia 4.10.2 *Valoarea exactă a volumului cilindroidului va fi limita sumei din (4.159) când norma divizării Δ tinde la zero, în cazul în care această limită există.*

Din (4.158) şi (4.159) constatăm că valoarea aproximativă a volumului $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ al cilindroidului $\mathcal{C}$ este suma integrală Riemann a funcţiei f corespunzătoare modului de divizare Δ şi alegerii (ξ_i, η_i) a punctelor intermediare

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}\, D_i = \sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i). \tag{4.160}$$

Din Observaţia 4.10.2, relaţia (4.160) şi din faptul că f este funcţie continuă deducem formula de calcul a volumului cilindroidului $\mathcal{C}$

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{4.161}$$

Observaţia 4.10.3 *Funcţia continuă f din Definiţia* 4.10.2 *poate avea şi valori negative, noţiunea de cilindroid păstrându–şi sensul, acesta fiind o reunine de mulţimi de forma* (4.156) *în acele subdomenii ale lui D unde f are valori pozitive şi de mulţimi de forma*

$$\mathcal{C}_- = \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 : \; (x,y) \in D_-; \; f(x,y) \le z \le 0\} \tag{4.162}$$

în acele părţi D_- a lui D unde funcţia f are valori negative.

Cu alte cuvinte întrun astfel de cilindroid baza $\mathcal{B}_s$ este o reuniune de porţiuni de suprafeţe situate atât în semispaţiul superior $z > 0$ cât şi în semispaţiul inferior $z < 0$.

Înălţimea corpului prismatic ataşat porţiunii de cilindroid (4.162) va fi

$$h_i = -\, f(\xi_i, \eta_i) = |f(\xi_i, \eta_i)|, \tag{4.163}$$

iar o valoare aproximativă a volumului întregului cilindroid este

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i, \eta_i)| \cdot \text{aria}\, D_i = \sigma_\Delta(|f|; \xi_i, \eta_i), \tag{4.164}$$

unde $|f|$ este funcţia valoare absolută a funcţiei f.

În acest mod, constatăm că volumul unui cilindroid cu o bază domeniul simplu $D \subset xOy$, iar cealaltă bază având porţiuni atât în semispaţiul $z > 0$ cât şi în semispaţiul $z < 0$, este dat de integrala dublă

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D |f|(x,y)dxdy = \iint_D |f(x,y)|\, dxdy. \tag{4.165}$$

Exemplul 4.10.4 *Să se determine volumul corpului ale cărui puncte au coordonatele (x,y,z) care satisfac inegalităţile*

$$hz \geq x^2 + y^2, \; 0 \leq z \leq h. \tag{4.166}$$

Soluţie. Corpul căruia trebuie sa–i determinăm volumul este complementara cilindroidului $\mathcal{C}_2$ faţă de cilindroidul $\mathcal{C}_1$. Aceşti doi cilindroizi au aceeaşi bază, situată în planul xOy, şi anume discul închis cu centrul în origine de rază h

$$D = \{(x,y) \in I\!\!R^2 : \; x^2 + y^2 \leq h^2\}. \tag{4.167}$$

Cilindroidul $\mathcal{C}_1$ are *baza superioară* discul închis de rază h cu centrul în punctul $M_0(0,0,h)$ situat în planul paralel cu planul xOy care trece prin M_0, plan care are ecuaţia $z = h$, în timp ce cilindroidul $\mathcal{C}_2$ are baza superioară o porţiune din paraboloidul de revoluţie de ecuaţie $z = \dfrac{1}{h}(x^2+y^2)$. Atunci, volumul $\mathcal{V}$ al corpului considerat în enunţ este

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{C}_1) - \mathcal{V}(\mathcal{C}_2) = & \iint_D h\,dxdy - \iint_D \frac{1}{h}(x^2+y^2)dxdy = \\ = h \cdot \text{aria}\, D - & \frac{1}{h} \iint_D (x^2+y^2)dxdy. \end{aligned} \tag{4.168}$$

Observăm că valoarea ultimei integrale se poate determina foarte simplu dacă se trece la coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

Pentru ca $(x,y) \in D$ trebuie ca punctul de coordonate (ρ,θ) să se afle în intervalul bidimensional $\Delta = [0,h] \times [0,2\pi)$. Aplicând formula schimbării de variabile, găsim

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_\Delta \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^3\, d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^h = \frac{\pi\, h^4}{2}.$$

Ţinând cont că aria $D = \pi\, h^2$ şi folosind rezultatele determinate mai sus constatăm că volumul corpului din enunţ este

$$\mathcal{V} = \pi\, h^3 - \frac{\pi\, h^3}{2} = \frac{\pi\, h^3}{2},$$

rezultat care arată că volumul corpului este acelaşi cu volumul cilindroidului $\mathcal{C}_2$. ■

Exemplul 4.10.5 *Să se calculeze volumul cilindroidului cu baza superioară pe suprafaţa de ecuaţie*

$$z = x^2 + y^2,$$

iar baza inferioară, inclusă în planul xOy, *domeniul compact*

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \; x^2 + y^2 \geq x, \; x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

Soluţie. Volumul cilindroidului este

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Trecând la coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \tag{4.169}$$

se constată că punctul $(x,y) \in D$ dacă $(\rho,\theta) \in \Omega$, unde

$$\Omega = \{(\rho,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \; \cos\theta \leq \rho \leq 2\cos\theta\}.$$

Aplicând formula schimbării de variabilă în integrala dublă, găsim:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho = \frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{45}{32}\pi.$$

■

Exemplul 4.10.6 *Folosind integrala dublă, să se determine volumul* V *al corpului mărginit de suprafeţele:*

$$z = 6 - x^2 - y^2; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soluţie. Pentru a evalua volumul corpului dat, calculăm volumele a doi cilindroizi, primul cu baza superioară pe suprafaţa $z = 6 - x^2 - y^2$, iar cel de al doilea cu baza superioară pe suprafaţa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ambii având aceeaşi bază inferioară, în planul xOy, definită de domeniul

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Volumul V este diferenţa volumelor celor doi cilindroizi. Avem:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}_1) = \iint\limits_D (6 - x^2 - y^2)dxdy; \quad \mathcal{V}(\mathcal{C}_2) = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy.$$

Ambele integrale se calculează trecând la coordonatele polare (4.169) şi se găseşte în final că $V = \dfrac{32\pi}{3}$. ∎

4.11 Integrale duble improprii

4.11.1 Domeniul de integrare nu este mărginit

Definiţia 4.11.1 *Se spune că un domeniu plan D este* **nemărginit** *dacă el conţine puncte exterioare oricărui interval bidimensional închis şi mărginit, sau echivalent, oricărui disc închis.*

Vom presupune că orice parte mărginită a frontierei lui D este o curbă netedă sau netedă pe porţiuni. Un astfel de domeniu poate fi

- exteriorul unui domeniu mărginit sau a unui număr finit de domenii mărginite;
- porţiunea din plan limitată de o curbă de măsură Jordan nulă, care se întinde indefinit în ambele sensuri.

Să considerăm un şir infinit de discuri închise

$$K_1, \quad K_2, \quad \cdots, K_n, \cdots$$

cu centrul întrun punct oarecare C al planului raportat la reperul cartezian ortogonal Oxy şi drept raze termenii şirului arbitrar strict crescător de numere pozitive

$$R_1, \quad R_2, \cdots, R_n, \cdots$$

cu limita egală cu infinit. Fiecare din aceste discuri poate avea puncte comune cu un domeniu nemărginit dat D. Să notăm cu DK_n intersecţia mulţimilor D şi K_n. Orice punct $P \in D$ va fi conţinut, pentru n suficient de mare, în mulţimea corespunzătoare DK_n. Într-adevăr, este suficient să luăm pe n astfel încât să avem $R_n > d(P, C)$, unde $d(P, C)$ este distanţa euclidiană între punctele P şi O ale planului. Acest lucru este posibil întotdeauna deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = +\infty$. Proprietatea de mai sus poate fi exprimată echivalent spunând că şirul de mulţimi

$$DK_1, \quad DK_2, \quad \cdots, DK_n, \cdots$$

tinde către domeniul D şi vom scrie, convenţional

$$\lim_{n\to+\infty} DK_n = D.$$

În această situaţie se spune că domeniul nemărginit D admite o *exhaustiune*.

Definiţia 4.11.2 *Fie D o mulţime nemărginită din plan. Spunem că D admite o* **exhaustiune** *dacă există un şir (D_n) de mulţimi din plan, compacte, măsurabile Jordan astfel încât:*

- *şirul (D_n) este ascendent faţă de operaţia de incluziune, adică $D_n \subset D_{n+1}$ şi $\cup_{n=1}^{+\infty} D_n = D$;*
- *orice mulţime compactă inclusă în D este conţinută întrun D_n.*

Pentru cele ce vor urma, este util să dăm definiţia noţiunii de secţiune a unui domeniu nemărginit.

Definiţia 4.11.3 *Vom spune că un domeniu D' constituie o* **secţiune** *a domeniului nemărginit D, dacă există un disc închis K cu centrul în origine, conţinând o porţiune din D şi astfel încât să avem*

$$DK \subset D' \subset D.$$

Elementele unei exhaustiuni a domeniului nemărginit D constituie, cel puţin de la un anumit rang, secţiuni ale lui D.

Teorema 4.11.1 *Din orice şir (D_n) de secţiuni ale domeniului nemărginit D, tinzând către D, se poate extrage un subşir (D_{k_n}), astfel încât*

$$D_{k_1} \subset D_{k_2} \subset \cdots \subset D_{k_n} \subset \cdots$$

şi

$$\lim_{n\to+\infty} D_{k_n} = D.$$

Demonstraţie. Luăm $k_1 = 1$ şi fie K_1 un disc închis care să conţină domeniul D_1. Vom nota D_{k_2}, primul domeniu din şirul

$$D_2, D_3, \cdots,$$

pentru care $DK_1 \subset D_{k_2}$. Fie K_2 un disc închis care să conţină pe D_{k_2}. Vom numi D_{k_3}, primul domeniu din şirul care începe cu D_{k_2}, şi pentru care $DK_2 \subset D_{k_3}$. Continuând, obţinem un şir de secţiuni ale lui D care îndeplineşte condiţia cerută. ■

Definiţia 4.11.4 *Vom numi* **şir crescător de domenii** *orice şir de mulţimi în care fiecare domeniu este conţinut în următorul.*

Definiţia 4.11.5 *Fie f o funcţie reală definită pe un domeniu nemărginit $D \subset I\!\!R^2$ şi integrabilă pe orice subdomeniu compact care are arie, a lui D. Spunem că f este* **integrabilă** *pe D, dacă există un număr real $J(D)$, astfel încât pentru orice exhaustiune (D_n) a lui D să avem*

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = J(D)$$

şi vom scrie

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = J(D).$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este *convergentă* pe mulţimea D.

Unei integrale duble pe un domeniu nemărginit i se poate spune *integrală improprie.*

Exemplul 4.11.1 *Funcţia $f(x,y) = x^2y$ nu este integrabilă pe mulţimea $D = I\!\!R^2$.*

Într-adevăr, dacă considerăm exhaustiunea (D_n) a mulţimii $I\!\!R^2$, unde

$$D_n = \{(x,y) \in I\!\!R^2 \ : \ x^2 + y^2 \le n^2\},$$

iar n este un număr întreg pozitiv, atunci

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_n} x^2ydxdy = \int_0^n d\rho \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin\theta\cos^2\theta d\theta = 0.$$

Pe de altă parte, dacă considerăm exhaustiunea (D'_n) a lui $I\!R^2$, unde D'_n este intervalul bidimensional închis $[-n, 2n] \times [-n, 2n]$, se vede imediat că

$$\iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy = \int_{-n}^{2n} x^2 dx \cdot \int_{-n}^{2n} y dy = \frac{7n^5}{2},$$

deci $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy = 0.$

Din Definiţia 4.11.5 rezultă că funcţia $f(x,y) = x^2 y$ nu este integrabilă pe $I\!R^2$ sau că integrala improprie $\iint\limits_{I\!R^2} f(x,y)dxdy$ este *divergentă*. ■

Teorema 4.11.2 *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca f să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca oricărui număr pozitiv ε să –i corespundă o secţiune $\overline{D} = \overline{D}(\varepsilon)$, astfel încât, pentru orice pereche de secţiuni D', D'', verificând relaţiile*

$$\overline{D} \subset D', \quad \overline{D}'' \subset D",$$

să avem

$$\Big| \iint\limits_{D"} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \Big| < \varepsilon. \tag{4.170}$$

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Într-adevăr, să presupunem funcţia f integrabilă pe D şi să notăm cu $J(D)$ valoarea sa, adică

$$J(D) = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Să arătăm că pentru un $\varepsilon > 0$ dat putem determina o secţiune $\overline{D}$ în D, astfel încât, pentru orice altă secţiune D' a lui D cu proprietatea $\overline{D} \subset D'$, să avem

$$\Big| J(D) - \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.171}$$

Într-adevăr, dacă acest lucru nu este posibil, atunci pentru orice disc K de rază R există cel puţin o secţiune D_R, verificând relaţia $DK \subset D_R$, astfel încât să avem

$$\Big| J(D) - \iint\limits_{D_R} f(x,y)dxdy \Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să considerăm un şir crescător divergent R_n şi să punem $D_n = D_{R_n}$. Avem, pe de o parte,

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = D,$$

iar pe de altă parte,

$$\Big|J(D) - \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi $n \in I\!N$. Pe această cale se ajunge la concluzia absurdă că şirul numeric având termenul general

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$$

nu are limita $J(D)$.

Aşadar, relaţia (4.171) este satisfăcută pentru orice secţiune D' a domeniului nemărginit D, cu proprietatea $\overline{D} \subset D'$. Fie D" o altă secţiune, astfel încât $\overline{D} \subset D$". Alături de relaţia (4.171), putem scrie relaţia

$$\Big|J(D) - \iint\limits_{D"} f(x,y)dxdy\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.172}$$

iar din (4.171) şi (4.172) deducem imediat relaţia (4.170).

Condiţia este suficientă. Fie $\varepsilon > 0$, $\overline{D}$ o secţiune a domeniului nemărginit D şi (D_n) un şir monoton crescător de secţiuni ale lui D. Există un număr naturala $N(\varepsilon) = N$, astfel încât, pentru $n > N$, să avem $\overline{D} \subset D_n$. Dar, potrivit relaţiei (4.170), presupusă satisfăcută, vom avea

$$\Big|\iint\limits_{D_m} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy\Big| < \varepsilon,$$

pentru orice pereche de indici (m,n), astfel încât $m > N$, $n > N$.

În baza criteriului generala al lui Cauchy pentru şiruri numerice, aceasta înseamnă că şirul numeric

$$\Big(\int_{D_n} f(x,y)dxdy\Big)$$

are o limită finită, deci $f(P)$ este integrabilă pe D. ∎

Corolarul 4.11.1 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţia f să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca să existe un număr real $J(D)$, astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, să avem*

$$\Big|J(D) - \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy\Big| < \varepsilon,$$

îndată ce $\overline{D} \subset D'$, unde $\overline{D}$ este o secţiune ce depinde de ε.

Justificarea acestui corolar nu prezintă nici o dificultate.

Integrala pe un domeniu nemărginit, aşa cum a fost definită mai sus, păstrează principalele proprietăţi ale integralei duble pe un domeniu mărginit. Astfel, aditivitatea în raport cu domeniul de integrare, liniaritatea, monotonia şi formula schimbării de variabile sunt proprietăţi adevărate şi în cazul integralei duble pe un domeniu nemărginit.

În legătură cu integrabilitatea unei funcţii pozitive f pe un domeniu nemărginit D are loc

Teorema 4.11.3 *Dacă funcţia pozitivă f definită pe un domeniu nemărginit $D \subset I\!\!R^2$ este integrabilă pe orice subdomeniu compact a lui D, care are arie, atunci f este integrabilă impropriu pe D dacă şi numai dacă există o exhaustiune (D_n) a lui D astfel încât limita*

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = I \tag{4.173}$$

să existe şi să fie finită. În plus, are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă în baza Definiţiei 4.11.5.

Suficienţa. Fie (D_n) o exhaustiune a lui D pentru care există şi este finită limita (4.173) şi (D'_n) o altă exhaustiune a lui D. Din Definiţia 4.11.2 rezultă că există un indice $k(n)$ astfel încât $D'_n \subset D_{k(n)}$. Din faptul că f are valori pozitive pe D, rezultă

$$\iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{D_{k(n)}} f(x,y)dxdy \le I.$$

Tot din faptul că $f(x,y) \geq 0$ pe D rezultă că şirul $\Big(\displaystyle\iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy\Big)$ este monoton crescător şi mărginit superior de I, prin urmare există şi este finită limita

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D'_n} f(x,y)dxdy = I'. \tag{4.174}$$

Între limitele (4.173) şi (4.174) are loc inegalitatea $I' \leq I$. Dacă schimbăm rolul celor două exhaustiuni obţinem că $I \leq I'$ şi deci $I' = I$. Cum exhaustiunea (D'_n) a fost luată arbitrar, deducem că f este integrabilă impropriu pe D şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = I. \tag{4.175}$$

■

Exerciţiul 4.11.1 *Să se arate că funcţia* $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ *este integrabilă impropriu pe mulţimea* $I\!R_+ \times I\!R_+$ *şi să se deducă apoi că valoarea integralei lui Poisson este*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.176}$$

Soluţie. Deoarece f este pozitivă pe domeniul nemărginit de integrare D, este suficient să considerăm o exhaustiune particulară a lui $D = I\!R_+ \times I\!R_+ = I\!R^2_+$. Luăm

$$D_n = \{(x,y) \in I\!R^2 \; : \; x^2+y^2 \leq n^2; \; x \geq 0, \, y \geq 0\}$$

şi atunci

$$I = \iint\limits_{I\!R^2_+} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Dacă trecem la coordonate polare în plan, obţinem

$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \rho\, e^{-\rho^2}d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$-\frac{\pi}{4}\lim_{n\to+\infty} e^{-\rho^2}\Big|_0^n = \frac{\pi}{4}\lim_{n\to+\infty}(1-e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4},$$

ceea ce arată că f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{R}_+^2$ şi că valoarea integralei este $\dfrac{\pi}{4}$. Considerând orice altă exhaustiune (D_n') a lui $\mathbb{R}_+^2$, limita (4.174) are aceeaşi valoare, adică $\pi/4$.

Să considerăm exhaustiunea (D_n'), unde $D_n' = [0,n]\times[0,n]$. Atunci,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n dx\int_0^n e^{-(x^2+y^2)}dy =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^n e^{-x^2}\Big)^2 = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\Big)^2.$$

Dacă ţinem seama de Teorema 4.11.3, din confruntarea celor două rezultate deducem (4.176). ■

În continuare vom da, fromână demonstraţie, unele rezultate în legătură cu integralele duble improprii.

Teorema 4.11.4 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie funcţie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca funcţia $|f|$ să fie integrabilă pe acest domeniu.*

Această teorema confirmă faptul că definiţia dată, în cazul domeniilor nemărginite, pentru simbolul $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, conduce la un mod de convergenţă foarte rapid pentru integralele respective, convergenţă care are ca urmare coincidenţa naturii integralelor improprii

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{şi} \quad \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

O asemenea echivalenţă nu are loc în cazul unei singure dimensiuni.

Din punct de vedere practic, teorema precedentă aduce o simplificare considerabilă în studiul convergenţei integralelor duble improprii, întrucât noţiunea de integrală *semiconvergentă* din teoria integralelor improprii a unei funcţii de o variabilă nu–şi mai are corespondent în teoria integralelor duble. Divergenţa integralei $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ atrage după sine totdeauna divergenţa integralei $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Cazurile în care se poate stabili convergenţa unei integrale duble pe baza celor două teoreme precedente sunt foarte rare. De aceea, în practică, ca şi în orice problemă de convergenţă, se caută condiţii suficiente (criterii) pe baza cărora să se poată stabili dacă o integrală dublă improprie este sau nu convergentă. Vom enunţa aici câteva condiţii de acest gen.

Teorema 4.11.5 *Dacă g este funcţie integrabilă pe domeniul nemărginit D şi*

$$|f(x,y)| \leq |g(x,y)|, \quad (\forall)\,(x,y) \in D,$$

atunci f este funcţie integrabilă pe D.

Teorema 4.11.6 *Dacă funcţia g este integrabilă pe domeniul nemărginit D şi există $M > 0$ astfel încât*

$$\Big|\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\Big| < M, \quad (\forall)\ (x,y) \in D,$$

atunci f este funcţie integrabilă pe D.

Teorema 4.11.7 *Orice funcţie f care se poate pune sub forma*

$$f(P) = \frac{\varphi(P)}{\Big(d(C,P)\Big)^{\alpha}}, \quad (\forall)\ P \in D,$$

unde $\alpha > 2$, C este un punct fix al planului, iar φ o funcţie mărginită pe domeniul nemărginit D, este integrabilă pe D.

Teorema 4.11.8 *Dacă pentru un şir particular (D_n) de secţiuni ale domeniului nemărginit D tinzând către acest domeniu, şirul numeric corespunzător*

$$\Big(\iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy\Big)$$

este convergent, atunci f este integrabilă pe domeniul D.

Teorema 4.11.9 *Dacă integralele improprii de prima speţă*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy$$

sunt absolut convergente, atunci funcţia $f(x) \cdot g(y)$ *este integrabilă pe* $\mathbb{R}^2$ *şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) \cdot g(y) dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy.$$

În particular, dacă f *şi* g *sunt funcţii pare, absolut integrabile pe* $[0, +\infty)$, *atunci funcţia* $f(x) \cdot g(y)$, *definită pentru* $(x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, *este integrabilă pe* $\mathbb{R}^2_+ = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ *şi*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} f(x) \cdot g(y) dxdy = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx \cdot \int_{0}^{+\infty} g(y)dy.$$

Folosind ultima teoremă putem stabili formula lui Jacobi care dă legătura între funcţiile B şi Γ ale lui Euler. Reamintim că

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y} dy, \quad B(p, q) = \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv.$$

Pe lângă numărul pozitiv p, să considerăm valoarea în $q > 0$ a funcţiei Γ scrisă astfel

$$\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{q-1} e^{-x} dx$$

şi să efectuăm produsul numerelor $\Gamma(p)$ şi $\Gamma(q)$. Conform ultimei teoreme,

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} e^{-(x+y)} x^{q-1} y^{p-1} dxdy.$$

Dacă în integrala dublă improprie facem schimbarea de variabilă

$$T : \begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$$

atunci domeniul $D' = [0, +\infty) \times [0, 1]$ se transformă în $\mathbb{R}^2_+$.

Jacobianul transformării punctuale regulate T va fi

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & v \\ -u & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u$$

şi deci

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\int_0^1 dv\int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot u^{p+q-1}\cdot v^{p-1}\cdot(1-v)^{q-1}du=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot u^{p+q-1}du\cdot\int_0^{+\infty} v^{p-1}\cdot(1-v)^{q-1}dv=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q).$$

Prin urmare,

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{B(p+q)}.$$

Exerciţiul 4.11.2 *Să se studieze natura integralei duble improprii pe domeniu nemărginit*

$$I=\iint\limits_D \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)\Big]dxdy,$$

unde $D=\{(x,y)\in I\!R^2:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1\}$.

Soluţie. Domeniul de integrare este exteriorul mulţimii de puncte aflate în interiorul elipsei de semiaxe a şi b ce are axele de coordonate drept axe de simetrie. Este deci un domeniu nemărginit închis.

Folosim coordonatele polare generalizate din plan. Prin urmare, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x &= a\rho\cos\theta\\ y &= b\rho\sin\theta.\end{cases}$$

Pentru ca punctul $M(x,y)$ să descrie domeniul D, perechea (ρ,θ) trebuie să fie astfel încât $\rho\in[0,+\infty)$ şi $\theta\in[0,2\pi]$.

Ţinând cont că jacobianul transformării punctuale regulate de mai sus este $J=ab\rho$, rezultă că integrala improprie de mai sus devine

$$I=ab\iint\limits_\Delta \rho\exp{(-\rho^2)}d\rho d\theta,$$

unde Δ este intervalul bidimensional nemărginit $\Delta=[1,+\infty)\times[0,2\pi]$.

Scriind noua integrală ca o iteraţie de integrale, obţinem

$$I=ab\int_1^{+\infty}\rho\exp{(-\rho^2)}d\rho\int_0^{2\pi}=\frac{\pi ab}{e}.$$

■

4.11.2 Integrale duble din funcţii nemărginite

Să considerăm cazul în care funcţia reală f este definită pe domeniul $D \setminus \{M_0\} \subset I\!\!R^2$, unde M_0 este un punct din D cu proprietatea că f este nemărginită în orice mulţime $D \cup V$, mulţimea V fiind o vecinătate oarecare a lui M_0. Atunci, se spune că f are o singularitate în punctul M_0.

În continuare vom presupune că D şi V sunt mulţimi care au arie şi că f este integrabilă pe $D \setminus D \cap V$. Notăm cu $d(V)$ diametrul lui V şi fie (V_n) un şir descendent $V_{n+1} \subset V_n$ de vecinătăţi ale lui M_0 care să tindă la mulţimea formată doar din punctul M_0. Ultima condiţie are loc dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} d(V_n) = 0$.

Definiţia 4.11.6 *Spunem că f este* **integrabilă impropriu** *pe D dacă există un număr I, astfel încât pentru orice şir de vecinătăţi (V_n) ale lui M_0, cu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(V_n) = 0$, să avem*

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D\setminus D\cap V_n} f(x,y)dxdy = I$$

şi vom scrie

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = I.$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este *convergentă*. Rezultate asemănătoare celor de la integrala dublă pe domenii nemărginite pot fi stabilite şi în acest caz. Presupunând pentru simplitate că punctul singular este originea reperului Oxy, se poate arăta că orice problemă privind integrabilitatea funcţiei f pe domeniul D, unde f este nemărginită în vecinătăţi ale originii se reduce la problema integrabilităţii funcţiei

$$F(u,v) = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} \cdot f\Big(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\Big)$$

pe domeniul nemărginit Δ, imaginea lui D prin transformarea punctuală

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Într-adevăr, transformarea punctuală de mai sus are inversa

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2+v^2} \tag{4.177}$$

care, în ipoteza $u^2 + v^2 > 0$, reprezintă o inversiune de pol O şi de putere 1, al cărei determinant funcţional este

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2} < 0.$$

În urma acestei inversiuni, orice curbă rectificabilă închisă C din planul (x,y) se transformă întro curbă C_1 a planului (u,v), închisă sau cu ramuri infinite, după cum curba C conţine sau nu polul de inversiune.

În primul caz, domeniului închis de curba C îi corespunde, în planul (u,v), domeniul nemărginit exterior curbei C_1.

În cazul al doilea, domeniului limitat de curba C îi corespunde una din regiunile nemărginite ale planului (u,v) determinate de curba C_1.

În ambele cazuri, oricărui şir de domenii $(C_n(O))$, tinzând către punctul singular O, îi corespunde în planul (u,v) un şir de secţiuni (Δ_n) ale domeniului transformat Δ, tinzând către acest domeniu şi reciproc.

Formula de schimbare a variabilelor

$$\iint\limits_{C_n(O)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta_n} F(u,v)dudv$$

justifică afirmaţia făcută la începutul comentariului.

Ca aplicaţie, vom transpune la cazul studiat criteriul formulat în Teorema 4.11.8.

Să presupunem că putem scrie funcţia f sub forma

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

unde φ este mărginită pe domeniul D. Cu schimbarea de variabilă (4.177), obţinem

$$\iint\limits_{C_n(O)} \frac{\varphi(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}dxdy = \iint\limits_{\Delta_n} \frac{\Phi(u,v)}{(u^2+v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}}dudv,$$

unde

$$\Phi(u,v) = \varphi\Big(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\Big).$$

Dar, potrivit criteriului din Teorema 4.11.7, funcţia

$$F(u,v) = \frac{\Phi(u,v)}{(u^2+v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}}$$

este integrabilă pe Δ dacă $4-\alpha>2$, adică $\alpha<2$.

Aşadar, orice funcţie f care se poate scrie sub forma

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{(d(O,P))^{\alpha}},$$

unde $P(x,y)$, $\alpha<2$, iar φ este integrabilă în sens obişnuit (deci mărginită) pe domeniul D, este integrabilă pe acest domeniu.

În cazul în care $\varphi(x,y)=1$, valorile lui $\alpha>0$ pentru care $f(x,y)=\dfrac{1}{(d(O,P))^{\alpha}}$ este integrabilă pe un disc de rază R cu centrul în punctul O se pot determina utilizând trecerea la coordonatele polare în plan. Este posibil ca punctul O să fie înlocuit cu un punct oarecare $M_0(x_0,y_0)$.

Exerciţiul 4.11.3 *Să se afle valorile lui $\alpha>0$ pentru care este convergentă integrala*

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha}}dxdy,$$

unde

$$D=\{(x,y)\in I\!\!R^2\;:\;(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2\}.$$

Soluţie. În acest caz $M_0=(x_0,y_0)$. Considerăm

$$V_n=\{(x,y)\in I\!\!R^2\;:\;(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\frac{1}{n^2}\},$$

unde n este un număr natural suficient de mare astfel încât $V_n\subset D$, şi integrala dublă

$$I_n=\iint\limits_{D\setminus V_n}\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha}}dxdy,$$

care o vom calcula trecând la coordonate polare în plan.

$$I_n=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{1/n}^{R}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}}=2\pi\int_{1/n}^{R}\rho^{1-2\alpha}d\rho=$$

$$=2\pi\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\Big|_{1/n}^{R}=\frac{\pi}{1-\alpha}\Big[R^{2-2\alpha}-\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\Big].$$

Trecând la limită în rezultatul găsit, obţinem că dacă $\alpha\in(0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{D\setminus V_n}\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha}}dxdy=\frac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}.$$

Aşadar, integrala studiată este convergentă doar dacă $\alpha\in(0,1)$. ∎

Capitolul 5

Integrale de suprafaţă

5.1 Elemente de geometria diferenţială a suprafeţelor

În acest paragraf vom utiliza rezultate ale calculului diferenţial pentru a studia unele noţiuni frecvent întâlnite în geometria diferenţială a suprafeţelor şi teoria integrabilităţii pe suprafeţe a funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

5.1.1 Pânze parametrice netede

În spaţiul afin euclidian tridimensional $\mathcal{E}_3$, asociat spaţiului liniar $\mathbb{R}^3$, considerăm reperul cartezian $Oxyz$, a cărui bază $\mathcal{B}'$ este constituită din versorii

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{5.1}$$

Un punct oarecare $M \in \mathcal{E}_3$ este determinat de coordonatele carteziene (x, y, z) sau de vectorul de poziţie $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, unde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, iar x, y, z sunt mărimile algebrice ale proiecţiilor ortogonale ale vectorului $\mathbf{r}$ pe respectiv versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Definiţia 5.1.1 *Se numeşte* **pânză parametrică netedă** *funcţia vectorială de două variabile reale*

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}, \quad (u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2, \tag{5.2}$$

continuă pe mulţimea nevidă A şi cu derivate parţiale continue pe $\overset{\circ}{A}$.

Funcţia vectorială de două variabile reale (5.2) stabileşte o corespondenţă între punctele $(u, v) \in A$ şi punctele $M \in \mathcal{E}_3$ ale căror vectori de poziţie sunt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in A. \tag{5.3}$$

Observaţia 5.1.1 *Având în vedere modurile de reprezentare ale unei funcţii vectoriale de mai multe variabile reale, rezultă că în locul lui* (5.2), *pe lângă* (5.3), *putem considera şi reprezentarea*

$$\begin{cases} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in A. \tag{5.4}$$

Definiţia 5.1.2 *Imaginea funcţiei* (5.2), *adică mulţimea* $\mathbf{r}(A) \subset I\!\!R^3$, *va fi numită de asemeni* **pânză netedă în** $\mathcal{E}_3$, *iar* (5.4) *şi* (5.3) *se numesc respectiv* **ecuaţii parametrice** *şi* **ecuaţia vectorială** *ale pânzei netede.*

Submulţimea de puncte $(S) \subset \mathcal{E}_3$ ale căror vectori de poziţie au forma (5.3) o vom numi , de asemenea, pânză netedă.

Observaţia 5.1.2 *Deoarece* $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^3)$ *are derivate parţiale continue pe* $\overset{\circ}{A}$, *rezultă că este diferenţiabilă pe* $\overset{\circ}{A}$, *deci în orice punct* $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ *se poate defini diferenţiala sa* $d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0)\Big) \in L\Big(I\!\!R^2, I\!\!R^3\Big)$, *unde* $L\Big(I\!\!R^2, I\!\!R^3\Big)$ *este spaţiul vectorial al aplicaţiilor liniare definite pe* $I\!\!R^2$ *cu valori în* $I\!\!R^3$.

Matricea aplicaţiei liniare $d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0)\Big)$ în perechea de baze canonice

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\} \subset I\!\!R^2$$

şi $\mathcal{B}' \subset I\!\!R^3$ din (5.1), este de tipul 3×2 şi are elementele

$$J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Observaţia 5.1.3 *Coloanele matricei jacobiene* $J_{\mathbf{r}}((u_0,v_0))$ *sunt respectiv matricele coloană ale coordonatelor vectorilor:*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0); \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

în baza canonică $\mathcal{B}'$.

În aplicaţiile practice ale calculului integral, ale geometriei diferenţiale, mecanicii, fizicii etc. în definiţia pânzei parametrice se include încă o *condiţie de regulatitate* care afirmă că rangul matricei $J_{\mathbf{r}}((u_0,v_0))$ este egal cu 2 în orice punct $(u_0,v_0)\in \overset{\circ}{A}$. Această condiţie se scrie sub forma

$$\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2+\Big(\frac{D(z,x}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2+\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\Big)^2>0. \tag{5.5}$$

5.1.2 Semnificaţia geometrică a condiţiei de regularitate. Linii parametrice

Pentru a vedea semnificaţia geometrică a condiţiei de regularitate (5.5) să considerăm funcţia

$$u\mapsto \mathbf{r}(u,v_0),\ \ u\in I\subset I\!\!R,\ \ I\times\{v_0\}\subset A, \tag{5.6}$$

care este restricţia funcţiei $\mathbf{r}$ la segmentul de dreaptă $v=v_0$ paralel cu axa absciselor reperului cartezian din $\mathcal{E}_2$. Acest segment trece prin punctul $M_0'(u_0,v_0)$ şi este conţinut în mulţimea A. Aplicaţia (5.6) este continuu diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{I}$, prin urmare reprezintă un drum parametrizat neted în $I\!\!R^3$ de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v_0),\ \ u\in I. \tag{5.7}$$

Avem $\mathrm{Im}\,\mathbf{r}(\cdot,v_0)\subset\ \mathrm{Im}\ \mathbf{r}$, deci imaginea drumului (5.7) este o submulţime a pânzei netede de ecuaţie vectorială (5.3). După cum se ştie,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\,\mathbf{k} \tag{5.8}$$

este vectorul director al tangentei la drumul de ecuaţie vectorială (5.7) în punctul $M_0\in(S)$.

În mod similar, aplicaţia

$$v\mapsto \mathbf{r}(u_0,v),\ \ v\in J\subset I\!\!R,\ \ v\in J\subset I\!\!R,\ \ \{u_0\}\times J\subset A, \tag{5.9}$$

este un drum parametrizat neted în $I\!R^3$ de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in J, \tag{5.10}$$

a cărui imagine este tot o submulţime a lui Im$\mathbf{r}$. Vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k} \tag{5.11}$$

este vector director al tangentei la drumul parametrizat neted (5.10) în punctul $M_0 \in (S)$.

Produsul vectorial al vectorilor (5.8) şi (5.11) este vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \tag{5.12}$$

care, după dezvoltarea determinantului din membrul al doilea după elementele primei linii, se scrie

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}, \tag{5.13}$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u_0, v_0), \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(u_0, v_0), \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0, v_0).$$

Vectorul (5.13) este ortogonal pe vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ şi pe vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Din cele prezentate mai sus rezultă că condiţia de regularitate (5.5) este echivalentă cu

$$\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} > 0 \tag{5.14}$$

şi exprimă faptul că vectorii $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ şi $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ sunt necoliniari sau liniar independenţi. Din punct de vedere geometric, condiţia (5.14) se traduce prin aceea că imaginile drumurilor parametrizate (5.7) şi (5.10) au în punctul comun M_0 tangente distincte. Corespondenţa (5.4) fiind şi biunivocă, rezultă că în vecinătatea punctului $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ drumurile (5.7) şi (5.10) au în comun doar punctul $M_0 \in (S)$. Imaginile acestor drumuri se numesc *linii parametrice*. Prin fiecare punct $M_0 \in (S)$, corespunzător punctului $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$, unde sunt satisfăcute condiţiile de regularitate, trece un drum şi numai unul singur de forma (5.6) şi numai un drum de tipul (5.9).

5.1.3 Interpretarea geometrică a diferenţialei funcţiei vectoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ în punctul $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$. Plan tangent

Să vedem acum ce interpretare geometrică are funcţia afină

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big), \quad (u, v) \in I\!R^2, \tag{5.15}$$

unde valoarea în perechea $(u - u_0, v - v_0)$ a diferenţialei în punctul (u_0, v_0) a funcţiei $\mathbf{r}$ este

$$d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big) = \mathbf{e}'\Big(J_{\mathbf{r}}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}\Big). \tag{5.16}$$

Vectorul $\mathbf{e}'$ din relaţia (5.16) aparţine spaţiului liniar $I\!R^3 \times I\!R^3 \times I\!R^3$ şi are expresia $\mathbf{e}' = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Aplicaţia (5.15) defineşte o nouă pânză parametrică netedă de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\Big), \quad (u, v) \in I\!R^2 \tag{5.17}$$

sau de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = x(u_0, v_0) + \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y = y(u_0, v_0) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ z = z(u_0, v_0) + \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0). \end{cases} \tag{5.18}$$

Eliminarea lui $u-u_0$ şi $v-v_0$ din (5.18) conduce la ecuaţia

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{5.19}$$

unde $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$, $z_0=z(u_0,v_0)$ sunt coordonatele punctului M_0. Ecuaţia (5.19) arată că vectorul cu originea în M_0 şi extremitatea întrun punct curent M al pânzei (5.17) este ortogonal pe vectorul (5.13).

Toate punctele M din spaţiu cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este ortogonal pe vectorul $\mathbf{N}=A\,\mathbf{i}+B\,\mathbf{j}+C\,\mathbf{k}$ formează un plan.

Prin urmare, pânza parametrică de ecuaţie vectorială (5.17) sau de ecuaţii parametrice (5.18) are ca imagine un plan care se numeşte *plan tangent* în punctul M_0 la pânza parametrică netedă de ecuaţie vectorială (5.3). Acest plan are în comun cu $\mathrm{Im}\,\mathbf{r}$, întro vecinătate a punctului M_0, doar punctul M_0. Diferenţa

$$\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{r}(u_0,v_0)-d\mathbf{r}\Big((u_0,v_0);(u-u_0,v-v_0)\Big),(u,v)\in\overset{\circ}{A} \tag{5.20}$$

caracterizează *abaterea* dintre coordonatele punctelor de pe imaginea pânzei netede de ecuaţie vectorială (5.3) şi coordonatele punctelor corespunzătoare de pe planul (5.17) în vecinătatea punctului (u_0,v_0) căruia pe pânză îi corespunde punctul M_0.

Deoarece diferenţiabilitatea lui $\mathbf{r}$ în punctul (u_0,v_0) implică faptul că abaterea (5.20) tinde la zero mai repede decât tinde la zero distanţa euclidiană dintre punctele (u,v) şi (u_0,v_0) când $(u,v)\to(u_0,v_0)$, rezultă că planul (5.17) *aproximează* satisfăcător $\mathrm{Im}\,\mathbf{r}$ întro vecinătate a punctului M_0.

Exemplul 5.1.1 *Să se arate că aplicaţia* $\mathbf{r}:[0,2\pi)\times[0,\pi]\to I\!R^3$ *definită prin*

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\cos u\sin v)\,\mathbf{i}+(a\sin u\sin v)\,\mathbf{j}+(a\cos v)\,\mathbf{k},\quad a>0,$$

reprezintă o pânză parametrică netedă şi să se studieze această pânză.

Soluţie. Aplicaţia dată este continuu diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{A}=(0,2\pi)\times(0,\pi)$ deoarece funcţiile coordonate $x,\ y,\ z$ sunt diferenţiabile pe $\overset{\circ}{A}$.

Ecuaţiile parametrice ale pânzei sunt

$$\begin{cases} x &= a\cos u\sin v,\\ y &= a\sin u\sin v, \qquad u\in[0,2\pi), v\in[0,\pi].\\ z &= a\cos v,\end{cases}$$

Calculând distanţa euclidiană de la punctul $M(x,y,z)$ al pânzei la originea reperului $\mathcal{R}=\{O;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, găsim

$$d^2(M,O)=x^2+y^2+z^2=a^2\sin^2 v(\cos^2 u+\sin^2 u)+a^2\cos^2 v=$$

$$=a^2(\sin^2 v+\cos^v)=a^2,$$

de unde rezultă $d(M,O)=a$, ceea ce arată că $\mathrm{Im}\mathbf{r}$ este frontiera bilei cu centrul în origine şi raza egală cu a, adică sfera de rază a cu centrul în origine.

Matricea jacobiană $J_{\mathbf{r}}(u,v)$ a aplicaţiei date este

$$J_{\mathbf{r}}(u,v)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v\\ a\cos u\sin v & a\sin u\cos v\\ 0 & -a\sin v\end{pmatrix}.$$

Conform Observaţiei 5.1.3, elementele coloanelor matricei $J_{\mathbf{r}}$ sunt coordonatele vectorilor $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ şi respectiv $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, prin urmare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v) &= -(a\sin u\sin v)\,\mathbf{i}+(a\cos u\sin v)\,\mathbf{j}\\ \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v) &= (a\cos u\cos v)\mathbf{i}+\\ & +\ (a\sin u\cos v)\mathbf{j}-(a\sin v)\mathbf{k}.\end{cases}\tag{5.21}$$

Produsul vectorial al vectorilor (5.21) este

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -a\sin u\sin v & a\cos u\sin v & 0\\ a\cos u\cos v & a\sin u\sin v & -a\sin v\end{vmatrix}=$$

$$=-a\sin v\,\mathbf{r}(u,v),$$

oricare ar fi perechea $(u,v)\in(0,2\pi)\times(0,\pi)$. Deoarece pentru $v\in(0,\pi)$ avem $a\sin v>0$ rezultă că vectorul $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, diferit de vectorul nul, este coliniar şi de sens contrar vectorului de poziţie $\mathbf{r}(u,v)$.

Tangentele la liniile parametrice care trec prin punctul M_0 de vector de poziţie $\overrightarrow{OM_0}= \mathbf{r}(u_0, v_0)$, unde $(u_0, v_0) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, determină planul tangent la sferă în M_0 care are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); (t - u_0, s - v_0)\Big), \quad (t, s) \in I\!\!R^2.$$

Pentru punctele $(t, s) = (u, v)$ situate întro vecinătate a punctului (u_0, v_0) din mulţimea deschisă $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$, membrul doi din ultima ecuaţie aproximează satisfăcător punctele corespunzătoare de pe sferă.

Spre exemplu, dacă luăm $u_0 = v_0 = \dfrac{\pi}{4}$, atunci $M_0\Big(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$, matricea jacobiană $J_{\mathbf{r}}\Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\Big)$ este

$$J_{\mathbf{r}}\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2} \\ 0 & -\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

iar ecuaţiile parametrice ale planului tangent la sferă în punctul M_0 sunt

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2}\,t + \dfrac{a}{2}\,s \\ y &= \dfrac{a(2-\pi)}{4} + \dfrac{a}{2}\,t + \dfrac{a}{2}\,s \\ z &= \dfrac{a\sqrt{2}(\pi + 4)}{8} - \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\,s, \quad (t, s) \in I\!\!R^2. \end{cases}$$

Eliminând t şi s din aceste ecuaţii obţinem ecuaţia explicită a planului tangent

$$x + y + z\sqrt{2} - 2\,a = 0.$$

Un vector normal acestui plan este $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$. ■

Este posibil ca funcţiile $x,\ y,\ z$ din (5.4) să fie astfel încât

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = f(u, v),$$

unde $f \in \mathcal{F}(A)$ este o funcţie continuă pe mulţimea A situată în planul Oxy, cu derivate parţiale continue pe mulţimea $\overset{\circ}{A}$, aceasta însemnând că $u = x$,

$v = y$, iar z este o funcţie *continuu diferenţiabilă* de x şi y. În această situaţie, în locul ecuaţiilor (5.4) putem considera doar ecuaţia

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A. \tag{5.22}$$

Funcţia reală f, continuă pe mulţimea $A \subset Oxy$ şi diferenţiabilă pe mulţimea $\overset{\circ}{A}$, defineşte *explicit* pânza netedă $\operatorname{Im} \mathbf{r}$, iar (5.22) se numeşte *ecuaţia explicită* a pânzei netede. Ecuaţia vectorială a pânzei, corespunzătoare acestui caz particular, este

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}, \quad (x, y) \in A. \tag{5.23}$$

Vectorul tangent în $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + f(x, y_0)\,\mathbf{k}, \;\; x \in I, \;\; I \times \{y_0\} \subset \overset{\circ}{A} \tag{5.24}$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + p\,\mathbf{k}, \tag{5.25}$$

iar vectorul tangent în M_0 la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x_0\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x_0, y)\,\mathbf{k}, \;\; y \in J, \;\; \{x_0\} \times J \subset \overset{\circ}{A} \tag{5.26}$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathbf{k} = \mathbf{j} + q\,\mathbf{k}. \tag{5.27}$$

Drumurile parametrizate (5.24) şi (5.26) sunt obţinute prin intersecţia pânzei netede (5.22) cu planele $y = y_0$ şi $x = x_0$ care sunt paralele respectiv cu planele Oxz şi Oyz. Coeficienţii A, B şi C sunt:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -p; \quad B = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -q; \quad C = 1, \tag{5.28}$$

astfel că ecuaţia planului tangent în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la pânza netedă (5.22) este

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - z_0) = 0. \tag{5.29}$$

5.1.4 O altă definiţie a planului tangent

Să considerăm acum pânza netedă de ecuaţie vectorială (5.3) şi un drum parametrizat neted $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^3)$, unde I este interval din $I\!R$, cu proprietatea că există $t_0 \in I$ astfel încât

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0), \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im}\mathbf{f} \subset \operatorname{Im}\mathbf{r}. \tag{5.30}$$

Aceste proprietăţi arată că imaginea drumului parametrizat considerat este situat pe pânza parametrică netedă (5.3) şi că această imagine trece prin punctul M_0 de pe pânză al cărui vector de poziţie este $\overrightarrow{OM_0}= \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Proprietăţile de mai sus au loc dacă există un drum neted

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) : I \to A \ \text{ astfel încât } \ \mathbf{f} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varphi}. \tag{5.31}$$

Tangenta în M_0 la drumul parametrizat neted $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)\, s, \quad s \in I\!R. \tag{5.32}$$

Pe de altă parte, după regula lanţului de derivare a unei funcţii compuse, avem

$$\mathbf{f}'(t_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\varphi_1'(t_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\varphi_2'(t_0). \tag{5.33}$$

Din (5.33) şi valoarea în $\mathbf{h} = \boldsymbol{\varphi}'(t_0)$ a diferenţialei funcţiei $\mathbf{r}$ în punctul (u_0, v_0) rezultă

$$\mathbf{f}'(t_0) = d\,\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); \boldsymbol{\varphi}'(t_0)\Big),$$

iar din liniaritatea diferenţialei de ordinul întâi, avem

$$\mathbf{f}'(t_0)\, s = d\,\mathbf{r}\Big((u_0, v_0); s\,\boldsymbol{\varphi}'(t_0)\Big). \tag{5.34}$$

Folosind în (5.32) relaţiile (5.34) şi (5.30) şi luând în calcul formula (5.17) deducem că tangenta (5.32) este inclusă în planul tangent (5.17) în punctul M_0 la pânza netedă (5.3). Acest rezultat conduce la o altă definiţie a planului tangent într-un punct al unei pânze parametrice netede.

Definiţia 5.1.3 *Se numeşte* **plan tangent** *în punctul M_0 al unei pânze netede, locul geometric al tangentelor la respectiv toate drumurile netede care trec prin M_0 ale căror imagini se află pe imaginea pânzei.*

5.1.5 Definiţia suprafeţei

Definiţia 5.1.4 *Pânzele netede* $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(A, I\!\!R^3)$ *şi* $\widetilde{\mathbf{r}} \in \mathcal{F}(\widetilde{A}, I\!\!R^3)$, *unde* $A, \widetilde{A} \subset I\!\!R^2$, *se numesc* **echivalente** *dacă există un homeomorfism diferenţiabil* $\boldsymbol{\psi} : A \to \widetilde{A}$, *cu jacobianul pozitiv în orice punct* $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$, *astfel încât* $\mathbf{r} = \widetilde{\mathbf{r}} \circ \boldsymbol{\psi}$.

Definiţia 5.1.5 *Se numeşte* **suprafaţă netedă** *o clasă de echivalenţă în mulţimea pânzelor parametrice netede.*

O suprafaţă netedă poate fi reprezentată prin oricare pânză parametrică netedă care aparţine clasei de echivalenţă respective. În concluzie, întro vecinătate a unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, o suprafaţă netedă care conţine acest punct poate fi reprezentată fie vectorial prin ecuaţia vectorială (5.3), fie parametric prin ecuaţiile parametrice (5.4), fie prin *ecuaţia carteziană explicită* (5.22). Reprezentarea (5.22) se obţine din oricare reprezentare parametrică în baza teoremei de existenţă şi unicitate a sistemelor de funcţii reale de mai multe variabile reale definite implicit.

Observaţia 5.1.4 *Analizând* (5.31) *constatăm că orice funcţie diferenţiabilă, depinzând de parametrii* u *şi* v *ai unei suprafeţe netede* $(\mathcal{S})$, *asociată ecuaţiei sale vectoriale* (5.3), *defineşte o* **curbă situată** (**trasată**) **pe suprafaţă**. *Curbele particulare* $u = \text{const.}$ *şi respectiv* $v = \text{const.}$ *se numesc* **curbe coordonate** *sau* **linii parametrice** *ale suprafeţei netede* $(\mathcal{S})$. *O curbă trasată pe o suprafaţă poate avea* **ecuaţia explicită** $v = f(u)$ *sau* **ecuaţia implicită** $F(u, v) = 0$.

De exemplu, drumurile (5.24), (5.26) care reprezintă clase de echivalenţă în mulţimea drumurilor echivalente numite curbe, sunt linii parametrice ale suprafeţei $(\mathcal{S})$ reprezentată cartezian explicit prin (5.22).

5.1.6 Ecuaţia carteziană implicită a unei suprafeţe

Fie aplicaţia reală diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$, $A \subset I\!\!R^3$, cu proprietea că gradientul

$$(\boldsymbol{\nabla} F)(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\,\mathbf{k}, \tag{5.35}$$

este vector nenul pe mulţimea deschisă $\overset{\circ}{A}$, adică

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\Big)^2 > 0,\ (x, y, z) \in \overset{\circ}{A}\,. \tag{5.36}$$

Definiţia 5.1.6 *Mulţimea* $(\mathcal{S})$ *a punctelor* $M \in \mathcal{E}_3$ *ale căror coordonate* (x, y, z) *verifică ecuaţia*

$$(\mathcal{S}): \quad F(x, y, z) = 0, \tag{5.37}$$

unde funcţia diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$ *satisface* (5.36), *se numeşte* **varietate bidimensională scufundată în $I\!R^3$** *sau* **suprafaţă dată implicit***. Ecuaţia* (5.37) *este prin definiţie* **ecuaţia carteziană implicită** *a suprafeţei* $(\mathcal{S})$.

5.1.7 Vector normal unei suprafaţe întrun punct regulat

Fie I un interval din $I\!R$ şi aplicaţia vectorială de o variabilă reală diferenţiabilă $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(I, A)$ cu proprietatea

$$F(\boldsymbol{\varphi}(t)) = 0, \quad t \in I,$$

fapt ce exprimă că imaginea drumului parametrizat neted de ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in I$$

se află pe varietatea bidimensională (5.37).

Datorită faptului că atât F cât şi $\boldsymbol{\varphi}$ sunt funcţii diferenţiabile, rezultă că funcţia compusă $F \circ \boldsymbol{\varphi}$ este diferenţiabilă, deci derivabilă pe I şi ca atare vom avea

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_2'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \varphi_3'(t) = 0, \quad t \in I. \tag{5.38}$$

Identitatea (5.38) arată că vectorul $(\boldsymbol{\nabla} F)(\boldsymbol{\varphi}(t))$ este ortogonal vectorului tangent $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ la drumul parametrizat $\boldsymbol{\varphi}$ în punctul $M \in \mathcal{E}_3$ corespunzător valorii t a parametrului. Pe de altă parte, toate tangentele în punctul M corespunzător valorii t a parametrului la respectiv toate drumurile parametrizate ce trec prin M şi sunt situate pe varietatea diferenţiabilă $(\mathcal{S})$ formează planul tangent în M la suprafaţă. Toate aceste rezultate conduc la următoarea definiţie.

Definiţia 5.1.7 *Fie suprafaţa netedă* $(\mathcal{S})$ *de ecuaţie carteziană implicită* (5.37) *şi* $M(x, y, z) \in (\mathcal{S})$. *Vectorul*

$$\mathbf{N} = (\boldsymbol{\nabla} F)(x, y, z), \tag{5.39}$$

se numeşte **vectorul normal** *la suprafaţă în punctul* M.

Proprietatea de a fi ortogonal pe vectorul tangent la orice drum neted situat pe varietatea diferenţiabilă $(\mathcal{S})$ care conţine punctul $M(x,y,z)\in\mathcal{S}$ o are şi vectorul

$$-\mathbf{N}=-(\boldsymbol{\nabla}F)(x,y,z), \tag{5.40}$$

deci şi acesta poate fi numit *vector normal* în punctul M la suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$.

Observaţia 5.1.5 *Dacă suprafaţa netedă* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată prin ecuaţia vectorială* (5.3), *atunci vectorul normal* $\mathbf{N}$ *în punctul*

$$M(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in(\mathcal{S})$$

este, fie vectorul

$$\mathbf{N}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v), \tag{5.41}$$

fie opusul acestuia. Când suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ *este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia* (5.22), *din* (5.29) *deducem că vectorul normal în M(x,y,f(x,y)) este, fie*

$$\mathbf{N}=-p\,\mathbf{i}-q\,\mathbf{j}+\,\mathbf{k}, \tag{5.42}$$

fie opusul acestuia, p şi q fiind notaţiile lui Monge pentru derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f în punctul (x,y)

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v);\quad q=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Putem defini *versorul normal* întrun punct al unei suprafeţe netede ca fiind, după caz, versorul unuia din vectorii care apar în relaţiile (5.39)−(5.42). Versorul normal poate fi, după caz:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}=\pm\,&\frac{(\boldsymbol{\nabla}F)(x,y,z)}{\|(\boldsymbol{\nabla}F)(x,y,z)\|}=\\ =\,&\frac{\pm(F'_x(x,y,z)\,\mathbf{i}+F'_y(x,y,z)\,\mathbf{j}+F'_z(x,y,z)\,\mathbf{k})}{\sqrt{\Big(F'_x(x,y,z)\Big)^2+\Big(F'_y(x,y,z)\Big)^2+\Big(F'_z(x,y,z)\Big)^2}};\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}=\pm\,&\frac{\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)}{\Big\|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|}=\\ =\pm\,&\frac{A(u,v)\,\mathbf{i}+B(u,v)\,\mathbf{j}+C(u,v)\,\mathbf{k}}{\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}};\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\mathbf{n} = \pm\Big(\frac{-\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{i} + \frac{-\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathbf{k}\Big). \tag{5.45}$$

Observăm că pentru fiecare caz de reprezentare a unei suprafeţe netede se pot defini doi versori normali care sunt coliniari şi de sens contrar.

Definiţia 5.1.8 *Coordonatele versorului normal la o suprafeţă netedă întrun punct al ei se numesc* **cosini directori**.

Definiţia 5.1.9 *Se numeşte* **normala** *în punctul M al unei suprafeţe netede $(\mathcal{S})$, dreapta (N) determinată de punctul M şi de unul din versorii normali ai suprafeţei în acel punct.*

Corespunzător celor doi versori normali întrun punct al unei suprafeţe vom avea două orientări ale normalei pe care le vom numi *orientarea pozitivă a normalei*, când vectorul ei director este $\mathbf{n}$, şi *orientarea negativă a normalei* când se alege drept direcţie a normalei vectorul $-\mathbf{n}$. În loc de orientare pozitivă şi respectiv orientare negativă a normalei se pot folosi şi termenii *sens pozitiv* şi respectiv *sens negativ al normalei.*

Definiţia 5.1.10 *Fie funcţia reală diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(A)$ care satisface* (5.36) *şi punctul arbitrar $M_0(x_0, y_0, z_0) \in A$. Varietatea bidimensională de ecuaţie carteziană explicită*

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \tag{5.46}$$

se numeşte **varietate de nivel** *sau* **suprafaţă de nivel a funcţiei** *F corespunzătoare* **nivelului** *$F(x_0, y_0, z_0)$.*

Observaţia 5.1.6 *Vectorul normal în punctul $M(x, y, z)$ la suprafaţa de nivel* (5.46) *care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este* (5.35).

Observaţia 5.1.7 *Pentru fiecare punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ aparţinând vartietăţii de nivel* (5.46) *planul de ecuaţie*

$$(x-x_1)\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) + (y-y_1)\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1, z_1) + (z-z_1)\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

este **planul tangent** *în punctul M_1 la varietatea de nivel* (5.46).

Definiţia 5.1.11 *Dacă o suprafaţă $\mathcal{S}$ nu este netedă, însă poate fi scrisă ca reuniunea unui număr finit de suprafeţe netede, spunem că $\mathcal{S}$ este* **suprafaţă netedă pe porţiuni**.

5.1.8 Element de arie al unei suprafeţe netede

Să considerăm o suprafaţă netedă $(\mathcal{S})$ reprezentată de pânza parametrică (5.3). Prin punctul M de vector de poziţie $\mathbf{r}(u,v)$ de pe $\operatorname{Im}\mathbf{r}$ trece o curbă parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $v = \text{const.}$, al cărei vector tangent în M este $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ şi o curbă parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $u = \text{const.}$, al cărei vector tangent în M este $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$. Un vector de mărime infinitezimală, coliniar cu vectorul $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ este $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\,du$, iar un vector coliniar cu $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$, de mărime infinitezimală, are forma $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\,dv$. Aceşti doi vectori determină un paralelogram infinitezimal inclus în planul tangent în M la suprafaţa $(\mathcal{S})$. Fie $d\sigma$ aria acestui paralelogram.

Ne propunem să calculăm expresia lui $d\sigma$ când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată fie prin ecuaţia vectorială (5.3), fie prin ecuaţiile parametrice (5.4) sau prin ecuaţia carteziană explicită (5.22).

Pentru aceasta ne folosim de interpretarea geometrică a mărimii produsului vectorial a doi vectori necoliniari $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ şi $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ care, se ştie, este aria paralelogramului din $\mathcal{E}_3$ ce are două din laturi reprezentanţii celor doi vectori întrun punct oarecare al spaţiului, adică

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\tau,$$

unde $\tau \in [0,\pi]$ este unghiul dintre cei doi vectori. Aplicând această formulă de calcul pentru $d\sigma$ găsim

$$\begin{aligned}(d\sigma)^2 \;&=\; \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|^2 \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|^2 \sin^2\tau (dudv)^2 = \\ &\Big(\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|^2 \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|^2 - \\ &-\Big(\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\| \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\| \cos\tau\Big)^2\Big)(dudv)^2,\end{aligned}$$

în care am folosit identitatea $\sin^2\tau + \cos^2\tau = 1$. Dacă ţinem cont că produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^3$ eşte egal cu produsul dintre mărimile vectorilor şi cosinusul unghiului dintre ei, iar pătratul normei (lungimii) unui vector este produsul scalar al acelui vector cu el însuşi, egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$d\sigma = \sqrt{E(u,v)\,G(u,v) - F^2(u,v)}\,dudv, \tag{5.47}$$

în care s–au făcut notaţiile

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) = \\ &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\Big)^2 \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} &F(u,v) = \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\Big\|\,\Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|\cos\tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) = \\ &= \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\Big)^2. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Observaţia 5.1.8 *Pentru suprafaţa netedă de ecuaţie vectorială* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, *mărimea* $E(u,v)$ *este suma pătratelor elementelor primei coloane a matricei Jacobiene* $J_{\mathbf{r}}(u,v)$, $F(u,v)$ *este suma produselor elementelor corespunzătoare celor două coloane din* $J_{\mathbf{r}}(u,v)$, *iar* $G(u,v)$ *este suma pătratelor elementelor coloanei a doua a matricei* $J_{\mathbf{r}}(u,v)$.

Observaţia 5.1.9 *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată printr–o pânză netedă dată cartezian explicit prin* (5.22) *şi ţinem cont de* (5.23), *deducem că matricea jacobiană* $J_{\mathbf{r}}(x,y)$ *are elementele*

$$J_{\mathbf{r}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Din Observaţiile 5.1.8 şi 5.1.9 rezultă:

$$E(x,y) = 1 + p^2; \quad F(x,y) = p\cdot q; \quad G(x,y) = 1 + q^2. \tag{5.51}$$

Prin urmare, aria infinitezimală $d\sigma$ a unei suprafaţe netede reprezentată cartezian explicit de ecuaţia (5.22) este

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy. \tag{5.52}$$

Definiţia 5.1.12 *Mărimea $d\sigma$ din expresia* (5.47), *respectiv* (5.52), *se numeşte* **element de arie** *al suprafeţe* $(\mathcal{S})$ *calculat în punctul M al ei reprezentată parametric prin ecuaţiile* (5.4), *respectiv cartezian explicit prin ecuaţia* (5.22).

Definiţia 5.1.13 *Funcţiile reale E, F, G, calculate după legea* (5.48) *când* $(\mathcal{S})$ *este reprezentată parametric, sau după legea* (5.51) *dacă* $(\mathcal{S})$ *este dată prin ecuaţia carteziană explicită, se numesc* **coeficienţii lui Gauss** *sau* **coeficienţii primei forme fundamentale** *a suprafeţei netede* $(\mathcal{S})$.

Pentru a vedea semnificaţia primei forme fundamentale a unei suprafeţe netede, considerăm un drum oarecare (curbă) (γ) pe suprafaţă care trece prin punctul $M(x, y, z)$ cu coordonatele date de (5.4), unde $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$. Elementul de arc ds al acestei curbe în punctul M este

$$ds = \|d\mathbf{r}(u, v)\| = \sqrt{d\mathbf{r}(u, v) \cdot d\mathbf{r}(u, v)}.$$

Având în vedere expresia analitică a diferenţialei

$$d\mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)dv,$$

calculând pătratul scalar al acesteia şi ţinând cont de notaţiile (5.48) − (5.50), constatăm că

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2. \tag{5.53}$$

Definiţia 5.1.14 *Relaţia* (5.53) *se numeşte* **prima formă fundamentală** *a unei suprafeţe.*

Observaţia 5.1.10 *Pătratul elementului de arc, ds^2, este formă pătratică în variabilele du şi dv, iar determinantul matricei coeficienţilor este*

$$E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v) = \Big\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \Big\|^2. \tag{5.54}$$

Observaţia 5.1.11 *Relaţia* (5.54) *şi condiţia de regularitate* (5.5) *arată că ds^2 este* **formă pătratică pozitiv definită**.

Definiţia 5.1.15 *Fie o suprafaţă netedă* $(\mathcal{S})$, $M_0 \in \mathcal{S}$, (γ_1), (γ_2) *două curbe situate pe suprafaţă şi* $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ *versorii tangentelor în punctul comun* M_0 *la respectiv curbele* (γ_1) *şi* (γ_2). *Se numeşte* **unghiul dintre curbele** (γ_1) **şi** (γ_2), *unghiul* $\varphi \in [0, \pi]$ *dintre* $\boldsymbol{\tau}_1$ *şi* $\boldsymbol{\tau}_2$.

Cosinusul unghiului φ este dat de relaţia

$$\cos\varphi = \frac{d\mathbf{r}(u_0, v_0) \cdot \delta\mathbf{r}(u_0, v_0)}{\|d\mathbf{r}(u_0, v_0)\| \, \|\delta\mathbf{r}(u_0, v_0)\|}, \tag{5.55}$$

unde diferenţialele vectorului de poziţie a punctului M_0 în lungul fiecăreia dintre cele două curbe sunt

$$\begin{cases} d\mathbf{r}(u_0, v_0) &= \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)du &+ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)dv, \\ \delta\mathbf{r}(u_0, v_0) &= \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\delta u &+ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\delta v. \end{cases} \tag{5.56}$$

Înlocuind (5.56) în (5.55) şi folosindu–ne de expresiile coeficienţilor lui Gauss în punctul $M_0'(u_0, v_0)$, deducem

$$\cos\varphi = \frac{E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\,\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \tag{5.57}$$

Presupunem că cele două curbe în discuţie mai sus sunt liniile parametrice care trec prin M_0. Atunci, pe prima linie avem $dv = 0$, iar pe cea de a doua $\delta v = 0$, încât din (5.57) deducem că unghiul dintre liniile parametrice este astfel încât

$$\cos\varphi = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)\, G(u_0, v_0)}}. \tag{5.58}$$

Două curbe trasate pe suprafaţa $(\mathcal{S})$ de ecuaţie vectorială (5.3), care trec prin punctul $M_0 \in (\mathcal{S})$, sunt ortogonale dacă

$$E(u_0, v_0)du\delta u + F(u_0, v_0)(du\delta v_0 + dv\delta u_0) + G(u_0, v_0)dv\delta v_0 = 0. \tag{5.59}$$

Observaţia 5.1.12 *Să considerăm pânza parametrică din Exemplul* 5.1.1. *Constatăm că*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = 0,$$

ceea ce înseamnă că cel de al doilea coeficient al lui Gauss este nul în orice punct $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. *Folosind* (5.58) *şi* (5.59) *deducem că liniile* *parametrice ale sferei sunt ortogonale. Aceste linii parametrice sunt, pe de o parte, cercul paralel obţinut când $v = const.$ şi, pe de altă parte, meridianul care se obţine luând $u = const.$.*

Exerciţiul 5.1.1 *Fie suprafaţa $(\mathcal{S})$ din $I\!R^3$ de ecuaţie vectorială*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u \cos v + \sin v)\,\mathbf{i} + (u \sin v - \cos v)\,\mathbf{j} + (u - v)\,\mathbf{k}, \quad (u, v) \in I\!R^2.$$

Să se arate că în toate punctele suprafeţei există un plan tangent unic şi să se scrie ecuaţia vectorială, ecuaţiile parametrice şi ecuaţia carteziană implicită ale planului tangent la suprafaţă în punctul $M_0 \in (\mathcal{S})$ corespunzătoare valorilor $u = \dfrac{\pi}{3},\; v = 0$ ale parametrilor u şi v. Să se determine coeficienţii lui Gauss şi prima formă fundamentală întrun punct curent M al suprafeţei.

Soluţie. Funcţia $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(\mathbf{R^2}, \mathbf{R^3})$ care defineşte suprafaţa $(\mathcal{S})$ este diferenţiabilă, prin urmare $(\mathcal{S})$ este o suprafaţă netedă în $I\!R^3$. Apoi, matricea jacobiană a aplicaţiei $\mathbf{r}$ este

$$J_{\mathbf{r}}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v + \cos v \\ \sin v & u \cos v + \sin v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dacă se calculează funcţiile $A,\ B,\ C$, se găseşte:

$$A = -u \cos v - 2 \sin v; \quad B = -u \sin v - 2 \cos v; \quad C = u.$$

Observăm că $A^2 + B^2 + C^2 = 2u^2 + 4 > 0, \quad (\forall)\,, (u, v) \in I\!R^2$, deci în orice punct al suprafeţei există un plan tangent unic determinat.

Ecuaţia vectorială a planului tangent în M_0 este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\frac{\pi}{3}, 0) + (\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})\Big(J_{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{3}, 0)\begin{pmatrix} t - \dfrac{\pi}{3} \\ s \end{pmatrix}\Big).$$

Dacă se efectuează înlocuirile cerute se găseşte

$$\mathbf{r} = \frac{\pi}{3}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\pi}{3}\mathbf{k} + (\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})\begin{pmatrix} t - \dfrac{\pi}{3} + s \\ \dfrac{\pi}{3} s \\ t - s - \dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Egalând coordonatele corespunzătoare ale vectorilor din cei doi membri ai ecuaţiei vectoriale a planului tangent în punctul M_0 găsim că ecuaţiile parametrice ale acestuia sunt

$$\begin{cases} x &= t+s \\ y &= \dfrac{\pi}{3}-1 \\ z &= t-s, \quad (t,s)\in I\!R^2. \end{cases}$$

Ecuaţia carteziană implicită a planului tangent în M_0 se obţine eliminând parametrii t şi s din ecuaţiile parametrice de mai sus. Se găseşte că această ecuaţie este

$$\pi\, x - 6\, y - \pi\, z - 6 = 0.$$

Folosind Observaţia 5.1.8 constatăm că coeficienţii lui Gauss sunt:

$$E(u,v)=2;\quad F(u,v)=0;\quad G(u,v)=2+u^2,\quad (u,v)\in I\!R^2,$$

iar forma întâia fundamentală a suprafeţei este

$$ds^2 = 2\,du^2 + (2+u^2)\,dv^2.$$

■

Exerciţiul 5.1.2 *Să se arate că planul tangent întrun punct curent al suprafeţei*

$$(\mathcal{S})\ z = f(x,y) = x\,\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big),\quad x\neq 0,$$

unde φ este o funcţie reală derivabilă pe un interval real, trece prin originea reperului din $\mathcal{E}_3$.

Soluţie. Dacă notăm coordonatele punctului curent al planului tangent cu $X,\ Y,\ Z$, atunci ecuaţia planului tangent în punctul $M(x,y,x\,\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big))$ al suprafeţei date este

$$(X-x)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (Y-y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - (Z - f(x,y)) = 0.$$

Trebuiesc calculate derivatele parţiale ale funcţiei f care defineşte suprafaţa. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big) - \frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big);\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Înlocuind aceste valori ale derivatelor parţiale în ecuaţia planului tangent găsim

$$\Big(\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big) - \frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big)X + \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)Y - Z = 0.$$

Oricare din aceste plane trece prin originea reperului deoarece coordonatele acesteia $(0,0,0)$ verifică ecuaţia planului indiferent de punctul $M(x,y,z)$ al suprafeţei. ∎

Definiţia 5.1.16 *O porţiune* $(\mathcal{S})$ *de suprafaţă netedă se numeşte* **suprafaţă orientabilă**, *dacă în fiecare punct al ei normala este bine determinată şi, pornind dintr–un punct al suprafeţei pe o curbă închisă cu o anumită orientare a normalei, ajungem în acel punct cu aceeaşi orientare a normalei. Faţa care corespunde sensului pozitiv al normalei se numeşte* **faţa pozitivă** *a suprafeţei. O suprafaţă orientabilă se numeşte şi* **suprafaţă cu două feţe** *sau* **suprafaţă bilateră**.

Cea mai simplă suprafaţă cu două feţe este planul. *Cuadricele* (elipsoidul, hiperboloizii, paraboloizii, cilindri pătratici, conurile pătratice, perechile de plane) sunt suprafeţe orientabile. Când suprafaţa este închisă, deci când este frontiera unui domeniu spaţial mărginit, ea este orientabilă cele două feţe ale sale numindu–se *faţa exterioară* şi *faţa interioară*. Dacă suprafaţa $(\mathcal{S})$ are reprezentarea carteziană explicită (5.22), prin definiţie faţa pozitivă a sa este aceea pentru care normala orientată întrun punct al ei face unghi ascuţit cu versorul $\mathbf{k}$. În acest caz feţei pozitive i se spune şi *faţă superioară*.

Există suprafeţe cu *o singură faţă* care se mai numesc *suprafeţe neorientabile* sau *suprafeţe unilatere*; banda lui Möbius este un exemplu de *suprafaţă cu o singură faţă*.

5.2 Aria unei suprafeţe netede

Din geometria elementară se cunosc ariile domeniilor plane cu frontiere poligoane, a cercului şi ariile unor figuri geometrice de rotaţie (con, cilindru, sferă, zonă sferică, calotă sferică). Cu ajutorul calculului integral am extins această noţiune şi am arătat cum se calculează aria oricărui domeniu determinat de curbe plane închise, care au arie. Pentru definirea ariei unei porţiuni de suprafaţă oarecare, pornind pe calea urmată la calculul lungimii unui arc regulat de curbă prin considerarea liniilor poligonale înscrise în curbă, ar trebui să considerăm suprafeţe poliedrale înscrise în porţiunea de suprafaţă dată. După cum a arătat Schwarz printr–un exemplu (cizma lui Schwarz), această cale nu duce întotdeauna la rezultat. De aceea, pentru introducerea noţiunii de arie a unei porţiuni de suprafaţă netedă procedăm după cum urmează.

Să considerăm o suprafaţă netedă pozitiv orientată $(\mathcal{S})$ dată cartezian explicit de ecuaţia (5.22) şi să notăm cu (Γ) curba care mărgineşte $(\mathcal{S})$. Fie D interiorul domeniului de definiţie al funcţiei f din (5.22) şi γ frontiera acestuia. Mulţimile D şi γ sunt proiecţiile ortogonale ale lui $(\mathcal{S})$ şi respectiv Γ pe planul Oxy.

Să împărţim suprafaţa $(\mathcal{S})$ în patrulatere curbilinii (S_{ij}) cu ajutorul unor curbe coordonate de forma $x = x_i =$ const., $i = \overline{1,m}$, şi $y = y_j =$ const., $j = 1, n$. Aceste curbe sunt intersecţiile suprafeţei cu plane paralele la planele de coordonate Oyz şi Oyz. Evident,

$$(S_{ij}) = \{(x,y,z) \in (\mathcal{S}) : \; x_i \le x \le x_{i+1}, \; y_j \le y \le y_{j+1}, \; z = f(x,y)\}.$$

Proiecţia D_{ij} a porţiunii (S_{ij}) din suprafaţa (S) pe planul Oxy este

$$D_{ij} = \{(x,y) \in D : \; x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1},$$

unde $1 \le i \le m-1, 1 \le j \le n-1\}$.

Fie $M_{ij}(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))$ un punct arbitrar aparţinând patrulaterului curbiliniu (S_{ij}) şi $M'_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$ proiecţia acestui punct pe planul Oxy. Notăm cu T_{ij} porţiunea din planul tangent la suprafaţă în punctul M_{ij} care se proiectează în planul Oxy pe dreptunghiul, eventual curbiliniu, D_{ij}. Din geometria elementară se cunoaşte relaţia:

$$\text{aria}\, D_{ij} = \text{aria}\, T_{ij} \, \cos\gamma_{ij}, \tag{5.60}$$

unde $\gamma_{ij} \in [0, \pi/2)$ este unghiul dintre normala la faţa pozitivă a suprafeţei $(\mathcal{S})$ în punctul M_{ij} şi versorul $\mathbf{k}$ al axei Oz. Am arătat în paragraful precedent că

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_j) + q^2(\xi_i, \eta_j)}} \tag{5.61}$$

unde, conform notaţiilor lui Monge,

$$p(\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_j); \quad q(\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_j).$$

O valoare aproximativă a ariei porţiunii netede $(\mathcal{S})$ de suprafaţă este

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \text{aria}\, T_{ij}. \tag{5.62}$$

Folosind (5.60) în (5.62) constatăm că

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cos\gamma_{ij}}\, \text{aria}\, D_{ij}. \tag{5.63}$$

Având în vedere (5.61) rezultă că expresia lui Ω_{mn} din (5.63) se poate scrie în forma

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_j) + q^2(\xi_i, \eta_j)}\, \text{aria}\, D_{ij}. \tag{5.64}$$

Observaţia 5.2.1 *Membrul doi al relaţiei* (5.64) *este o sumă integrală Riemann a funcţiei* $F(x,y) = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}$ *corespunzătoare modului de divizare*

$$\Delta_{mn} = \{D_{11}, D_{12}, \cdots, D_{ij}, \cdots, D_{mn}\} \tag{5.65}$$

şi alegerii punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$.

Definiţia 5.2.1 *Se numeşte* **aria** *suprafeţei netede* $(\mathcal{S})$ *numărul real*

$$\text{aria}\, S = \lim_{\nu_{mn}\to 0} \Omega_{mn}. \tag{5.66}$$

Teorema 5.2.1 *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este netedă şi este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia* (5.22), *atunci ea are arie şi aria sa este dată de formula*

$$\text{aria}\, S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}\, dxdy. \tag{5.67}$$

Demonstraţie. Deoarece am considerat că suprafaţa $(\mathcal{S})$ este netedă, rezultă că funcţia f din (5.22) este continuu diferenţiabilă pe D ceea ce atrage că funcţia

$$F(x,y) = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}$$

este continuă pe D şi, drept urmare, limita din membrul al doilea al relaţiei (5.66) este integrala dublă pe D din funcţia $F(x,y)$, astfel că vom putea scrie (5.67) şi teorema este demonstrată. ■

Observaţia 5.2.2 *Formula de calcul* (5.67) *a ariei suprafeţei netede* ($\mathcal{S}$) *poate fi scrisă şi în forma*

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\cos\gamma}. \tag{5.68}$$

Exemplul 5.2.1 *Să se determine aria suprafeţei tăiată din* **paraboloidul hiperbolic** $z = xy$ *de* **cilindrul circular** $x^2 + y^2 = R^2$.

Soluţie. Funcţia f care defineşte cartezian explicit porţiunea de suprafaţă decupată de cilindru în paraboloidul hiperbolic dat este $f(x, y) = xy$, domeniul ei de definiţie D fiind discul închis de rază R cu centrul în origine, situat în planul Oxy. Aşadar,

$$f : D \subset I\!R^2,\ f(x, y) = xy,\ \ (x, y) \in D,$$

unde domeniul D este definit de

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ \ x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Constatăm că porţiunea ($\mathcal{S}$) din paraboloidul hiperbolic aflat în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ este o suprafaţă netedă, prin urmare aria sa va fi calculată cu ajutorul formulei (5.67). Avem $p = y$, $q = y$ astfel că aria lui ($\mathcal{S}$) este

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy. \tag{5.69}$$

Pentru calculul acestei integrale duble, trecem la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta, \\ y = \rho\,\sin\theta. \end{cases} \tag{5.70}$$

Perechea (x, y) aparţine domeniului de integrare D dacă şi numai dacă perechea (ρ, θ) din (5.70) aparţine intervalului bidimensional $[0, R] \times [0, 2\pi)$. Atunci, (5.70) stabileşte o transformare punctuală regulată între intervalul bidimensional $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi)$ şi discul D. Ştiind că jacobianul transformării punctuale regulate (5.70) este egal cu ρ, prin aplicarea formulei schimbării de variabile în integrala dublă (5.69), găsim

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_\Omega \rho\sqrt{1 + \rho^2}\, d\rho d\theta.$$

Integrala dublă pe un interval bidimensional se calculează simplu, astfel că

$$\begin{aligned}\operatorname{aria}\mathcal{S} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \pi\int_0^R (1+\rho^2)^{1/2}(1+\rho^2)'d\rho = \\ = \frac{2\pi}{3}\Big((1+R^2)^{3/2}-1\Big)\end{aligned},$$

deoarece o primitivă a funcţiei $(1+\rho^2)^{1/2}(1+\rho^2)'$ este $\dfrac{2}{3}\,(1+\rho^2)^{3/2}$. ■

Teorema 5.2.2 *Dacă* $(\mathcal{S})$ *este o suprafaţa netedă reprezentată prin ecuaţia vectorială* (5.3), *sau prin ecuaţiile parametrice* (5.4), *atunci* $(\mathcal{S})$ *are arie şi*

$$\operatorname{aria}\mathcal{S} = \iint\limits_A \sqrt{E(u,v)\,G(u,v)-F^2(u,v)}\,dudv, \tag{5.71}$$

unde E, F *şi* G *sunt coeficienţii lui Gauss* (5.48) – (5.50).

Demonstraţie. Presupunem că normala la suprafaţa $(\mathcal{S})$ este dată de (5.43), unde în membrul doi s–a luat semnul plus. Atunci,

$$\cos\gamma = \frac{C(u,v)}{\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}}. \tag{5.72}$$

Să considerăm sistemul format de primele două ecuaţii ale sistemului (5.4), adică

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \quad (u,v)\in A. \tag{5.73}$$

Presupunând că parametrizarea suprafeţei netede $(\mathcal{S})$ este astfel încât

$$C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0, \;\; (u,v)\in \mathring{A}, \tag{5.74}$$

deducem că (5.73) este o transformare punctuală regulată între mulţimea A şi o mulţime $D\subset \mathbb{R}^2$ care este mulţimea perechilor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, unde x şi y sunt daţi de (5.73). Atunci, (5.73) poate constitui o schimbare de variabile în integrala dublă.

În formula de calcul (5.68) a ariei suprafeţei efectuăm schimbarea de variabile (5.73). Folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă găsim

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_{A} \frac{1}{\cos\gamma}\Big|\frac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)}(u,v)\Big|\,dudv. \tag{5.75}$$

Din (5.74) şi (5.72) în (5.75) rezultă că formula de calcul a ariei unei suprafeţe netede date parametric este

$$\begin{aligned}\text{aria}\,\mathcal{S} &= \iint\limits_{A} \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,dudv = \\ &= \iint\limits_{A} \Big\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\Big\|\,dudv.\end{aligned} \tag{5.76}$$

Pe de altă parte,

$$\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)} = \sqrt{E(u,v)\,G(u,v)-F^2(u,v)}. \tag{5.77}$$

Concluzia (5.71) a teoremei rezultă acum din (5.76) şi (5.77). ■

Exemplul 5.2.2 *Să se determine aria suprafeţei de rotaţie*

$$(\mathcal{S}):\quad x = u\,\cos v,\quad y = u\,\sin v,\quad z = f(u), \tag{5.78}$$

unde $(u,v)\in D=[u_1,u_2]\times[0,2\pi)$ *şi* f *este o funcţie derivabilă.*

Soluţie. Suprafaţa de rotaţie $(\mathcal{S})$ este o suprafaţă netedă. Pentru a aplica formula (5.71), calculăm coeficienţii lui Gauss. Pentru aceasta, efectuăm derivatele funcţiilor din (5.78). Avem:

$$\begin{cases} x'_u(u,v) &= \cos v; & x'_v(u,v) &= -u\,\sin v;\\ y'_u(u,v) &= \sin v; & y'_v(u,v) &= u\,\cos v;\\ z'_u(u,v) &= f'(u); & z'_v(u,v) &= 0.\end{cases} \tag{5.79}$$

Coeficienţii $E(u,v)$, $F(u,v)$ şi $G(u,v)$ se calculează cu ajutorul derivatelor parţiale din (5.79). Se găseşte

$$\begin{cases} E(u,v) &= (x'_u(u,v))^2+(y'_u(u,v))^2+(z'_u(u,v))^2 = \\ &= 1+(f'(u))^2,\\ F(u,v) &= x'_u(u,v)\,x'_v(u,v)+y'_u(u,v)\,y'_v(u,v)+\\ &+ z'_u(u,v)\,z'_v(u,v)=0,\\ G(u,v) &= (x'_v(u,v))^2+(y'_v(u,v))^2+(z'_v(u,v))^2=u^2.\end{cases} \tag{5.80}$$

Formula de calcul (5.71), în care folosim (5.80), conduce la

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_{D} \sqrt{u^2(1+f'^2(u))}\,dudv = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} |u|\sqrt{1+f'^2(u)}\,du. \tag{5.81}$$

Presupunem că $[u_1, u_2] \subset (0, +\infty)$ şi că funcţia f are derivata pozitivă. Folosind ca variabilă cota z, vom avea

$$u = \varphi(z), \quad z \in [z_1, z_2], \quad \varphi'(z) = \frac{1}{f'(u)},$$

astfel că formula de calcul (5.81) a ariei suprafeţei de rotaţie (5.78) devine

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\sqrt{1+(\varphi'(z))^2}\,dz$$

şi este aceeaşi cu cea dedusă la aplicaţiile integralei definite. ∎

Teorema 5.2.3 *Aria unei suprafeţe netede* $(\mathcal{S})$ *nu depinde de reprezentarea sa parametrică.*

Demonstraţie. Fie suprafaţa $(\mathcal{S})$ dată parametric de (5.4) şi transformarea punctuală regulată bijectivă

$$\begin{cases} u = \lambda(u', v'), \\ v = \mu(u', v'), \end{cases} \quad (u', v') \in D' \tag{5.82}$$

de la mulţimea D' la mulţimea A, unde frontiera lui D' este o curbă netedă pe porţiuni, funcţiile λ şi μ sunt continue şi cu derivate parţiale continue, iar jacobianul

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}(u', v') \neq 0, \quad \text{pe} \quad D'.$$

Obţinem în acest fel o nouă reprezentare parametrică a lui $(\mathcal{S})$ şi anume

$$\begin{cases} x = \varphi(u', v') = x(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ y = \psi(u', v') = y(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ z = \chi(u', v') = z(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \end{cases} \quad (u', v') \in D'. \tag{5.83}$$

Dacă notăm:

$$A' = \frac{D(\psi,\chi)}{D(u',v')}(u',v'); \quad B' = \frac{D(\chi,\varphi)}{D(u',v')}(u',v'); \quad C' = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u',v')}(u',v'),$$

atunci au loc următoarele egalităţi:

$$A' = A\,\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}; \quad B' = B\,\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}; \quad C' = C\,\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')} \tag{5.84}$$

şi deci

$$\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)} =$$

$$= \frac{\sqrt{A'^2(u',v')+B'^2(u',v')+C'^2(u',v')}}{\Big|\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}(u',v')\Big|}.$$

Folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obţinem

$$\text{aria}\,\mathcal{S} = \iint\limits_{A} \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,dudv =$$

$$\iint\limits_{D'} \frac{\sqrt{A'^2(u',v')+B'^2(u',v')+C'^2(u',v')}}{\Big|\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}(u',v')\Big|}\Big|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u',v')}(u',v')\Big|du'dv' = \tag{5.85}$$

$$= \iint\limits_{D'} \sqrt{A'^2(u',v')+B'^2(u',v')+C'^2(u',v')}\,du'dv'$$

şi teorema este demonstrată. ∎

5.3 Integrala de suprafaţă de primul tip

Fie $(\mathcal{S})$ o suprafaţă netedă mărginită de o curbă netedă pe porţiuni L. Este posibil însă ca $(\mathcal{S})$ să fie o suprafaţă închisă şi deci nu are frontieră. Considerăm o funcţie mărginită $f(M)$ definită în punctele unui domeniu din spaţiu care conţine suprafaţa $(\mathcal{S})$. Fie

$$\Delta = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_n\} \tag{5.86}$$

o *partiţie* sau *diviziune* a suprafeţei $(\mathcal{S})$ obţinută prin trasarea pe suprafaţă a anumitor curbe din două familii de curbe distincte. Întrucât suprafaţa $(\mathcal{S})$ este netedă pe porţiuni, ea are arie. Fiecare din suprafeţele componente ale partiţiei are arie şi deci se poate vorbi de numărul real pozitiv $\nu(\Delta)$ sau $\|\Delta\|$, cel mai mare dintre numerele pozitive aria $\mathcal{S}_i$ pe care îl vom numi *norma partiţiei* Δ. În fiecare parte $\mathcal{S}_i$ alegem un punct M_i, numit *punct intermediar*, şi formăm *suma integrală*

$$\sigma_\Delta(f; M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\text{aria}\,\mathcal{S}_i \tag{5.87}$$

asociată funcţiei f, modului de divizare Δ şi alegerii punctelor intermediare $M_i \in \mathcal{S}_i$.

Definiţia 5.3.1 *Funcţia f este* **integrabilă** *pe suprafaţa netedă $\mathcal{S}$ dacă există un număr $I \in I\!R$ cu proprietatea că $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)\,\Delta$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi $M_i \in \mathcal{S}_i$,*

$$|\sigma_\Delta(f, M_i) - I| < \varepsilon. \tag{5.88}$$

Numărul I se numeşte **integrala de suprafaţă de primul tip** *din funcţia f pe suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ şi se notează*

$$I = \iint_{\mathcal{S}} f(M)\,d\sigma, \tag{5.89}$$

unde $d\sigma$ este **elementul de arie** *al suprafeţei $\mathcal{S}$.*

Poziţia punctului curent $M \in \mathcal{S}$ poate fi determinată prin specificarea coordonatelor carteziene ale sale x, y şi z. Atunci, valoarea $f(M)$ a funcţiei f în punctul $M \in \mathcal{S}$ poate fi notată în forma $f(x, y, z)$ şi ca urmare integrala de suprafaţă de tipul întâi a funcţiei f pe suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ se poate scrie ca

$$I = \iint_{S} f(x, y, z)\,d\sigma. \tag{5.90}$$

De menţionat că dacă folosim notaţia (5.90) pentru integrala de suprafaţă I, trebuie să avem în vedere că variabilele x, y şi z sunt legate între ele prin condiţia de apartenenţă la suprafaţa $(\mathcal{S})$ a punctului $M(x, y, z)$. Integrala de suprafaţă de tipul întâi din funcţia f pe suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ poate fi numită simplu *integrala funcţiei f pe suprafaţa $\mathcal{S}$.*

Observaţia 5.3.1 *Presupunând că* $(\mathcal{S})$ *este o suprafaţă materială de densitate* $f(x,y,z)$, *integrala funcţiei* f *pe suprafaţa* $(\mathcal{S})$, *dacă există, este egală cu masa suprafeţei sau pânzei materiale* $\mathcal{S}$. *Dacă* f *reprezintă densitatea de repartiţie a unei sarcini electrice, integrala lui* f *pe suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este sarcina electrică totală distribuită pe* $\mathcal{S}$.

După definiţia integralei de suprafaţă de tipul întâi se impune să studiem existenţa acesteia precum şi modalităţile de calcul ale ei.

La ambele aspecte se poate răspunde dacă reducem integrala de suprafaţă de tipul întâi la o integrală dublă.

Pentru început, considerăm cazul când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată cartezian explicit, iar proiecţia sa pe planul Oxy este un domeniu închis şi mărginit.

Teorema 5.3.1 *Dacă* $(\mathcal{S})$ *este suprafaţa netedă*

$$z = z(x,y), \qquad (x,y) \in D, \tag{5.91}$$

şi $f(x,y,z)$ *este o funcţie mărginită definită în punctele unui domeniu tridimensional care conţine suprafaţa* $\mathcal{S}$, *atunci are loc relaţia*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,d\sigma \;=\; \iint\limits_{D} f\Big(x,y,z(x,y)\Big)\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dxdy \tag{5.92}$$

oride câte ori integralele care apar în aceasta există. Integrala de suprafaţă din relaţia (5.92) *există dacă integrala dublă din membrul drept al egalităţii există.*

Demonstraţie. Fie Δ o partiţie a suprafeţei de forma (5.86). Proiectând această partiţie în planul Oxy obţinem o partiţie $\widetilde{\Delta}$ a domeniului D în părţile carabile D_1, D_2, $\cdots, D_n$, fiecare din părţile D_i având o arie care nu o întrece pe cea a suprafeţei $\mathcal{S}_i$ corespunzătoare.

Considerăm suma integrală (5.87) în care punctul intermediar $M_i \in \mathcal{S}_i$ va avea coordonatele $M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i,\eta_i))$. Corespunzător punctului $M_i \in \mathcal{S}_i$ în planul Oxy vom avea punctul $M_i'(\xi_i,\eta_i)$ care va aparţine domeniului D_i.

Din paragraful precedent ştim că aria porţiunii $\mathcal{S}_i$ de suprafaţă este dată de integrala dublă

$$\text{aria}\,\mathcal{S}_i \;=\; \iint\limits_{D_i} \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dxdy, \tag{5.93}$$

unde p şi q sunt notaţiile lui Monge pentru derivatele de ordinul întâi în raport cu x şi respectiv y ale funcţiei $z = z(x, y)$ din (5.91). Aplicând teorema de medie integralei duble din (5.93), obţinem

$$\operatorname{aria} \mathcal{S}_i = \sqrt{1 + p^2(\xi_i^*, \eta_i^*) + q^2(\xi_i^*, \eta_i^*)} \operatorname{aria} D_i, \tag{5.94}$$

unde (ξ_i^*, η_i^*) este un punct aparţinând domeniului D_i. În consecinţă, suma integrală (5.87) poate fi scrisă în forma

$$\begin{gathered}\sigma_\Delta(f; M_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + p^2(\xi_i^*, \eta_i^*) + q^2(\xi_i^*, \eta_i^*)} \operatorname{aria} D_i\end{gathered} \tag{5.95}$$

care nu diferă cu mult de suma integrală Riemann a funcţiei reale de două variabile reale

$$\begin{gathered}F : D \to I\!R^2, \quad F(x, y) = \\ = f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)},\end{gathered} \tag{5.96}$$

ceea ce o deosebeşte de o asemenea sumă integrală fiind faptul că în membrul doi din (5.95) nu apare peste tot aceleaşi puncte intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Să punem în evidenţă suma integrală în care să apară aceleaşi puncte intermediare. Avem

$$\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\Delta}}(f; M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_i) + q^2(\xi_i, \eta_i)} \operatorname{aria} D_i. \tag{5.97}$$

Să arătăm că această sumă integrală, notată simplu cu $\widetilde{T}$, diferă foarte puţin de suma integrală (5.95) pe care o vom renota cu T.

Datorită faptului că suprafaţa $(\mathcal{S})$ este netedă, funcţia reală de două variabile reale

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}, \quad (x, y) \in D \tag{5.98}$$

este continuă pe mulţimea compactă $D \subset I\!R^2$, deci va fi uniform continuă. În consecinţă, dat orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$\left|\sqrt{1 + p^2(x_1, y_1) + q^2(x_1, y_1)} - \sqrt{1 + p^2(x_2, y_2) + q^2(x_2, y_2)}\right| < \varepsilon \tag{5.99}$$

dacă cel mai mare dintre diametrele subdomeniilor D_i este mai mic decât δ_1. Prin ipoteză, funcţia $f(x, y, z)$ este mărginită, adică

$$|f(x, y, z)| \leq K = \text{ constant} \tag{5.100}$$

şi prin urmare relaţiile (5.99) şi (5.100) implică inegalitatea

$$|T - \widetilde{T}| \leq K\,\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \operatorname{aria} S_i = K\,\varepsilon \operatorname{aria} \mathcal{S}, \tag{5.101}$$

unde $T = \sigma_\Delta(f; M_i)$, iar $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\Delta}}(f; M_i)$.

Acum putem completa uşor demonstraţia teoremei. Dacă integrala din membrul drept al relaţiei (5.92) există, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_2 > 0$ astfel că pentru orice sumă integrală $\widetilde{T}$ corespunzătoare unei partiţii $\{D_i : \; i = \overline{1, n}\}$ a domeniului D ale cărei elemente au diametrele mai mici decât δ_2 avem egalitatea

$$\Big| \iint\limits_D f\Big(x, y, z(x, y)\Big) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dxdy - \widetilde{T}\Big| < \varepsilon. \tag{5.102}$$

Să luăm numărul $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ şi să considerăm partiţiile

$$\{\Sigma_i : \; i = 1, 2, \cdots, n\}$$

ale suprafeţei $(\mathcal{S})$ pentru care diametrele tuturor elementelor Σ_i sunt mai mici decât δ. Notăm prin $\{D_i : \; i = 1, 2, \cdots, n\}$ partiţiile domeniului D corespunzătoare partiţiilor $\{\Sigma_i : \; i = 1, 2, \cdots, n\}$. Atunci, diametrul fiecărui subdomeniu D_i este mai mic decât δ şi, în consecinţă, inegalităţile (5.101) şi (5.102) sunt satisfăcute. Aceste inegalităţi implică

$$\begin{aligned} \Big| \iint\limits_D f\Big(x, y, z(x, y)\Big)\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dxdy - T\Big| < \\ < \varepsilon(1 + K \operatorname{aria} \mathcal{S}) \end{aligned} \tag{5.103}$$

pentru orice partiţie a suprafeţei $(\mathcal{S})$ a cărei fineţe este suficient de mică.

Rezultă că limita sumelor integrale T există şi este egală cu integrala din relaţia (5.103). ■

Corolarul 5.3.1 *Dacă suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este netedă şi funcţia* $f(x, y, z)$ *este continuă, există integrala de suprafaţă din membrul stâng al relaţiei* (5.92).

Demonstraţie. Întradevăr, în ipotezele menţionate, integrantul membrului drept al relaţiei (5.92) este o funcţie continuă, deci integrala dublă din acest membru există şi astfel integrala de suprafaţă din membrul întâi există. ■

Observaţia 5.3.2 *După cum se ştie*

$$\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)} = \frac{1}{\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})},$$

unde $\mathbf{n}$ *este normala la faţa superioară a suprafeţei* $\mathcal{S}$. *Această relaţie face ca formula de calcul a unei integrale de suprafaţă de tipul întâi când suprafaţa este dată cartezian explicit prin ecuaţia*

$$z = z(x,y),\ \ (x,y) \in D \tag{5.104}$$

să se scrie în forma

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} f\Big(x,y,z(x,y)\Big)\frac{dxdy}{\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})}. \tag{5.105}$$

Dacă suprafaţa netedă $(\mathcal{S})$ *este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia*

$$x = x(y,z),\ \ (y,z) \in D_1, \tag{5.106}$$

putem schimba rolurile variabilelor x, y *şi* z *şi să scriem relaţia*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} f\Big(x(y,z),y,z\Big)\frac{dydz}{\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})}, \tag{5.107}$$

unde D_1 *este proiecţia suprafeţei* $(\mathcal{S})$ *pe planul* Oyz. *Similar, în cazul că suprafaţa netedă* $(\mathcal{S})$ *este dată prin ecuaţia*

$$y = y(z,x),\ \ (z,x) \in D_2, \tag{5.108}$$

are loc egalitatea

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} f\Big(x,y(z,x),z\Big)\frac{dzdx}{\cos(\mathbf{n},\mathbf{j})}, \tag{5.109}$$

unde D_2 *este proiecţia suprafeţei* $(\mathcal{S})$ *pe planul* Ozx.

Observaţia 5.3.3 *Presupunem că suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *este reuniune finită de suprafeţe netede de tipurile* (5.104), (5.106) *şi* (5.108). *Atunci, integrala de suprafaţă de tipul întâi din funcţia* f *pe suprafaţa* $(\mathcal{S})$ *se va scrie ca o sumă de integrale de suprafaţă de tipul întâi din* f *ale căror formule de calcul vor fi, după caz,* (5.105), (5.107) *şi* (5.109).

În cazul când suprafaţa $(\mathcal{S})$ este reprezentată parametric printr–o ecuaţie vectorială, putem aplica raţionamentul din paragraful precedent şi, prin schimbări adecvate de variabile, oricare din integralele duble (5.105), (5.107), (5.109) se transformă întro integrală dublă pe domeniul de variaţie al parametrilor curbilinii u şi v ai suprafeţei. Suntem conduşi astfel la teorema care dă formula de calcul a integralei de suprafaţă dintr–o funcţie continuă f pe o suprafaţă $(\mathcal{S})$ reprezentată parametric.

Teorema 5.3.2 *Dacă* $(\mathcal{S})$ *este o suprafaţă netedă reprezentată prin ecuaţia vectorială*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta \subset I\!R^2, \tag{5.110}$$

unde $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$, *şi* f *o funcţie mărginită şi continuă pe un domeniu tridimensional care conţine suprafaţa* $\mathcal{S}$, *atunci* f *este integrabilă pe* S *în raport cu elementul de arie al suprafeţei şi are loc relaţia*

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, d\sigma = \\ =&\iint_{\Delta} f\Big(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\Big)\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}\, dudv. \end{aligned} \tag{5.111}$$

În formula de calcul (5.111) Δ este domeniul plan de variaţie al parametrilor curbilinii ai suprafeţei, iar E, F, G sunt coeficienţii lui Gauss calculaţi pentru suprafaţa $(\mathcal{S})$ din (5.110). Ştim că

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}\, dudv \tag{5.112}$$

reprezintă elemntul de arie al suprafeţi $(\mathcal{S})$ dată parametric şi deci pentru a scrie formula de calcul (5.111) a integralei de suprafaţă din membrul întâi înlocuim mai întâi variabilele x, y, z ale funcţiei de integrat f cu expresiile lor ca funcţii de parametri curbilinii ai suprafeţei $(\mathcal{S})$ aşa cum rezultă ele din (5.110), înmulţim apoi rezultatul cu radicalul care apare în elementul de suprafaţă $d\sigma$, calculat după legea (5.112), şi integrăm pe domeniul plan Δ funcţia de variabilele u şi v astfel obţinută.

Formulele (5.92), (5.105), (5.107) şi (5.109) sunt cazuri particulare ale formulei de calcul (5.111). Se poate arăta că aceste formule rămân valabile când suprafaţa nu este netedă dar este netedă pe porţiuni.

Exemplul 5.3.1 *Să se calculeze integrala de suprafaţă de tipul întâi*

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, d\sigma,$$

unde $(\mathcal{S})$ *este elipsoidul*

$$(\mathcal{S}): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Soluţie. Pentru suprafaţa $(\mathcal{S})$ avem reprezentarea parametrică:

$$x = a\,\sin\theta\,\cos\varphi; \quad y = b\,\sin\theta\,\sin\varphi; \quad x = a\,\cos\theta,$$

unde parametrii curbilinii θ şi φ parcurg intervalele:

$$\theta \in [0, \pi]; \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dacă se calculează coeficienţii lui Gauss pentru elipsoidul scris parametric şi apoi elementul de arie al acestuia se găseşte

$$d\sigma = abc\sqrt{\frac{\sin^2\theta\,\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\,\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Valoarea funcţiei de integrat în punctele suprafeţei este

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^4}{c^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta\,\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\,\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

Aceste calcule, împreună cu (5.111), conduc la

$$I = 8abc \iint_{\Delta} \Big(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\Big)\sin\theta d\theta\,d\varphi,$$

unde $\Delta = [0,\pi] \times [0,2\pi)$ adică Δ este un interval bidimensional. Aplicând formula de calcul a integralei duble pe un interval bidimensional, găsim

$$I = \frac{4}{3}\,\pi\, abc\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big).$$

Să observăm că dacă $a = b = c = R$, ceea ce este echivalent cu a spune că suprafaţa este acum sfera de rază R cu centrul în origine, valoarea integralei corespunzătoare devine $4\pi\, R$ funcţia de integrat fiind funcţia constantă egală cu inversul razei. ∎

Exemplul 5.3.2 *Evaluaţi integrala de suprafaţă de tipul întâi*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z)\, d\sigma,$$

unde $(\mathcal{S})$ *este porţiunea din suprafaţa* $z = 4 - x^2 - y^2$ *situată în semispaţiul superior.*

Soluţie. Suprafaţa $(\mathcal{S})$ este o porţiune din paraboloidul de revoluţie obţinut prin rotaţia în jurul axei Oz a parabolei de ecuaţii:

$$z = 4 - x^2; \quad y = 0$$

situată în planul Ozx, cu vârful $V(0,0,4)$ punct de maxim. Cum textul problemei se referă la porţiunea din semispaţiul superior a acestui paraboloid, deducem că ecuaţia suprafeţei $(\mathcal{S})$ este

$$(\mathcal{S}): \qquad z \;=\; 4 - x^2 - y^2, \qquad (x,y) \in D,$$

unde D este discul închis cu centrul în origine de rază $R = 2$ situat în planul Oxy, prin urmare

$$D \;=\; \{(x,y) \in I\!R^2 : \;\; x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$

Elementul de arie $d\sigma$ al suprafaţă date este

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Urmează că integrala de suprafaţă se va calcula cu ajutorul formulei (5.92) astfel că avem:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy =$$
$$= 4 \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy.$$

Pentru a calcula ultima integrală dublă folosim coordonatele polare ρ şi θ, unde $x = \rho\cos\theta$ şi $y = \rho\sin\theta$. Se constată că $(x, y) \in D$ dacă şi numai dacă (ρ, θ) aparţine intervalului bidimensional $[0, 2] \times [0, 2\pi)$. Ştiind că jacobianul transformării punctuale regulate folosite la schimbarea de variabile de acest tip este ρ, avem

$$I = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho.$$

Evaluând integralele de mai sus determinăm I şi găsim că valoarea integralei de suprafaţă date este $I = 2\pi(17\sqrt{17} - 1)/3$. ∎

5.4 Aplicaţii în inginerie ale integralelor de suprafaţă de primul tip

Integralele de suprafaţă de primul tip sunt frecvent întâlnite în probleme ale fizicii. De exemplu, întâlnim astfel de integrale când ne ocupăm cu determinarea masei unei *pânze materiale*. O pânză materială este ansamblu dintre o suprafaţă $(\mathcal{S})$ netedă sau netedă pe porţiuni, numită *configuraţia pânzei*, şi o funcţie pozitivă ρ definită şi continuă în punctele suprafeţei $(\mathcal{S})$, care se numeşte *densitatea de materie* sau *densitatea pânzei materiale*. Tot cu ajutorul integralelor de suprafaţă de tipul întâi se exprimă centrul de greutate al pânzei materiale ca şi momentele de inerţie ale acesteia în raport cu elementele reperului $Oxyz$. O pânză materială poate fi notată prin $\{\mathcal{S}, \rho\}$ sau, atunci când densitatea materială se desprinde din context, se scrie doar configuraţia pânzei. O pânză materială se numeşte *omogenă* dacă densitatea sa este funcţia constantă şi *neomogenă* în caz contrar.

Întrucât procedeul care se aplică pentru a determina masa, centrul de greutate şi momentele de inerţie în raport cu elementele reperului ale pânzei materiale este asemănător cu cel aplicat firului material pentru determinarea aceloraşi mărimi, vom scrie direct rezultatele.

Masa $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ a pânzei materiale $\{\mathcal{S}, \rho\}$ este

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z)\, d\sigma. \tag{5.113}$$

Cantitatea infinitezimală

$$dm = \rho(x, y, z) d\sigma. \tag{5.114}$$

se numeşte *element de masă* al pânzei materiale $\{\mathcal{S}, \rho\}$ în $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$.

Folosind elementul de masă, masa pânzei materiale se scrie

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} dm.$$

Coordonatele centrului de greutate G sunt date de

$$x_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} x\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma}, \qquad y_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} y\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma},$$

$$z_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} z\rho(x, y, z) d\sigma}{\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma}.$$

Expresiile coordonatelor centrului de greutate al pânzei se pot scrie simplificat dacă folosim elementul de masă introdus în (5.114). Avem

$$x_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} x\, dm}{\iint\limits_{\mathcal{S}} dm}; \quad y_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} y\, dm}{\iint\limits_{\mathcal{S}} dm}; \quad z_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} z\, dm}{\iint\limits_{\mathcal{S}} dm}. \tag{5.115}$$

În particular, pentru o pânză materială omogenă, vom avea

$$x_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} x\, d\sigma}{\iint\limits_{\mathcal{S}} d\sigma}; \quad y_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} y\, d\sigma}{\iint\limits_{\mathcal{S}} d\sigma}; \quad z_G = \frac{\iint\limits_{\mathcal{S}} z\, d\sigma}{\iint\limits_{\mathcal{S}} d\sigma}. \tag{5.116}$$

Momentele de inerţie ale pânzei materiale $\mathcal{S}$ în raport cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz le vom nota respectiv prin I_x I_y şi I_z şi au expresiile:

$$I_x = \iint\limits_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)dm; \quad I_y = \iint\limits_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2)dm; \quad I_z = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)dm. \tag{5.117}$$

Când densitatea materială este constantă şi egală cu $\rho_0 > 0$, formulele de mai sus devin

$$\begin{gathered} I_x = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)d\sigma, \quad I_y = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2)d\sigma; \\ I_z = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)d\sigma. \end{gathered} \tag{5.118}$$

Momentele de inerţie ale pânzei materiale $\mathcal{S}$ în raport cu planele de coordonate Oxy, Oyz, Ozx, notate corespunzător cu I_{xy}, I_{yz} şi I_{zx}, au expresiile date de integralele de suprafaţă de tipul întâi

$$\begin{gathered} I_{xy} = \iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 dm, \ I_{yz} = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 dm, \\ I_{xz} = \iint\limits_{\mathcal{S}} y^2 dm. \end{gathered} \tag{5.119}$$

Dacă pânza materială are densitatea constantă ρ_0, în locul formulelor (5.119) avem

$$I_{xy} = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 d\sigma; \quad I_{yz} = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 d\sigma; \quad I_{xz} = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} y^2 d\sigma. \tag{5.120}$$

În fine, momentul de inerţie în raport cu originea reperului este

$$I_O = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)dm, \tag{5.121}$$

când pânza materială este neomogenă, iar în cazul că ar fi omogenă acelaşi moment de inerţie al pânzei va fi dat de expresia

$$I_O = \rho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma. \tag{5.122}$$

În scopul de a prezenta încă o aplicaţie a integralelor de suprafaţă de primul tip să introducem noţiunea de *funcţie vectorială integrabilă pe o suprafaţă*. Fie în acest sens

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k} \tag{5.123}$$

o funcţie vectorială definită întrun domeniu tridimensional care conţine suprafaţa $\mathcal{S}$. Prin definiţie, vom spune că funcţia $\mathbf{F}$ este *integrabilă* pe $\mathcal{S}$ dacă fiecare din componentele sale este funcţie intyegrabilă pe $\mathcal{S}$. În această situaţie introducem *integrala de suprafaţă de tipul întâi a funcţiei vectoriale* $\mathbf{F}$ *pe suprafaţa* $\mathcal{S}$ prin

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(M)\, d\sigma = \mathbf{i} \iint\limits_{\mathcal{S}} P(M)\, d\sigma + \mathbf{j} \iint\limits_{\mathcal{S}} Q(M)\, d\sigma + \mathbf{k} \iint\limits_{\mathcal{S}} R(M)\, d\sigma. \tag{5.124}$$

Valoarea unei astfel de integrale este un vector. Existenţa integralei de suprafaţă de primul tip a unei funcţii vectoriale $\mathbf{F}$, reducerea ei la o integrală dublă dintr–o funcţie vectorială precum şi proprietăţile unei integrale de tipul (5.124) sunt cercetate în strânsă legătură cu integralele de suprafaţă care apar în membrul al doilea al relaţiei (5.124).

Ca aplicaţie a acestei noţiuni să găsim *forţa de atracţie gravitaţională* cu care o pânză materială *atrage* un punct material.

Fie $\rho(x, y, z)$ densitatea pânzei materiale $\mathcal{S}$ şi μ_0 o masă concentrată în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparţine suprafeţei. După legea atracţiei universale a lui Newton, forţa elementară de atracţie dintre elementul de masă dm al suprafeţei $\mathcal{S}$ şi punctul material M_0 cu ponderea μ_0 este

$$d\mathbf{F} = \gamma\, \mu_0\, dm\, \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{5.125}$$

În formula (5.125) γ este constanta gravitaţională a cărei valoare numerică depinde de alegerea sistemului de unităţi de măsură, iar $\mathbf{r}$ este vectorul $\overrightarrow{M_0 M}$, unde $M(x, y, z)$ reprezintă punctul curent al suprafeţei de pondere egală cu masa elementară dm dată de (5.114). Forţa rezultantă $\mathbf{F}$ de atracţie a punctului material M_0 de către întreaga suprafaţă $\mathcal{S}$ este suma forţelor elementare (5.125), fapt care ne duce la concluzia că $\mathbf{F}$ este integrala de suprafaţă

$$\mathbf{F} = \gamma\, \mu_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, d\sigma. \tag{5.126}$$

Deoarece avem $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\,\mathbf{i} + (y - y_0)\,\mathbf{j} + (z - z_0)\,\mathbf{k}$, expresia forţei de atracţie poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \gamma\,\mu_0\Big(\mathbf{i}\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\frac{x-x_0}{r^3}\,d\sigma + \\ +\mathbf{j}\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\frac{y-y_0}{r^3}\,d\sigma + \mathbf{k}\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\frac{z-z_0}{r^3}\,d\sigma\Big). \end{aligned} \tag{5.127}$$

Integralele din (5.127) există dacă densitatea materială este funcţie continuă, iar suprafaţa $\mathcal{S}$ este netedă sau netedă pe porţiuni.

Analiza aplicaţiilor de mai sus conduce la o concluzie importantă din care vom desprinde o proprietate specifică integralelor de suprafaţă de tipul întâi. Să pornim de la observaţia că elementul de integrare, înţelegând prin aceasta expresia

$$f(M)\,d\sigma,$$

depinde numai de mărimea elementului de arie $d\sigma$ şi de valoarea funcţiei f în punctul curent M al suprafeţei $\mathcal{S}$, însă este independentă de orientarea elementului de suprafaţă în raport cu spaţiul înconjurător. Această observaţie se desprinde foarte bine din toate aplicaţiile prezentate mai sus căci masa unui element din suprafaţa materială $\{\mathcal{S}, \rho\}$ sau forţa cu care acest element de masă atrage un punct material nu se modifică dacă ne mutăm de pe o faţă a suprafeţei pe cealaltă. În concluzie, putem afirma că integrala de suprafaţă de tipul întâi nu depinde de orientarea suprafeţei fapt pe care îl putem exprima matematic prin

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}^-} f(x,y,z)\,d\sigma. \tag{5.128}$$

Există probleme de alt gen în care orientarea suprafeţei şi deci a elementului său de arie $d\sigma$ joacă un rol important. O astfel de problemă, pe care o vom analiza ulterior, este calculul debitului unui fluid printr–o suprafaţă dar, vom vedea că există şi altele. Aceste probleme conduc la un alt gen de integrale de suprafaţă, aşa numitele *integrale de suprafaţă de tipul al doilea* de care ne vom ocupa în paragraful următor.

Exemplul 5.4.1 *Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa Oz a pânzei materiale omogene având densitatea egală cu unitatea şi configuraţia semisfera*

$$(\mathcal{S}): \qquad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Soluţie. Conform celor prezentate mai sus, avem

$$I_z = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

Pentru calculul acestei integrale de suprafaţă de tipul întâi putem utiliza o reprezentare parametrică a semisferei $\mathcal{S}$ şi anume cea în care parametrii curbilinii ai suprafeţei să fie colatitudinea θ şi longitudinea φ :

$$x = R\,\sin\theta\,\cos\varphi;\quad y = R\,\sin\theta\,\sin\varphi;\quad z = R\,\cos\theta,$$

unde parametrii (θ,φ) variază în intervalul bidimensional $[0,\pi/2]\times[0,2\pi)$.

Coeficienţii lui Gauss pentru sfera reprezentată parametric ca mai sus sunt:

$$E(\theta,\varphi) = R^2;\quad F(\theta,\varphi) = 0;\quad G(\theta,\varphi) = R^2\sin^2\theta.$$

Elementul de arie al suprafeţei exprimat cu ajutorul parametrilor curbilinii θ şi φ este

$$d\sigma = R^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Valorile pe semisferă ale funcţiei de integrat sunt date de

$$x^2 + y^2 = (R\,\sin\theta\,\cos\varphi)^2 + (R\,\sin\theta\,\sin\varphi)^2 = R^2\sin^2\theta,$$

astfel că momentul de inerţie de determinat este

$$I_z = R^4\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta = 2\,\pi\,R^4\int_0^{\pi/2}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta.$$

Ultima integrală se scrie ca diferenţă de alte două care se calculează simplu şi se găseşte $I_z = 4\,\pi\,R^4/3$. ■

5.5 Integrale de suprafaţă de al doilea tip

Să considerăm pentru început o problemă concretă care sugerează introducerea noţiunii de *integrală de suprafaţă de al doilea tip* şi anume problema determinării cantităţii de fluid care străbate în unitatea de timp o suprafaţă orientată $\mathcal{S}$ a cărei normală este

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + \mathbf{j}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + \mathbf{k}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k}) = n_1\,\mathbf{i} + n_2\,\mathbf{j} + n_3\,\mathbf{k}. \qquad (5.129)$$

Fie că spaţiul ambiant în care se află suprafaţa orientată $\mathcal{S}$ este plin cu un fluid în mişcare. O particulă oarecare a fluidului, aflată la momentul t în poziţia $M(x, y, z)$, are viteza

$$\mathbf{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}, \tag{5.130}$$

unde $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ şi $R = R(x, y, z)$ sunt mărimile algebrice ale proiecţiilor vectorului $\mathbf{V}$ pe respectiv versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ şi $\mathbf{k}$.

Considerăm un element infinitezimal de arie $d\sigma$ de pe acea faţa a suprafeţei $\mathcal{S}$ care are normala $\mathbf{n}$. Cantitatea de fluid $d\Phi$ care trece prin $d\sigma$ în unitatea de timp, deci un flux, este egală cu $V_n\, d\sigma$ unde V_n este mărimea algebrică a proiecţiei vectorului viteză pe direcţia normalei $\mathbf{n}$ la $d\sigma$. Cum vectorul pe care se proiectează viteza este versor, rezultă că $V_n = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ astfel că fluxul elementar este

$$d\Phi = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = (P\, n_1 + Q\, n_2 + R\, n_3) d\sigma. \tag{5.131}$$

Formula (5.131) dă *fluxul elementar* de fluid prin elementul de suprafaţă de normală $\mathbf{n}$. Pentru a obţine debitul total sau *fluxul total*, adică cantitatea de lichid care strabate suprafaţa $\mathcal{S}$ în unitatea de timp, ar trebui să sumăm expresiile (5.131) relativ la toate elementele de suprafaţă $d\sigma$, fapt ce conduce la integrala

$$\Phi = \iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\, n_1 + Q\, n_2 + R\, n_3\Big)\, d\sigma. \tag{5.132}$$

Dacă privim atent constatăm că ceea ce am obţinut în (5.132) nu este altceva decât integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei

$$P(x, y, z)\, \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q(x, y, z)\, \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R(x, y, z)\, \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \tag{5.133}$$

pe suprafaţa $\mathcal{S}$. Imediat însă trebuie să precizăm faptul că integrantul depinde de funcţia vectorială $\mathbf{V}$ din (5.130) şi că , lucru foarte important, a fost implicată o anumită faţă a suprafeţei, anume aceea care are normala $\mathbf{n}$ dată în (5.129).

Putem trece acum să formulăm definiţia generală a integralei de suprafaţă de tipul al doilea.

Fie în acest sens $\mathcal{S}$ o suprafaţă netedă cu două feţe. Fixăm o anumită parte a suprafeţei echivalent cu a spune că alegem una din cele două posibilităţi de alegere a normalei $\mathbf{n}$ în punctul M. În acelaşi punct M, dar pe cealaltă parte a suprafeţei, normala este $-\mathbf{n}$ Considerăm o funcţie vectorială $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ definită pe un domeniu tridimensional în care se află suprafaţa $\mathcal{S}$ şi continuă în punctele suprafeţei. Notăm cu F_n mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale a vectorului $\mathbf{F}$ pe direcţia normalei $\mathbf{n}$ în punctul M. Avem

$$F_n = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = P\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k}), \tag{5.134}$$

unde $\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})$, $\cos(\mathbf{n},\mathbf{j})$, $\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})$ sunt coordonatele versorului normalei $\mathbf{n}$ în punctul $M(x, y, z)$ de pe faţa aleasă a suprafeţei $\mathcal{S}$.

Integrala

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})\Big)\,d\sigma \tag{5.135}$$

se va numi *integrala de suprafaţă de tipul al doilea a funcţiei vectoriale* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *pe faţa suprafaţei* $\mathcal{S}$ *de normală* $\mathbf{n}$ şi va fi notată cu

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy. \tag{5.136}$$

Astfel, prin definiţie, avem relaţia

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =\\ =&\iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})\Big)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{5.137}$$

Dacă notăm cu $\mathcal{S}^+$ faţa aleasă a suprafeţei, evident cealaltă faţă a sa va avea normala $-\mathbf{n}$ şi o putem nota cu $\mathcal{S}^-$. Din modul cum a fost introdusă integrala de suprafaţă de tipul al doilea rezultă că ea depinde de orientarea suprafeţei şi ca atare putem scrie

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =\\ =&-\iint\limits_{\mathcal{S}^-} Pdydz + Qdzdx + R\,dxdy.\end{aligned} \tag{5.138}$$

Observaţia 5.5.1 *Dacă $d\sigma$ este elementul infinitezimal de arie al suprafeţei $\mathcal{S}^+$, expresiile*

$$\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})d\sigma, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{j})d\sigma, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{k})d\sigma$$

sunt, respectiv, proiecţiile elementului de arie $d\sigma$ pe planele de coordonate Oyz, Ozx, Oxy. Dacă considerăm că $d\sigma$ se proiectează pe planele de coordonate în intervale bidimensionale cu laturi infinitezimale, ariile acestora sunt respectiv $dydz$, $dzdx$ şi $dxdy$, astfel că putem scrie egalităţile

$$\begin{gathered}\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})d\sigma = dydz, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{j})d\sigma = dzdx,\\ \cos(\mathbf{n},\mathbf{k})d\sigma = dxdy\end{gathered} \tag{5.139}$$

şi totodată putem justifica notaţia (5.136) *pentru integrala de suprafaţă de tipul întâi particulară* (5.135).

Observaţia 5.5.2 *Am definit integrala de suprafaţă de speţa a doua cu ajutorul integralei de primul tip. Însă integrala de suprafaţă de tipul al doilea, la fel ca celelalte integrale, poate fi definită direct cu ajutorul sumelor integrale.*

În cele ce urmează prezentăm formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea când suprafaţa este reprezentată prin ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D, \tag{5.140}$$

unde D este un domeniu plan care are arie. Fie că faţa aleasă a suprafeţei este $\mathcal{S}^+$ şi că această faţă corespunde normalei

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|} = \mathbf{i}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + \mathbf{j}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + \mathbf{k}\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k}). \tag{5.141}$$

Conform celor prezentate mai sus avem mai întâi că integrala de suprafaţă pe faţa $\mathcal{S}^+$ a suprafeţei $\mathcal{S}$ se calculează cu ajutorul integralei de suprafaţă de tipul întâi prin

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =\\ = \iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(P\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + Q\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}) + R\,\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})\Big)\,d\sigma.\end{gathered} \tag{5.142}$$

Din expresia (5.141) rezultă că putem scrie versorul normalei $\mathbf{n}$ şi în forma

$$\mathbf{n} = \frac{A(u,v)\,\mathbf{i} + B(u,v)\,\mathbf{j} + C(u,v)\,\mathbf{k}}{\sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}}, \tag{5.143}$$

unde funcţiile $A(u,v)$, $B(u,v)$ şi $C(u,v)$ sunt jacobienii

$$\begin{gathered} A(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u,v),\;\; B(u,v) = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(u,v), \\ C(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v). \end{gathered} \tag{5.144}$$

Dacă mai ţinem cont şi de faptul că elementul de arie are expresia

$$d\sigma = \|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\, dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv, \tag{5.145}$$

în final rezultă că integrala de suprafaţă de tipul doi se determină prin formula de calcul

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{D} \Big(P\,A + Q\,B + R\,C\Big)\, dudv, \tag{5.146}$$

unde prin funcţiile P, Q şi R din membrul al doilea înţelegem

$$\begin{cases} P &=& P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \\ Q &=& Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \\ R &=& R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{cases} \tag{5.147}$$

iar A, B şi C sunt funcţiile din (5.144).

Dacă folosim relaţiile (5.134) şi (5.141), integrala de suprafaţă de tipul al doilea se poate scrie vectorial după cum urmează

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{5.148}$$

unde în integrala a doua nu s–a mai scris $\mathcal{S}^+$ acest fapt subânţelegându–se odată cu precizarea normalei $\mathbf{n}$ a suprafeţei.

Dacă dorim să scriem formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea, pornind de la scrierea sa ca în membrul doi din (5.148), trebuie evaluată valoarea funcţiei de integrat în punctele suprafeţei. Găsim

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\Big|_{\mathcal{S}} = \frac{\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|} = \frac{(\mathbf{F},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}. \tag{5.149}$$

În (5.149) intră produsul mixt al vectorilor $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, $\mathbf{r}_u$ şi $\mathbf{r}_v$, însă trebuie precizat că este vorba de valoarea pe $\mathcal{S}$ a vectorului $\mathbf{F}$, ceea ce înseamnă că funcţiile P, Q şi R sunt cele din (5.147).

Luând acum în calcul (5.149) şi expresia (5.145) a elementului de arie $d\sigma$ al suprafeţei $\mathcal{S}$, deducem că formula de calcul a integralei de suprafaţă de al doilea tip, scrisă în forma din membrul doi al relaţiei (5.148), este

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \iint\limits_{D} (\mathbf{F},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)\,dudv. \tag{5.150}$$

Dacă ţinem cont de exprimarea analitică a unui produs mixt prin determinantul de ordinul trei care are pe linii coordonatele a respectiv celor trei vectori în ordinea în care apar în produs rezultă că formula de calcul (5.150) se poate scrie în forma finală

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv. \tag{5.151}$$

Pentru a scrie încă o formă a integralei de suprafaţă de al doilea tip, introducem noţiunea de *element orientat de arie* notat cu $d\boldsymbol{\sigma}$ şi exprimat prin

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\,d\sigma. \tag{5.152}$$

Atunci, integrala de suprafaţă de tipul al doilea se poate scrie simplu

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{5.153}$$

În cazul în care suprafaţa netedă este reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia

$$(\mathcal{S}):\quad z = f(x,y), \qquad (x,y)\in D\subset Oxy, \tag{5.154}$$

şi considerăm că faţa $\mathcal{S}^+$ a sa este cea superioară, versorul normalei este

$$\mathbf{n} = \frac{-p\,\mathbf{i} - q\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{5.155}$$

unde p şi q sunt notaţiile lui Monge pentru derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f în punctul curent interior suprafeţei $(\mathcal{S}^+)$.

În acest caz, abscisa x şi ordonata y ale oricărui punct de pe suprafaţă pot fi considerate drept parametri curbilinii ai suprafeţei $\mathcal{S}^+$ astfel că se poate scrie ecuaţia sa vectorială

$$(\mathcal{S}^+): \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}, \qquad (x,y) \in D. \tag{5.156}$$

Atunci, formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea din câmpul vectorila $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ pe faţa superioară a suprafeţei (5.154) este uşor de obţinut din cazul general (5.151) luând drept u pe x şi drept v pe y. Avem în final

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \\ &= \iint\limits_{D} \Big(- pP(x,y,f(x,y)) - qQ(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y))\Big)dxdy.\end{aligned} \tag{5.157}$$

Dacă faţa suprafeţei $\mathcal{S}$ este cea inferioară $\mathcal{S}^-$, formula de calcul este

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}^-} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \\ &\iint\limits_{\mathcal{S}^-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \\ &= \iint\limits_{D} \Big(p\,P(x,y,f(x,y)) + q\,Q(x,y,f(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\Big)dxdy.\end{aligned} \tag{5.158}$$

Observaţia 5.5.3 *Urmând un raţionament asemănător celui care ne–a condus la formulele* (5.157) *şi* (5.158)*, se pot obţine formulele de calcul ale integralei de suprafaţă de tipul al doilea din câmpul vectorial* $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ *când suprafaţa* $\mathcal{S}$ *este reprezentată cartezian explicit fie prin ecuaţia* $x = g(y,z)$ *fie prin ecuaţia* $y = h(z,x)$.

Spre exemplu, dacă $\mathcal{S}$ are ecuaţia $x = g(y,z)$ şi $\mathcal{S}^+$ este faţa dinspre partea pozitivă a axei Ox, formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea din câmpul $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ pe suprafaţa $\mathcal{S}^+$ este

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{S}^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \Big(P(g(y,z),y,z) - \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)Q(g(y,z),y,z) -$$

$$- \frac{\partial g}{\partial z}(y,z)R(g(y,z),y,z)\Big)dydz,$$

unde D_{yz} reprezintă proiecţia suprafeţei $\mathcal{S}^+$ pe planul Oyz fiind totodată şi domeniul de definiţie al funcţiei g.

Exemplul 5.5.1 *Să se calculeze valoarea integralei de suprafaţă de tipul al doilea*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z\, dxdy,$$

unde $\mathcal{S}$ este faţa exterioară a sferei de rază R cu centrul în origine.

Soluţie. Ecuaţia sferei de rază R cu centrul în origine este

$$(\mathcal{S}): \quad F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Utilizând cunoştinţele din primul paragraf al acestui capitol găsim că versorul normalei exterioare în punctul $M(x,y,z)$ al sferei $\mathcal{S}$ este

$$\mathbf{n} = \frac{(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)}{\|\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)\|} = \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{R}.$$

Atunci, integrala de tipul al doilea de calculat se transformă în integrala de suprafaţă de tipul întâi

$$I = \frac{1}{R}\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^3 + y^3 + z^2)\, d\sigma$$

iar pentru a reduce pe aceasta la o integrală dublă folosim reprezentarea parametrică a sferei în care parametri curbilinii sunt colatitudinea θ şi longitudinea φ

$$x = R\,\sin\theta\,\cos\varphi,\quad y = R\,\sin\theta\,\sin\varphi,\quad z = R\,\cos\theta.$$

Punctul $M(x,y,z)$ descrie sfera de rază R cu centru în origine dacă perechea (θ,φ) aparţine domeniului plan Δ care este intervalul bidimensional $[0,\pi]\times[0,2\pi)$. Coeficienţii lui Gauss au fost calculaţi deja în alt exemplu şi am găsit că aceştia sunt:

$$E(\theta,\varphi) = R^2;\quad F(\theta,\varphi) = 0;\quad G(\theta,\varphi) = R^2\,\sin^2\theta.$$

Elementul de arie al suprafeţei exprimat cu ajutorul parametrilor curbilinii θ şi φ este

$$d\sigma = R^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

iar valorile pe sferă ale funcţiei de integrat sunt date de

$$(x^3+y^3+z^2)\Big|_{\mathcal{S}} = R^2(R\,\sin^3\theta\,\cos^3\varphi + R\,\sin^3\theta\,\sin^3\varphi + \cos^2\theta).$$

Scriind formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul întâi şi aplicând totodată formula de calcul a integralei duble pe intervalul bidimensional Δ, vom avea

$$I = R^4\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}(R\,\sin^3\theta\,\cos^3\varphi + R\,\sin^3\theta\,\sin^3\varphi + \cos^2\theta)\sin\theta\,d\varphi.$$

Integralele:

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi;\qquad \int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi$$

sunt nule, după cum se constată simplu, iar

$$\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{3}\,\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

astfel că integrala de suprafaţa dată are valoarea $4\pi R^4/3$. ■

Exemplul 5.5.2 *Un fluid oarecare curge în spaţiu cu viteza*

$$\mathbf{V}(x,y,z) = 3x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Să se găsească fluxul total Φ al fluidului prin faţa superioară a paraboloidului

$$(\mathcal{S}^+):\quad z = 9 - x^2 - y^2$$

situată în semispaţiul superior $z \geq 0$.

Soluţie. Am văzut că fluxul total al unui fluid cu viteza $\mathbf{V}$ prin faţa $\mathcal{S}^+$ a suprafeţei $\mathcal{S}$ este dat de integrala de suprafaţă de tipul al doilea

$$\Phi = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} V_n \, d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

unde $\mathbf{n}$ este normala la faţa superioară a paraboloidului

$$\mathbf{n} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Aplicând formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea dată în (5.157), obţinem

$$\Phi = \iint\limits_{D} \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (5x^2 + 5y^2 + 9) dxdy,$$

unde D este proiecţia suprafeţei pe planul Oxy

$$D = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \; x^2 + y^2 - 9 \leq 0\}.$$

Integrala dublă o calculăm folosind trecerea la coordonatele polare ρ şi θ unde:

$$x = \rho \cos\theta; \quad y = \rho \sin\theta, \qquad (\rho, \theta) \in \Delta = [0, 3] \times [0, 2\pi).$$

Având în vedere că jacobianul transformării care se utilizează la schimbarea de variabile de mai sus este egal cu ρ, folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obţinem

$$\Phi = \iint\limits_{\Delta} \rho \, (5\,\rho^2 + 9) \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho \, (5\rho^2 + 9) \, d\rho = \frac{567\,\pi}{2}.$$

Valoarea pozitivă a rezultatului arată că fluidul *iese* din suprafaţă şi aceasta se datorează faptului că în fiecare punct de pe faţa $\mathcal{S}^+$ a suprafeţei vectorul viteza fluidului face unghi ascuţit cu versorul normalei la suprafaţă, ca atare particula de fluid aflată instantaneu oriunde pe suprafaţă *iese* din domeniul spaţial limitat de planul Oxy şi de suprafaţa $\mathcal{S}$. ∎

5.6 Formula integrală a lui Stokes

Formula integrală a lui Stokes stabileşte o legătură între integrala de suprafaţă în raport cu coordonatele şi integrala curbilinie de speţa a doua. Ea generalizează formula integrală Riemann–Green, ultima fiind un caz particular a celei dintâi când suprafaţa în chestiune este o parte a planului Oxy. Ca şi formula integrală Riemann–Green, formula integrală a lui Stokes este întâlnită în multe aplicaţii ale analizei matematice în inginerie.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă netedă, bilateră şi orientată, dată de ecuaţia vectorială

$$(\mathcal{S}):\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \chi(u,v)\mathbf{k}, \tag{5.159}$$

unde $(u,v) \in D$, iar D este un domeniu compact care are arie. Suprafaţa $\mathcal{S}$ fiind orientată, rezultă că versorul normalei $\mathbf{n}$ la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul curent $(u,v) \in D$ este bine precizat. Fie că faţa aleasă a suprafeţei este cea care corespunde normalei (5.141). Mulţimea punctelor $(u,v) \in D$ este mulţimea punctelor din interiorul unei curbe închise γ şi de pe această curbă. Presupunem că frontiera γ a mulţimii D este reprezentată parametric prin ecuaţiile

$$(\gamma):\quad u \;=\; u(t),\quad v \;=\; v(t), \qquad t \in [\alpha,\beta]. \tag{5.160}$$

Frontiera Γ a suprafeţei $\mathcal{S}$ dată prin (5.159) este tot o curbă închisă şi are ecuaţia vectorială

$$(\Gamma):\quad \mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(u(t),v(t)), \qquad t \in [\alpha,\beta]. \tag{5.161}$$

Pe curba Γ introducem o orientare pe care o numim *compatibilă* cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$. În fiecare punct $M \in \Gamma$ considerăm versorul normalei la suprafaţă $\mathbf{n}$ şi, în acelaşi punct, considerăm vectorul $\boldsymbol{\nu}$ cu proprietatea că este perpendicular şi pe $\mathbf{n}$ şi pe Γ şi *intră* în $\mathcal{S}$.

Orientarea de pe curba Γ dată de vectorul $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}$ se numeşte *compatibilă* cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$. Într–un limbaj mai sugestiv, putem spune că orientarea pe Γ compatibilă cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată de un observator care deplasându–se pe Γ are capul spre $\mathbf{n}$ şi lasă la stânga suprafaţa $\mathcal{S}$.

Fie funcţia $P(x,y,z)$ definită şi continuă pe $\mathcal{S}$ având derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $\mathcal{S}$. În aceste condiţii ne propunem să calculăm integrala curbilinie

$$I = \int_\Gamma P(x,y,z)\,dx. \tag{5.162}$$

Având în vedere că Γ are ecuaţia vectorială (5.161), din formula de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea în spaţiu, deducem că integrala I din (5.162) se scrie în forma

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(u(t),v(t)),\psi(u(t),v(t)),\chi(u(t),v(t)))\frac{d\varphi}{dt}(u(t),v(t))dt. \quad (5.163)$$

Dacă se calculează derivata funcţiei compuse $\varphi(u(t),v(t))$ şi se înlocuieşte în (5.163) constatăm că I este integrala curbilinie de tipul al doilea pe curba plană γ

$$I = \int_{\gamma} \widetilde{P}(u,v)\,du + \widetilde{Q}(u,v)\,dv, \quad (5.164)$$

unde am folosit notaţiile:

$$\begin{cases} \widetilde{P}(u,v) = P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v); \\ \widetilde{Q}(u,v) = P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v). \end{cases} \quad (5.165)$$

În planul $O'uv$ aplicăm formula integrală Riemann–Green membrului al doilea al relaţiei (5.164) şi obţinem

$$I = \iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial u}(u,v) \quad - \quad \frac{\partial\widetilde{P}}{\partial v}(u,v)\Big)\,dudv. \quad (5.166)$$

Folosind (5.165) şi regulile de derivare ale funcţiilor compuse constatăm că derivatele care intră în (5.166) au expresiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{Q}}{\partial u} = \Big(\dfrac{\partial P}{\partial x}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial u} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\,\dfrac{\partial\chi}{\partial u}\Big) + P\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}; \\ \dfrac{\partial\widetilde{P}}{\partial v} = \Big(\dfrac{\partial P}{\partial x}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial v} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\,\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\Big) + P\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}. \end{cases} \quad (5.167)$$

Diferenţa derivatelor din (5.167) conduce la expresia

$$\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial\widetilde{P}}{\partial v}(u,v) = B\,\frac{\partial P}{\partial z} - C\,\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (5.168)$$

unde B şi C sunt jacobienii:

$$B = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}(u, v); \qquad C = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v), \tag{5.169}$$

iar funcţia P care apare în (5.167) şi în (5.168) trebuie înţeleasă ca

$$P = P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)). \tag{5.170}$$

În acest fel integrala I din (5.162) devine

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx = \iint_D \Big(B\,\frac{\partial P}{\partial z} - C\,\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dudv, \tag{5.171}$$

cu menţiunea că funcţia P din membrul al doilea este cea dată în (5.170).

În mod analog se obţin:

$$\int_\Gamma Q(x, y, z)\, dy = \iint_D \Big(C\,\frac{\partial Q}{\partial x} - A\,\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\, dudv; \tag{5.172}$$

$$\int_\Gamma R(x, y, z)\, dz = \iint_D \Big(A\,\frac{\partial R}{\partial y} - B\,\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\, dudv \tag{5.173}$$

în care funcţiile Q şi R din membrul doi al relaţiei (5.172) şi respectiv (5.173) sunt

$$\begin{aligned} Q &= Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)),\\ R &= R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), \end{aligned} \tag{5.174}$$

iar A este jacobianul

$$A = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}(u, v). \tag{5.175}$$

Observaţia 5.6.1 *Jacobienii din relaţiile* (5.169) *şi* (5.175) *sunt cei care intră în expresia versorului normalei la suprafaţă care am convenit să fie*

$$\mathbf{n} = \frac{A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}}{\sqrt{E\,G - F^2}}, \tag{5.176}$$

unde funcţiile E, F, G sunt coeficienţii lui Gauss.

Adunând rezultatele (5.171) – (5.173), deducem relaţia

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx\,+\,Q(x,y,z)\,dy\,+\,R(x,y,z)\,dz\,=\\ =&\iint\limits_D\Big(A\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+B\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+C\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\Big)\,dudv.\end{aligned}\tag{5.177}$$

Pe de altă parte, integrala dublă din membrul al doilea al relaţiei (5.177) este o integrală de suprafaţă de tipul al doilea pe faţa suprafeţei $\mathcal{S}$ de normală $\mathbf{n}$ dată în (5.176), şi anume

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy=\\ =&\iint\limits_D\Big(A\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+B\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+C\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\Big)dudv.\end{aligned}\tag{5.178}$$

De notat că funcţiile P, Q şi R, din integralele duble de mai sus, sunt astfel cum au fost precizate prin relaţiile (5.170) şi (5.174).

Cuplând rezultatele din (5.177) şi (5.178) deducem relaţia

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx\,+\,Q(x,y,z)\,dy\,+\,R(x,y,z)\,dz\,=\\ =&\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy\end{aligned}\tag{5.179}$$

care se numeşte *formula integrală a lui Stokes* sau simplu, *formula lui Stokes*.

Ţinând cont că avem relaţiile:

$$dydz=\cos\alpha\,d\sigma;\quad dzdx=\cos\beta\,d\sigma;\quad dxdy=\cos\gamma\,dxdy,\tag{5.180}$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinii directori ai normalei $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n}\;=\;(\cos\alpha)\mathbf{i}+(\cos\beta)\mathbf{j}+(\cos\gamma)\mathbf{k}\tag{5.181}$$

rezultă că formula integrală a lui Stokes (5.179) se scrie în forma echivalentă

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\\ &=\iint\limits_{\mathcal{S}}\Big(\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\\ &+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big)d\sigma.\end{aligned}\tag{5.182}$$

Fie funcţia vectorială $\mathbf{F}$, de trei variabile reale, definită pe domeniul $V \subset \mathcal{E}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : V \to I\!R^3, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x,y,z) = \\ = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{5.183}$$

care are proprietatea că funcţia vectorială

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\,\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\,\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathbf{k} \tag{5.184}$$

există şi este continuă cel puţin în punctele suprafeţei $\mathcal{S}$.

Observând că diferenţiala vectorului de poziţie $\mathbf{r}$ este

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} \tag{5.185}$$

şi că produsul scalar al vectorilor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ şi $d\mathbf{r}$ este dat de

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{5.186}$$

deducem că formula integrală a lui Stokes (5.182) se poate scrie sub forma vectorială

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \;=\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}\, d\sigma. \tag{5.187}$$

Din punct de vedere fizic formula integrală a lui Stokes exprimată prin (5.187) arată că *circulaţia* câmpului vectorial $\mathbf{F}$ pe frontiera Γ a unei suprafeţe orientate $\mathcal{S}$ este egală cu *fluxul rotorului* lui $\mathbf{F}$ prin acea suprafaţă.

Observaţia 5.6.2 *În cazul în care $\mathcal{S}$ este o porţiune D din planul Oxy, iar normala la $\mathcal{S} = D$ este versorul $\mathbf{k}$, formula integrală a lui Stokes* (5.177) *devine formula integrală Riemann–Green.*

Observaţia 5.6.3 *Dacă câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este irotaţional pe V, ceea ce înseamnă că $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, din* (5.187) *deducem că integrala curbilinie de tipul al doilea din funcţia vectorială $\mathbf{F}$ pe orice curbă închisă din V este nulă şi ca atare, expresia diferenţială*

$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{5.188}$$

este o difrenţială totală pe V, adică există funcţia diferenţiabilă U astfel încât

$$dU(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \tag{5.189}$$

Funcţia U din (5.189) se numeşte *primitivă* a expresiei diferenţiale ω. De asemenea, în acest caz integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial $\mathbf{F}$ nu depinde de drumul de integrare.

Formula integrală a lui Stokes se foloseşte în calculul integralei curbilinii pe curba închisă Γ din câmpul vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ când fluxul rotorului lui $\mathbf{F}$ pe o suprafaţă mărginită de acea curbă se calculează mai uşor.

Exerciţiul 5.6.1 *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I = \int_\Gamma (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

de–a lungul curbei determinate de intersecţia suprafeţelor:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx; \quad x^2 + y^2 = 2rx, \quad R > r, \ z \geq 0,$$

sensul de parcurs al curbei Γ fiind cel al acelor de ceasornic dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Ox.

Soluţie. Pentru că integrala curbilinie este complicată, folosim formula integrală a lui Stokes luând ca suprafaţă $\mathcal{S}$ porţiunea din sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$$

situată în semispaţiul superior $z \geq 0$, mărginită de curba Γ şi care conţine puncte $M(x, y, z)$ cu abscisă cuprinsă între 0 şi R.

Având în vedere orientarea curbei Γ, rezultă că normala $\mathbf{n}$ la suprafaţa $\mathcal{S}$ este cea exterioară sferei, această alegere a normalei $\mathbf{n}$ fiind urmare a condiţiei ca Γ să fie orientată compatibil cu orientarea suprafeţei $\mathcal{S}$. Suprafaţa $\mathcal{S}$ fiind dată implicit rezultă că normala sa exterioară în punctul $M \in \mathcal{S}$ este , cu plus sau minus, versorul gradientului funcţiei

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rx = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

Se constată că trebuie luat semnul plus astfel că normala $\mathbf{n}$ în punctul M al porţiunii $\mathcal{S}$ din sfera de rază R şi centru în punctul $C(R, 0, 0)$ are cosinii directori:

$$\cos\alpha = \frac{x - R}{R}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{R}; \qquad \cos\gamma = \frac{z}{R}.$$

Rotorul câmpului vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ este

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 2(y - z)\mathbf{i} + 2(z - x)\mathbf{j} + 2(x - y)\mathbf{k}.$$

Aplicând acum formula integrală a lui Stokes, integrala curbilinie I devine

$$I = \frac{2}{R}\iint\limits_{\mathcal{S}} \Big((y-z)(x-R)+y(z-x)+z(x-y)\Big)d\sigma = 2\iint\limits_{\mathcal{S}}(z-y)d\sigma.$$

Porţiunea $\mathcal{S}$ din sfera de rază R cu centrul în punctul $C(R,0,0)$ are ecuaţia carteziană explicită $z=\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}$, se proiectează în planul Oxy după mulţimea $D=\{(x,y)\in I\!R^2:\ x^2+y^2-2rx\le 0\}$ şi are elementul de arie în punctul ei curent $M(x,y,z)$ dat de $d\sigma = \dfrac{R}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}dxdy.$

Conform formulei de calcul a unei integrale de suprafaţă de tipul întâi, integrala de suprafaţă de mai sus se transformă în integrala dublă

$$\begin{aligned} I &= 2R\iint\limits_D \Big(1-\frac{y}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}\Big)dxdy \\ &= 2R\iint\limits_D dxdy - 2R\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}dxdy. \end{aligned}$$

A doua integrală dublă este egală cu zero deoarece funcţia de integrat este impară în raport cu variabila y, iar doemniul D de integrare este simetric faţă de axa Ox. Prima integrală dublă este aria discului de rază R. Prin urmare, valoarea integralei I este $I = 2R\iint\limits_D dxdy = 2\pi r^2 R.$ ■

Exerciţiul 5.6.2 *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I=\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

C fiind curba de intersecţie a frontierei cubului $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ cu planul $2(x+y+z)-3a=0$ parcursă în sens direct dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Oz.

Soluţie. Se aplică formula lui Stokes şi se găseşte

$$I=-2\iint\limits_S (y+z)dydz+(z+x)dzdx+(x+y)dxdy,$$

unde S este partea de pe faţa superioară a planului $z=3a/2-x-y$ care se proiectează pe planul Oxy în hexagonul de vârfuri $M_1(a,0,0)$, $M_2(a,a/2,0)$, $M_3(a/2,a,0)$, $M_4(0,a,0)$, $M_5(0,a/2,0)$, $M_6(a/2,0,0)$.

Rezultă $I=-9a^3/2.$ ■

Capitolul 6

Integrala triplă

În acest capitol vom defini noţiunea de integrabilitate a unei funcţii reale de trei variabile reale independente şi apoi, legat de aceasta, vom introduce conceptul de *integrala triplă* pe o anumită submulţime a spaţiului aritmetic tridimensional a unei funcţii reale de trei variabile reale definită pe acea mulţime.

Integralele triple sunt aplicate pe scară largă în diverse probleme de fizică, mecanică şi inginerie. Câteva din aceste aplicaţii vor fi prezentate în ultimul paragraf al acestui capitol.

În multe privinţe integralele triple sunt analoage integralelor duble şi, ca urmare, vom omite acele demonstraţii care nu diferă esenţial de demonstraţiile corespunzătoare din capitolul în care s–a studiat integrala dublă.

6.1 Elemente de topologie în $I\!R^3$

Mulţimile care vor fi considersate în acest capitol vor fi submulţimi ale spaţiului afin euclidian tri–dimensional $\mathcal{E}_3$, raportat la un reper Cartezian ortogonal $Oxyz$ şi asociat spaţiului liniar $I\!R^3$. Definiţiile unor noţiuni topologice legate de aceste submulţimi precum: punct interior al unei mulţimi; frontiera unei mulţimi; mulţime deschisă; mulţime închisă; mulţime conexă; domeniu; domeniu închis; diametru unei mulţimi pot fi transpuse uşor mulţimilor incluse în $\mathcal{E}_3$, pornind de la noţiunile topologice similare referitoare la submulţimi ale planului afin euclidian.

Când am introdus integrala dublă am folosit noţiunea de mulţime plană măsurabilă Jordan sau mulţime carabilă şi de arie a acesteia. În mod similar, definiţia integralei triple se bazează pe noţiunea de *mulţime cubabilă* sau *măsurabilă Jordan* şi de *volumul* unei astfel de submulţimi a spaţiului afin euclidian tridimensional. Pentru aceasta vom porni de la noţiunea de poliedru sau de mulţime poliesdrală şi de volum al acestuia, cunoscute din geometria elementară. Extinderea acestor noţiuni la clase mai largi de mulţimi poate fi efectuată în acelaşi mod în care, plecând de la figuri plane poligonale, au fost introduse noţiunile de mulţime carabilă şi de arie a unei asemenea mulţimi. Vom prezenta pe scurt această extindere.

Un domeniu poliedral sau solid poliedral este o submulţime a lui $\mathcal{E}_3$ a cărei frontieră este o reuniune finită de poligoane. Volumul $V(P)$ a unui solid poliedral este un număr nenegativ care posedă următoarele proprietăţi:

1. (*monotonia*). Dacă P şi Q sunt două solide poliedrale, iar P este inclus în Q, atunci
$$V(P) \leq V(Q);$$
2. (*aditivitatea*). Dacă P şi Q sunt două solide poliedrale fără puncte interioare comune, atunci
$$V(P \cup Q) = V(P) + V(Q);$$
3. (*invarianţa*). Dacă solidele poliedrale P şi Q sunt congruente, volumele lor sunt egale.

Aceste trei proprietăţi se pot păstra când noţiunea de volum se extinde la o clasă mai largă de mulţimi din $\mathcal{E}_3$.

În acest sens, considerăm o mulţime mărginită arbitrară $\Phi \subset \mathcal{E}_3$ şi, totodată, toate corpurile poliedrale scufundate în Φ. Marginea superioară a volumelor solidelor poliedrale scufundate se numeşte **măsura interioară Jordan** a mulţimii Φ. În cazul în care nu există mulţimi poliedrale care să poată fi scufundate în Φ, prin definiţie, atribuim mulţimii Φ măsură interioară Jordan nulă.

În mod similar, se introduce **măsura Jordan superioară** a mulţimii Φ ca fiind marginea inferioară a tuturor solidelor poliedrale cu proprietatea că mulţimea Φ este scufundată în oricare din ele.

Definiţia 6.1.1 *Spunem că o mulţime* $\Phi \subset \mathcal{E}_3$ *este* **măsurabilă Jordan** *sau* **cubabilă** *dacă măsurile Jordan interioară şi exterioară ale acesteia sunt egale. Valoarea comună a acestor măsuri se numeşte* **volumul** *lui* Φ *şi se notează cu* $V(\Phi)$ *sau cu* $vol\,\Phi$.

Teorema următoare se demonstrează la fel cu cea similară pentru cazul mulţimilor plane prezentată în primul paragraf al capitolului în care s–a studiat integrala dublă.

Teorema 6.1.1 *Condiţia necesară şi suficientă ca figura spaţială Φ să fie măsurabilă Jordan sau cubabilă este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe figurile poliedrale $P \subset \Phi$ şi $Q \supset \Phi$ astfel încât*

$$V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

Definiţia 6.1.2 *Spunem că o mulţime din spaţiu are* **vloumul egal cu zero** *dacă ea poate fi scufundată întrun corp poliedral de volum arbitrar de mic.*

Folosind noţiunea introdusă în definiţia de mai sus, putem reformula Teorema 6.1.1 după cum urmează.

Teorema 6.1.2 *Mulţimea $\Phi \subset \mathcal{E}_3$ are volum dacă şi numai dacă frontiera sa are volumul egal cu zero.*

Criteriul care rezultă din Teorema 6.1.2 stabileşte existenţa unor clase largi de submulţimi ale spaţiului $\mathcal{E}_3$ care au volum. Spre exemplu, corpurile compuse dintr–un număr finit de cilindri, având interioare disjuncte două câte două, cu bazele inferioare mulţimi carabile din planul Oxy şi bazele superioare suprafeţe netede descrise de ecuaţii de forma $z = f(x, y)$, formează o astfel de clasă. Volumul fiecărui cilindru component este egal cu integrala dublă

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy,$$

unde D este baza acelui cilindru.

O altă clasă importantă de mulţimi tridimensionale care au volum este alcătuită din mulţimile spaţiului care sunt mărginite de un număr finit de suprafeţe netede. Altfel spus, o mulţime din spaţiu mărginită de o suprafaţă închisă netedă sau netedă pe porţiuni este o mulţime cubabilă. Această afirmaţie se demonstrează asemănător cu afirmaţia că o curbă plană netedă pe porţiuni are aria egală cu zero, dar aplicarea demonstraţiei la cazul corpurilor presupune detalieri complicate care nu au fost prezentate în această lucrare.

Procedând asemănător ca în capitolul în care am studiat integrala dublă putem stabili uşor valabilitatea următoarelor afirmaţii:

1. Reuniunea Φ a două mulţimi măsurabile Jordan Φ_1 şi Φ_2 este o mulţime cubabilă şi, dacă interioarele mulţimilor Φ_1 şi Φ_2 sunt disjuncte, volumul lui Φ este suma volumelor mulţimilor Φ_1 şi Φ_2;

2. Intersecţa a două mulţimi măsurabile Jordan este o mulţime cubabilă.

6.2 Definiţia integralei triple

Fie V un domeniu spaţial mărginit de o suprafaţă netedă sau netedă pe porţiuni şi $f(P) = f(x, y, z)$ o funcţie reală definită şi mărginită pe închiderea mulţimii V. Descompunem domeniul V printr–o reţea de suprafeţe netede pe porţiuni în subdomeniile

$$V_1, \quad V_2, \quad \cdots, V_i, \quad \cdots, V_n \tag{6.1}$$

care nu au puncte interioare în comun şi care satisfac condiţia

$$V \;=\; V_1 \;\cup\; V_2 \;\cup\; \cdots \;\cup\; V_n. \tag{6.2}$$

Definiţia 6.2.1 *Fie V_i mulţimile din* (6.1) *care satisfac* (6.2). *Atunci, mulţimea*

$$\Delta \;=\; \{V_1, \quad V_2, \quad \cdots, V_i, \quad \cdots, V_n\} \tag{6.3}$$

se numeşte **diviziune** *a domeniului V, iar mulţimile V_i se numesc* **elementele diviziunii**.

Definiţia 6.2.2 *Fie diviziunea Δ din* (6.3). *Se numeşte* **norma** *sau* **fineţea** *diviziunii Δ numărul pozitiv $\nu(\Delta)$, sau $\|\Delta\|$, egal cu cel mai mare dintre diametrele elementelor diviziunii Δ.*

Frontiera unui element al diviziunii Δ fiind o suprafaţă închisă netedă pe porţiuni este măsurabilă Jordan. Să notăm cu τ_i volumul elementului V_i şi cu $\mathcal{V}$ volumul lui V. Avem

$$\mathcal{V} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \tau_i.$$

În fiecare element V_i al diviziunii Δ alegem câte un punct $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, numit *punct intermediar*, apoi alcătuim *suma integrală a funcţiei f*

$$\sigma_\Delta(f, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \tau_i \tag{6.4}$$

corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare $P_i \in V_i$.

Definiţia 6.2.3 *Spunem că funcţia f este* **integrabilă** *pe mulţimea măsurabilă Jordan V dacă există şi este finită limita I a sumelor integrale* (6.4), *iar I nu depinde de alegerea punctelor intermediare.*

Definiţia 6.2.4 *Dacă $f : \overline{V} \to I\!R$ este integrabilă pe $V \subset \mathcal{E}_3$, numărul*

$$I = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f, P_i)$$

se numeşte **integrala triplă pe domeniul** V **a funcţiei** f *şi se notează cu unul din simbolurile*

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_V f(P)\,dv.$$

Având în vedere definiţia limitei rezultă că putem da o definiţie echivalentă a integrabilităţii funcţiei $f : \overline{V} \to I\!R$.

Definiţia 6.2.5 *Funcţia $f : \overline{V} \to I\!R$ se numeşte* **integrabilă** *pe $V \subset \mathcal{E}_3$ dacă există numărul real I cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât să avem*

$$|\sigma_\Delta(f, P_i) - I| < \varepsilon$$

pentru orice diviziune Δ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $P_i \in V_i$.

6.3 Condiţii de existenţă a unei integrale triple

Ca şi în cazul funcţiilor reale de una sau două variabile independente, o funcţie f arbitrară dar mărginită, de trei variabilele independente x, y şi z, nu este întotdeauna integrabilă pe mulţimea ei de definiţie. Pentru a stabili condiţii suficiente de existenţa a integralei triple pe mulţimea V din funcţia reală f definită pe $\overline{V}$, vom folosi sumele Darboux inferioară şi superioară corespunzătoare diviziunii Δ din (6.3).

Fie $f(x,y,z)$ o funcţie mărginită definită pe o mulţime măsurabilă Jordan V. Notăm cu $\mathcal{D}$ totalitatea diviziunilor mulţimii V şi fie Δ o diviziune a lui V. Funcţia f fiind mărginită pe V va fi mărginită pe elementul V_i al diviziunii

$\Delta \in \mathcal{D}$ şi deci există numerele reale M_i şi m_i marginea superioară şi respectiv marginea inferioară a valorilor funcţiei f pe elementul V_i a diviziunii Δ, iar cu τ_i volumul lui V_i. Expresiile:

$$S_\Delta(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} M_i\,\tau_i; \qquad s_\Delta(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\,\tau_i \tag{6.5}$$

se numesc *suma Darboux superioară* şi respectiv *suma Darboux inferioară* pentru funcţia f corespunzătoare partiţiei Δ.

Proprietăţile sumelor Darboux introduse în (6.5) sunt asemănătoare sumelor Darboux introduse la integrala dublă motiv pentru care ne vom limita doar la enumerarea acestora.

1. Pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}$ şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$, suma integrală asociată funcţiei f este cuprinsă între suma Darboux inferioară şi suma Darboux superioară ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ

$$s_\Delta(f) \;\le\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, S_i \;\le\; S_\Delta(f).$$

2. În procesul de rafinare a divizării mulţimii V sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc. Prin urmare, dacă $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ sunt sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare modului de divizare $\Delta \in \mathcal{D}$, iar $s_{\Delta'}(f)$ şi $S_{\Delta'}(f)$ sunt sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare unei alte partiţii $\Delta' \in \mathcal{D}$, mai fină decât diviziunea Δ, avem
$$s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f).$$

3. Fie Δ' şi Δ'' două diviziuni arbitrare ale mulţimii V şi fie $s_{\Delta'}(f)$, $S_{\Delta'}(f)$ şi $s_{\Delta''}(f)$, $S_{\Delta''}(f)$, sumele Darboux asociate funcţiei f corespunzătoare acestor partiţii. Atunci, avem

$$s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta''}(f) \qquad \text{şi} \qquad s_{\Delta''}(f) \le S_{\Delta'}(f)$$

adică orice sumă Darboux inferioară a funcţiei f corespunzătoare unui mod arbitrar de divizare, nu poate întrece suma Darboux superioară asociată aceleiaşi funcţii corespunzătoare oricărui alt mod de divizare a mulţimii V.

4. Mulţimea sumelor Darboux superioare ale funcţiei f definită pe mulţimea carabilă $V \subset \mathcal{E}_3$ corespunzătoare modurilor de diviziune $\Delta \in \mathcal{D}$ este mărginită inferior. Un minorant al acestei mulţimi este oricare sumă Darboux inferioară a funcţiei f corespunzătoare unui mod de divizare $\Delta \in \mathcal{D}$.

5. Mulţimea sumelor Darboux inferioare ale funcţiei $f : V \to I\!R^3$ corespunzătoare mulţimii modurilor de divizare $\mathcal{D}$ este mărginită superior. Un majorant al acestei mulţimi este desigur oricare sumă Darboux superioară a funcţiei f corespunzătoare oricărui mod de divizare a mulţimii V.

6. Dată funcţia $f : V \subset \mathcal{E}_3 \to I\!R$ există numerele reale:

$$\overline{J} = \inf\{S_\Delta(f) \; : \; \Delta \in \mathcal{D}\}; \qquad \underline{J} = \sup\{s_\Delta(f) \; : \; \Delta \in \mathcal{D}\},$$

numite *integrala Darboux superioară* şi *integrala Darboux inferioară* ale funcţiei $f : V \to I\!R$.

Teorema 6.3.1 *Integralele Darboux inferioară şi superioară ale funcţiei reale de trei variabile reale f definită pe mulţimea măsurabilă Jordan $V \subset I\!R^3$ satisfac inegalitatea*

$$\underline{J} \; \leq \; \overline{J}.$$

Demonstraţie. Presupunem contrariul şi anume că $\underline{J} > \overline{J}$. Atunci, există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\underline{J} \; - \; \overline{J} \; > \; \varepsilon \; > \; 0. \tag{6.6}$$

Pe de altă parte, după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară şi superioară, putem spune că pentru $\varepsilon > 0$ de mai sus există o sumă Darboux superioară Ω_1 şi o sumă Darboux inferioară ω_2 astfel încât

$$\Omega_1 \; - \; \overline{J} \; < \; \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{şi} \quad \underline{J} \; - \; \omega_2 \; < \; \frac{\varepsilon}{2}, \; ,$$

de unde deducem

$$\Omega_1 \; - \; \omega_2 \; + \; (\underline{J} \; - \; \overline{J}) \; < \; \varepsilon.$$

În consecinţă, în conformitate cu (6.6), avem

$$\Omega_1 \; - \; \omega_2 \; < \; 0$$

care contrazice una din proprietatăţile sumelor Darboux. ■

Următoarea teoremă de existenţa a unei integrale triple se demonstrează aplicând argumente similare celor din demonstraţia teoremei de existenţă a unei integrale duble.

Teorema 6.3.2 *Orice funcţie continuă f definită pe mulţimea cubabilă compactă $V \subset I\!R^3$ este integrabilă pe V.*

Ca şi la integrala dublă, condiţia de continuitate a integrantului este destul de restrictivă. De aceea, teorema următoare stabileşte existenţa integralei triple pentru o clasă de funcţii discontinue.

Teorema 6.3.3 *Dacă funcţia reală $f(x, y, z)$, mărginită pe mulţimea cubabilă compactă V, este continuă peste tot în V cu excepţia unei mulţimi de volum egal cu zero, atunci ea este integrabilă pe V.*

6.4 Proprietăţile integralei triple

Proprietăţile integralei triple sunt analoage celor ale integralei duble şi de aceea ne vom limita doar să le enumerăm.

1. (*liniaritate*). Dacă funcţiile reale de trei variabile reale f şi g sunt integrabile pe mulţimea măsurabilă Jordan V, iar λ şi μ sunt constante reale arbitrare, atunci funcţia $\lambda\, f \,+\, \mu\, g$ ale cărei valori se calculează după legea

$$(\lambda\, f \,+\, \mu\, g)(x, y, z) = \lambda\, f(x, y, z) + \mu\, g(x, y, z),\ (\forall)\ (x, y, z) \in V,$$

   este integrabilă pe V şi

$$\iiint\limits_V (\lambda f + \mu g)(x, y, z)\, dv =$$

$$= \lambda \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv + \mu \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dv.$$

2. (*aditivitate*). Dacă $V = V_1 \cup V_2$, unde V_1 şi V_2 sunt mulţimi cubabile compacte, iar $V_1 \subset I\!R^3$ şi $V_2 \subset I\!R^3$ nu au puncte interioare comune şi

funcţia $f : V \to I\!R$ este integrabilă pe V, atunci f este integrabilă pe fiecare din mulţimile V_1 şi V_2 şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$=\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

3. (*monotonie*). Dacă f este integrabilă pe V şi

$$f(x,y,z) \;\; \geq \;\; 0, \;\; (\forall)\;(x,y,z) \in V,$$

integrala triplă din funcţia f satisface inegalitatea

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz \;\; \geq \;\; 0.$$

4. (*monotonie*). Dacă f şi g sunt integrabile pe mulţimea măsurabilă Jordan V şi

$$f(x,y,z) \;\; \leq \;\; g(x,y,z), \;\; (\forall)\;(x,y,z) \in V,$$

între integralele celor două funcţii avem inegalitatea

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz \;\; \leq \;\; \iiint\limits_{V} g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Această proprietate a integralei triple implică următoarele două proprietăţi.

5. (*evaluarea valorii absolute a integralei triple*). Dacă f este integrabilă pe mulţimea măsurabilă Jordan V, atunci funcţia valoarea absolută a lui f este integrabilă pe V şi

$$\Big|\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz\Big| \;\; \leq \;\; \iiint\limits_{V} |\,f(x,y,z)\,|dxdydz.$$

6. (*teorema valorii medii*). Dacă funcţia reală de trei variabile reale f este integrabilă pe mulţimea măsurabilă Jordan V şi satisface inegalitatea
$$m \;\le\; f(x,y,z) \;\le\; M, \quad (\forall)\ (x,y,z) \in V,$$
iar $\mathrm{vol}\, V$ este volumul lui V, atunci
$$m\, \mathrm{vol}\, V \;\le\; \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz \;\le\; M\, \mathrm{vol}\, V.$$
Dacă funcţia f este în plus continuă pe V, teorema valorii medii devine
7. Dacă f este funcţie continuă pe mulţimea cubabilă compactă V, există un punct $(\xi,\eta,\zeta) \in V$, astfel încât
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz \;=\; f(\xi,\eta,\zeta)\, \mathrm{vol}\, V.$$
8. Este evidentă egalitatea
$$\iiint\limits_V dxdydz \;=\; \mathrm{vol}\, V.$$

6.5 Evaluarea integralei triple

6.5.1 Integrala triplă pe intervale tridimensionale închise

Teorema 6.5.1 *Dacă funcţia reală mărginită, de trei variabile reale,*
$$f : [a,b] \times [c,d] \times [u,v] \to I\!R,$$
$$-\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty, \quad -\infty < u < v < +\infty$$
este integrabilă pe intervalul tridimensional închis
$$I_3 \;=\; [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$$
şi pentru orice $(x,y) \in I_2 = [a,\, b] \times [c,d]$ *există numărul real* $F(x,y)$ *definit de integrala depinzând de parametrii* x *şi* y
$$F(x,y) \;=\; \int_u^v f(x,y,z)\, dz, \tag{6.7}$$

atunci funcţia

$$F\,:\,I_2\,\rightarrow\,I\!R,\quad F(x,y)\,=\,\int_u^v f(x,y,z)\,dz,\quad (\forall)\;(x,y)\in I_2$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional I_2 *şi are loc egalitatea*

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz\,=\iint\limits_{I_2} F(x,y)\,dxdy\,=\iint\limits_{I_2}\Big(\int_u^v f(x,y,z)dz\Big)dxdy. \tag{6.8}$$

Demonstraţie. Fie d', d'' şi d''' diviziuni ale respectiv intervalelor reale compacte $[a,b]$, $[c,d]$ şi $[u,v]$:

$$\begin{cases} d' &= \{x_0,x_1,\cdots,x_i,x_{i+1},\cdots,x_m\};\\ d'' &= \{y_0,y_1,\cdots,y_i,y_{i+1},\cdots,y_n\};\\ d''' &= \{z_0,z_1,\cdots,z_k,z_{k+1},\cdots,z_p\}, \end{cases} \tag{6.9}$$

unde

$$\begin{cases} a = x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_m = b,\\ c = y_0<y_1<\cdots<y_i<y_{i+1}<\cdots<y_n = d,\\ u = z_0<z_1<\cdots<z_k<z_{k+1}<\cdots<z_p = v. \end{cases}$$

Cu ajutorul diviziunilor d',d'',d''' putem defini o diviziune Δ a intervalului tridimensional închis I_3

$$\Delta\,=\,\{I_{000},\,I_{100},\,\cdots\,I_{ijk},\,\cdots\,I_{mnp}\}, \tag{6.10}$$

unde elemntele I_{ijk} ale acesteia sunt intervalele tridimensionale închise

$$I_{ijk}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\times[z_k,z_{k+1}],$$
$$i=0,\,1,\,\cdots\,m-1,\quad j=0,\,1,\,\cdots,\,n-1,\quad k=0,\,1,\,\cdots,\,p-1,$$

iar cu ajutorul diviziunilor d' şi d'' definim o diviziune Δ' a lui I_2, unde elementele lui Δ' sunt intervalele bidimensionale închise

$$\begin{gathered} I'_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\\ (i=0,\,1,\,\cdots\,m-1,\;j=0,\,1,\,\cdots,\,n-1). \end{gathered} \tag{6.11}$$

Notăm

$$m_{ijk} \;=\; \inf\{f(x,y,z):\; (x,y,z)\in I_{ijk}\},$$

$$M_{ijk} \;=\; \sup\{f(x,y,z):\; (x,y,z)\in I_{ijk}\}.$$

Aceste cantităţi sunt numere reale deoarece funcţia f este mărginită pe fiecare din intervalele tridimensioanle închise I_{ijk}.

Deoarece urmărim să demonstrăm că funcţia F definită de (6.7) este integrabilă pe intervalul bidimensional închis I_2 va trebui să considerăm sumele integrale ale funcţiei F corespunzătoare tuturor diviziunilor Δ' ale intervalului bidimensional I_2, ale căror elemente au forma (6.11), pentru alegeri arbitrare ale punctelor intermediare $(\xi_i,\eta_j)\in I'_{ij}$. Aceste sume au forma

$$\sigma_{D'}(F,(\xi_i,\eta_j)) \;=\; \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} F(\xi_i,\eta_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j). \tag{6.12}$$

Dacă ţinem seama de modul cum a fost definită funcţia F şi de proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei Riemann, avem

$$F(\xi_i,\eta_j) \;=\; \int_u^v f(\xi_i,\eta_j,z)dz \;=\; \sum_{k=0}^{p-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i,\eta_j,z)dz.$$

Aplicând formula de medie integralelor simple

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i,\eta_j,z)dz$$

deducem că există numerele reale μ_{ijk} cu $m_{ijk}\le\mu_{ijk}<M_{ijk}$, astfel încât

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i,\eta_j,z)dz \;=\; \mu_{ijk}(z_{k+1}-z_k).$$

Deci, pentru sumele integrale (6.12) asociate funcţiei F definită pe intervalul bidimensional I_2, corespunzătoare modului de divizare Δ' şi alegerii punctelor intermediare $(\xi_i,\eta_j)\in I_{ij}$, avem

$$\sigma_{\Delta'}(F,(\xi_i,\eta_j)) \;=\; \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1}\mu_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k).$$

Dacă ţinem seama de inegalităţile

$$m_{ijk}\le\mu_{ijk}\le M_{ijk},$$
$$(i=0,\,1,\,\cdots\,m-1,\;j=0,\,1,\,\cdots,\,n-1,\;k=0,\,1,\,\cdots,\,p-1)$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}\, v_{ijk} \;\leq\; \sigma_{\Delta'}(F,(\xi_i,\eta_j)) \;\leq\; \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}\, v_{ijk}, \tag{6.13}$$

unde v_{ijk} este volumul intervalului tridimensional I_{ijk}

$$v_{ijk} = \operatorname{vol} I_{ijk} = (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k).$$

Prima sumă din inegalităţile (6.13) este suma Darboux inferioară a funcţiei f relativă la diviziunea Δ a lui I_3

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}\, v_{ijk}.$$

Ultima sumă din inegalităţile (6.13) este suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la aceeaşi diviziune Δ a intervalului tridimensional I_3

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}\, v_{ijk}.$$

Avem deci inegalăţile

$$s_\Delta(f) \leq \sigma_{\Delta'}(F,(\xi_i,\eta_j)) \leq S_\Delta(f)$$

pentru orice diviziune Δ de forma (6.10) a intervalului tridimensional I_3 şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_i,\eta_j)\in I_2$.

Fie acum $(d'_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că şirul normelor acestor diviziuni $(\|d'_r\|)_{r\in\mathbb{N}^*}$ este convergent la zero, $(d''_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale intervalului $[c,d]$ cu proprietatea $\|d''_r\|\to 0$ şi $(d'''_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ un şir oarecare de diviziuni ale lui $[u,v]$ cu $\|d'''_k\|\to 0$. Notăm cu Δ_r diviziunea intervalului tridimensional închis $I_3=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ definită de diviziunile d'_r, d''_r, d'''_r ale respectiv intervalelor închise $[a,b]$, $[c,d]$, $[u,v]$ şi cu Δ'_r diviziunea intervalului bidimensional închis $I_2=[a,b]\times[c,d]$ definită de diviziunile d'_r şi d''_r. Se vede că

$$\|d'_r\|\to 0,\ \|d''_r\|\to 0 \implies \|\Delta_r\|\to 0 \ \text{ şi } \ \|\Delta'_r\|\to 0.$$

Pentru fiecare r avem inegalităţile

$$s_{\Delta_r}(f) \leq \sigma_{\Delta'_r}(F,(\xi_i,\eta_j)) \leq S_{\Delta_r}(f). \tag{6.14}$$

Funcţia f fiind integrabilă pe I_3, aplicând criteriul de integrabilitate a lui Darboux, avem

$$\lim_{r\to\infty} S_{\Delta_r}(f) \; = \; \lim_{r\to\infty} s_{\Delta_r}(f) = \iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.15}$$

Trecând la limită în (6.14) şi ţinând cont de (6.15), obţinem

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{\Delta'_r}(F,(\xi_i,\eta_j)) = \iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.16}$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei duble a unei funcţii reale de două variabile reale se vede imediat că

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{\Delta'_r}(F,(\xi_i,\eta_j)) = \iint\limits_{I_2} F(x,y)\,dxdy. \tag{6.17}$$

Din egalităţile (6.16) şi (6.17) obţinem (6.8) şi teorema este demonstrată. ■

De obicei se foloseşte notaţia

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \; = \iint\limits_{I_2} dxdy \int_u^v f(x,y,z)dz. \tag{6.18}$$

În cazul integralelor duble am utilizat notaţia

$$\iint\limits_{I_2} F(x,y)\,dxdy \; = \; \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy. \tag{6.19}$$

Ţinând cont de faptul că avem egalitatea

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_c^d dy \int_u^v f(x,y,z)\,dz, \tag{6.20}$$

folosind (6.19) şi (6.20) constatăm că (6.8) se scrie în forma

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \; = \; \int_a^b dx \int_c^d dy \int_u^v f(x,y,z)\,dz. \tag{6.21}$$

Putem spune că (6.8), (6.18) şi (6.21) reprezintă *formule de calcul a integralei triple pe un interval tridimensional închis.*

Observaţia 6.5.1 *Integrala triplă pe un interval tridimensional închis este o iteraţie de integrale simple, deci un calcul succesiv a trei integrale Riemann ale unor funcţii reale. Prima integrală din membrul doi a relaţiei* (6.21), *efectuată în raport cu variabila z pe intervalul $[u,v]$, este o integrală depinzând de doi parametri, a doua integrală simplă, calculată în raport cu y pe compactul $[c,d]$, este o integrală depinzând de parametrul x. Ultima integrală, efectuată între limitele a şi b, este tocmai integrala triplă a funcţiei f pe intervalul tridimensional I_3.*

Observaţia 6.5.2 *Dacă presupunem că funcţia $f : I_3 \to I\!R$ este integrabilă şi integralele:*

$$G(y,z) \;=\; \int_a^b f(x,y,z)\,dx; \qquad H(z,x) \;=\; \int_c^d f(x,y,z)\,dy$$

există pentru orice $(y,z) \in [c,d]\times[u,v]$ şi respectiv pentru orice $(z,x) \in [u,v]\times[a,b]$, atunci procedând ca în teorema de mai sus putem deduce următoarele două formule de calcul ale integralei triple pe intervalul tridimensional închis $I_3 = [a,b]\times[c,d]\times[u,v]$:

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \int_c^d dy \int_u^v dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx;$$

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \int_u^v dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\,dy.$$

Observaţia 6.5.3 *Dacă $f(x,y,z) = g(x)\cdot h(y)\cdot k(z)$ şi funcţiile reale de o variabilă reală $g : [a,\,b] \to I\!R$, $h : [c,\,d] \to I\!R$, $k : [u,\,v] \to I\!R$ sunt integrabile Riemann, atunci f este integrabilă pe intervalul tridimensional închis $I_3 = [a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ şi are loc egalitatea*

$$\iiint\limits_{I_3} f(x,y,z)\,dxdy \;=\; \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy \cdot \int_u^v k(z)dz,$$

relaţie care arată că în acest caz particular integrala triplă este un produs de trei integrale simple.

6.5.2 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz

Pentru a da regula de calcul a unei integrale triple în cazul în care domeniul de integrare V nu mai este un interval tridimensional închis este necesară noţiunea de domeniu simplu în raport cu una din axele reperului cartezian rectangular $Oxyz$.

Definiţia 6.5.1 *Se numeşte* **domeniu simplu în raport cu axa** Oz *submulţimea* V_z *a lui* $I\!\!R^3$

$$V_z = \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 :\ (x,y) \in D_{xy} \subset Oxy,\, \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\},$$

unde φ_1, φ_2 *sunt funcţii reale continue pe submulţimea* D_{xy} *a lui* $I\!\!R^2$.

Analizând definiţia domeniului simplu în raport cu axa Oz, constatăm că frontiera acestuia este alcătuită din suprafeţele:

$$(S_1) :\ z = \varphi_1(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy};\ (S_2) :\ z = \varphi_2(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy},$$

pe care le putem numi *baza inferioară* şi respectiv *baza superioară* a domeniului de integrare V_z, şi din porţiunea de *suprafaţă cilindrică*

$$(S_\ell) \;\; = \;\; \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 :\ (x,y) \in \partial D_{xy},\ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\},$$

unde ∂D_{xy} este frontiera mulţimi D_{xy}, curbă închisă netedă pe porţiuni.

Mulţimea plană D_{xy} din definiţia domeniului simplu în raport cu axa Oz este proiecţia ortogonală a mulţimii V_z pe planul Oxy. Suprafaţa cilindrică S_ℓ are generatoarele paralele cu Oz şi curba directoare frontiera domeniului D_{xy}.

Un domeniu simplu în raport cu axa Oz are proprietatea că orice paralelă la axa Oz printr–un punct (x,y) din interiorul domeniului D_{xy}, orientată la fel cu axa Oz, *pătrunde* în domeniul V_z prin punctul $P(x,y,\varphi_1(x,y))$ pe care putem să–l numim *punct de intrare în domeniu* şi *iese* din V_z prin punctul $Q(x,y,\varphi_2(x,y))$ care poate fi denumit *punct de ieşire din domeniul* V_z.

Procedând exact ca în cazul teoremei de la integrala dublă avem:

Teorema 6.5.2 *Fie* V_z *un domeniu simplu în raport cu axa* Oz *şi* f *o funcţie reală mărginită definită şi integrabilă pe mulţimea* V_z. *Dacă pentru orice* $(x,y) \in D_{xy}$, *fixat, există integrala depinzând de parametrii* x *şi* y

$$J(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

atunci funcţia $J : D_{xy} \to I\!R$ *este integrabilă şi*

$$\iint\limits_{D_{xy}} J(x,y)\,dxdy = \iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Demonstraţie. Înainte de a începe demonstraţia, să observăm că având în vedere expresia valorii în $(x,y) \in D_{xy}$ a funcţiei J, integrala dublă pe D_{xy} a acesteia se poate scrie în una din următoarele forme

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xy}} J(x,y)\,dxdy &= \iint\limits_{D_{xy}} \Big(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big)dxdy = \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,y)dz.\end{aligned}$$

Atunci, concluzia teoremei devine

$$\iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{6.22}$$

şi reprezintă *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz.

Să procedăm acum la demonstraţia teoremei.

Fie $u = \min\{\varphi_1(x,y);\ (x,y) \in D_{xy}\}$ şi $v = \max\{\varphi_2(x,y);\ (x,y) \in D_{xy}\}$ care sunt numere reale în baza faptului că funcţiile φ_1 şi φ_2 sunt continue pe mulţimea compactă D_{xy} şi, după teorema lui Weierstrass, sunt funcţii mărginite şi îşi ating efectiv marginile. Atunci, cilindrul $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 :\ (x,y) \in D_{xy},\ u \le z \le v\}$ include domeniul simplu în raport cu axa Oz la care se referă enunţul teoremei.

Considerăm funcţia reală auxiliară f^*, definită pe cilindrul $\mathcal{C}$,

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in V_z \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in \mathcal{C} \setminus V_z. \end{cases} \tag{6.23}$$

Această funcţie satisface ipotezele Teoremei 6.3.3. Într-adevăr, deoarece valorile sale coincid cu cele ale funcţiei f pe mulţimea V_z putem afirma că f^* este integrabilă pe V_z. Restricţia lui f^* la mulţimea $\mathcal{C} \setminus V_z$ fiind funcţia identic nulă rezultă că este integrabilă. Dacă la aceste două rezultate adăugăm şi proprietatea de aditivitate a integralei triple deducem că funcţia f^* din (6.23) este integrabilă. Mai mult, avem evident:

$$\iiint\limits_{V_z} f^*(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz; \tag{6.24}$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}\setminus V_z} f^*(x,y,z)\,dxdydz \;=\; 0, \tag{6.25}$$

deci

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f^*(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_z} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

În afară de aceasta, pentru fiecare pereche (x,y) situată în D_{xy} are loc egalitatea

$$\begin{gathered}\int_u^v f^*(x,y,z)dz = \\ \int_u^{\varphi_1(x,y)} f^*(x,y,z)dz + \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f^*(x,y,z)dz + \int_{\varphi_2(x,y)}^{v} f^*(x,y,z)\,dz\end{gathered} \tag{6.26}$$

din motiv că fiecare din integralele din membrul doi există. Apoi, dat fiind faptul că pe segmentele de dreaptă incluse în $\mathcal{C}$ care unesc respectiv perechile de puncte

$$(x,y,u), \quad (x,y,\varphi_1(x,y)) \quad \text{şi} \quad (x,y,\varphi_2(x,y)), \quad (x,y,v),$$

valorile funcţiei f^* sunt egale cu zero, deducem că prima şi a treia integrală din membrul doi al relaţiei (6.26) sunt nule, fapt care conduce la egaliatatea

$$\int_u^v f^*(x,y,z)\,dz \;=\; \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Integrala triplă din funcţia f^* pe mulţimea $\mathcal{C}$ poate fi redusă la iteraţia de integrale

$$\iiint\limits_{\mathcal{C}} f^*(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_u^v f^*(x,y,z)\,dz. \tag{6.27}$$

Relaţiile stabilite mai sus conduc la concluzia teoremei. ∎

Exerciţiul 6.5.1 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

unde Ω *este tetraedrul delimitat de planele de coordonate* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *şi de planul* $x + y + z - 1 = 0$.

Soluţie. Proiecţia domeniului de integrare pe planul Oxy este triunghiul dreptunghic isoscel cu unghiul drept în origine şi unghiurile de 45^0 în punctele $A(1, 0, 0)$ şi $B(0, 1, 0)$.

Domeniul Ω este simplu în raport cu axa Oz deoarece orice paralelă la axa Oz dusă printr–un punct din interiorul triunghiului mai sus menţionat *pătrunde* în domeniul Ω în punctul $P(x, y, 0)$ şi *iese* din domeniu în punctul $Q(x, y, 1 - x - y)$. Prin urmare avem că $\varphi_1(x, y) = 0$ şi $\varphi_2(x, y) = 1 - x - y$.

Proiecţia domeniului Ω pe planul Oxy este

$$D_{xy} = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x\}. \tag{6.28}$$

Dacă aplicăm formula (6.22), avem

$$I = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_{xy}} \Big[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\Big] dxdy. \tag{6.29}$$

Analizând (6.28) constatăm că domeniul D_{xy} este simplu în raport cu axa Oy. Prin urmare, pentru calculul integralei duble (6.29) se poate aplica formula (4.37). Avem

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \Big[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\Big] dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x+y} + \frac{y}{4}\Big)\Big|_0^{1-x} dx.$$

După efectuarea diferenţei valorilor primitivei în cele două limite de integrare, găsim

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x} + \frac{x-3}{4}\Big) dx.$$

Integralele definite la care s–a ajuns sunt imediate şi prin urmare

$$I = \Big(\ln\sqrt{1+x} + \frac{(x-3)^2}{16}\Big)\Big|_0^1 = \ln\sqrt{2} - \frac{5}{16}.$$

■

6.5.3 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox

Definiţia 6.5.2 *Se numeşte* **domeniu simplu în raport cu axa** Ox *submulţimea* V_x *a lui* $I\!R^3$

$$V_x = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \ (y,z) \in D_{yz} \subset Oyz, \ \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\},$$

unde funcţiile reale ψ_1 *şi* ψ_2 *sunt definite şi continue pe submulţimea* D_{yz} *a lui* $I\!R^2$, *situată în planul* Oyz, *valorile acestora fiind astfel încât* $\psi_1(y,z) \le \psi_2(y,z)$ *oricare ar fi* $(y,z) \in D_{yz}$.

Frontiera unui domeniu simplu în raport cu axa Ox este alcătuită din suprafeţele:

$$(\Sigma_1): \ x = \psi_1(y,z), \ (y,z) \in D_{yz}; \quad (\Sigma_2): \ x = \psi_2(y,z), \ (y,z) \in D_{yz},$$

numite *baze* şi *suprafaţă cilindrică*

$$(\Sigma_\ell) = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \ (y,z) \in \partial D_{yz}, \ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\},$$

unde ∂D_{yz} este frontiera mulţimi D_{yz}, curbă închisă netedă pe porţiuni.

Mulţimea plană D_{yz} este proiecţia ortogonală a mulţimii V_x pe planul Oyz. Suprafaţa cilindrică Σ_ℓ are generatoarele paralele cu Ox şi curba directoare frontiera domeniului D_{yz}.

Un domeniu simplu în raport cu axa Ox are proprietatea că orice paralelă la axa Ox printr–un punct (y,z) din interiorul domeniului D_{yz}, având orientarea axei Ox, *pătrunde* în domeniul V_x prin punctul $P(\psi_1(y,z), y, z)$ şi *iese* din V_x prin punctul $Q(\psi_2(y,z), y, z)$.

Teorema 6.5.3 *Dacă funcţia reală* f *este integrabilă pe domeniul* V_x, *simplu în raport cu axa absciselor şi pentru orice* $(y,z) \in D_{yz}$, *fixat, există integrala depinzând de parametrii* y *şi* z

$$U(y,z) = \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx,$$

atunci funcţia

$$U : D_{yz} \to I\!R, \quad U(y,z) = \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

este integrabilă şi

$$\iint\limits_{D_{yz}} U(y,z)\,dydz = \iiint\limits_{V_x} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.30}$$

Integrala dublă pe domeniul D_{yz} din funcţia U se mai poate scrie ca

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{yz}} U(y,z)\,dydz &= \iint\limits_{D_{yz}} \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx\Big)dydz = \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,y)dx.\end{aligned}$$

Ţinând cont de ultimele egalităţi deducem că (6.30) poate fi scrisă în forma

$$\iiint\limits_{V_x} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \tag{6.31}$$

care reprezintă *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox.

6.5.4 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy

Definiţia 6.5.3 *Submulţimea V_y a lui $I\!R^3$*

$$V_y = \{(x,x,z) \in I\!R^3 : \ (x,z) \in D_{xz} \subset Oxz, \chi_1(x,z) \le y \le \chi_2(x,z)\},$$

unde funcţiile reale χ_1 şi χ_2 sunt definite şi continue pe submulţimea D_{xz} a lui $I\!R^2$, situată în planul Oxz, valorile acestora fiind astfel încât $\chi_1(x,z) \le \chi_2(x,z)$ oricare ar fi $(x,z) \in D_{xz}$, se numeşte **domeniu simplu în raport cu axa** Oy.

Suprafeţele care mărginesc un domeniu simplu în raport cu axa Oy sunt:

$$(\mathcal{S}_1): \ y = \chi_1(x,z), \quad (x,z) \in D_{xz}; \ (\mathcal{S}_2): \ y = \chi_2(x,z), \quad (x,z) \in D_{xz},$$

numite *baze* şi *suprafaţă cilindrică* $\mathcal{S}_\ell$

$$(\mathcal{S}_\ell) \ = \ \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \ (x,z) \in \partial D_{xz}, \ \chi_1(x,y) \le z \le \chi_2(x,y)\},$$

unde ∂D_{xz} este frontiera mulţimi D_{xz}, curbă închisă netedă pe porţiuni.

Mulţimea plană D_{xz} este proiecţia ortogonală a mulţimii V_y pe planul Oxz. Suprafaţa cilindrică $(\mathcal{S}_\ell)$ are generatoarele paralele cu Oy şi curba directoare frontiera domeniului D_{xz}.

Un domeniu simplu în raport cu axa Oy are proprietatea că orice paralelă la axa Oy printr–un punct (x,z) din interiorul domeniului D_{xz}, având orientarea axei Oy, *pătrunde* în domeniul V_y prin punctul $P(x,\chi_1(x,z),z)$ şi *iese* din V_y prin punctul $Q(x,\chi_2(x,z),z)$.

Teorema 6.5.4 *Dacă funcţia reală mărginită f este integrabilă pe domeniul V_y, simplu în raport cu axa Oy, şi pentru orice $(x,z)\in D_{xz}$, fixat, există integrala depinzând de parametrii x şi z*

$$W(x,z)=\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy,$$

atunci funcţia

$$W: D_{xz}\to I\!R,\quad W(x,z)=\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

este integrabilă şi

$$\iint\limits_{D_{xz}} W(x,z)\,dxdz = \iiint\limits_{V_y} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.32}$$

Integrala dublă pe domeniul D_{xz} din funcţia W se poate scrie în una din următoarele forme:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xz}} W(x,z)\,dxdz &= \iint\limits_{D_{xz}} \Big(\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy\Big)dxdz;\\ \iint\limits_{D_{xz}} W(x,z)\,dxdz &= \iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,y)dy.\end{aligned}$$

Ţinând cont de aceste egalităţi deducem că *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy este

$$\iiint\limits_{V_y} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int_{\chi_1(x,z)}^{\chi_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \tag{6.33}$$

6.5.5 Integrala triplă pe un domeniu oarecare

Dacă domeniul de integrare V nu este simplu în raport cu nici una din axe, prin plane paralele la unul din planele de coordonate poate fi descompus întrun număr finit de subdomenii,

$$V_1,\quad V_2,\quad \cdots, V_p \qquad \text{cu} \qquad V \;=\; V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_p$$

şi fiecare din domeniile V_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$ să fie simplu în raport cu una din axe.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu, avem

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{i=1}^{p} \iiint\limits_{V_i} f(x,y,z)\,dxdydz,$$

unde pentru calculul integralelor din membrul drept se aplică una din formulele de calcul stabilite mai sus.

Exerciţiul 6.5.2 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{I_3} \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2},$$

unde I_3 *este intervalul tridimensional închis* $I_3 = [1,3] \times [0,1] \times [0,2]$.

Soluţie. Avem

$$I = \int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 \frac{dy}{(x+y+z)^2} = \int_1^3 dx \int_0^1 \Big(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y+2}\Big)dy.$$

Calculând cele două integrale depinzând de parametrul x, obţinem

$$I = \int_1^3 (\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln x - \ln(x+3))\,dx.$$

Integralele definite la care s–a ajuns sunt de forma integralei

$$J(a) = \int_1^3 \ln(x+a)\,dx$$

căreia i se poate afla valoarea dacă se integrează prin părţi. Avem:

$$J(a) = x\,\ln(x+a)\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x}{x+a}\,dx;$$

$J(a) = (x+a)\,\ln(x+a)\Big|_1^3 - x\Big|_1^3 = (3+a)\,\ln(3+a) - (1+a)\,\ln(1+a) - 2.$

Atunci, valoarea integralei triple este

$$I = J(1) + J(2) - J(0) - J(3) = 5\,\ln 5 + 8\,\ln 2 - 12\,\ln 3.$$

Funcţia de integrat fiind pozitivă, valoarea lui I este un număr pozitiv căruia i se poate da o interpretare mecanică. ■

Exerciţiul 6.5.3 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_V y\,dxdydz,$$

unde V este tetraedrul din primul octant limitat de planele de coordonate şi de planul $x+y+z-2=0$.

Soluţie. Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz căci putem scrie

$$V = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \ (x,y) \in D_{xy},\ 0 \le z \le 2-x-y\},$$

unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy

$$D_{xy} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2-x\}.$$

Mulţimea D_{xy} este domeniu plan simplu în raport cu axa Oy. Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor şi apoi formula de calcul a unei integrale duble când domeniul este simplu în raport cu axa ordonatelor, obţinem

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} y\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} y(2-x-y)\,dy.$$

După calcularea integralei din interior, avem

$$I = \int_0^2 \Big(y^2 - x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^{2-x} dx.$$

Luând expresia de sub semnul integrală între limitele indicate, găsim

$$I = \frac{1}{6}\int_0^2 (2-x)^3 dx = -\frac{1}{24}(x-2)^4\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

De observat că domeniul de integrare este simplu şi în raport cu axa Ox sau axa Oy astfel că pentru calculul integralei triple s–ar fi putut utiliza fie formula (6.31) fie formula (6.33). ■

Exerciţiul 6.5.4 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)z\,dxdydz,$$

unde domeniul V este mărginit de paraboloidul $z = x^2+y^2$ şi de sfera $x^2+y^2+z^2 = 6$ şi conţine o parte din porţiunea nenegativă a axei Oz.

Soluţie. La fel ca în exemplul precedent şi aici domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz căci el se poate scrie în forma

$$V = \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 :\ (x,y) \in D_{xy},\ x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}\},$$

unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy

$$D_{xy} = \{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ x^2+y^2 \le 2\}.$$

Mulţimea D_{xy} este discul închis cu centrul în origine şi raza $\sqrt{2}$, această afirmaţie deducându–se din faptul că intersecţia sferei $x^2+y^2+z^2 = 6$ cu paraboloidul $z = x^2+y^2$ este cercul de rază $\sqrt{2}$ cu centrul în punctul $(0,0,2)$ aflat în planul paralel cu planul Oxy de ecuaţie $z = 2$.

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor, obţinem

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dxdy.$$

Luând expresia de integrat între limitele de integrare precizate, găsim

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\Big(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\Big)dxdy.$$

Dacă trecem la coordonate polare, avem

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\quad \theta \in [0,2\pi),\ \rho \in [0,\sqrt{2}]$$

şi deci

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3(6-\rho^2-\rho^4), d\rho = \frac{8\pi}{3}.$$

6.6 Formula integrală Gauss–Ostrogradski

Vom deduce o legătură între integrala de suprafaţă de tipul al doilea şi integrala triplă. În acest sens, fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu cubabil compact, având frontiera o suprafaţă $\mathcal{S}$ simplă, închisă, bilateră, netedă sau netedă pe porţiuni, cu $\mathcal{S}_e$ faţa sa exterioară. Versorul $\mathbf{n}$ al normalei exterioare întrun punct al suprafeţei $\mathcal{S}_e$ are expresia

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}, \tag{6.34}$$

unde α, β şi γ sunt unghiurile pe care acest versor îl face cu versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ai reperului $Oxyz$.

Considerăm că P, Q, R sunt funcţii reale de trei variabile reale definite şi continue pe domeniul V. Presupunem că aceste funcţii sunt astfel încât divergenţa câmpului vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k} \tag{6.35}$$

există şi este funcţie continuă pe interiorul mulţimi V.

Teorema 6.6.1 *În ipotezele de mai sus, are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{V} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dxdydz, \tag{6.36}$$

numită formula integrală Gauss–Ostrogradski.

Demonstraţie. Presupunem că domeniul V este descompus întrun număr finit de subdomenii simple în raport cu axa Oz. Dacă aplicăm proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul de integrare pentru integrala de suprafaţă şi pentru integrala triplă putem presupune că V este simplu în raport cu axa Oz şi că proiecţia sa pe planul Oxy este domeniul plan compact D_{xy} având frontiera ∂D_{xy} o curbă simplă închisă netedă sau netedă pe porţiuni. Atunci, frontiera $\mathcal{S}$ a domeniului V este o reuniune de trei suprafeţe netede sau netede pe porţiuni $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_\ell$, unde:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_1):\ & z = z_1(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy};\\ (\mathcal{S}_2):\ & z = z_2(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy}; \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in \partial D_{xy},\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}. \tag{6.38}$$

Suprafaţa $\mathcal{S}_1$, baza inferioară a domeniului V, are normala

$$\mathbf{n}_1 = \cos\alpha_1\,\mathbf{i} + \cos\beta_1\,\mathbf{j} + \cos\gamma_1\,\mathbf{k}. \tag{6.39}$$

Deoarece unghiul γ_1 dintre această normală şi versorul $\mathbf{k}$ este obtuz, urmează că

$$\cos\gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}},$$

unde $p_1(x,y) = \dfrac{\partial z_1}{\partial x}(x,y),\quad q_1(x,y)=\dfrac{\partial z_1}{\partial y}(x,y).$

Suprafaţa $\mathcal{S}_2$, baza superioară a domeniului V, are normala

$$\mathbf{n}_2 = \cos\alpha_2\,\mathbf{i} + \cos\beta_2\,\mathbf{j} + \cos\gamma_2\,\mathbf{k} \tag{6.40}$$

şi pentru că unghiul γ_2 dintre $\mathbf{n}_2$ şi $\mathbf{k}$ este ascuţit, avem

$$\cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}},$$

unde $p_2(x,y) = \dfrac{\partial z_2}{\partial x}(x,y)$, $q_2(x,y) = \dfrac{\partial z_2}{\partial y}(x,y)$.

În sfârşit, $\mathcal{S}_\ell$ este suprafaţa laterală a domeniului V care, fiind o porţiune dintr–o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curba directoare frontiera ∂D_{xy} a domeniului D_{xy}, are normala $\mathbf{n}_\ell$ de forma

$$\mathbf{n}_\ell = \cos\alpha_\ell\,\mathbf{i} + \cos\beta_\ell\,\mathbf{j} \tag{6.41}$$

întrucât unghiul γ_ℓ dintre $\mathbf{n}_\ell$ şi $\mathbf{k}$ este egal cu $\pi/2$.

După aceste precizări în privinţa domeniului V să procedăm la calculul integralei triple

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz. \tag{6.42}$$

Aplicând formula de calcul a integralei triple pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz, găsim

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dxdy. \tag{6.43}$$

Luând valoarea primitivei în limitele indicate, obţinem

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy. \tag{6.44}$$

Dar:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy &= \iint\limits_{\mathcal{S}_2} R(x,y,z)\,dxdy;\\ -\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy &= \iint\limits_{\mathcal{S}_1} R(x,y,z)\,dxdy, \end{aligned} \tag{6.45}$$

unde pentru prima integrală de suprafaţă am luat faţa superioară care coimcide cu faţa exterioară a lui $\mathcal{S}$, iar pentru cea de a doua integrală de suprafaţă am considerat faţa inferioară care de asemeni coincide cu faţa exterioară a lui $\mathcal{S}$, normalele la aceste feţe fiind precizate în relaţiile (6.39) şi (6.40). Pe suprafaţa laterală $\mathcal{S}_\ell$ avem

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_\ell} R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}_\ell} R(x,y,z)\,\cos\gamma_\ell\,d\sigma = 0 \tag{6.46}$$

în baza legăturii dintre integrala de suprafaţă de al doilea tip şi cea de primul tip şi a relaţiei (6.41).

Dacă ţinem seama de relaţiile (6.44) – (6.46), deducem

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}_e} R(x,y,z)\,dxdy, \tag{6.47}$$

unde integrala de suprafaţă de tipul al doilea din membrul doi este luată pe faţa exterioară a lui $\mathcal{S}$. În baza observaţiei făcută privitor la domeniu putem afirma că (6.47) este adevărată pentru orice domeniu cubabil compact V.

Pornind cu un domeniu simplu în raport cu axa Ox, apoi cu unul simplu în raport cu axa Oy, şi repetând raţionamentele care ne–au condus la (6.47) se demonstrează egalităţile:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}_e} P(x,y,z)\,dydz \tag{6.48}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}_e} Q(x,y,z)\,dzdx \tag{6.49}$$

care şi în aceste cazuri rămân adevărate oricare ar fi domeniul cubabil compact V.

Însumarea egalităţilor (6.47) – (6.49) conduce la (6.36) şi teorema este complet demonstrată. ■

Observaţia 6.6.1 *Având în vedere legătura între cele două tipuri de integrale de suprafaţă rezultă că formula integrală Gauss–Ostrogradski se poate scrie în forma echivalentă*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e} \Big(P\,\cos\alpha + Q\,\cos\beta + R\,\cos\gamma\Big)\,d\sigma = \iiint\limits_{V} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,dxdydz \quad (6.50)$$

Folosind expresia divergenţei $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$ a câmpului vectorial (6.35)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

şi expresia normalei exterioare (6.34), deducem că formula integrală Gauss–Ostrogradski se poate scrie în forma vectorială

$$\iiint\limits_{V} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \iint\limits_{\mathcal{S}_e} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \qquad (6.51)$$

Datorită scrierii vectoriale a formulei integrale Gauss–Ostrogradski, Teoremei 6.6.1 i se mai spune *Teorema divergenţei.*

Forma vectorială a formulei integrale Gauss–Ostrogradski sugerează şi interpretarea fizică a acesteia: ea afirmă că fluxul câmpului vectorial V prin suprafaţa închisă $\mathcal{S}$, după normala sa exterioară $\mathbf{n}$, este egal cu integrala triplă a divergenţei lui $\mathbf{F}$ pe domeniul V limitat de $\mathcal{S}$.

Observaţia 6.6.2 *Dacă în formula integrală Gauss–Ostrogradski se ia* $P = 0$, $Q = 0$, $R = z$, *se obţine o evaluare a volumului domeniului* V *cu ajutorul unei integrale de suprafaţă de tipul al doilea*

$$vol V \;=\; \iint\limits_{\mathcal{S}_e} z\,dxdy. \qquad (6.52)$$

Exemplul 6.6.1 *Fie* V *regiunea mărginită de emisfera*

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 9 = 0, \qquad 1 \le z \le 3$$

şi planul $z = 1$. *Să se verifice teorema divergenţei dacă*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z-1)\,\mathbf{k}.$$

Soluţie. Calculăm mai întâi integrala triplă din divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{F}$. Avem $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z)=3$ şi deci

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 54\pi.$$

În ultimul calcul am folosit faptul că integrala triplă din membrul secund este volumul emisferei de rază $R=3$ care este egal cu $2\pi R^3/3$.

Să calculăm acum direct integrala de suprafaţă care intră în formula integrală a lui Gauss-Ostrogradski. Să observăm mai întâi că

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{S}_1}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma + \iint\limits_{\mathcal{S}_2}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma,$$

unde $\mathcal{S}_1$ este faţa superioară a emisferei de rază 3 situată deasupra planului $z=1$, iar $\mathcal{S}_2$ este faţa inferioară a porţiunii din planul $z=1$ limitată de cercul de rază 3 cu centrul în punctul $(0,0,1)$ aflat în acest plan.

Normala unitară la faţa $\mathcal{S}_1$ este

$$\mathbf{n}_1=\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+(z-1)\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}=\frac{x}{3}\,\mathbf{i}+\frac{y}{3}\,\mathbf{j}+\frac{z-1}{3}\,\mathbf{k}.$$

Produsul scalar dintre câmpul vectorial $\mathbf{F}$ şi normala $\mathbf{n}_1$ este

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{(z-1)^2}{3}=3$$

şi, prin urmare, prima integrală de suprafaţă devine

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_1}=\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma=\iint\limits_{\mathcal{S}_1}3\,d\sigma=3\iint\limits_{\mathcal{S}_1}d\sigma=3\,\text{aria}\,\mathcal{S}_1=3\cdot 2\pi\,R^2=54\pi.$$

Pe suprafaţa $\mathcal{S}_2$, avem $\mathbf{n}_2=-\mathbf{k}$, iar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2=-z+1$ şi deci

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_2}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma=\iint\limits_{\mathcal{S}_2}(-z+1)\,d\sigma=0$$

deoarece pe suprafaţa pe care efectuăm integrarea z este egal cu 1 şi deci integrantul este nul şi ca atare şi rezultatul integrării este nul. Prin urmare,

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_e}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=54\,\pi,$$

ceea ce arată că formula integrală Gauss–Ostrogradski se verifică. ∎

Exercițiul 6.6.1 *Să se calculeze integrala de suprafață de tipul al doilea*

$$I = \iint_S x^3y^2\, dydz + x^2y^3\, dzdx + 3z\, dxdy,$$

unde S este fața exterioară a domeniului V mărginit de paraboloizii:

$$(\Sigma_1): \quad z = x^2 + y^2; \qquad (\Sigma_2): \quad z = 6 - x^2 - y^2.$$

Soluție. Aplicând formula integrală Gauss–Ostrogradski, obținem

$$I = \iiint_V (3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3)\, dxdydz = 3 \iiint_V (2x^2y^2 + 1)\, dxdydz.$$

Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz căci se poate scrie ca

$$V = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ (x, y) \in D_{xy}, \ x^2 + y^2 \le z \le 6 - x^2 - y^2\},$$

unde D_{xy} este proiecția lui V pe planul Oxy

$$D_{xy} = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \le 3\}.$$

Se vede că D_{xy} este discul închis de rază $\sqrt{3}$ cu centrul în origine situat în planul Oxy. Făcând uz de formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa Oz, găsim

$$I = 3 \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (2x^2y^2 + 1)\, dz = 3 \iint_{D_{xy}} (2x^2y^2 + 1)z\Big|_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} dxdy.$$

După ce se ia z între limitele de integrare, deducem

$$I = 6 \iint_{D_{xy}} (2x^2y^2 + 1)(3 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Această integrală dublă la care s–a ajuns o vom calcula folosind coordonatele polare

$$x = \rho\, \cos\theta, \quad y = \rho\, \sin\theta.$$

Pentru ca $(x, y) \in D_{xy}$ trebuia ca $\rho \in [0, \sqrt{3}]$ și $\theta \in [0, 2\pi)$. Aplicând formula schimbării de variabile în integrala dublă, obținem pe rând

$$I = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\rho^2\, \sin^2\theta\, \cos^2\theta + 1)(3 - \rho^2)\rho\, d\rho,$$

$$I = 12\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho^5 - \rho^7)d\rho + 12\pi\int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3)d\rho,$$

$$I = \frac{297\pi}{8}.$$

Rezultatul obţinut reprezintă fluxul câmpului vectorial

$$\mathbf{F} = x^3y^2\,\mathbf{i} + x^2y^3\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$$

prin suprafaţa care delimitează V după normala exterioară. ■

6.7 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Teorema de schimbare de variabile în integrala triplă se enunţă asemănător cu teorema de schimbare de variabile în integrala dublă, de aceea nu vom da detalii de calcul care pot fi refăcute de cititor.

Considerăm două specimene de spaţii tridimensionale. Introducem sistemul de coordonate carteziene x, y, z în unul din ele şi u, v, w în celălalt. Apoi, fie V şi Ω domenii aparţinând la câte un spaţiu, frontierele lor fiind respectiv suprafeţele închise netede pe porţiuni $\mathcal{S}$ şi Σ. Presupunem că există o corespondenţă biunivocă între punctele celor două domenii care să fie continuă în ambele sensuri. Corespondenţa poate fi exprimată prin intermediul funcţiilor

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w), \\ y = \psi(u,v,w), \\ z = \chi(u,v,w), \end{cases} \qquad (u,v,w)\in\Omega, \tag{6.53}$$

sau prin intermediul funcţiilor

$$\begin{cases} u = u(x,y,z), \\ v = v(x,y,z), \\ w = w(x,y,z), \end{cases} \qquad (x,y,z)\in V. \tag{6.54}$$

Vom considera că funcţiile din (6.53) şi (6.54) sunt mai mult decât continue şi anume vom presupune că ele posedă derivate parţiale de ordinul întâi continue pe interioarele mulţimilor de definiţie. Atunci, Jacobienii:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}; \qquad \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$$

există şi sunt funcţii continue pe interioarele celor două mulţimi de definiţie. Vom presupune mai mult că fiecare jacobian este diferit de zero. Aceste condiţii implică relaţia

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \cdot \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} \;=\; 1. \tag{6.55}$$

Dacă toate condiţiile de mai sus sunt îndeplinite, spunem că (6.53) este o *transformare punctuală regulată* între domeniile Ω şi V, iar (6.54) este *transformarea punctuală regulată inversă* a transformării punctuale regulate (6.54). Ca şi în cazul bidimensional, se poate arăta că dată fiind transformarea punctuală regulată (6.53) sau (6.54), punctele interioare domeniului de definiţie sunt duse în puncte interioare celuilalt domeniu, iar punctele frontierei unuia din domenii sunt corespunzătoare punctelor de pe frontiera celuilat domeniu.

Transformarea punctuală regulată (6.53) transformă domeniul Ω în domeniul V. În consecinţă, specificarea unui punct (u,v,w) aparţinând lui Ω determină în mod unic punctul corespunzător (x,y,z) a lui V. Cu alte cuvinte, cantităţile u, v şi w pot fi privite drept coordonate, diferite de cele carteziene, ale punctelor domeniului V. Ele sunt numite *coordonate curbilinii.*

Considerăm, în domeniul Ω, un plan determinat de relaţia $u = u_0$, adica un plan paralel cu planul de coordonate v, w. Prin transformarea punctuală regulată (6.53), planul considerat este dus întro suprafaţă inclusă în domeniul V. Coordonatele carteziene ale punctelor acestei suprafeţe sunt exprimate prin formulele

$$\begin{cases} x \;=\; x(u_0,v,w), \\ y \;=\; y(u_0,v,w), \\ z \;=\; z(u_0,v,w), \end{cases} \qquad (v,w)\in\Delta, \tag{6.56}$$

unde Δ este porţiunea din planul $u = u_0$ situată în domeniul Ω. Expresiile (6.56) sunt ecuaţiile parametrice ale suprafeţei. Presupunând că u_0 ia toate valorile posibile vom avea o familie uniparametrică de suprafeţe de forma (6.56), parametrul familiei fiind u. Aceste suprafeţe sunt corespondentele prin transformarea punctuală regulată (6.53) a tuturor porţiunilor de plane paralele cu planul v, w din domeniul Ω.

Similar, planele $v = \text{const}$ şi $w = \text{const}$ sunt transformate în două familii uniparametrice de suprafeţe situate în domeniul V. Aceste trei familii de suprafeţe formează aşa zisa mulţime a *suprafeţelor coordonate.*

Deoarece (6.53) este transformare punctuală regulată putem afirma că prin fiecare punct al domeniului V trece câte o singură suprafaţă de coordonate din respectiv fiecare familie. Cele trei suprafeţe coordonate care trec printr–un punct se intersectează două câte două după trei curbe care se numesc *curbe coordonate.*

Vom considera două sisteme de coordonate curbilinii în spaţiu care sunt utilizate cel mai frecvent, şi anume, *coordonatele cilindrice* şi *coordonatele sferice.*

6.7.1 Coordonatele cilindrice sau semi–polare în spaţiu

Să specificăm poziţia unui punct arbitrar M din spaţiu prin intermediul coordonatei carteziene z şi coordonatele polare r şi φ ale proiecţiei M_1 a punctului M pe planul Oxy. Cantităţile r, φ şi z se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului M. Legătura dintre coordonatele cilindrice şi cele carteziene este uşor de stabilit şi constatăm că este

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{6.57}$$

Avem următoarele trei familii de suprafeţe coordonate corespunzătoare coordonatelor cilindrice:

(α) cilindrii circulari coaxiali cu axa de rotaţie axa cotelor având ecuaţiile de forma $r = \text{const}$ $(0 \le r < +\infty)$,

(β) semiplane verticale limitate de axa Oz $\varphi = \text{const}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$,

(γ) plane orizontale $z = \text{const}$ $(-\infty < z < +\infty)$.

Analizând suprafeţele coordonate în acest caz constatăm că liniile coordonate în cazul coordonatelor cilindrice sunt: drepte paralele cu axa Oz; semidrepte perpendiculare pe Oz având una din extremităţi pe această axă; cercuri cu centrele pe Oz situate în plane paralele cu planul Oxy.

Jacobianul transformării de la coordonate cilindrice la cele cilindrice este egal cu

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\,\sin\varphi & r\,\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \qquad (6.58)$$

Formulele (6.57) care exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice determină o transformare a domeniului

$$0 \le r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty \qquad (6.59)$$

situat în spaţiul r, φ, z în întreg spaţiul $Oxyz$. Prin această transformare, fiecare punct de coordonate carteziene $(0,0,z_0)$ corespunde unui întreg segment semi–deschis de forma

$$r = 0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi, \;\; z = z_0$$

care aparţine domeniului (6.59). Prin urmare, transformarea (6.57) nu este biunivocă în punctele situate pe axa cotelor Oz. Exceptând punctele axei Oz, în toate celelalte puncte ale spaţiului $Oxyz$ corespondenţa (6.57) este biunivocă. În concluzie putem afirma că (6.57) stabileşte o transformare punctuală regulată între domeniul

$$0 < r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty \qquad (6.60)$$

situat în spaţiul r, φ, z, în mulţimea obţinută prin scoaterea din spaţiul $Oxyz$ a punctelor situate pe axa cotelor. ■

6.7.2 Coordonatele sferice sau polare în spaţiu

Să fixăm poziţia unui punct oarecare M din spaţiul raportat la reperul cartezian ortogonal $Oxyz$ prin următoarele trei cantităţi:

(α) distanţa ρ de la origine la punctul M,

(β) unghiul θ dintre raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ şi versorul $\mathbf{k}$ al axei Oz,

(γ) unghiul φ format de proiecţia $\overrightarrow{OM_1}$ a razei vectoare $\overrightarrow{OM}$ pe planul Oxy şi versorul $\mathbf{i}$ al axei Ox.

Cantităţile ρ, θ şi φ se numesc *coordonate sferice* ale punctului M. Încercând să determinăm legătura dintre coordonatele carteziene ale punctului M şi cele sferice al aceluiaşi punct, găsim

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\theta. \tag{6.61}$$

Cele trei familii de ale suprafeţelor coordonate corespunzătoare coordonatelor sferice sunt:

(α) sferele concentrice cu centrul în origine $\rho = \text{const}$ $(0 \le \rho < +\infty)$,

(β) semi–conuri circulare cu vârful în origine şi axa de simetrie Oz $\theta = \text{const}$ $(0 \le \theta \le \pi)$,

(γ) semiplane verticale $\varphi = \text{const}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

Analizând şi aici suprafeţele coordonate, se constată că liniile coordonate în cazul coordonatelor sferice sunt: cercuri cu centrele pe Oz situate în plane paralele cu planul Oxy, numite *cercuri paralele*; semidrepte cu una din extremităţi în originea O a reperului $Oxyz$, numite *raze vectoare*; semicercuri cu centrele în originea O având diametrele segmente situate pe Oz care se numesc *meridiane*.

Jacobianul transformării coordonatelor carteziene în coordonate sferice este determinantul

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}, \tag{6.62}$$

a cărui valoare este $\rho^2\sin\theta$.

Formulele (6.61) determină o transformare a domeniului

$$0 \le \rho < +\infty, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{6.63}$$

(o bandă paralelipipedică semi–infinită) din spaţiul ρ, θ, φ în întreg spaţiul $Oxyz$. Ca şi transformarea corespunzătoare coordonatelor cilindrice, relaţiile (6.61) determină o transformare punctuală biunivocă în toate punctele spaţiului cu excepţia punctelor de pe axa cotelor Oz. Fiecare punct $(0,0,z_0)$ situat pe axa Oz este imaginea prin transformarea (6.61) a segmentului semi–deschis

$$\rho = z_0, \quad \theta = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru} \quad z_0 > 0$$

şi a segmentului semi–deschis

$$\rho = z_0, \quad \theta = \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru} \quad z_0 < 0.$$

Originea $(0, 0, 0)$ a reperului $Oxyz$ este imaginea prin transformarea (6.61) a intervalului bidimensional

$$\rho = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru} \quad z_0 < 0.$$

Dacă exceptăm punctele axei Oz, relaţiile (6.61) constituie o transformare punctuală regulată care transformă semi–banda paralelipipedică infinită

$$0 < r < +\infty, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{6.64}$$

în domeniul obţinut prin scoaterea axei cotelor din spaţiul $Oxyz$. ■

6.7.3 Coordonate polare (sferice) generalizate

Există şi alte schimbări de variabile, expresiile acestora fiind dictate de contextul în care este formulată problema calculării unei integrale triple.

Alegerea schimbării de variabile întro integrală triplă urmăreşte atât simplificarea domeniului de integrare V (dacă este posibil, Ω să fie un interval tridimensional) cât şi simplificarea funcţiei de integrat sau măcar unul din aceste două obiective. De exemplu, dacă domeniul V este legat în vreun fel de interiorul elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

atunci se trece la *coordonate polare generalizate* numite şi *coordonate sferice generalizate*

$$\begin{cases} x &= a\,\rho\, \sin\theta\, \cos\varphi, \\ y &= b\,\rho\, \sin\theta\, \sin\varphi, \\ z &= c\,\rho\, \cos\theta. \end{cases} \tag{6.65}$$

Relaţiile (6.65) constituie o transformare punctuală regulată de la submulţimea Ω a intervalului tridimensional nemărginit (6.72) la o mulţime măsurabilă Jordan V din spaţiul $Oxyz$. Jacobianul transformării punctuale regulate (6.65) are valoarea

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\,\rho^2\, \sin\theta,$$

astfel că formula schimbării de variabile întro integrală triplă care foloseşte transformarea punctuală regulată (6.65) este

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= abc \iiint\limits_\Omega f(a\,\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi, b\,\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi, c\,\rho\,\cos\theta)\,\rho^2\,\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi. \tag{6.66}$$

6.7.4 Elementul de volum în coordonate curbilinii

Să găsim expresia elementului de volum în coordonate curbilinii. Considerăm iarăşi mulţimea măsurabilă Jordan V în care am introdus un sistem de coordonate curbilinii prin relaţiile (6.53). Fie $\mathcal{S}$ frontiera lui V, Σ frontiera domeniului Ω şi

$$\begin{cases} u &= u(s,t),\\ v &= v(s,t),\\ w &= w(s,t),\end{cases} \qquad (s,t)\in D, \tag{6.67}$$

o reprezentare parametrică a suprafeţei Σ, mulţimea de variaţie a parametrilor curbilinii s şi t fiind compactă în $\mathbb{R}^2$. Atunci, suprafaţa $\mathcal{S}$ va fi dată parametric prin

$$\begin{cases} x = x(s,t) = \varphi(u(s,t),v(s,t),w(s,t)),\\ y = y(s,t) = \psi(u(s,t),v(s,t),w(s,t)),\\ z = z(s,t) = \chi(u(s,t),v(s,t),w(s,t)),\end{cases} \qquad (s,t)\in D. \tag{6.68}$$

Dacă folosim expresia volumului mulţimii cubabile V cu ajutorul unei integrale de suprafaţă de al doilea tip şi ţinem cont de formula de calcul a acestei integrale de suprafaţă, avem

$$\mathrm{vol}\,V = \iint\limits_{\mathcal{S}} z\,dxdy = \pm\iint\limits_D z(s,t)\,\frac{D(x,y)}{D(s,t)}(s,t)\,dsdt. \tag{6.69}$$

Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse (6.68), se poate verifica prin calcul direct că

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(s,t)} + \frac{D(x,y)}{D(v,w)}\cdot\frac{D(v,w)}{D(s,t)} + \frac{D(x,y)}{D(w,u)}\cdot\frac{D(w,u)}{D(s,t)}$$

şi deci expresia volumului mulţimii V devine

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} V &= \pm \iint\limits_D z\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(s,t)}+\\ &+ \frac{D(x,y)}{D(v,w)}\cdot\frac{D(v,w)}{D(s,t)}+\frac{D(x,y)}{D(w,u)}\cdot\frac{D(w,u)}{D(s,t)}\Big)(s,t)\,dsdt.\end{aligned}$$

Dacă ţinem cont de regula de calcul a integralei de suprafaţă de al doilea tip obţinem că

$$\operatorname{vol} V = \pm \iint\limits_\Sigma z\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv + z\,\frac{D(x,y)}{D(v,w)}\,dvdw + z\,\frac{D(x,y)}{D(w,u)}\,dwdu.$$

Aplicând formula integrală a Gauss–Ostrogradski, se găseşte că expresia volumului mulţimii V este integrala triplă

$$\operatorname{vol} V = \pm \iiint\limits_\Omega \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w)\,dudvdw$$

sau, echivalent,

$$\operatorname{vol} V = \iiint\limits_\Omega \Big|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\Big|(u,v,w)\,dudvdw$$

Folosind formula de medie pentru integrala triplă, obţinem

$$\operatorname{vol} V = \Big|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\Big|(u_0,v_0,w_0)\operatorname{vol}\Omega$$

Acest rezultat împreună cu procedeul utilizat la demonstraţia formulei de schimbare de variabile în integrala dublă ne conduce la demonstraţia teoremei care dă formula schimbării de variabile în integrala triplă.

6.7.5 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Teorema 6.7.1 *Fie domeniul compact* Ω, *inclus în spaţiul* (u,v,w), *cu frontiera o suprafaţă închisă, netedă pe porţiuni şi*

$$T:\ \begin{cases} x &= \varphi(u,v,w),\\ y &= \psi(u,v,w),\\ z &= \chi(u,v,w),\end{cases}$$

o transformare punctuală regulată care transportă domeniul Ω *în domeniul* V*. Dacă* $f : V \to I\!R$ *este o funcţie continuă, are loc egalitatea*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$=\iiint\limits_\Omega f\Big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\Big)\,\Big|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\Big|(u,v,w)dudvdw$$

numită **formula schimbării de variabile în integrala triplă** *sau* **formula de transport**.

Dacă se folosesc coordonatele cilindrice, formula schimbării de variabile devine

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz, \tag{6.70}$$

unde Ω este o submulţime a intervalului tridimensional nemărginit

$$[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(-\infty,+\infty).$$

Dacă întro integrală triplă implicăm schimbarea de variabile care utilizează coordonatele sferice, formula schimbării de variabile devine

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =\\ =&\iiint\limits_\Omega f(\rho\sin\theta\,\cos\varphi,\rho\sin\theta\,\sin\varphi,\rho\,\cos\theta)\,\rho^2\,\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi,\end{aligned} \tag{6.71}$$

unde Ω este o submulţime a intervalului tridimensional nemărginit

$$[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi]. \tag{6.72}$$

Exerciţiul 6.7.1 *Folosind metoda schimbării de variabile în integrala triplă să se calculeze*

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$$

unde V *este bila închisă de rază* R *cu centrul în origine.*

Soluţie. Mulţimea punctelor aparţinând domeniului de integrare au coordonatele carteziene x, y, z astfel încât

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0.$$

Forma domeniului cât şi expresia integrantului sugerează folosirea coordonatelor sferice (6.61). Transformarea punctuală definită cu ajutorul coordonatelor sferice are jacobianul (6.62) astfel că , utilizând formula (6.71), integrala I devine

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \rho^4 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi,$$

unde noul domeniu de integrare se vede simplu că este intervalul tridimensional

$$\Omega = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un interval tridimensional, obţinem

$$I = \int_0^R \rho^4 \, d\rho \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

De remarcat că, folosind schimbarea de variabile în integrala triplă, valoarea integralei I s–a determinat foarte uşor. ■

Exerciţiul 6.7.2 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

unde V *este mulţimea situată în semispaţiul superior* $z \geq 0$, *conţine o porţiune din semiaxa pozitivă* Oz *şi este delimitată de sferele* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *şi de conul* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluţie. Utilizăm din nou coordonatele sferice. De data aceasta mulţimea V este intervalul tridimensional

$$\Omega = [1, 3] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi).$$

Aplicând formula schimbării de variabile în integrala triplă în cazul când se utilizează coordonatele sferice, găsim

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, \sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi = \int_1^3 \rho\, d\rho\, \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta\, \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^3 \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi}.$$

Efectuând calculele finale, constatăm că $I = 4\pi(2-\sqrt{2})$. ∎

Exerciţiul 6.7.3 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{V} (x^2+y^2)\, dxdydz,$$

unde V *este porţiunea din coroana cilindrică mărginită de cilindrii circulari coaxiali* $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9$ *şi de planele* $z=0$ *şi* $z=1$.

Soluţie. Atât expresia integrantului cât şi forma domeniului V sugerează utilizarea coordonatelor cilindrice (6.57). Noul domeniu de integrare va fi

$$\Omega = [2,3]\times[0,2\pi)\times[0,1].$$

Aplicând formula (6.70), obţinem

$$I = \iiint\limits_{\Omega} r^3\, drd\varphi dz = \int_2^3 r^3 dr\, \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi\, \cdot \int_0^1 dz = 40\pi.$$

Şi în acest exemplu valoarea integralei s–a determinat foarte uşor. ∎

Exerciţiul 6.7.4 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{V} \Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\Big)\, dxdydz,$$

unde mulţimea de integrare V *este*

$$V = \{(x,y,z)\in I\!\!R^3:\ 1 \le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 4\}.$$

Soluţie. În acest caz se folosesc coordonatele polare generalizate definite de (6.65). Mulţimea Ω care, prin transformarea punctuală regulată (6.65), este dusă în mulţimea V din enunţul exemplului este intervalul tridimensional

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \varphi) \in I\!\!R^3 : \ 1 \leq \rho \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

din spaţiul (ρ, θ, φ). Folosind formula (6.66) deducem că I se calculează cu ajutorul integralei triple

$$I = abc \iiint\limits_{\Omega} \rho^4 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi$$

a cărei valoare se constată simplu că este $I = 4\pi abc/5$. ∎

Exerciţiul 6.7.5 *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_{V} x^2 \, dxdydz,$$

unde V *este domeniul mărginit de suprafeţele:*

$$\begin{aligned} &z = ay^2, \quad z = by^2, \quad (0 < a < b); \\ &z = \alpha x, \quad z = \beta x, \quad (0 < \alpha < \beta); \\ &z = 0, \qquad z = h, \end{aligned}$$

situat în semispaţiul $y > 0$.

Soluţie. Analiza enunţului sugerează schimbarea de variabile

$$u = \frac{z}{y^2}, \quad v = \frac{z}{x}, \quad w = z,$$

domeniile de variaţie ale noilor coordonate fiind

$$u \in [a, b], \quad v \in [\alpha, \beta], \quad z \in [0, h].$$

Rezolvând pe x, y şi z în funcţie de u, v şi w, găsim

$$x = \frac{w}{v}, \quad y = \sqrt{\frac{w}{u}}, \quad z = w.$$

Avem două posibilităţi de a calcula jacobianul care intră în formula schimbării de variabile în integrala triplă. Pe oricare cale se găseşte

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w) = -\frac{1}{2}\frac{w\sqrt{w}}{v^2u\sqrt{u}}.$$

Teorema schimbării de variabile în integrala triplă şi formula de evaluare a integralei triple pe un interval tridimensional închis conduc la concluzia că valoarea integralei I este egală cu produsul integralelor simple de mai jos

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{du}{u\sqrt{u}} \cdot \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v^4} \cdot \int_0^h w^3\sqrt{w}\,dw.$$

Calculând integralele definite obţinem în final că valoarea integralei triple I este

$$I = \frac{2}{27}\Big(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\Big)\,h^4\sqrt{h}.$$

Din nou se remarcă simplificarea evidentă a calculelor când se alege o schimbare de variabile adecvată. ■

6.8 Aplicaţii ale integralei triple

Considerăm acum unele probleme tipice care implică calculul unor integrale triple.

6.8.1 Calculul volumelor

Dacă o figură spaţială V are volum, valoarea integralei triple

$$\iiint\limits_V dxdydz \tag{6.73}$$

se constată că este volumul lui V. Întradevăr, această afirmaţie rezultă fie din proprietăţile integralei triple fie analizând sumele integrale corespunzătoare unei diviziuni oarecare ocazie cu care se constată că oricare din aceste sume este egală cu volumul lui V şi ca atare limita pentru norma diviziunii tinzând la zero a unui şir de sume integrale corespunzătoare este volumul lui V. Integrala triplă este mai convenabil de folosit decât integrala dublă, când se pune problema calculării volumului unei figuri spaţiale cubabile căci, după cum se vede din (6.73), cu ajutorul ei se poate determina volumul oricărei mulţimi cubabile, pe când, cu integrala dublă se poate determina doar volumul unui cilindroid.

6.8.2 Masa şi centrul de greutate ale unui solid

În acelaşi mod cum am introdus unele corpuri materiale putem introduce şi aici noţiunea de *solid*. Prin solid se înţelege ansamblul dintre o mulţime măsurabilă Jordan V numită *configuraţia solidului* şi o funcţie ρ reală, cu valori pozitive, continuă pe V, care se numeşte *densitatea de volum* a solidului.

Dacă funcţia ρ este constantă, solidul se numeşte *omogen*. În cazul solidului omogen masa sa este dată de produsul dintre valoarea constantă ρ_0 a densităţii şi volumul lui V.

Produsul dintre valoarea densităţii întrun punct $M(x, y, z) \in V$ şi elementul de volum al lui V se numeşte *element de masă* şi se notează cu dm. Deci

$$dm = \rho(x, y, z)\, dxdydz. \tag{6.74}$$

Procedând asemănător ca la firul material, placa materială sau pânza materială constatăm că masa solidului definit mai sus este dată de egalitatea

$$\operatorname{masa} V = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dxdydz \tag{6.75}$$

sau de egalitatea

$$\operatorname{masa} V = \iiint\limits_V dm. \tag{6.76}$$

Coordonatele x_G, y_G şi z_G ale centrului de greutate G al unui solid de configuraţie V şi densitatea de volum ρ sunt date de egalităţile

$$\begin{gathered} x_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint\limits_V x\, dm, \quad y_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint\limits_V y\, dm, \\ z_G = \frac{1}{\operatorname{masa} V} \iiint\limits_V z\, dm. \end{gathered} \tag{6.77}$$

Dacă notăm cu $\mathbf{r}_G$ vectorul de poziţie a centrului de greutate şi cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct curent $M(x, y, z) \in V$, constatăm că relaţiile (6.77) se pot scrie în forma vectorială

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\text{masa}\, V} \iiint\limits_V \mathbf{r}\, dm. \tag{6.78}$$

În cazul solidului omogen expresiile coordonatelor centrului de greutate sunt mai simple căci fracţiile de mai sus se pot simplifica prin valoarea constantă ρ_0 a densităţii. Avem

$$\begin{gathered} x_G = \frac{1}{\text{vol}\, V} \iiint\limits_V x dv, \quad y_G = \frac{1}{\text{vol}\, V} \iiint\limits_V y dv, \\ z_G = \frac{1}{\text{vol}\, V} \iiint\limits_V z dv, \end{gathered} \tag{6.79}$$

unde $dv = dxdydz$ este elementul de volum al lui V. Forma vectorială a acestor egalităţilor (6.79) este

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\text{vol}\, V} \iiint\limits_V \mathbf{r}\, dv. \tag{6.80}$$

6.8.3 Momente de inerţie ale unui solid

Momentele de inerţie faţă de axele Ox, Oy, Oz ale solidului de configuraţie V şi densitate de volum ρ, se vor nota cu aceleaşi simboluri ca la pânze materiale şi sunt date de egalităţile:

$$\begin{cases} I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dv = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dm; \\ I_y = \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)\, dv = \iiint\limits_V (z^2 + x^2) dm; \\ I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dv = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dm. \end{cases} \tag{6.81}$$

Când densitatea de volum este constantă şi egală cu $\rho_0 > 0$, formulele de mai sus devin

$$I_x = \rho_0 \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, dv; \quad I_y = \rho_0 \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\, dv;$$
$$I_z = \rho_0 \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dv.$$

Momentele de inerţie ale solidului neomogen de configuraţie V şi densitate de volum în raport cu planele de coordonate Oxy, Oyz, Ozx, notate corespunzător cu I_{xy}, I_{yz} şi I_{zx}, au expresiile date de integralele triple:

$$\begin{cases} I_{xy} & = & \iiint\limits_V \rho\, z^2\, dv & = & \iiint\limits_V z^2\, dm; \\ I_{yz} & = & \iiint\limits_V \rho\, x^2\, dv & = & \iiint\limits_V x^2\, dm; \\ I_{xz} & = & \iiint\limits_V \rho\, y^2\, dv & = & \iiint\limits_V y^2\, dm. \end{cases} \tag{6.82}$$

Dacă solidul este omogen cu densitatea constantă ρ_0, în locul formulelor (6.82) avem

$$I_{xy} = \rho_0 \iiint\limits_V z^2\, dv; \quad I_{yz} = \rho_0 \iiint\limits_V x^2\, dv; \quad I_{xz} = \rho_0 \iiint\limits_V y^2\, dv.$$

În fine, momentul de inerţie în raport cu originea reperului este

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dm, \tag{6.83}$$

când solidul este neomogen, iar în cazul că ar fi omogen acelaşi moment de inerţie al solidului va fi dat de expresia

$$I_O = \rho_0 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dv.$$

6.8.4 Potenţialul newtonian al unui solid

Potenţialul newtonian sau gravitaţional al unui punct material de masă m se defineşte prin formula

$$U = \frac{m}{r},$$

unde r este distanţa de la punctul material până la punctul din spaţiu în care se consideră potenţialul. În cazul unui solid de configuraţie V şi densitate de volum ρ, *potenţialul newtonian în punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ va fi dat de formula:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_V \frac{\rho(x, y, z)\, dxdydz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

6.8.5 Atracţia exercitată de către un solid

Se ştie din fizică că fiind date două puncte materiale M_1 şi M_2 de ponderi m_1 şi m_2 şi vectori de poziţie $\mathbf{r}_1$ şi respectiv $\mathbf{r}_2$, mărimea forţei de atracţie dintre cele două puncte materiale este dată de formula

$$F = \lambda \frac{m_1\, m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2},$$

unde λ este o constantă, iar

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

este distanţa euclidiană dintre punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Forţa $\mathbf{F}_{12}$ cu care punctul material M_1 este atras de către punctul material M_2 este dată de formula

$$\mathbf{F}_{12} = \lambda \frac{m_1\, m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}\, (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Dacă X_{12}, Y_{12}, Z_{12} sunt coordonatele forţei de atracţie, expresiile acestora sunt date de

$$X_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(x_2 - x_1),\ Y_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(y_2 - y_1),$$

$$Z_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(z_2 - z_1).$$

Să considerăm acum un punct material $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de masă m şi un solid de configuraţie V şi densitate de volum ρ. Având la dispoziţie cazul particular prezentat mai sus şi cunoscând mecanismul introducerii noţiunii de integrală triplă ajungem la concluzia că forţa $\mathbf{F}$ cu care M_0 este atras de către solid este dată de integrala triplă

$$\mathbf{F} = \lambda\, m \iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\, dxdydz,$$

unde

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},$$

iar $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|$ este norma euclidiană a vectorului $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Coordonatele F_x, F_y şi F_z ale vectorului $\mathbf{F}$ sunt

$$\begin{cases} F_x = \lambda\, m \displaystyle\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(x-x_0)\, dxdydz, \\ F_y = \lambda\, m \displaystyle\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(y-y_0)\, dxdydz, \\ F_z = \lambda\, m \displaystyle\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}(z-z_0)\, dxdydz. \end{cases}$$

Exerciţiul 6.8.1 *Să se calculeze cu ajutorul integralei triple, volumul figurii spaţiale V situată în semispaţiul superior $z \geq 0$ şi mărginită de suprafeţele:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

unde $0 < a < b$.

Soluţie. Cele trei suprafeţe care mărginesc figura spaţială V sunt: primele două, sfere concentrice cu centrul în origine, de raze a şi b; iar a treia, con circular cu vârful în origine şi axa de rotaţie axa Oz, având generatoarele înclinate cu 45 de grade faţă de axa Oz. Corpul este porţiunea din coroana sferică limitată de cele două sfere conţinută în pânza superioară a conului. Volumul acestei figuri este $\mathrm{Vol}\, V = \iiint\limits_V dxdydz$, iar pentru calculul integralei triple folosim coordonatele sferice. Terna ordonată (ρ, θ, φ) ia valori în intervalul tridimensional închis $\Omega = [a, b] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$, iar jacobianul transformării este $J = \rho^2 \sin\theta$. Prin urmare, avem

$$\mathrm{Vol}\, V = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_a^b \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}.$$

■

Exerciţiul 6.8.2 *Să se afle coordonatele centrului de greutate al unui solid omogen mărginit de pânza unui con circular drept, având unghiul de la vârf egal cu* 2α *şi de o sferă de rază* R *cu centrul în vârful conului.*

Soluţie. Alegem originea sistemului de axe în vârful conului şi axa Oz după axa de simetrie a conului.

Trebuie determinată mai întâi masa solidului V. Fiind omogen şi considerând că densitatea este egală cu unitatea, masa solidului va fi egală cu volumul său. Pentru calculul volumului folosim coordonatele sferice în care terna (ρ, θ, φ) ia valori în intervalul tridimensional închis $\Omega = [0, R] \times [0, \alpha] \times [0, 2\pi]$. Avem

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\, V &= \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Coordonatele x_G, y_G şi z_G ale centrului de greutate G al solidului sunt date de integralele triple:

$$x_G = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint\limits_{V} x dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint\limits_{V} y dx dy dz,$$

$$z_G = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, V} \iiint\limits_{V} z dx dy dz.$$

Solidul fiind omogen şi având planele de coordonate Oxz şi Oyz ca plane de simetrie, rezultă că $x_G = y_G = 0$. Pentru calculul integralei triple de la numărătorul cotei centrului de greutate trecem la coordonate sferice. Avem

$$\iiint\limits_V z dxdydz = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\alpha \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Prin urmare, $z_G = \dfrac{3R}{4}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. ■

Exercițiul 6.8.3 *Să se găsească momentul de inerție în raport cu axa Oz a solidului de configurație bila de rază a cu centrul în origine V și densitatea de volum*

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Soluție. Momentul de inerție de determinat este în acest caz

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$

Pentru calculul integralei triple trecem la coordonate sferice și găsim

$$I_z = \iiint\limits_\Omega \rho^6 \sin^3\theta\, d\rho d\theta d\varphi,$$

unde Ω este intervalul tridimensional $[0, a] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Scriind ultima integrală triplă ca o iterație de integrale simple, obținem

$$I_z = \int_0^a \rho^6\, d\rho \cdot \int_0^\pi \sin^3\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Efectuând integralele simple de mai sus găsim $I_z = 8\pi\, a^7/21$. ■

Exercițiul 6.8.4 *Să se determine momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale solidului omogen având configurația domeniului V mărginit de suprafețele de ecuații $z = c > 0$ și $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, situat în semispațiul $z \geq 0$.*

Soluție. Considerând că $\rho_0 = 1$, cele trei momente de inerție cerute sunt:

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 dxdydz; \quad I_{zx} = \iiint\limits_V y^2 dxdydz; \quad I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 dxdydz,$$

unde domeniul de integrare este porţiunea din interiorul pânzei superioare a conului de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, situat sub planul $z=c$.

Pentru calculul fiecărei din cele trei integrale vom folosi faptul că domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz, deoarece el se poate scrie ca

$$V=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;:\;c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\le z\le c,\;(x,y)\in D_{xy}\Big\},$$

unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy, care se poate reprezenta ca

$$D_{xy}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\Big\}.$$

Cu alte cuvinte, D_{xy} este domeniul plan mărginit de elipsa din planul Oxy, cu centrul de simetrie în originea reperului $Oxyz$ şi semiaxele egale cu a şi b. Vom scrie integralele triple care dau momentele de inerţie faţă de planele de coordonate ca iteraţii de integrale, prima simplă, în raport cu z, între limitele $c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$ şi c, iar a doua, dublă, pe domeniul D_{xy}. Avem:

$$I_{yz}=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}dz=c\iint\limits_{D_{xy}}x^2\Big(1-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\Big)dxdy;$$

$$I_{zx}=\iint\limits_{D_{xy}}y^2dxdy\int_{c\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}dz=c\iint\limits_{D_{xy}}y^2\Big(1-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\Big)dxdy;$$

$$I_{xy}=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}z^2dz=\frac{c^3}{3}\iint\limits_{D_{xy}}\Big(1-\sqrt{\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)^3}\Big)dxdy.$$

Aceste integrale duble se calculează utilizând coordonatele polare generalizate în plan şi găsim:

$$I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20};\quad I_{zx}=\frac{\pi ab^3c}{20};\quad I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}.$$

■

Capitolul 7

Ecuaţii diferenţiale ordinare

7.1 Câteva generalităţi despre ecuaţii diferenţiale ordinare

În cele ce urmează I este un interval din mulţimea $I\!R$ a numerelor reale, Y este o mulţime oarecare a spaţiului $I\!R^{n+1}$, $n \in I\!N^*$, şi

$$F : I \times Y \to I\!R$$

este o funcţie reală continuă, de $n + 2$ variabile reale, având ca argumente variabila reală $x \in I$, funcţia reală $y : I \to I\!R$ şi derivatele sale până la ordinul n inclusiv $y', y'', \cdots, y^{(n)}$.

Definiţia 7.1.1 *Relaţia*

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială ordinară, de ordinul** n, *dacă se cere să se determine funcţiile*

$$\varphi : I \to I\!R, \tag{7.2}$$

derivabile până la ordinul n inclusiv, astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad (\forall)\, x \in I. \tag{7.3}$$

Definiţia 7.1.2 *Funcţia reală de variabila reală* (7.2), *de n ori derivabilă, care satisface identitatea* (7.3) *se numeşte* **soluţie** *a ecuaţii diferenţiale* (7.1).

Presupunând că este posibilă rezolvarea în raport cu derivata de ordinul n, ecuaţia (7.1) se poate reduce la *forma explicită* sau *forma normală*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{7.4}$$

Definiţia 7.1.3 *Ecuaţia diferenţială corespunzătoare cazului $n = 1$ se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul întâi**.

Observaţia 7.1.1 *Forma implicită a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi este*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{7.5}$$

iar forma normală sau forma explicită a sa este

$$y' = f(x, y). \tag{7.6}$$

Deoarece ecuaţiile diferenţiale reprezintă în multe situaţii modelarea matematică a unor fenomene evolutive şi că aceste fenomene sunt în general continue, vom presupune că funcţia F din ecuaţiile (7.1) şi (7.5) precum şi funcţia f din (7.4) şi (7.6) sunt continue pe domeniile lor de definiţie.

Exemplul 7.1.1 *Ecuaţia*

$$y' = \sin x$$

are familia de soluţii

$$y = \varphi(x,\, C) = -\, \cos x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

unde C este o constantă arbitrară. ∎

Exemplul 7.1.2 *Fie f o funcţie reală de variabilă reală, definită şi continuă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$. Toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul întâi*

$$y' = f(x) \tag{7.7}$$

sunt de forma

$$\varphi(\cdot, C) : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x, C) = C + \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{7.8}$$

Într-adevăr, f fiind funcţie continuă pe I, este integrabilă şi admite primitive pe I. A determina primitivele funcţiei f înseamnă a găsi toate funcţiile y, definite şi derivabile pe I, care satisfac egalitatea (7.7). Cu alte cuvinte, primitivele funcţiei f sunt soluţiile ecuaţiei diferenţiale (7.7).

Se ştie că funcţia

$$F : I \to I\!R, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad (\forall)\, x \in I, \quad x_0 \in I, \text{ fixat}, \tag{7.9}$$

este o primitivă pe I a funcţiei f şi că orice două primitive ale lui f diferă printr–o constantă arbitrară C. De aici deducem că toate primitivele funcţiei f se pot scrie în forma

$$y = C + \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{7.10}$$

În acest caz, funcţiile (7.8), deduse din (7.10) pentru fiecare valoare a constantei arbitrare C, reprezintă toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale (7.7). ■

Exemplul 7.1.3 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$y = xy' + y'^{\,2} \tag{7.11}$$

are ca soluţii funcţiile

$$y = Cx + C^2, \quad x \in I\!R, \tag{7.12}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Într-adevăr, prin verificare directă se constată că, oricare ar fi valoaraea constantei C, funcţia din membrul al doilea al relaţiei (7.12) verifică identic ecuaţia diferenţială (7.11).

Din punct de vedere geometric, relaţia (7.12) reprezintă o familie de drepte cu panta variabilă C şi ordonata la origine egală cu C^2. Pentru $C = 1$, din (7.12) obţinem soluţia

$$y = x + 1 \tag{7.13}$$

care în reperul Oxy este o dreaptă paralelă cu prima bisectoare. ■

Exemplele de mai sus conduc la introducerea unei alte noţiuni.

Definiţia 7.1.4 *Dacă soluţiile ecuaţiei* (7.5) *sau* (7.6) *se pot pune sub forma*

$$y = \varphi(x, C), \quad x \in I, \tag{7.14}$$

unde C este o constantă arbitrară, atunci (7.14) *se numeşte* **soluţia generală** *a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare.*

Definiţia 7.1.5 *Se numeşte* **soluţie particulară** *a ecuaţiei diferenţiale ordinare* (7.5) *sau* (7.6) *funcţia*

$$y = \varphi(x, C_0), \quad x \in I, \tag{7.15}$$

obţinută din soluţia generală (7.14) *prin atribuirea valorii concrete* C_0 *constantei arbitrare* C.

Observaţia 7.1.2 *Ecuaţia* (7.7) *are soluţia generală* (7.10). *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale* (7.11) *este* (7.12), *iar* (7.13) *reprezintă o soluţie particulară a acesteia. Funcţia*

$$y = -\frac{1}{4}x^2, \quad x \in I\!R,$$

este , de asemenea, soluţie a ecuaţiei diferenţiale (7.11) *care nu se poate obţine din soluţia generală.*

Definiţia 7.1.6 *O soluţie a ecuaţiei diferenţiale* (7.5) *sau* (7.6) *care nu se poate obţine din soluţia generală a acesteia prin particularizarea constantei arbitrare se numeşte* **soluţie singulară**.

O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi are drept grafic o curbă plană numită *curbă integrală*. Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale este o familie uniparametrică de curbe integrale.

Este posibil ca soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (7.5) să se scrie în forma

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{7.16}$$

Relaţia (7.16) se numeşte *integrala generală* a ecuaţiei diferenţiale (7.5) sau (7.6).

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale poate fi dată şi *parametric*, printr–un sistem de forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C)\,, \\ y = \psi(t, C)\,. \end{cases} \tag{7.17}$$

Observaţia 7.1.3 *Ecuaţia diferenţială* (7.5) *poate avea mai multe soluţii generale. De exemplu, ecuaţia diferenţială*

$$y'^2 = f(x),$$

unde f este continuă şi nenegativă pe un interval real I, are două soluţii generale

$$y = C_1 + \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(t)}\,dt \quad \text{şi} \quad y = C_2 - \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(t)}\,dt.$$

Presupunem că $Q : D \subset I\!R^2 \to I\!R \setminus \{0\}$ este o funcţie continuă. Dacă înmulţim ambii membri ai ecuaţiei diferenţiale (7.6) cu factorul nenul $Q(x, y)$ găsim ecuaţia diferenţială echivalentă

$$Q(x, y)y' - Q(x, y)\,f(x, y) = 0. \tag{7.18}$$

Notând

$$P(x, y) = -\,Q(x, y)\,f(x, y) \tag{7.19}$$

şi utilizând pentru derivata unei funcţii notaţia lui Leibniz

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{7.20}$$

ecuaţia diferenţială se transcrie în forma

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \quad P, Q \in C^0(D). \tag{7.21}$$

Când expresia din membrul întâi a ecuaţiei (7.21) este diferenţiala unei funcţii reale de două variabile, pe mulţimea deschisă $D \subset I\!R^2$, acesteia i se spune *expresie diferenţială exactă*. Se poate afirma că (7.21) este o alternativă de prezentare a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală (7.6) care, cu notaţia (7.20), se poate prezenta sub forma echivalentă

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{7.22}$$

Alternativa mai sus prezentată are avantajul că, la nevoie, putem considera y ca variabila independentă, caz în care ecuaţia diferenţială corespunzătoare se scrie

$$\frac{dx}{dy} = g(y, x), \quad \text{unde} \quad g(y, x) = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{7.23}$$

funcţia necunoscută fiind x.

Fiecărui punct $(x_0, y_0) \in D$ îi corespunde o direcţie de coeficient unghiular

$$y_0' = f(x_0, y_0);$$

fiecărei direcţii îi corespunde o dreaptă

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

care trece prin punctul (x_0, y_0) şi are panta $m = y_0'$; prin urmare, ecuaţia (7.22) asociază fiecărui punct din D o direcţie (dreaptă); avem astfel în D definit un câmp f de direcţii.

Să presupunem că $y = \varphi(x),\ (x, y) \in D$ este o soluţie a ecuaţiei (7.6). Graficul funcţiei φ este o curbă integrală în D care are proprietatea că, în fiecare punct al ei, tangenta are ca direcţie valoarea câmpului f în punctul considerat.

Definiţia 7.1.7 *Problema determinării soluţiei* (7.2) *a ecuaţiei diferenţiale* (7.6) *care pentru* $x = x_0$ *ia valoarea dată* y_0*, se numeşte* **problema Cauchy***, iar condiţia*

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{7.24}$$

se numeşte **condiţie iniţială** *sau* **dată iniţială***.*

Observaţia 7.1.4 *Din punct de vedere geometric, problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială* (7.6)*, cu condiţia iniţială* (7.24)*, înseamnă determinarea acelei curbe integrale a ecuaţiei diferenţiale* (7.6) *care trece prin punctul de coordonate* (x_0, y_0)*.*

Exemplul 7.1.4 *Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială* (7.7) *cu condiţia iniţială* (7.24)*, este*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{7.25}$$

Într-adevăr, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (7.7) am văzut că este (7.10). Dacă vom căuta soluţia care pentru $x = x_0$ ia valoarea y_0, vom obţine

$$y_0 = C + \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = C, \tag{7.26}$$

deci $C = y_0$. ■

Observaţia 7.1.5 *Formula* (7.25) *arată că* $(\forall)\ (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ *există o soluţie unică a ecuaţiei* (7.7) *care satisface condiţia iniţială* $y(x_0) = y_0$*. Cu alte cuvinte, prin orice punct din intervalul nemărginit bidimensional* $I \times \mathbb{R}$ *trece o curbă integrală şi numai una.*

Teorema de mai jos arată în ce condiţii soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (7.6) cu condiţia iniţială (7.24) există şi este unică.

Teorema 7.1.1 *Presupunem verificate următoarele condiţii:*

- *funcţia reală f este definită şi continuă pe intervalul închis bidimensional*
$$I_2 = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\};$$
- *funcţia f este lipschitziană ca funcţie de y pe mulţimea I_2, adică există o constantă pozitivă L astfel încât*
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \ (\forall) \ (x, y_1), (x, y_2) \in I_2. \qquad (7.27)$$

În aceste condiţii, există o soluţie unică $y = y(x)$ a problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (7.6) *cu condiţia iniţială* (7.24)*, definită pe intervalul $|x - x_0| \leq \delta$, unde*

$$\delta = \inf\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}; \ \ M = \sup\{|f(x, y)| : \ (x, y) \in I_2\}.$$

Desigur, soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia (7.6), cu condiţia iniţială (7.24), este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală (7.6).

Aşadar, mulţimea soluţiilor tuturor problemelor Cauchy ale ecuaţiei diferenţiale (7.6) constituie soluţia generală a ecuaţiei (7.6) în domeniul D.

Totalitatea soluţiilor particulare ale unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub forma normală depinde de o constantă arbitrară. Putem arăta că, invers, orice familie de curbe plane

$$g(x, y, C) = 0, \quad (x, y) \in D, \qquad (7.28)$$

cu g continuă şi derivabilă parţial în D, verifică în D o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul întâi. Într-adevăr, considerând că în (7.28) y este funcţie car e depinde de x şi derivând în raport cu variabila x, avem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, C) + y' \, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, C) = 0. \qquad (7.29)$$

Eliminarea constantei C din relaţiile (7.28) şi (7.29) conduce la o ecuaţie diferenţială de forma (7.5).

Exerciţiul 7.1.1 *Să se determine ecuaţia diferenţială a familiei de curbe*

$$y = Cx + f(C). \tag{7.30}$$

Soluţie. Derivând în raport cu x în (7.30), găsim $y' = C$. Eliminând constanta C între acest rezultat şi (7.30) obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$y = xy' + f(y'), \tag{7.31}$$

care se numeşte *ecuaţie diferenţială de tip Clairaut.* ■

Definiţia 7.1.8 *Prin* **problemă Cauchy asociată ecuaţiei diferenţiale de ordinul** n (7.4) *se înţelege determinarea unei funcţii* $y = \varphi(x)$ *care satisface ecuaţia*

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x)), \;\; (\forall)\; x \in I \subset I\!R \tag{7.32}$$

şi verifică condiţiile iniţiale

$$\varphi(x_0) = y_1^0,\;\; \varphi'(x_0) = y_2^0,\;\; \cdots,\;\; \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \tag{7.33}$$

unde $x_0 \in I$ *şi* $y_1^0,\, y_2^0, \cdots, y_n^0$ *sunt fixate.*

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n sub formă normală (7.4) şi să presupunem că s–a obţinut o soluţie

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{7.34}$$

care depinde de n constante $C_1,\, C_2,\, \cdots,\, C_n$.

Definiţia 7.1.9 *Dacă funcţia* (7.34) *are următoarele proprietăţi:*

1. *este soluţie a ecuaţiei diferenţiale* (7.4) *oricare ar fi punctul de coordonate* $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ *luat dintr–un anumit domeniu* $\Delta \subset I\!R^n$*;*

2. *există şi este unică* $n-$*upla* $(C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0) \in \Delta$ *astfel încât*

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0)$$

să fie soluţia problemei Cauchy a ecuaţiei diferenţiale (7.4), *cu condiţiile iniţiale* (7.33), *unde*

$$(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$$

este un punct oarecare din mulţimea $D \subset I\!R^{n+1}$, *domeniul de definiţie al funcţiei* f *din membrul doi a ecuaţiei diferenţiale* (7.4), *atunci* (7.34) *se numeşte* **soluţia generală** *a ecuaţiei diferenţiale* (7.4) *în domeniul* D.

Definiţia 7.1.10 *A* **integra** *o ecuaţie diferenţială înseamnă a determina toate soluţiile sale.*

7.2 Ecuaţii diferenţiale ordinare, de ordinul întâi, integrabile prin cuadraturi

În cele ce urmează vom prezenta câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi ale căror soluţii generale se pot determina prin operaţii de integrare sau cuadrare.

7.2.1 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separate

Definiţia 7.2.1 *O ecuaţie diferenţială de tipul*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \tag{7.35}$$

unde $P : I_1 \to I\!R$ *şi* $Q : I_2 \to I\!R$ *sunt funcţii reale continue date pe intervalele reale* I_1 *şi* I_2, *se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară, de ordinul întâi, cu variabile separate**.

Teorema 7.2.1 *Funcţia* $F : I_1 \times I_2 \to I\!R$, *cu valorile date de*

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt, \quad (x_0, y_0) \in I_1 \times I_2, \tag{7.36}$$

este diferenţiabilă pe interiorul mulţimii $I_1 \times I_2$ *şi are proprietatea*

$$dF(x,y) = P(x)dx + Q(y)dy. \tag{7.37}$$

Demonstraţie. Existenţa lui F este asigurată de continuitatea funcţiilor P şi Q. În plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} P(t)dt = P(x), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{d}{dy}\int_{y_0}^{y} Q(t)dt = Q(y). \end{aligned} \tag{7.38}$$

Având în vedere că

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy, \tag{7.39}$$

din (7.38) şi (7.39) rezultă (7.37). ■

Teorema 7.2.2 *Fiecare soluţie*

$$y = \varphi(x), \tag{7.40}$$

a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35), *cu graficul cuprins în* $I_1 \times I_2$, *satisface relaţia*

$$F(x, \varphi(x)) = C \tag{7.41}$$

pentru o anumită constantă C. *Reciproc, dacă ecuaţia* $F(x,y) = C$ *defineşte pe* y *ca funcţie implicită diferenţiabilă de variabila* x, *atunci această funcţie este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate* (7.35).

Demonstraţie. Presupunem că

$$y = \varphi(x), \quad x \in (a,b) \subset I_1 \tag{7.42}$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35) astfel încât să avem

$$(x, \varphi(x)) \in I_1 \times I_2, \quad (\forall)\, x \in (a,b). \tag{7.43}$$

Să arătăm că

$$F(x, \varphi(x)) = C, \quad (\forall)\, x \in (a,b). \tag{7.44}$$

Pentru aceasta considerăm funcţia compusă

$$g : (a,b) \to I\!R, \quad g(x) = F(x, \varphi(x)) \tag{7.45}$$

şi derivata ei

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x). \tag{7.46}$$

Folosind acum în (7.46) rezultatul (7.38) precum şi varianta

$$P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad (\forall)\, x \in (a,b) \tag{7.47}$$

a faptului că (7.42) este o soluţie a ecuaţiei (7.35), deducem

$$g'(x) = P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad (\forall)\, x \in (a, b). \tag{7.48}$$

Relaţia (2.13) arată că funcţia g este o constantă pe intervalul (a, b). Astfel, orice soluţie y a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35) satisface ecuaţia carteziană implicită (7.44).

Să presupunem acum că ecuaţia $F(x, y) = C$ defineşte pe y ca funcţie implicită diferenţiabilă de x pe $(a, b) \in I_1$. Ecuaţia (7.44) implică faptul că funcţia g din (7.45) este constantă pe (a, b). Rezultă

$$0 = g'(x) = P(x) + Q(y)y'. \tag{7.49}$$

Dând deoparte pe $g'(x)$ din (7.49) deducem că y este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35). ∎

Teoremele precedente sugerează un procedeu practic de găsire a soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35).

Familia de ecuaţii carteziene implicite

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = C, \ (\forall)\ (x, y) \in I_1 \times I_2, \tag{7.50}$$

unde (x_0, y_0) este un punct fixat din intervalul bidimensional $I_1 \times I_2$, descrie curbele integrale ale ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.35). Dacă impunem ca valorii $x = x_0$ să –i corespundă $y = y_0$, din (7.50) rezultă $C = 0$ şi deci soluţia problemei Cauchy a ecuaţiei diferenţiale (7.35), cu condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, există şi este unică. Această soluţie este funcţia definită implicit de ecuaţia

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = 0. \tag{7.51}$$

Exerciţiul 7.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{y + 1} = 0, \quad (x, y) \in (-1, 1) \times (-1, +\infty). \tag{7.52}$$

Soluţie. Aplicând rezultatele de mai sus avem că soluţia generală a ecuaţiei (7.52) este

$$\arcsin x + \ln{(y + 1)} = C. \tag{7.53}$$

Să observăm că ecuaţia are şi soluţia $y = -1$; ea se obţine din integrala generală (7.53) pentru $C \to -\infty$. ∎

7.2.2 Ecuaţia diferenţială exactă

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan simplu conex, şi $P : D \to \mathbb{R}$, $Q : D \to \mathbb{R}$ două funcţii continue derivabile parţial, prima în raport cu y, iar a doua în raport cu variabila x.

Definiţia 7.2.2 *O ecuaţie diferenţială de tipul*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{7.54}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială exactă** *dacă funcţiile P şi Q satisfac în D condiţia*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad (\forall)\ (x,y) \in D. \tag{7.55}$$

Teorema 7.2.3 *Ecuaţia diferenţială exactă* (7.54) *are soluţia generală*

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C. \tag{7.56}$$

Demonstraţie. Fie $A(x_0,y_0) \in D$, fixat astfel încât luând un punct oarecare $M(x,y)$ al domeniului şi notând cu B punctul de coordonate (x,y_0), segmentele de dreaptă AB şi BM să fie incluse în D. Să considerăm funcţia $F : D \to \mathbb{R}$ ale cărei valori se calculează după regula

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt. \tag{7.57}$$

Folosind regula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru constatăm

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \quad (\forall)\ (x,y) \in D. \tag{7.58}$$

Deoarece funcţiile P şi Q sunt continue, deducem că F are derivate parţiale continue şi deci este funcţie diferenţială pe D. Ţinând cont de expresia diferenţialei de ordinul întâi şi de (7.58), deducem

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad (\forall)\ (x,y) \in D. \tag{7.59}$$

Aşadar, membrul întâi al ecuaţiei (7.55) este diferenţiala funcţiei F din (7.57). Din acest motiv denumirea ecuaţiei diferenţiale (7.54) este acea de ecuaţie diferenţială exactă.

Folosind acum (7.54) şi (7.59), avem

$$dF(x,y) = 0, \quad (\forall)\,(x,y) \in D,$$

de unde

$$F(x,y) = C, \quad (\forall)\,(x,y) \in D. \tag{7.60}$$

Ţinând seama de (7.57) şi (7.60) deducem că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale exacte (7.54) este (7.56). ■

Corolarul 7.2.1 *Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială exactă* (7.54), *cu condiţia iniţială* $y(x_0) = y_0$, *unde* $(x_0, y_0) \in D$, *este*

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = 0. \tag{7.61}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, alegând ca datele iniţiale x_0 şi y_0 să fie coordonatele punctului A, şi impunând condiţia ca pentru $x = x_0$ să avem $y = y_0$, din (7.56) deducem $C = 0$. Ca urmare, soluţia căutată este funcţia $y = \varphi(x)$ definită implicit de ecuaţia (7.61). ■

Exerciţiul 7.2.2 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$$

Soluţie. Aici $P(x,y) = 3x^2 y + \sin x$, $\;Q(x,y) = x^3 - \cos y$, $\;(x,y) \in I\!\!R^2$. Aceste funcţii sunt derivabile şi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3x^2.$$

Derivatele parţiale de mai sus fiind egale, ecuaţia dată este ecuaţie diferenţială exactă. Luând drept punct $A(x_0, y_0)$ originea reperului cartezian Oxy, deci $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, şi aplicând (7.56), deducem că soluţia generală a ecuaţiei date este

$$\int_0^x \sin t\, dt + \int_0^y (x^3 - \cos t)\, dt = C.$$

Efectuând integrările care se impun mai sus, găsim că soluţia generală a ecuaţiei date este

$$\cos x + \sin y - x^3 y + C - 1 = 0, \quad (\forall)\; (x,y) \in I\!\!R^2.$$

Din punct de vedere geometric, soluţia generală este o familie de curbe plane care umple tot planul. Prin fiecare punct al planului trece o curbă integrală şi numai una. De exemplu, dacă dorim să rezolvăm problema Cauchy a e-cuaţiei date cu condiţiiniţială $y(0) = 0$, adică să determinăm curba integrală care trece prin origine, găsim $C = 0$ şi deci soluţia căutată este

$$\cos x + \sin y - x^3 y - 1 = 0.$$

Funcţia reală definită implicit, în vecinătatea originii, de această ecuaţie este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale căci a fost obţinută din cea generală luând pentru constanta C valoarea $C = 0$. ■

7.2.3 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi care admit factor integrant

Fie ecuaţia diferenţială

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{7.62}$$

unde $P : D \to I\!R$, $Q : D \to I\!R$ sunt două funcţii reale diferenţiabile pe un domeniu plan $D \subset I\!R^2$. Dacă expresia diferenţială $Pdx + Qdy$ nu este o diferenţială exactă, adică nu este îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad (\forall)\ (x,y) \in D, \tag{7.63}$$

atunci ne propunem să căutăm o funcţie $\mu : D \to I\!R^2$ astfel încât expresia diferenţială

$$\omega = \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy$$

să fie o diferenţială totală exactă a unei funcţii reale de două variabile reale. Pentru aceasta, conform lui (7.63), ar trebui să fie îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)Q(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)P(x,y)\Big), \quad (\forall)\ (x,y) \in D. \tag{7.64}$$

Definiţia 7.2.3 *Funcţia $\mu : D \to I\!R^2$, diferenţiabilă pe $D \subset I\!R^2$, care verifică ecuaţia* (7.64), *se numeşte* **factor integrant** *al ecuaţiei* (7.62).

Prin înmulţirea ecuaţiei (7.62) cu factorul integrant μ care satisface (7.64), ecuaţia (7.62) devine

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0. \tag{7.65}$$

Pentru ca (7.65) să fie o ecuaţie diferenţială cu diferenţială totală exactă trebuie să fie îndeplinită relaţia (7.64), care, după efectuarea derivatelor parţiale, devine

$$Q(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mu(x,y) = 0. \tag{7.66}$$

Relaţia (7.66) este o *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi, liniară şi neomogenă*, căreia, în anumite cazuri, i se poate determina o soluţie particulară.

De exemplu, dacă o să căutăm un factor integrant care să fie funcţie numai de x, adică $\mu = \mu(x)$, deoarece $\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, ecuaţia (7.65) se reduce la

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) \tag{7.67}$$

şi determinarea lui μ este posibilă dacă $\dfrac{1}{Q}\Big(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\Big)$ este funcţie numai de x. Într-adevăr, în (7.67) variabilele se separă şi obţinem pe μ printr–o operaţie de integrare

$$\ln\mu(x) = \int \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)dx. \tag{7.68}$$

După determinarea factorului integrant $\mu = \mu(x)$ (numai dacă acest lucru este posibil) se înmulţesc ambii membri ai ecuaţiei (7.62) cu factorul integrant (7.68) şi ecuaţia devine una cu diferenţială exactă a cărei soluţie generală ştim că este

$$\int_{x_0}^{x}\mu(t)P(t,y_0)dt + \mu(x)\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt = C.$$

În mod asemănător, dacă se caută un factor integrant $\mu = \mu(y)$ funcţie numai de y, din (7.65) avem

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

şi determinarea lui $\mu = \mu(y)$ este posibilă dacă

$$\frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

este funcţie numai de y. Dacă această condiţie este îndeplinită obţinem pe $\mu = \mu(y)$ printr–o cuadratură

$$\ln \mu(y) = \int \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dy.$$

Este posibil să existe şi alte situaţii în care ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi (7.65), care determină factorul integrant, să se poată rezolva şi să se i se găsească o soluţie particulară.

Exerciţiul 7.2.3 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(x\,\sin y + y\,\cos y)dx + (x\,\cos y - y\,\sin y)dy = 0.$$

Soluţie. Avem:

$$P(x,y) = x\,\sin y + y\,\cos y,\quad Q(x,y) = x\,\cos y - y\,\sin y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\,\cos y + \cos y - y\,\sin y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) = 1.$$

Aşadar, ecuaţia dată nu este o ecuaţie cu diferenţială totală exactă dar admite factor integrant funcţie numai de x. Factorul integrant se găseşte rezolvând ecuaţia cu variabile separate

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)dx = dx \Longrightarrow \ln\mu = x \Longrightarrow \mu(x) = e^x.$$

Înmulţind ecuaţia dată cu factorul e^x, obţinem ecuaţia

$$e^x(x\,\sin y + y\,\cos y)dx + e^x(x\,\cos y - y\,\sin y)dy = 0.$$

Ecuaţia obţinută are forma $P_1(x,y)dx + Q_1(x,y) = 0$, unde

$$P_1(x,y) = e^x(x\,\sin y + y\,\cos y),\quad Q_1(x,y) = e^x(x\,\cos y - y\,\sin y).$$

Efectuând derivatele care se impun, avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial y} = e^x(x\ \cos y + \cos y - y\ \sin y), \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = e^x(x\ \cos y + \cos y - y\ \sin y). \end{cases}$$

Aceste derivate parţiale sunt egale şi, prin urmare, membrul stâng al ecuaţiei diferenţiale obţinută după înmulţirea cu factorul integrant este o diferenţială totală exactă.

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$e^x \int_0^y (x \cos t - t \sin t) dt = C \Longrightarrow e^x(x \sin y + y \cos y - \sin y) = C$$

şi este reprezentată în forma implicită. ■

Exerciţiul 7.2.4 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$2xy\, dx + (3y^2 - x^2 + 3) dy = 0.$$

Soluţie. Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ecuaţia dată nu este o ecuaţie care provine din anularea unei diferenţiale exactă. În schimb,

$$\frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = -\frac{2}{y},$$

ceea ce arată că ecuaţia diferenţială considerată admite factor integrant care depinde numai de y.

Se găseşte că factorul integrant este $\mu(y) = 1/y^2$.

Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu factorul integrant, obţinem ecuaţia cu diferenţială totală exactă

$$\frac{2\,x}{y}\, dx + \frac{3y^2 - x^2 + 3}{y^2}\, dy = 0,$$

care are soluţia generală

$$\frac{x^2}{y} + 3y - \frac{3}{y} = C.$$

După eliminarea numitorului, din soluţia generală obţinem

$$x^2 + 3y^2 - 3 - Cy = 0,$$

căreia putem să–i spunem integrala generală a ecuaţiei diferenţiale considerate.

Curbele integrale ale acestei ecuaţii diferenţiale constituie o familie de *conice* sau *curbe algebrice de ordinul al doilea.* ■

7.2.4 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Definiţia 7.2.4 *O ecuaţie diferenţială de tipul*

$$P_1(x)Q_2(y)dx + P_2(x)Q_1(y)dy = 0, \tag{7.69}$$

unde $P_1, P_2 \in C^0(I_1)$, $Q_1, Q_2 \in C^0(I_2)$, *se numeşte* **ecuaţie diferenţială cu variabile separabile**.

Observaţia 7.2.1 *Dacă ne limităm numai la subintervalele lui* I_1 *respectiv* I_2 *pe care funcţiile* P_2 *respectiv* Q_2 *nu se anulează, ecuaţia diferenţială cu variabile separabile* (7.69) *se reduce la o ecuaţia diferenţială cu variabile separate*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = 0.$$

Observaţia 7.2.2 *Folosind observaţia precedentă precum şi rezultatele stabiltite la ecuaţii diferenţiale cu variabile separate deducem că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separabile* (7.69) *este*

$$\int_a^x \frac{P_1(t)}{P_2(t)}dt + \int_b^y \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}dt = C, \tag{7.70}$$

unde C *este o constantă arbitrară iar* $a \in I_1,\ P_2(a) \neq 0$ *şi* $b \in I_2,\ Q_2(b) \neq 0$.

Observaţia 7.2.3 *Dacă* x_0 *şi* y_0 *sunt astfel încât*

$$P_2(x_0) = 0, \quad Q_2(y_0) = 0,$$

se constată că $x = x_0$ *şi* $y = y_0$ *sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale cu variabile separabile care nu se pot obţine din soluţia generală* (7.70) *şi ca atare putem spune că*

$$x = x_0 \ \text{ şi } \ y = y_0$$

sunt soluţii singulare ale ecuaţiei (7.69).

Observaţia 7.2.4 *Soluţiile singulare ale unei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile, dacă există, sunt drepte paralele cu axele de coordonate, sau segmente ale acestora.*

Exerciţiul 7.2.5 *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:*

1^0. $(x^2+a^2)(y^2+b^2)\,dx+(x^2-a^2)(y^2-b^2)\,dy=0\,,\quad a>0, b>0;$

2^0. $3\,e^x\,\mathrm{tg}\,y\,dx+(1+e^x)\,\sec^2 y\,dy=0.$

Pentru cea de a doua ecuaţie să se determine acea soluţie cu proprietatea că graficul ei trece prin punctul $(0,\pi/4)$.

Soluţie. **1**^{0}. Considerând că $x\in I$, unde I este un interval inclus în unul din intervalele $(-\infty,-a)$, $(-a,a)$ sau $(a,+\infty)$, constatăm că se pot separa variabilele, pe intervalul I, prin împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei cu $(x^2-a^2)(y^2+b^2)$. Obţinem:

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\,dx+\frac{y^2-b^2}{y^2+b^2}\,dy=0$$

sau

$$\Big(1+\frac{2a^2}{x^2-a^2}\Big)dx+\Big(1-\frac{2b^2}{y^2+b^2}\Big)dy=0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale cu variabile separate este

$$\frac{x+y}{a}+\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big|-\frac{2b}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{b}=C.$$

Dreptele $x=-a$ şi $x=a$, paralele cu axa Oy, sunt soluţii singulare ale ecuaţiei date.

2^0. După separarea variabilelor ecuaţia devine

$$\frac{3e^x}{1+e^x}\,dx+\frac{\sec^2 y}{\mathrm{tg}\,y}\,dy=0.$$

Separarea variabilelor a fost posibilă pentru $x\in I\!R$ şi $y\in I$, unde intervalul I nu conţine puncte de forma $y=k\pi/2,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Soluţia generală se obţine integrând primul termen între x_0 şi x, cel de al doilea termen între $y_0 \in I$ şi $y \in I$, adunând rezultatele şi egalându–le apoi cu logaritmul natural al unei constante pozitive arbitrară. Luând $x_0 = 0$, $y_0 = \dfrac{\pi}{4}$ şi efectuând calculele, avem

$$(1+e^x)^3 \cdot \operatorname{tg} y = 8\,C.$$

Impunând condiţia ca punctul de coordonate $(0, \dfrac{\pi}{4})$ să aparţină unei curbe integrale găsim $C = 1$ şi prin urmare soluţia problemei Cauchy este

$$(1+e^x)^3 \cdot \operatorname{tg} y = 8.$$

Funcţiile $y = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$, sunt soluţii singulare ale ecuaţiei date; curbele integrale corespunzătoare soluţiilor singulare sunt paralele echidistante la axa Ox. ■

7.2.5 Ecuaţia diferenţială omogenă

Definiţia 7.2.5 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{7.71}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue omogene de acelaşi grad m, se numeşte **ecuaţie diferenţială omogenă**.

Exprimând că funcţiile P şi Q sunt omogene, avem

$$P(tx,ty) = t^m P(x,y)\,, \quad Q(tx,ty) = t^m Q(x,y)\,. \tag{7.72}$$

Dacă în (7.72) luăm $t = \dfrac{1}{x}$, deducem

$$P(x,y) = x^m P\Big(1, \frac{y}{x}\Big)\,, \quad Q(x,y) = x^m Q\Big(1, \frac{y}{x}\Big)\,. \tag{7.73}$$

Pentru simplificarea formei ecuaţiei diferenţiale (7.71), efectuăm notaţia

$$\frac{P\Big(1, \dfrac{y}{x}\Big)}{Q\Big(1, \dfrac{y}{x}\Big)} = f\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.74}$$

Folosind acum (7.73) şi (7.74) în (7.71) constatăm că ecuaţiile diferenţiale omogene au forma generală

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.75}$$

Teorema 7.2.4 *Schimbarea de funcţie necunoscută*

$$y = z \cdot x \iff \frac{y}{x} = z \tag{7.76}$$

în ecuaţia diferenţială omogenă (7.75) *transformă ecuaţia întro ecuaţie diferenţială cu variabile separabile a cărei integrală generală este*

$$\ln|x| + C = \Phi\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{7.77}$$

unde C este o constantă arbitrară, iar Φ este o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{f(z) - z}$ pe un interval $I \subset I\!R$ cu proprietataea că ecuaţia

$$f(z) - z = 0 \tag{7.78}$$

nu are nici o soluţie.

Demonstraţie. Efectuând derivarea în cea de a doua relaţie din (7.76) şi ţinând cont că $z = z(x)$, obţinem

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dz}{dx} + z\,. \tag{7.79}$$

Înlocuind (7.76) şi (7.79) în (7.75), găsim

$$x \cdot \frac{dz}{dx} + z = f(z). \tag{7.80}$$

Pe intervalul I, după separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{7.81}$$

Integrala generală a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate (7.81) este

$$\ln|x| + C = \Phi(z), \tag{7.82}$$

unde am notat prin $\Phi(z)$ o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{f(z) - z}$. Revenind la funcţia y, prin folosirea notaţiei (7.76), din (7.82) obţinem (7.77). ∎

Observaţia 7.2.5 *Dacă* z_0 *este o rădăcină a ecuaţiei* (7.78), *atunci* $z = z_0$ *(constant) este soluţie şi pentru ecuaţia* (7.80), *deoarece* $\dfrac{dz}{dx} = 0$. *De aici şi din* (7.76) *rezultă că funcţia*

$$y = z_0 \cdot x \tag{7.83}$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (7.75), *anume o soluţie singulară. Curba integrală corespunzătoare soluţiei* (7.83) *este o dreaptă care trece prin origine şi are panta* z_0.

Observaţia 7.2.6 *Dacă în* (7.77) *înlocuim pe* C *cu* $-\ln C$, *integrala generală* (7.77) *se scrie*

$$x = C\Psi\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{7.84}$$

unde am notat

$$\Psi\Big(\frac{y}{x}\Big) = e^{\Phi\big(\frac{y}{x}\big)}. \tag{7.85}$$

Observaţia 7.2.7 *O familie de curbe plane de ecuaţie* (7.84) *verifică o ecuaţie diferenţială omogenă.*

Într-adevăr, derivând în ambii membri în (7.84), obţinem

$$1 = C\Big(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\Big)\Psi'\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{7.86}$$

Eliminând constanta C din ecuaţiile (7.84) şi (7.86), deducem

$$x \cdot \Big(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\Big) = \frac{\Psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)}{\Psi'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)}. \tag{7.87}$$

Rezolvând ecuaţia (7.87) în privinţa lui y', găsim o ecuaţie diferenţială omogenă de forma (7.75), în care membrul al doilea este

$$f\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{\Psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)}{\Psi'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)} + \frac{y}{x}\,. \tag{7.88}$$

Putem spune deci că o ecuaţie diferenţială este omogenă dacă şi numai dacă soluţia sa generală este (7.84). ■

Exerciţiul 7.2.6 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale omogene:*

$$\mathbf{1^0}.\quad y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}\,;$$

$$\mathbf{2^0}.\quad xyy' = y^2 + 2x^2\,;$$

$$\mathbf{3^0}.\quad xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0\,;$$

$$\mathbf{4^0}.\quad xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\,;$$

$$\mathbf{5^0}.\quad xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}\,.$$

Soluţie. $\mathbf{1^0}$. După efectuarea schimbării de funcţie (7.76), ecuaţia devine

$$x\,z' + z = z + e^z,$$

care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Separând variabilele, obţinem

$$e^{-z}\,dz = \frac{dx}{x}.$$

Souţia generală a acestei ecuaţii este

$$\ln|x| = -\,e^z + C.$$

Revenind la funcţia iniţială, găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$\ln|x| = -\,e^{\frac{y}{x}} + C.$$

Această ecuaţie diferenţială nu are soluţii singulare.

$\mathbf{2^0}$. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei prin x^2, obţinem

$$\frac{y}{x}\,y' = \Big(\frac{y}{x}\Big)^2 + 2\,. \tag{7.89}$$

După efectuarea schimbării de funcţie (7.76), ecuaţia (7.89) se scrie

$$z(x\,z' + z) = z^2 + 2\,.$$

Separarea variabilelor în această din urmă ecuaţie diferenţială conduce la ecuaţia diferenţială cu variabile separate

$$z\,dz = \frac{2\,dx}{x}\,.$$

Integrând, obţinem

$$z^2 = 4\,\ln C|x|.$$

Revenind la funcţia iniţială deducem că soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y^2 = 4\,x^2\,\ln C|x|.$$

Nici această ecuaţie diferenţială nu are soluţii singulare.

3^0. Avem pe rând:

$$\begin{aligned}
&y' + \cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x} + 1 = 0\,;\\
&x\,z' + z + \cos z - z + 1 = 0\,;\\
&\frac{dz}{1+\cos z} = -\,\frac{dx}{x}\,;\\
&\frac{dz}{2\,\cos^2\dfrac{z}{2}} = -\,\frac{dx}{x}\,;\\
&\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \ln\frac{C}{|x|}\,;\\
&z = 2\,\operatorname{arctg}\ln\frac{C}{|x|}\,.
\end{aligned}$$

Revenind la variabila dependentă iniţială, găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = 2\,x\,\operatorname{arctg}\ln\frac{C}{|x|}.$$

Această ecuaţie are o infinitate de soluţii singulare de forma

$$y = (2k+1)\pi\,x\,,\quad k\in\boldsymbol{Z}$$

deoarece ecuaţia $f(z) - z = 0$, adică ecuaţia $1+\cos z = 0$, are o infinitate de soluţii şi anume $z = (2k+1)\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

4^0. Procedând în mod analog ca la celelalte trei ecuaţii diferenţiale găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$y \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x \cdot \ln \left(C \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Nu are soluţii singulare.

5^0. Urmând prezentarea teoretică, avem:

$$\begin{aligned} y' \ln \frac{y}{x} &= 1 + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}\,; \\ (xz' + z) \ln z &= 1 + z \ln z\,; \\ \ln z\, dz &= \frac{dx}{x}\,; \\ z \ln z - z &= \ln C|x| \end{aligned}$$

după care, reîntorcându–ne la funcţia y, găsim că soluţia generală este

$$y \, \ln \left|\frac{y}{x}\right| = y + x \ln C|x|.$$

Nu are soluţii singulare. ■

7.2.6 Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene

O ecuaţie diferenţială reductibilă la una omogenă este

$$y' = f\Big(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\Big), \tag{7.90}$$

unde $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ sunt constante reale care satisfac condiţia

$$a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \neq 0,$$

iar f este o funcţie reală de variabilă reală definită pe un interval. Ea este evident o ecuaţie diferenţială omogenă deoarece se poate scrie în forma

$$y' = f\Big(\frac{a_1 + b_1 \dfrac{y}{x}}{a_2 + b_2 \dfrac{y}{x}}\Big).$$

Cu substituţia
$$y = xz \iff z = \frac{y}{x} \tag{7.91}$$
se separă variabilele.

Exerciţiul 7.2.7 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*
$$(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0. \tag{7.92}$$

Soluţie. Dacă punctul $(x, y) \in I\!R^2$ este astfel încât nu este verificată ecuaţia
$$x - 2y = 0, \tag{7.93}$$
(7.92) se scrie în forma
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}. \tag{7.94}$$

Facând schimbarea de funcţie $y = xz$, constatăm că (7.94), care este o ecuaţie de forma (7.90), devine:
$$xz' + z = \frac{z - 2}{2z - 1}.$$

Separând variabilele, obţinem:
$$-\frac{2z - 1}{2(z^2 - z + 1)}dz = \frac{dx}{x}.$$

Integrând această ecuaţie, se găseşte:
$$x^2(z^2 - z + 1) = C^2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este
$$x^2 - xy + y^2 = C^2$$
şi, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de elipse cu centrul de simetrie în originea axelor din care se scot punctele de intersecţie cu dreapta (7.93). ■

O altă ecuaţie diferenţială reductibilă la o ecuaţie omogenă este
$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big), \tag{7.95}$$

unde $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ sunt constante care satisfac condiţiile:

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0\,; \quad a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \,\neq\, 0. \tag{7.96}$$

În situaţia (7.96) mulţimile (D_1) şi (D_2) ale punctelor de coordonate (x, y) care satisfac respectiv ecuaţiile:

$$(D_1): \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0; \quad (D_2): \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

reprezintă două drepte concurente în punctul (x_0, y_0).

Efectuând schimbarea de variabilă independentă şi de funcţie (o translaţie)

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \end{cases}$$

în ecuaţia (7.95), constatăm că aceasta devine

$$\frac{dv}{du} = f\Big(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\Big). \tag{7.97}$$

Ecuaţia (7.97) este de tipul (7.90), deci cu schimbarea de funcţie

$$v = uz$$

se separă variabilele.

Exerciţiul 7.2.8 *Să se arate că prin schimbări de funcţie şi de variabilă convenabile, următoarele ecuaţii se reduc la ecuaţii diferenţiale de tip omogen şi apoi să se integreze:*

$$\begin{array}{llcll} \textbf{a}) & (2x + y + 1)dx & + & (x + 2y - 1)dy & = & 0\,; \\ \textbf{b}) & (2x + y - 1)dx & + & (x - 2y + 3)dy & = & 0\,; \\ \textbf{c}) & (x + y - 2)dx & + & (x - y + 4)dy & = & 0. \end{array}$$

Soluţie. Determinând raportul dy/dx constatăm că fiecare din cele trei ecuaţii aparţine tipului de ecuaţie diferenţială (7.95) prezentat mai sus.

a) Dreptele $(D_1):\ 2x + y + 1 = 0$ şi $(D_2):\ x + 2y - 1 = 0$ se intersectează în punctul $(-1, 1)$. Efectuând schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$\begin{cases} x = u - 1, \\ y = v + 1, \end{cases}$$

ecuaţia dată se transformă în:

$$(2u+v)du+(u+2v)dv=0.$$

În ecuaţia omogenă obţinută punem $v=uw,\ w=w(u)$, de unde $dv=u\,dw+w\,du$ şi ajungem la ecuaţia cu variabile separabile

$$2(w^2+w+1)u\,du+u^2(1+2w)\,dw=0,$$

a cărei integrală generală este

$$u\sqrt{w^2+w+1}=C,$$

sau, după revenirea la funcţia v prin înlocuirea lui w cu v/u şi ridicarea la pătrat,

$$u^2+uv+v^2=C^2\,.$$

Trecând la variabilele iniţiale prin $u=x{+}1$ şi $v=y{-}1$, după transformări elementare găsim că integrala generală a ecuaţiei date este familia de curbe algebrice de ordinul al doilea de gen eliptic cu centru în punctul de intersecţie al celor drepte

$$x^2+xy+y^2+x-y=C_1,$$

unde noua constantă C_1 este $C_1=C^2-1$.

b) Punctul de concurenţă al celor două drepte aici este $(-1/5,7/5)$. Efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x=u-1/5,\\ y=v+7/5,\end{cases}$$

ecuaţia devine

$$(2u+v)\,du+(u-2v)\,dv=0. \tag{7.98}$$

Această ecuaţie este omogenă, drept pentru care facem schimbarea de funcţie

$$v=u\,w,\quad w=w(u)$$

şi ajungem la ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

$$u\,w'=\frac{2(1+w-w^2)}{2w-1}$$

a cărei soluţie generală este

$$2|w^2 - w - 1| = C^2.$$

Revenind la funcţia v, obţinem

$$2 - uv - u^2 = \pm C\,.$$

Înlocuind în acest ultim rezultat pe u cu $x + 1/5$ şi pe v cu $y - 7/5$, după calcule elementare, găsim că soluţia generală a ecuaţiei considerate la acest punct este

$$x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C_1.$$

Folosind teoria curbelor algebrice de ordinul al doilea se constată că această familie de curbe plane este formată fie din hiperbole, fie din perechi de drepte concurente reale, caz în care vom spune ca aceste curbe integrale sunt curbe algebrice de ordinul al doilea (conice) de gen hiperbolic.

c) Se procedează în mod asemănător ca la celelalte două ecuaţii diferenţiale şi se găseşte că soluţia generală este

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$$

care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de curbe algebrice de ordinul al doilea de gen hiperbolic. ∎

Cel de al treilea tip de ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene este acela de forma (7.95), în care constantele care apar la variabila funcţiei f satisfac relaţiile

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{7.99}$$

În acest caz dreptele (D_1) şi (D_2) din (7.96) sunt paralele. Din (7.99) rezultă

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k,$$

deci ecuaţia (7.95) devine

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\Big). \tag{7.100}$$

Cu schimbarea de funcţie dată de relaţia

$$a_1x + b_1y = z, \quad z = z(x),$$

care implică

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\Big(\frac{dz}{dx}-a_1\Big)$$

ecuaţia (7.100) capătă forma

$$\frac{1}{b_1}\Big(\frac{dz}{dx}-a_1\Big)=f\Big(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\Big). \tag{7.101}$$

Ecuaţia diferenţială (7.101) este cu variabile separabile. Efectuând separarea variabilelor, găsim că pe intervalul real J, unde ecuaţia

$$b_1\,f\Big(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\Big)+a=0$$

nu are nici o soluţie, (7.101) se transformă în

$$\frac{dz}{b_1 f\Big(\dfrac{z+c_1}{kz+c_2}\Big)+a}=dx\,. \tag{7.102}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (7.102) este

$$x+C=\Phi(z),$$

unde funcţia Φ este o primitivă pe J a funcţiei

$$\frac{1}{b_1 f\Big(\dfrac{z+c_1}{kz+c_2}\Big)+a}.$$

Revenind la variabilele iniţiale, integrala generală a ecuaţiei (7.100) este

$$x+C=\Phi(a_1x+b_1y).$$

Exerciţiul 7.2.9 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$(x-2y+9)\,dx-(3x-6y+19)\,dy=0.$$

Soluţie. Dreptele $(D_1):\ x-2y+9=0$ şi $(D_2):\ 3x-6y+19=0$ sunt paralele. În acest caz facem schimbarea de funcţie

$$x-2y=z\implies\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}.$$

Ecuaţia dată devine

$$z + 9 - (3z + 19)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\Big) = 0.$$

Aceasta din urmă este o ecuaţie cu variabile separabile care, după separarea lor în cazul $z + 1 \neq 0$, devine

$$\frac{3z + 19}{z + 1}\, dz = dx.$$

Integrala generală este dată de

$$8 \ln |x - 2y + 1| + x - 3y = C.$$

Egalitatea $z + 1 = 0$ ne dă soluţia $x - 2y + 1 = 0$, care verifică ecuaţia dată iniţial. Această ultimă soluţie se obţine din integrala generală pentru $C \to -\infty$. ■

7.2.7 Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi

Definiţia 7.2.6 *O ecuaţie diferenţială de forma*

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{7.103}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue pe un interval $I \subset I\!R$, se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi, neomogenă**.

Definiţia 7.2.7 *Ecuaţia diferenţială*

$$y' + P(x)y = 0 \tag{7.104}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întai, omogenă**.

Observaţia 7.2.8 *Cuvântul* **omogenă** *are aici altă semnificaţie decât cea întâlnită în unul din paragrafele anterioare. Aici, cuvântul omogenă semnifică faptul că membrul doi din* (7.103) *este nul. Dacă în* (7.104) *funcţia P este aceeaşi ca cea din* (7.103), *atunci* (7.104) *este numită ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi* **asociată** *ecuaţiei* (7.103).

Teorema 7.2.5 *Soluţia generală a ecuaţiei* (7.103) *este dată de*

$$y = e^{-\int P(x)dx}\Big[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\Big], \quad x \in I. \tag{7.105}$$

Demonstraţie. Presupunem că ecuaţia diferenţială (7.103) are soluţii pe intervalul I şi fie $y = y(x),\ x \in I$, o soluţie arbitrară a acesteia. Atunci, avem

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x),\ (\forall)\, x \in I. \tag{7.106}$$

Înmulţind ambii membri ai identităţii (7.106) cu $e^{\int P(x)dx},\ x \in I$, aceasta devine

$$\frac{d}{dx}\Big(y(x)e^{\int P(x)dx}\Big) = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad x \in I. \tag{7.107}$$

Integrând în ambii membri ai lui (7.107), obţinem

$$y(x)e^{\int P(x)dx} = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{7.108}$$

Prin înmulţirea în ambii membri ai lui (7.108) cu factorul $e^{-\int P(x)dx}$, se obţine că soluţia

$$y = y(x), \quad x \in I, \tag{7.109}$$

a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi, neomogenă, are forma (7.105).

Reciproc, să considerăm o funcţie de forma (7.105), în care C este o constantă arbitrară. Derivata acestei funcţii este

$$\begin{aligned} y'(x) \ &= \ -P(x)e^{-\int P(x)dx}\Big(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\Big) + \\ &\quad + e^{-\int P(x)dx}Q(x)e^{\int P(x)dx}. \end{aligned} \tag{7.110}$$

Având în vedere că cel de-al doilea factor al primului termen din membrul doi al relaţiei (7.110) este tocmai funcţia $y = y(x)$ din (7.105), deducem că (7.110) se scrie în forma

$$y'(x) = -\,P(x)\,y(x) + e^{-\int P(x)dx}Q(x)\,e^{\int P(x)dx}. \tag{7.111}$$

Cum cel de al doilea termen din membrul al doilea al relaţiei (7.111) este $Q(x)$, rezultă că această relaţie se scrie în forma

$$y'(x) = -\,P(x)\,y(x) + Q(x). \tag{7.112}$$

Egalitatea (7.112) exprimă faptul că funcţia $y = y(x)$ din (7.105) este o soluţie a ecuaţiei (7.103). ∎

Teorema 7.2.6 *Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi omogenă, de forma* (7.104), *are soluţia generală*

$$y = C\, e^{-\int P(x)dx}, \tag{7.113}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Demonstraţie. Ecuaţia (7.104) este cu variabile separabile. Separând variabilele obţinem

$$\frac{dy}{y} = -\,P(x)dx. \tag{7.114}$$

Integrând în ambii membri ai lui (7.114) se găseşte (7.113). ∎

Teorema 7.2.7 *Fie $x_0 \in I$, arbitrar dar fixat şi $y_0 \in \mathbb{R}$, oarecare. Soluţia problemei Cauchy*

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{7.115}$$

este

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}dt\Big), \quad x \in I. \tag{7.116}$$

Demonstraţie. În ipoteza că soluţia problemei Cauchy (7.115) există, fie aceasta de forma (7.109), în care variabila independentă se va nota cu t. Înmulţind ambii membri ai lui (7.103) cu $e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}$, se obţine

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}\Big) = Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds}, \quad x \in I. \tag{7.117}$$

Integrarea lui (7.117) între limitele x_0 şi x, urmată de înmulţirea ambilor membri cu $e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$, conduce la afirmaţia că soluţia problemei Cauchy (7.115) este (7.116).

Reciproc, funcţia (7.116) are proprietatea a doua din (7.115). Prin calcul direct se constată că această funcţie satisface prima ecuaţie din (7.115). ∎

Observaţia 7.2.9 *Soluţia generală* (7.105) *a ecuaţiei diferenţiale liniară de ordinul întâi, neomogenă,* (7.103), *se scrie*

$$y = C\, e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \quad x \in I. \tag{7.118}$$

Scrisă astfel, se vede că este egală cu suma dintre integrala generală y_o *a ecuaţiei omogene asociate* (7.104) *şi funcţia*

$$y_p : I \to I\!R, \quad y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx,$$

care este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (7.103) *deoarece se obţine din* (7.105) *dând constantei arbitrare* C *valoarea zero. Aşadar,*

$$y = y_o + y_p.$$

Teorema 7.2.8 *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi este o funcţie de forma*

$$y = \varphi(x) + C\psi(x), \quad x \in I. \tag{7.119}$$

Reciproc, orice familie de curbe plane care depinde liniar de o constantă arbitrară verifică o ecuaţie liniară de ordinul întı.

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din (7.118).

Pentru a demonstra reciproca, să observăm mai întâi că

$$y' = \varphi'(x) + C\psi'(x), \quad x \in I. \tag{7.120}$$

Eliminând constanta C între (7.119) şi (7.120), obţinem ecuaţia

$$\frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)}, \tag{7.121}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi. ■

Teorema 7.2.9 *Dacă* y_1 *este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare* (7.103), *soluţia sa generală se obţine printr–o cuadratură.*

Demonstraţie. Efectuăm schimbarea de funcţie $y = z + y_1$ şi obţinem

$$z' + y_1' + P(x)z + P(x)y_1 - Q(x) = 0. \tag{7.122}$$

Deoarece y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei (7.103), avem

$$y_1' + P(x)y_1 - Q(x) = 0. \tag{7.123}$$

Folosind (7.123) în (7.122) găsim că z este soluţia ecuaţiei liniare omogene (7.104) care se obţine doar printr–o operaţie de integrare şi anume

$$z = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Din cele de mai sus rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (7.103) este

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)dx}$$

şi pentru determinarea ei s–a eefectuat doar o operaţie de integrare sau, cum se mai spune, o cuadratură. ■

Corolarul 7.2.2 *Dacă y_1 şi y_2 sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei* (7.103), *soluţia generală a sa este dată de*

$$y = y_2 + A(y_1 - y_2) \quad (A = \text{ constantă arbitrară }). \tag{7.124}$$

Demonstraţie. Fie soluţia generală a ecuaţiei (7.103) scrisă în forma (7.119) şi $y_1,\ y_2,\ y_3$, trei soluţii particulare corespunzătoare la trei valori $C_1,\ C_2,\ C_3$, ale constantei arbitrare C

$$y_1 = \varphi(x) + C_1\psi(x), \quad y_2 = \varphi(x) + C_2\psi(x), \quad y_3 = \varphi(x) + C_3\psi(x). \tag{7.125}$$

Eliminând funcţiile φ şi ψ din relaţiile (7.125), obţinem relaţia

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{C_3 - C_2}{C_1 - C_2} = A \quad \text{(constant)}. \tag{7.126}$$

Dacă considerăm că cea de a treia soluţie y_3 este soluţia generală, din relaţia (7.126) se obţine (7.124). ■

Observaţia 7.2.10 *Dacă se cunosc două soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi, neomogenă, soluţia generală a sa se obţine fără nici o cuadratură.*

Observaţia 7.2.11 *Fie $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ două curbe integrale date pe intervalul $[a,b]$ şi $M_1,\ M_1',\ M_2,\ M_2'$, intersecţiile lor cu două paralele la axa Oy. Putem construi prin puncte orice altă curbă integrală Γ, definită pe $[a,b]$, deoarece, în baza* *egalităţii* (7.126), *punctele* M, M' *de intersecţie ale curbei* Γ *cu cele două drepte verifică relaţia*

$$\frac{MM_2}{M_1M_2}=\frac{M'M_2}{M_1'M_2},$$

relaţie care arată că dreptele M_1M_1', M_2M_2' *şi* MM' *sunt concurente. Luând punctul* $M(a,y_0)$ *fix, ceea ce înseamnă a rezolva problema Cauchy* (7.115), *unde în loc de* x_0 *este* a, *prin procedeul descris mai sus obţinem curba integrală ce trece prin acest punct.*

Exerciţiul 7.2.10 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul întâi*

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{1}^0) & y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x; & \\
\mathbf{2}^0) & tx'=2x+t^3\cos t, & x(\pi/2)=\pi^2/4; \\
\mathbf{3}^0) & y'\cos^2 x+y=\mathrm{tg}\,x; & \\
\mathbf{4}^0) & y'+3y\,\mathrm{tg}\,3x=\sin 6x, & y(0)=1/3; \\
\mathbf{5}^0) & (\sin x+t\,\mathrm{ctg}\,x)x'=1, & t(\pi/2)=1; \\
\mathbf{6}^0) & (2e^y-x)y'=1, & y(0)=-1,
\end{array}$$

iar unde se specifică, să se rezolve problema Cauchy cu data iniţială menţionată alăturat.

Soluţie. Ecuaţiile diferenţiale $\mathbf{1}^0)-\mathbf{4}^0)$ sunt liniare şi neomogene, iar soluţiile lor generale se determină utilizând formula (7.105). Avem:

$\mathbf{1}^0)$ Funcţiile P şi Q din această ecuaţie sunt definite pe un interval I_k inclus în intervalul $(-\pi/2+k\pi,\ \pi/2+k\pi)$ şi au valorile date de

$$P(x)=\mathrm{tg}\,x,\quad Q(x)=\frac{1}{\cos x},\quad x\in I_k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$y=e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx}\Big(C+\int\frac{1}{\cos x}e^{\int \mathrm{tg}\,x dx}dx\Big),\quad x\in I_k.$$

Prin urmare, soluţia generală este dată de

$$y=\sin x+C\cos x,\quad C\in\mathbb{R},\quad x\in I_k.$$

2^0) Să observăm că variabila independentă a acestei ecuaţii diferenţiale este t, iar funcţia necunoscută este $x = x(t)$. Intervalul pe care sunt definite funcţiile P şi Q este inclus sau în intervalul $(-\infty, 0)$ sau în $(0, +\infty)$. Pentru că se cere rezolvarea ulterioară a unei probleme Cauchy în care $t_0 = \pi/2 \in (0, +\infty)$, vom considera de la început că $I = (0, +\infty)$. Avem

$$P(t) = -\frac{2}{t}, \quad Q(t) = t^2 \cos t, \quad t \in (0, +\infty).$$

Soluţia generală este

$$x = e^{2\int \frac{dt}{t}}\Big(C + \int t^2 \cos t e^{-2\int \frac{dt}{t}}\Big), \quad t \in (0, +\infty).$$

După efectuarea cuadraturilor, se găseşte

$$x = t^2(C + \sin t), \quad t \in (0, +\infty), \quad C \in I\!R.$$

Impunând ca să fie satisfăcută condiţia iniţială $x(\pi/2) = \pi^2/4$, se ajunge la concluzia că $C = 0$ şi prin urmare soluţia problemei Cauchy este $x = t^2 \sin t$.

3^0) Integrăm această ecuaţie liniară utilizând Observaţia 7.2.9. Aici, funcţiile P şi Q sunt definite pe un interval $I \subset I\!R$ în care ecuaţia $\cos x = 0$ nu are soluţii, valorile lor fiind date de

$$P(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad Q(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad x \in I.$$

Trebuie să integrăm întâi ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei considerate

$$y' + \frac{1}{\cos^2 x} y = 0.$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile şi are soluţia generală

$$y_o = Ce^{-\operatorname{tg} x}, \quad x \in I.$$

Vom arăta cum se poate determina o soluţie particulară din soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate folosind *metoda variaţiei constantei de integrare C*, denumită şi *metoda lui Lagrange*.

Se caută o soluţie particulară în forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}, \quad x \in I.$$

Punând condiţia ca y_p să verifice ecuaţia iniţială, obţinem:

$$C'(x)\cos^2 x e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in I,$$

de unde

$$C(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = (\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x}.$$

Prin urmare, soluţia particulară este

$$y_p(x) = \operatorname{tg} x - 1, \quad x \in I.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$y = y_o + y_p = Ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1, \quad x \in I.$$

4^0) Avem $P(x) = 3\operatorname{tg} 3x,\ Q(x) = \sin 6x$ şi le vom considera definite pe un interval $I \in I\!R$ care conţine originea.

Soluţia generală este

$$y = e^{-3\int \operatorname{tg} 3x dx}\Big(C + \int \sin 6x e^{3\int \operatorname{tg} 3x dx} dx\Big), \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = e^{\ln\cos 3x}\Big(C + \int \sin 6x e^{-\ln\cos 3x} dx\Big) = \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ = \cos 3x\Big(C + \int \frac{\sin 6x}{\cos 3x} dx\Big) \Longrightarrow y = \cos 3x\Big(C - \frac{2}{3}\cos 3x\Big).$$

Impunând condiţia ca în $x_0 = 0$ valoarea funcţiei y de mai sus să fie $1/3$ găsim $C = 1$ şi deci soluţia problemei Cauchy este

$$y = \cos 3x\Big(1 - \frac{2}{3}\cos 3x\Big), \quad x \in I.$$

5^0) Ecuaţia este neliniară în funcţia $x = x(t)$. Ea este însă liniară în t căci se poate scrie

$$\frac{dt}{dx} - t \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

Aceasta din urmă are soluţia generală

$$t = (C + x)\sin x, \quad x \in I_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \quad I_k \subset (k\pi, (k+1)\pi).$$

Pentru ecuaţia iniţială, soluţia generală este funcţia $x = \varphi(t, C)$ definită implicit de ecuaţia

$$(C + x)\sin x \, - \, t \, = \, 0, \quad (t, x) \in I\!R \times I_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \quad I_k \subset (k\pi, (k+1)\pi).$$

Încercând rezolvarea problemei Cauchy considerate, se găseşte $C = 0$.

Deci, soluţia problemei Cauchy este funcţia $x = x(t)$ definită implicit de ecuaţia

$$t - x\sin x = 0, \tag{7.127}$$

întro vecinătate a punctului $t = \pi/2$.

6^0) Ecuaţia este liniară în x. Procedând ca la exerciţiul precedent găsim că această ecuaţie diferenţială admite integrala generală

$$x - e^y - Ce^{-y} = 0.$$

Soluţia problemei Cauchy se determină din integrala generală luând $C = -1$. Avem

$$x = e^y - e^{-y} \Longrightarrow \mathrm{sh} y = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = \mathrm{argsh}\,\frac{x}{2},$$

unde argsh$(\cdot)$ este funcţia inversă a funcţiei sh$(\cdot)$. ■

7.2.8 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi reductibile la ecuaţii liniare

Ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli

Definiţia 7.2.8 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in I\!R \setminus \{0, 1\}, \quad P,\ Q \in C^0(I), \quad I \subset I\!R, \tag{7.128}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli**.

Teorema 7.2.10 *Cu schimbarea de funcţie*

$$y^{1-\alpha} = z, \tag{7.129}$$

ecuaţia Bernoulli (7.128) *se transformă întro ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă.*

Demonstraţie. Dacă împărţim cu y^α în (7.128) avem

$$\frac{y'}{y^\alpha} + P(x)\, y^{1-\alpha} = Q(x). \tag{7.130}$$

Folosind (7.129) şi consecinţa acesteia

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, z'$$

în (7.130), ecuaţia (7.128) se transformă în

$$z' + (1-\alpha)\, P(x)\, z = (1-\alpha)\, Q(x), \tag{7.131}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă. ∎

Corolarul 7.2.3 *Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli* (7.128) *este*

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{7.132}$$

unde funcţia $z = z(x, C)$ *este dată de*

$$z = e^{-(1-\alpha)\int P(x)dx}\Big[C + (1-\alpha)\int Q(x)\, e^{(1-\alpha)\int P(x)dx}\Big]. \tag{7.133}$$

Demonstraţie. Ecuaţia diferenţială (7.131), fiind liniară, de ordinul întâi şi neomogenă, are soluţia generală (7.133). După determinarea funcţiei z, funcţia y, soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli, se găseşte din (7.129), fiind astfel conduşi la (7.132). ∎

Exerciţiul 7.2.11 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:*

$$\begin{array}{ll} \textbf{a)} & y' + \dfrac{1}{x}\, y = x^2\, y^4; \\ \textbf{b)} & y' + \dfrac{1}{x}\, y = \dfrac{1}{x^2}\, y^{-2}; \\ \textbf{c)} & y' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = 4\, \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, \sqrt{y}. \end{array}$$

Soluţie. Toate ecuaţiile diferenţiale de mai sus sunt de tip Bernoulli.

a) Constanta α are valoarea 4 şi ecuaţia este echivalentă cu

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{x}\, y^{-3} = x^2.$$

Facem schimbarea de funcţie

$$z = y^{-3} \implies \frac{y'}{y^4} = -\,\frac{1}{3}\, z' \tag{7.134}$$

şi ecuaţia iniţială devine

$$z' - \frac{3}{x}\, z = -\,3\,x^2,$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă. Cu menţiunea că punând $\ln C$ în loc de C, soluţia generală a acestei ecuaţii liniare este

$$z = e^{3\int \frac{dx}{x}}\Big(\ln C - 3\int x^2\, e^{-3\int \frac{1}{x}dx} dx\Big) \implies z = |x|^3\, \ln \frac{C}{|x|^3}.$$

Soluţia ecuaţiei Bernoulli este

$$z = \frac{1}{|x|\sqrt[3]{\ln \dfrac{C}{|x|^3}}}.$$

b) Schimbarea de funcţie $z = y^3$ conduce la ecuaţia liniară

$$z' + \frac{3}{x}\, z = \frac{3}{x^2}$$

cu soluţia generală

$$z = \frac{C}{|x|^3} + \frac{3}{2|x|}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = \frac{1}{|x|}\,\sqrt[3]{\frac{3x^2 + 2C}{2}}.$$

c) Procedând în mod asemănător ca la celelalte două exemple, găsim că soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = (1 + x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2.$$

■

Ecuaţia diferenţială de tip Riccati

Definiţia 7.2.9 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi*

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x), \quad P, Q, R \in C^0(I), \quad I \subset I\!R \tag{7.135}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Riccati**.

În general ecuaţia Riccati nu poate fi integrată prin cuadraturi. Avem însă

Teorema 7.2.11 *Dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_1 a ecuaţiei Riccati, prin schimbarea de funcţie*

$$y = y_1 + \frac{1}{z}, \tag{7.136}$$

ecuaţia se transformă întro ecuaţie liniară.

Demonstraţie. Fie y o soluţie a ecuaţiei (7.135) şi z o funcţie legată de y prin relaţia (7.136). Atunci, derivatele acestor funcţii sunt în relaţia

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}. \tag{7.137}$$

Înlocuind (7.136) şi (7.137) în (7.135), obţinem

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\Big(y_1 + \frac{1}{z}\Big)^2 + Q(x)\Big(y_1 + \frac{1}{z}\Big) + R(x). \tag{7.138}$$

După efectuarea operaţiilor indicate şi luarea în calcul a faptului că y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati, din (7.138) obţinem

$$z' + \Big(2y_1 P(x) + Q(x)\Big)z = -\,P(x), \tag{7.139}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi neomogenă. ∎

Teorema 7.2.12 *Dacă y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati şi z este o soluţie a ecuaţiei liniare* (7.139), *funcţia y definită de* (7.136) *este o soluţie a ecuaţiei* (7.135).

Demonstraţie. Din (7.136) avem

$$z = \frac{1}{y - y_1}, \implies z' = \frac{y' - y_1'}{(y - y_1)^2}. \tag{7.140}$$

Înlocuind relaţiile din (7.140) în (7.139) şi ţinând cont de faptul că y_1 este soluţie particulară a ecuaţiei Riccati deducem că y este soluţie a ecuaţiei (7.135). ∎

Observaţia 7.2.12 *Integrala generală a unei ecuaţii Riccati este funcţie omografică de constanta arbitrară.*

Într-adevăr, z fiind soluţia unei ecuaţii liniare, ea este funcţie liniară de o constantă arbitrară C

$$z = \varphi(x) + C\,\psi(x),$$

deci,

$$y = y_1 + \frac{1}{\varphi(x) + C\,\psi(x)} = \frac{y_1\varphi(x) + 1 + C\,y_1\,\psi(x)}{\varphi(x) + C\,\psi(x)},$$

de unde rezultă că y este de forma

$$y = \frac{\varphi_1(x) + C\,\psi_1(x)}{\varphi(x) + C\,\psi(x)},$$

care este o transformare omografică de constanta arbitrară C.

Reciproc, o familie de curbe plane care depinde omografic de o constantă arbitrară verifică o ecuaţie de tip Riccati. ∎

Observaţia 7.2.13 *Dacă y_1, y_2, y_3, y_4 sunt patru soluţii particulare corespunzătoare la patru valori arbitrare C_1, C_2, C_3, C_4 ale constantei arbitrare C, atunci are loc relaţia*

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2} : \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} = A \quad \textit{(constant).}$$

Membrul întâi al ultimei relaţii se numeşte *raport anarmonic al funcţiilor y_1, y_2, y_3 şi y_4*. Proprietatea are loc datorită faptului că o transformare omografică păstrează raportul anarmonic. ∎

Observaţia 7.2.14 *Dacă se cunosc trei soluţii particulare y_1, y_2, y_3 ale unei ecuaţii Riccati, din relaţia scrisă la observaţia precedentă, soluţia generală rezultă din*

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} = C$$

fără a efectua nici o cuadratură.

Exerciţiul 7.2.12 *Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de tip Riccati de mai jos ştiind că admit soluţiile particulare indicate alăturat:*

$$\mathbf{1}^0. \qquad y' = -\,2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}, \qquad y_1 = \frac{1}{x};$$

$$\mathbf{2}^0. \qquad y' = -\,\frac{1}{x}\,y^2 + \frac{4}{x}\,y + \frac{3}{x}, \qquad y_1 = 1.$$

Soluţie. $\mathbf{1}^0$. Facem schimbarea de funcţie

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \quad y' = -\,\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}.$$

Folosind aceste rezultate în ecuaţie, găsim că funcţia z satisface ecuaţia liniară

$$z' - 3z = 2x.$$

Aflăm mai întâi soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate ecuaţiei liniare de mai sus, adică a ecuaţiei cu variabile separabile

$$z' - 3z = 0.$$

Soluţia generală a ultimei ecuaţiei este

$$z_o = C\,e^{3x}.$$

Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei liniare neomogene utilizăm metoda lui Lagrange, luând deci pe z_p în forma

$$z_p(x) = C(x)e^{3x}.$$

Funcţia necunoscută $C(x)$ se va determina din condiţia ca z_p să satisfacă ecuaţia

$$z_p'(x) - 3\,z_p(x) = 2\,x.$$

Se găseşte că derivata funcţiei $C(x)$ este

$$C'(x) = 2\,x\,e^{3x}.$$

Integrând ultima ecuaţie cu variabile separate, găsim

$$C(x) = -\,\frac{2(3x+1)}{9}\,e^{3x}.$$

Rezultă aşadar că soluţia particulară căutată este

$$z_p = -\,\frac{2(3x+1)}{9}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare în z este $z = z_o + z_p$. Înlocuind rezultatele determinate deducem în cele din urmă că

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{C\,e^{3x} - \dfrac{2(3x+1)}{9}}$$

este soluţia generală a ecuaţiei date.

2^0. Facem substituţia

$$y = 1 + \frac{1}{z} \implies y' = -\frac{z'}{z^2}$$

şi ecuaţia se transformă în

$$-\,\frac{z'}{z^2} = -\,\frac{1}{x}\,(1+\frac{1}{z})^2\,+\,\frac{4}{x}\,(1+\frac{1}{z}) - \frac{3}{x}$$

sau

$$z' + \frac{2}{x}\,z = \frac{1}{x}$$

cu soluţia generală

$$z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\Big(C + \int \frac{1}{x}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\Big) = 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este deci

$$y = 1 + \frac{2x^2}{2C + x^2},\quad x \in I\!R.$$

Dacă, de exemplu, se doreşte determinarea acelei curbe integrale care să treacă prin punctul $(1, 2)$, avem

$$2 = 1 + \frac{2}{2C+1} \implies C = \frac{1}{2}$$

şi ca urmare soluţia căutată este $y = 1 + \dfrac{2x^2}{1+x^2},\ x \in I\!\!R.$ ■

Exemplul 7.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială Riccati*

$$y' = \frac{1}{1+x^3}\,y^2 + \frac{x^2}{1+x^3}\,y + \frac{2\,x}{1+x^3}$$

ştiind că are soluţiile particulare

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x - 1, \quad y_3 = -\,\frac{1}{x}$$

SoluţiConform ultimei observaţii, soluţia generală este dată de

$$\frac{y-x^3}{y-x+1} : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = C \quad \text{sau} \quad y = \frac{C(1-x^2)+x^2}{1-C(x+1)},$$

de unde vedem că soluţia generală este transformare omografică de constanta arbitrară C. ■

7.3 Ecuaţii diferenţiale algebrice în y'.

Fie ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi

$$A_0(x,y)(y')^n + A_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x,y)y' + A_n(x,y) = 0, \quad (7.141)$$

care provine din anularea unui polinom în y' cu coeficienţii $A_k(x,y)$ funcţii continue de x şi y întrun domeniu $D \subset I\!\!R^2$ şi cu $A_0(x,y) \neq 0$ în D.

Considerată ca o ecuaţie în y', ecuaţia dată are n rădăcini de forma

$$f_k(x,y), \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

care sunt funcţii de x şi y. Fiecărei rădăcini reale îi corespunde ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi

$$y' = f(x,y). \qquad (7.142)$$

O soluţie a ecuaţiei (7.142) este soluţie a ecuaţiei (7.141).

Exemplul 7.3.1 *Să se afle soluţiile ecuaţiei diferenţiale*

$$y\,y'^2 - (1 + 2xy)y' + 2x = 0.$$

SoluţiEcuaţia diferenţială dată este o ecuaţie algebrică de gradul doi în variabila y'. Rezolvată în raport cu y' ne dă următoarele două ecuaţii:

$$y' = \frac{1}{y}; \quad y' = 2\,x,$$

care au respectiv soluţiile:

$$y^2 = 2\,x + C_1; \quad y = x^2 + C_2,$$

în care C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare. ■

7.4 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, nerezolvate în raport cu y', integrabile prin metode elementare

7.4.1 Ecuaţia diferenţială de forma $y = f(y')$

Teorema 7.4.1 *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale*

$$y = f(y') \tag{7.143}$$

este dată de

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{1}{p} f'(p)\,dp + C, \\ y = f(p). \end{cases} \tag{7.144}$$

Demonstraţie. Să punem

$$y' = p \tag{7.145}$$

şi să luăm p drept variabilă independentă. Avem:

$$y = f(p) \implies dy = f'(p)\,dp; \tag{7.146}$$

$$\frac{dy}{dx} = p, \implies dx = \frac{1}{p}\,dy. \tag{7.147}$$

Din (7.146) şi (7.147) deducem

$$dx = \frac{1}{p}\, f'(p)\, dp, \tag{7.148}$$

de unde printr–o cuadratură se obţine prima din relaţiile (7.144). Cea de a doua relaţie din (7.144) rezultă din (7.143) şi (7.145).

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este dată parametric prin relaţiile (7.144) şi, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie uniparametrică de curbe plane. ∎

Exerciţiul 7.4.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y = {y'}^2 + \ln y', \quad y' > 0.$$

Soluţie. Punem $y' = p$ şi ecuaţia devine

$$y = p^2 + \ln p \implies dy = \Big(2\,p + \frac{1}{p}\Big)dp.$$

Avem apoi

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dx = \frac{1}{p}\,dy \implies dx \;=\; \frac{1}{p}\Big(2\,p + \frac{1}{p}\Big)dp.$$

Integrând ultima egalitate, în care considerăm că $p > 0$, obţinem

$$x = \int \Big(2 + \frac{1}{p^2}\Big)dp = 2p - \frac{1}{p} + C.$$

Din cele deduse constatăm că soluţia generală este

$$\begin{cases} x \;=\; 2p - \dfrac{1}{p} + C, \\ y \;=\; p^2 + \ln p, \quad p > 0. \end{cases}$$

Prin urmare, prin această metodă soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date se exprimă parametric. ∎

7.4.2 Ecuaţia diferenţială de tipul $F(y, y') = 0$

Integrarea acestui tip de ecuaţie diferenţială se face cu o cuadratură dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$. Să presupunem că o asemenea reprezenatre este

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \quad t \in [a, b] \subset I\!R, \end{cases}$$

în care funcţiile φ şi ψ le considerăm continue, iar φ să aibă derivata continuă. Având în vedere cine sunt variabilele u şi v, avem

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \implies dx = \frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t).$$

Din ultima relaţie, prin integrare în ambii membri, obţinem

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Prin urmare, soluţia generală, reprezentată parametric de

$$\begin{cases} x &= \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y &= \varphi(t), \end{cases}$$

este definită pe orice interval real $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care integrala $\displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$ are sens.

Exerciţiul 7.4.2 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y^2 + y'^2 = 1.$$

Soluţie. Reprezentarea parametrică despre care se vorbeşte în teorie este

$$\begin{cases} y &= \sin t, \\ y' &= \cos t, \ t \in I\!R. \end{cases}$$

Din cea de a doua ecuaţie de mai sus se obţine

$$\frac{dy}{dx} = \cos t \implies dx = \frac{1}{\cos t} dy = \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t dt = dt \implies x = t + C.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este

$$\begin{cases} x & = & t + C, \\ y & = & \sin t, \ \ t \in I\!R \end{cases} \Longleftrightarrow y = \sin{(x - C)}, \ \ x \in I\!R.$$

În acest exemplu, eliminarea parametrului s–a efectuat simplu. ■

7.4.3 Ecuaţia diferenţială de forma $x = f(y')$

Teorema 7.4.2 *Soluţia generală a ecuaţiei*

$$x = f(y'),$$

unde f *este o funcţie cu derivata continuă întrun interval* $[a, b]$, *este dată de*

$$\begin{cases} x & = & f(p), \\ y & = & \displaystyle\int p\, f'(p)\, dp + C, \quad p \in [a, b]. \end{cases}$$

Demonstraţie. Să punem $y' = p$ şi să luăm p ca variabilă independentă. Avem

$$x = f(p) \implies dx = f'(p)\, dp.$$

Pe de altă parte din $y' = p$ avem pe rând

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p\, dx = p\, f'(p)\, dp,$$

de unde obţinem pe y printr–o cuadratură

$$y = \int p\, f'(p)\, dp + C.$$

Reunind rezultatele de mai sus constatăm că soluţia generală a ecuaţiei $x = f(y')$ este dată în forma parametrică din enunţul teoremei. ■

Exerciţiul 7.4.3 *Să se integreze ecuaţia diferenţială* $x = y' + e^{y'}$.

Soluţie. Dacă punem $y' = p$, din ecuaţie obţinem

$$x = p + e^p \implies dx = (1 + e^p)dp.$$

Pornind din nou de la notaţia $y' = p$ şi utilizând rezultatul stabilit mai sus, avem

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p\,dx \implies dy = p(1 + e^p)dp.$$

Prin integrarea ultimei egalităţi, obţinem

$$y = \int (p + pe^p)dp = \frac{1}{2}p^2 + (p-1)e^p + C, \quad p \in I\!R.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este dată parametric de

$$\begin{cases} x = p + e^p, \\ y = \dfrac{1}{2}p^2 + (p-1)e^p + C, \quad p \in I\!R. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului p presupune rezolvarea unei ecuaţii transcendente. ■

7.4.4 Ecuaţia diferenţială de tipul $F(x, y') = 0$

Integrarea aceastei ecuaţii diferenţiale se reduce la o cuadratură dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$.

Să presupunem că o reprezenatre parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ este

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \quad t \in [a, b] \subset I\!R, \end{cases}$$

în care funcţiile φ şi ψ sunt continue şi φ are derivată continuă. Având în vedere semnificaţia variabilelor u şi v, avem

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \Longrightarrow dx = \varphi'(t)dt, \\ y' = \psi(t) \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \psi(t) \Longrightarrow dy = \psi(t)\varphi'(t)dt. \end{cases}$$

Din ultima egalitate, prin integrare, obţinem

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este dată de familia de curbe plane

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C, \quad t \in [a,b], \end{cases}$$

unde C este o constantă reală arbitrară.

Soluţia generală este definită pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care integrala

$$\int \psi(t)\varphi'(t)dt$$

are sens.

Exerciţiul 7.4.4 *Să se integreze ecuaţia diferenţială* $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

Soluţie. Trebuie să determinăm o reprezentare parametrică a curbei definită implicit de ecuaţia

$$u^3 + v^3 - 3uv = 0.$$

Vom căuta o reprezentare parametrică $u = u(t)$, $v = v(t)$ cu proprietatea $v = tu$. Mergând cu această valoare a lui v în ecuaţie, după simplificare cu u^2, găsim $u = \dfrac{3t}{1+t^3}$ şi prin urmare $v = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Pentru aflarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale date pornim de la $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ şi $y' = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Penultima relaţie rămâne definitivă, în timp din cea de a doua obţinem

$$dy = \frac{3t^2}{1+t^3}dx = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3(1+t^3) - 9t^3}{(1+t^3)^2}dt = \frac{9(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \cdot t^2\, dt.$$

Funcţia y se determină prin integrare şi obţinem

$$y = \int \frac{9(1-t^3)}{(1+t^3)^3} \cdot t^2\, dt = 9\int \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^3} - 6\int \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^2}.$$

Astfel, găsim că y are expresia

$$y = -\frac{9}{2}\frac{1}{(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C.$$

Prin urmare, soluţia generală este dată parametric prin

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = -\dfrac{9}{2(1+t^3)^2} + \dfrac{6}{1+t^3} + C, \quad t \neq -1. \end{cases}$$

■

7.4.5 Ecuaţia diferenţială de tip Lagrange

Definiţia 7.4.1 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma*

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y'), \tag{7.149}$$

în care membrul al doilea este o funcţie liniară de x, *cu coeficienţi funcţii de clasă* $C^1(I)$, $I \subset I\!R$, *se numeşte* **ecuaţie diferenţială de tip Lagrange** *sau* **ecuaţie Lagrange**.

Teorema 7.4.3 *Integrarea unei ecuaţii Lagrange se reduce la integrarea unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi.*

Demonstraţie. În (7.149) efectuăm înlocuirea

$$y' = p, \quad p = p(x). \tag{7.150}$$

Cu notaţia (7.150), ecuaţia (7.149) devine

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p). \tag{7.151}$$

Derivând (7.97) în raport cu x şi ţinând seama de partea a doua a relaţiei (7.97), avem

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx}. \tag{7.152}$$

În ecuaţia (7.152) înlocuim membrul întâi cu p şi avem

$$p = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx} \tag{7.153}$$

sau

$$\Big(x\,\varphi'(p) + \psi'(p)\Big)\frac{dp}{dx} + \varphi(p) - p = 0. \tag{7.154}$$

Dacă considerăm p ca variabilă independentă şi x ca funcţie necunoscută, ecuaţia (7.154) se scrie în forma

$$\Big(\varphi(p) - p\Big)\frac{dx}{dp} + x\,\varphi'(p) + \psi'(p) = 0, \tag{7.155}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi în $x = x(p)$.

Considerăm întâi că funcţia φ este definită pe un subinterval al intervalului I în care ecuaţia

$$\varphi(p) - p = 0 \tag{7.156}$$

nu are nici o soluţie. În acest caz ecuaţia (7.155) se scrie în forma

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x \; = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \tag{7.157}$$

Folosind formula de integrare a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi, vom avea

$$x = f(p, C). \tag{7.158}$$

Dacă ţinem seama de ecuaţiile (7.152) şi (7.158) obţinem soluţia generală a ecuaţiei Lagrange sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = f(p, C), \\ y = f(p, C)\,\varphi(p) + \psi(p). \end{cases} \tag{7.159}$$

Să studiem acum cazul în care p_0 este o rădăcină reală a ecuaţiei (7.156). În acest caz, ecuaţia (7.154) admite soluţia $p = p_0$. Dacă înlocuim în (7.97) pe p cu p_0, şi ţinem cont de (7.156), obţinem

$$y = p_0 x + \psi(p_0), \tag{7.160}$$

care este o soluţie a ecuaţiei Lagrange (7.149) care nu este conţinută în soluţia generală (7.159) şi deci este soluţie singulară.

În legătură cu comportarea curbelor integrale ale ecuaţiei diferenţiale de tip Lagrange faţă de dreapta (7.160) putem avea două situaţii:

- dacă $\lim\limits_{p\to p_0} |x| = \lim\limits_{p\to p_0} |f(p, C)| \; = +\infty$, dreapta (7.160) este o direcţie asimptotică a curbelor integrale (7.159).

- dacă $\lim\limits_{p\to p_0}|x| = \lim\limits_{p\to p_0}|f(p,C)| =$ finit, (7.160) este soluţie singulară a ecuaţiei (7.149).

■

Exerciţiul 7.4.5 *Să se integreze ecuaţia diferenţială de tip Lagrange*

$$y = x\,y'^2 + y'^3.$$

Soluţie. Notăm $y' = p$, deci $y = xp^2 + p^3$; derivăm în raport cu x,

$$p = 2\,x\,p\,\frac{dp}{dx} + p^2 + 3p^2\,\frac{dp}{dx}$$

şi, în ipoteza $p^2 - p \neq 0$, obţinem ecuaţia liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}\,x = -\,\frac{3p}{p-1},$$

care are soluţia generală

$$x = e^{-\int \frac{2}{p-1}dp}\Big(C - \int \frac{3p}{p-1}e^{\int \frac{2}{p-1}dp}\,dp\Big).$$

Efectuând integrările, găsim

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\Big(C - p^3 + \frac{3}{2}p^2\Big).$$

Înlocuind expresia lui x ca funcţie de p în $y = xp^2 + p^3$ determinăm y ca funcţie de p. După calcule elementare, găsim

$$y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\Big(C - \frac{1}{2}p^2 + p\Big).$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date, reprezentată parametric, este

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{(p-1)^2}\Big(C - p^3 + \dfrac{3}{2}p^2\Big),\\[2ex] y &= \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\Big(C - \dfrac{1}{2}p^2 + p\Big). \end{cases}$$

Ecuaţia $p^2 - p = 0$ are rădăcinile $p = 0$ şi $p = 1$, care conduc la soluţiile singulare $y = 0$, respectiv $y = x + 1$.

Deoarece pentru $p \to 1$ şi $C \neq -\dfrac{1}{3}$ avem $|x| \to +\infty$, rezultă că dreapta $y = x + 1$ este direcţie asimptotică a curbelor integrale care au $C \neq -\dfrac{1}{3}$. Dacă $C = -\dfrac{1}{3}$, curba integrală corespunzătoare se descompune în dreapta $y = x + 1$ şi o curbă algebrică de ordinul al doilea (conică). ■

Exerciţiul 7.4.6 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y = x\,y'^2 + y'^2.$$

Soluţie. Notând $y' = p$, ecuaţia devine $y = x\,p^2 + p^2$. Derivând în ambii membri în raport cu x şi ţinând seama că $y' = p$, obţinem

$$p = p^2 + 2\,x\,p\,\frac{dp}{dx} + 2\,p\,\frac{dp}{dx}.$$

Pentru $p \neq 0$, ecuaţia diferenţială corespunzătoare este cu variabile separabile. După separarea variabilelor, ecuaţia devine

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p},$$

iar integrarea acesteia conduce la

$$x + 1 = \frac{C}{(p-1)^2},$$

de unde rezultă x ca funcţie de p.

Înlocuind această valoare a lui x în expresia lui y ca funcţie de x şi p, găsim

$$y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date se reprezintă parametric în forma

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1, \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Dacă $p = 0$, din ecuaţia iniţială deducem $y = 0$ care este soluţie singulară deoarece

$$\lim_{p\to 0} |x| = \lim_{p\to 0} |f(p, C)| = \lim_{p\to 0} \frac{C}{(p-1)^2} - 1 = C - 1 = \text{ finit.}$$

Curba integrală corespunzătoare soluţiei singulare este axa Ox. ■

7.4.6 Ecuaţia diferenţială de tip Clairaut

Definiţia 7.4.2 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma*

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{7.161}$$

în care ψ este o funcţie de variabila reală y', de clasă $C^1(I)$, $I \subset I\!R$, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Clairaut** *sau* **ecuaţie Clairaut**.

Teorema 7.4.4 *Ecuaţia Clairaut* (7.161) *are soluţia generală*

$$y = C\,x + \psi(C) \tag{7.162}$$

şi admite o soluţie singulară reprezentată parametric de

$$\begin{cases} x &= -\,\psi'(p), \\ y &= -\,p\,\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \tag{7.163}$$

care, din punct de vedere geometric, este înfăşurătoarea dreptelor din (7.162).

Demonstraţie. După cum se vede o ecuaţie Clairaut este o ecuaţie Lagrange particulară, anume când $\varphi(p) = p$. Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru ecuaţia diferenţială de tip Lagrange. Înlocuim pe y' cu p

$$y = xp + \psi(p),$$

apoi derivăm în raport cu x şi ţinem seama că p este funcţie de x. Avem

$$p = p + x\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx} \implies \Big(x + \psi'(p)\Big)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Din ultima egalitate desprindem două posibiltăţi:

- $\dfrac{dp}{dx} = 0$, adică $p = C$. Înlocuind $p = C$ în (7.161), obţinem soluţia generală (7.162). Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei Clairaut reprezintă geometric o familie de drepte a cărei ecuaţie se obţine înlocuind în ecuaţia diferenţială (7.161) pe y' cu o constantă C;
- $x + \psi'(p) = 0$, de unde $x = -\psi'(p)$ şi dacă înlocuim în (7.161) acest rezultat, obţinem o curbă integrală a ecuaţiei (7.161) reprezentată parametric de (7.163). Din punct de vedere geometric, curba integrală (7.163) este înfăşurătoarea familiei de drepte (7.162) deoarece ecuaţiile ei se obţinprin eliminarea constantei C între (7.162) şi derivata în raport cu C a lui (7.162).

■

Exerciţiul 7.4.7 *Să se integreze ecuaţia diferenţială de tip Clairaut*

$$y = xy' - e^{y'}.$$

SoluţiPunem $y' = p$ şi rescriem ecuaţia dată în forma $y = x\,p - e^p$. Diferenţiind–o, obţinem

$$dy = pdx + xdp - e^p dp.$$

Cum $dy = pdx$, din ultimul rezultat se deduce $(x - e^p)dp = 0$. În acest fel, sau $dp = 0$, sau $x = e^p$. Dacă luăm $dp = 0$, atunci $p = C$; înlocuind această valoare a lui p în egalitatea $y = px - e^p$, obţinem soluţia generală în forma

$$y = Cx - e^C.$$

Dacă luăm $x = e^p$, atunci $y = p\,e^p - e^p = (p-1)e^p$ şi ajungem la soluţia singulară

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p-1)e^p, \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului p din soluţia singulară, care are valoarea $p = \ln x$, găsim că ecuaţia carteziană explicită a soluţiei singulare este

$$y = x(\ln x - 1).$$

Să demonstrăm că soluţia singulară este înfăşurătoarea familei de drepte ce reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date, adică ar trebui să demonstrăm că tangenta la soluţia singulară, întrun punct (x_0, y_0) al ei, are forma unei drepte identice cu cea din soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date. Ecuaţia tangentei este

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0), \quad \text{sau} \quad y - x_0(\ln x_0 - 1) = (x\ - x_0)\ln x_0$$

care, după reducerea termenilor asemenea, devine $y = x\ \ln x_0 - x_0$. Dacă aici punem $\ln x_0 = C$, ecuaţia tangentei la curba integrală ce provine din soluţia singulară, întrun punct (x_0, y_0) al ei, este $y = Cx - e^C$, adică tocmai curba integrală ce provine din soluţia generală. ■

7.4.7 Ecuaţia diferenţială de forma $y = f(x, y')$

Ne propunem să arătăm cum se integrează ecuaţiile diferenţiale de forma

$$y = f(x, y'), \tag{7.164}$$

unde f este o funcţie diferenţiabilă pe un domeniu plan. Dacă notăm $y' = p$ ecuaţia devine

$$y = f(x, p)$$

care, derivată în raport cu x, unde se ţine cont de faptul că $p = p(x)$, conduce la

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dx} \tag{7.165}$$

adică la o ecuaţie rezolvată în raport cu $\dfrac{dp}{dx}$.

Dacă putem integra (7.165) avem

$$p = \varphi(x, C)$$

care, introdusă în (7.164), ne conduce la soluţia generală căutată

$$y = f\Big(x, \varphi(x, C)\Big).$$

Exerciţiul 7.4.8 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y = y'^2 - y'\,x + \frac{x^2}{2}.$$

Soluţie. Punem $y' = p$, deci $y = p^2 - px + \dfrac{x^2}{2}$, derivăm în raport cu x şi ţinem seama că $p = p(x)$:

$$p = 2\,p\,\frac{dp}{dx} - x\,\frac{dp}{dx} - p + x \implies (2p - x)(1 - \frac{dp}{dx}) = 0.$$

Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 1$, atunci avem $p = x + C$ care introdus în ecuaţia $y = p^2 - px + \dfrac{x^2}{2}$ conduce la soluţia generală

$$y = C^2 + C\,x + \frac{1}{2}\,x^2, \quad x \in I\!\!R.$$

Dacă $x = 2p$, din aceeaşi ecuaţie folosită mai sus deducem $y = p^2$. Prin urmare, obţinem soluţia reprezentată parametric

$$\begin{cases} x &= 2p, \\ y &= p^2, \quad p \in I\!\!R, \end{cases}$$

care, nefiind obţinută din soluţia generală de mai sus pentru nici o valoare a lui C, este soluţie singulară. Se observă că soluţia singulară, care este o parabolă, este înfăşurătoarea familiei de curbe integrale din soluţia generală care sunt tot parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa Oy. ∎

Exerciţiul 7.4.9 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$xy'^2 + (y - 3x)y' + y = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia diferenţială dată se poate scrie în forma

$$y = x \cdot \frac{3y' - y'^2}{1 + y'}$$

şi se încadrează în tipul studiat mai sus.

Înlocuind $y' = p$, obţinem

$$y = x \cdot \frac{3p - p^2}{1 + p}. \tag{7.166}$$

Derivând (7.166) în raport cu x, obţinem ecuaţia

$$(p+1)\Big(\frac{2}{x}+\frac{p+3}{p(p+1)}\cdot\frac{dp}{dx}\Big)=0,$$

din care rezultă $p=1$ precum şi ecuaţia

$$\frac{p+3}{p(p+1)}dp+\frac{2}{x}dx=0, \tag{7.167}$$

care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separate.

Integrând, obţinem

$$x^2=C\frac{(p+1)^2}{p^3}. \tag{7.168}$$

Înlocuind (7.168) în ceea ce se obţine din (7.166) prin ridicare la pătrat, găsim

$$y^2=C\frac{(p-3)^2}{p}. \tag{7.169}$$

Eliminând pe p între (7.168) şi (7.169), determinăm soluţia generală sub formă implicită

$$(xy^2+Cy+3Cx)(y^3+15Cy-27Cx)+C^2(y-9x)^2=0. \tag{7.170}$$

Considerând acum $p=1$ şi mergând cu această valoare a lui p în ecuaţia (7.166), găsim că $y=x$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale iniţiale. Această soluţie nu se poate obţine din soluţia generală şi prin urmare este soluţie singulară. ■

7.4.8 Ecuaţia diferenţială de tipul $x=f(y,y')$

La fel ca la celelalte ecuaţii diferenţiale studiate în acest paragraf, se face notaţia $y'=p$, deci ecuaţia dată devine

$$x=f(y,p). \tag{7.171}$$

Derivând, de data aceasta în raport cu y, în ambii membri ai lui (7.171) şi ţinând cont că x şi p pot fi considerate funcţii de y, găsim

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dy}. \tag{7.172}$$

Dacă putem integra (7.172), care este o ecuaţie diferenţială în funcţia necunoscută p, cu variabila independentă y, obţinem

$$p = \varphi(y, C). \tag{7.173}$$

Introducerea lui (7.173) în (7.171) conduce la soluţia generală

$$x = f\Big(y, \varphi(y, C)\Big). \tag{7.174}$$

Exerciţiul 7.4.10 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y'^3 - 4\,x\,y\,y' + 8\,y^2 = 0. \tag{7.175}$$

Soluţie. Se observă că

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'} \tag{7.176}$$

şi deci ecuaţia este de tipul celei studiată la acest punct.

Înlocuind $y' = p$ şi derivând în raport cu y, după reducerea termenilor asemenea şi grupări convenabile se ajunge la

$$(p^3 - 4y^2)\Big(2y\frac{dp}{dy} - p\Big) = 0. \tag{7.177}$$

Dacă considerăm cazul când se anulează cel de al doilea factor, adică $2y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$, integrând ecuaţia corespunzătoare găsim

$$p = C\,\sqrt{y}. \tag{7.178}$$

Înlocuind această valoare a lui p în ecuaţia $x = f(y, p)$, deducem

$$C^3 - 4Cx + 8\sqrt{y} = 0 \implies y^2 = C_1(x - C_1)^2, \quad (4C_1 = C^2). \tag{7.179}$$

Celălalt factor egalat cu zero conduce în cele din urmă la parabola cubică $y = \dfrac{4}{27}x^3$, care este o soluţie singulară. ■

Capitolul 8

Ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin n integrabile prin cuadraturi

În acest capitol vom prezenta tipuri de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin superior cărora li se pot reduce ordinul şi care apoi pot fi integrate prin operaţii de cuadrare.

8.1 Ecuaţii diferenţiale de tipul $y^{(n)} = f(x)$

Considerăm ecuaţie diferenţială de ordinul n simplă

$$y^{(n)} = f(x), \tag{8.1}$$

unde f este o funcţie continuă pe un interval I.

Ea se integrează uşor prin cuadraturi. Într-adevăr, din ecuaţia (8.1) obţinem prin integrări succesive

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_k}{k!}(x-x_0)^k,\ x \in I, \tag{8.2}$$

unde $C_0,\ C_1, \cdots,\ C_{n-1}$ sunt constante arbitrare, iar x_0 este un punct oarecare, însă fix din intervalul I.

Exerciţiul 8.1.1 *Să se afle soluţia ecuaţiei diferenţiale* $y^{'''} = 24\,x$ *care satisface condiţiile iniţiale* $y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y^{''}(0) = 2.$

Soluţie. Prin integrări succesive, obţinem soluţia generală

$$y = x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \tag{8.3}$$

Impunând soluţiei (8.3) să satisfacă condiţiile iniţiale, găsim $C_3 = 1$, $C_2 = -1$ şi $C_1 = 1$.

Prin urmare, soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială dată este $y = x^4 + x^2 - x + 1$. ■

8.2 Ecuaţia diferenţială $F(x, y^{(n)}) = 0$

Teorema 8.2.1 *Fie ecuaţia diferenţială*

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{8.4}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$,

$$\begin{cases} u &= \varphi(t), \\ v &= \psi(t), \end{cases} \tag{8.5}$$

cu φ *şi* ψ *funcţii continue cu derivate continue pe un interval* I, *integrala generală pe* I *a ecuaţiei diferenţiale* (8.4) *se obţine prin* n *cuadraturi.*

Demonstraţie. Din reprezentarea parametrică (8.5), deducem mai întâi

$$\begin{cases} x &= \varphi(t), \\ y^{(n)} &= \psi(t), \end{cases} \tag{8.6}$$

şi apoi

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)} dx = \varphi'(t)\psi(t)dt.$$

Din ultima relaţie, printr–o cuadratură, obţinem

$$y^{(n-1)} = \int \varphi'(t)\psi(t)dt + C_0 = \Phi_1(t) + C_0. \tag{8.7}$$

Relaţia (8.7) poate fi scrisă în forma

$$d(y^{(n-2)}) = (\Phi_1(t) + C_0)\varphi'(t)dt \tag{8.8}$$

şi după integrare aceasta ne dă

$$y^{(n-2)} = \int \Phi_1(t)\varphi'(t)dt + C_0\varphi(t) + C_1.$$

Repetând operaţia de n ori obţinem pe y ca funcţie de t

$$y = \Phi(t) + P_{n-1}(\varphi(t)), \quad t \in I, \tag{8.9}$$

unde P_{n-1} este un polinom de grad $n-1$, cu coeficienţi reali arbitrari, având variabila funcţia φ. Relaţia (8.9) împreună cu prima relaţie din (8.6) ne dă integrala generală sub formă parametrică. ■

Observaţia 8.2.1 *Dacă ecuaţia* (8.4) *defineşte implicit pe* x *prin relaţia*

$$x = f(y^{(n)}), \tag{8.10}$$

atunci o reprezentare parametrică este dată de

$$\begin{cases} y^{(n)} &= t, \\ x &= f(t). \end{cases} \tag{8.11}$$

Din prima relaţie (8.11), *găsim*

$$y = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + C_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots, \ +C_{n-1}t + C_n. \tag{8.12}$$

Cea de a doua relaţie din (8.11) *şi cu* (8.12) *dau o reprezentare parametrică pentru soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale* (8.4) *în cazul particular când din ecuaţia* $F(u,v) = 0$ *se poate explicita* v *ca funcţie de* u.

Exerciţiul 8.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x = y'' + \ln y'', \quad y'' > 0. \tag{8.13}$$

Soluţie. Ecuaţia dată se încadrează în Observaţia 8.2.1. Cu notaţia $y'' = t$ avem că $x = t + \ln t$. Apoi:

$$y' = \int y''dx = \int t(1 + \frac{1}{t})dt = \frac{1}{2}t^2 + t + C_1;$$
$$y = \int y'dx = \int \Big(\frac{1}{2}t^2 + t + C_1\Big)\Big(1 + \frac{1}{t}\Big)dt + C_2.$$

Din cele deduse mai sus rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (8.13) este dată parametric de

$$\begin{cases} x = t + \ln t, \\ y = \dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{3}{4}t^2 + C_1(t + \ln t) + t + C_2, \quad t > 0, \end{cases}$$

de unde vedem că ea depinde de două constante arbitrare. Dacă din prima ecuaţie se poate determina în mod unic t ca funcţie de x, înlocuind rezultatul în expresia lui y ca funcţie de t se poate obţine soluţia generală în forma $y = g(x, C_1, C_2)$. ■

8.3 Ecuaţia diferenţială $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Teorema 8.3.1 *Fie ecuaţia diferenţială*

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{8.14}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$,

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \end{cases} \tag{8.15}$$

cu φ, ψ *şi* φ' *funcţii continue, iar* $\psi(t) \neq 0$ *pe un interval* I, *integrala generală pe* I *a ecuaţiei diferenţiale* (8.14) *se obţine prin* n *cuadraturi.*

Demonstraţie. Din reprezentarea parametrică (8.15) putem scrie:

$$\begin{aligned} & y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad t \in I; \\ & y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad d(y^{(n-1)}) = \psi(t)dx, \quad t \in I; \\ & dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt. \end{aligned}$$

Din ultima relaţie, printr–o cuadratură, obţinem

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_0 = \Phi(t) + C_0. \tag{8.16}$$

Avem aşadar

$$\begin{cases} x & = \Phi(t) + C_0, \\ y^{(n-1)} & = \varphi(t), \end{cases}$$

şi am redus problema integrării la acea rezolvată la punctul precedent. Mai precis, avem

$$d(y^{(n-2)}) = \varphi(t)dx = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt,$$

de unde, printr–o cuadratură, găsim

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1.$$

Procedeul continuă şi după $n-2$ cuadraturi se obţine integrala generală sub formă parametrică. ■

Exerciţiul 8.3.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială de ordinul trei*

$$y'''^2 + y''^2 = 1.$$

Soluţie. O reprezentare parametrică a ecuaţiei $u^2+v^2 = 1$ este $u = \sin t,\ v = \cos t$, de unde deducem $y'' = \sin t,\ \ y''' = \cos t$. Avem $d(y'') = y'''dx$, sau $\cos t\, dt = \cos t\, dx$, deci $dx = dt \implies x = t + C_1$. Din $y'' = \sin t$ şi $x = t + C_1$ obţinem pe rând

$$\begin{aligned} y'' &= \sin(x - C_1), \\ y' &= -\cos(x - C_1) + C_2, \\ y &= -\sin(x - C_1) + C_2x + C_3, \quad x \in I\!R. \end{aligned}$$

Ultima funcţie de mai sus reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date. ■

8.4 Ecuaţia diferenţială $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

Teorema 8.4.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul* n *de forma particulară*

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \tag{8.17}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei plane $F(u, v) = 0$,

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \end{cases} \tag{8.18}$$

unde φ, ψ *şi* φ' *sunt funcţii continue pe un interval* $I \subset I\!R$, *atunci integrala generală a ecuaţiei diferenţiale* (8.17) *se obţine prin n cuadraturi.*

Demonstraţie. Din ecuaţiile parametrice (8.18) avem

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t) \tag{8.19}$$

sau

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}dx, \quad d(y^{(n-2)}) = y^{(n-1)}dx, \tag{8.20}$$

din care, evaluând pe dx şi egalând rezultatele, deducem

$$\frac{d(y^{(n-1)})}{y^{(n)}} = \frac{d(y^{(n-2)})}{y^{(n-1)}}. \tag{8.21}$$

Folosind (8.19) în (8.21), avem $y^{(n-1)}d(y^{(n-1)}) = \psi(t)\varphi'(t)dt$. Integrând această ecuaţie diferenţială, obţinem $[y^{(n-1)}]^2 = 2\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1$, din care, mai departe, găsim

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1}. \tag{8.22}$$

Relaţia (8.22) împreună cu prima relaţie din (8.19) arată că ecuaţia dată s–a redus la tipul studiat la punctul precedent. ■

Exerciţiul 8.4.1 *Să se determine soluţiile ecuaţiei diferenţiale*

$$y'''y' = y''^2.$$

Soluţie. Se observă că ecuaţia dată se mai scrie în forma

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''}{y'} \Longrightarrow \ln y'' = \ln y' + \ln C_1 \Longrightarrow y'' = C_1 y' \Longrightarrow d(y') = d(C_1 y),$$

din care rezultă ecuaţia diferenţială cu variabile separabile $y' = C_1 y + C_2$. După separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{dy}{C_1 y + C_2} = dx \Longrightarrow \ln(C_1 y + C_2) = C_1(x + C_3) \Longrightarrow C_1 y + C_2 = e^{C_1(x+C_3)}$$

şi în acest mod s–a obţinut soluţia generală a ecuaţiei date sub formă explicită în care intervin trei constante arbitrare. ■

Capitolul 9

Ecuaţii diferenţiale ordinare care admit micşorarea ordinului

9.1 Ecuaţia $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$

Teorema 9.1.1 *Ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul n*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{9.1}$$

în care lipsesc funcţia necunoscută y şi derivatele sale până la ordinul $k-1$, prin schimbarea de funcţie

$$y^{(k)} = u \tag{9.2}$$

se transformă în ecuaţia diferenţială de ordinul $n-k$

$$F(x, u, u', \cdots, u^{(n-k)}) = 0. \tag{9.3}$$

Demonstraţie. Dacă punem $y^{(k)} = u$, obţinem relaţiile

$$y^{(k+1)} = u',\ y^{(k+2)} = u'', \ldots,\ y^{(n)} = u^{(n-k)},$$

pe care dacă le înlocuim în (9.1) obţinem (9.3). Dacă reuşim să integrăm pe (9.3), deci să obţinem soluţia generală

$$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}),$$

integrarea ecuaţiei (9.1) se reduce la integrarea ecuaţiei de ordinul k

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}),$$

care este de tipul uneia studiate anterior. ■

Exercițiul 9.1.1 *Să se găsească soluția generală a ecuației*

$$x\,y^{(4)} - y^{(3)} = 2\,x^3 \tag{9.4}$$

și apoi să se determine acea soluție care satisface condițiile:

$$y(1) = 1;\; y'(1) = 1;\; y''(1) = 0;\; y^{(3)}(1) = 0.$$

Soluție. Dacă punem $y^{(3)} = u$, se obține ecuația în u

$$x\,u' - u = 2\,x^3,$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă cu soluția generală

$$u = C_1 x + x^3.$$

Revenind la funcția inițială, obținem ecuația diferențială de ordinul trei

$$y^{(3)} = C_1 x + x^3.$$

Integrând succesiv ultima ecuație, avem:

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{1}{2}C_1 x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C_2;\\
y' &= \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{20}x^5 + C_2 x + C_3;\\
y &= \frac{1}{24}C_1 x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad x \in I\!R.
\end{aligned}$$

Ultima relație este soluția generală a ecuației din enunț.

Impunând condițiile inițiale, obținem un sistem liniar, neomogen de 4 ecuații cu necunoscutele C_1, C_2, C_3, C_4. Rezolvând acest sistem, găsim

$$C_1 = -1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}, \quad C_3 = \frac{13}{15}, \quad C_4 = \frac{1}{24}.$$

Prin urmare, soluția care îndeplinește condițiile inițiale este

$$y(x) = \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{15}x + \frac{1}{24}.$$

■

9.2 Ecuaţia $F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

Teorema 9.2.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma*

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{9.5}$$

Prin transformarea $y' = p$ şi luând pe y ca variabilă independentă, ecuaţiei date i se paote reduce ordinul cu o unitate.

Demonstraţie. Transformarea care urmează să o efectuăm se poate scrie $\dfrac{dy}{dx} = p$. Derivând această egalitate în raport cu x obţinem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}; \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(p \cdot \frac{dp}{dy}\Big) = \frac{d}{dy}\Big(p \cdot \frac{dp}{dy}\Big) \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= p \cdot \Big(\frac{dp}{dy}\Big)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2p}{dy^2}. \end{aligned}$$

Derivatele de ordin 4 şi mai mare se calculează în mod asemănător.

Analizând aceste derivate, constatăm că derivata de ordinul k a funcţiei y în raport cu x de $k-$ori se obţine cu ajutorul funcţiei p şi ale derivatelor acesteia în raport cu variabila y până la ordinul $k-1$.

Înlocuirea în (9.5) a tuturor derivatelor astfel calculate conduce la o ecuaţie diferenţială de ordin $n-1$ în funcţia necunoscută $p = p(y)$. ■

Exerciţiul 9.2.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y\,y'' + {y'}^2 + y^2 = 0.$$

Soluţie. Procedăm conform demonstraţiei de mai sus. Avem $y' = p$, $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}$. Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, obţinem

$$y\,p\,\frac{dp}{dy} + p^2 + y^2 = 0,$$

care este o ecuaţie diferenţială omogenă pentru că se poate scrie în forma

$$\frac{dp}{dy} = -\,\frac{1+\Big(\dfrac{p}{y}\Big)^2}{\dfrac{p}{y}}.$$

După efectuarea schimbării $p = y\,z \implies \dfrac{dp}{dy} = y\,\dfrac{dz}{dy} + z$ în ultima ecuaţie diferenţială, urmată de separarea variabilelor, aceasta devine

$$\frac{dy}{y} = -\,\frac{z\,dz}{1+2z^2}.$$

Soluţia generală a ultimei ecuaţii diferenţiale este

$$y^4 = \frac{C_1}{1+2\,z^2}.$$

Revenind la p, soluţia de mai sus se poate scrie

$$y^2 = \frac{C_1}{1+2\,p^2}$$

din care deducem

$$p^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{C_1 - y^4}{y^2}$$

care mai departe implică

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{C_1 - y^4}}{y}.$$

Ultimele ecuaţii obţinute sunt cu variabile separabile. Efectuând separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 - y^4}} = \pm\,\frac{dx}{\sqrt{2}},$$

care integrate dau soluţiile

$$\pm\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 = \frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{y^2}{\sqrt{C_1}}.$$

Soluţia generală depinde de două constante arbitrare deoarece ecuaţia diferenţială ordinară dată este de ordinul al doilea. ■

9.3 Ecuaţia $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$, omogenă în $y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}$

Teorema 9.3.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma*

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{9.6}$$

omogenă în variabilele $y, y', \cdots, y^{(n)}$. Prin schimbarea de funcţie $\dfrac{y'}{y} = u$ ordinul ecuaţiei se reduce cu o unitate.

Demonstraţie. Din faptul că ecuaţia diferenţială (9.6) este omogenă în variabilele $y, y', \cdots, y^{(n)}$ rezultă că ea se poate scrie în forma

$$G\Big(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \cdots, \frac{y^{(n)}}{y}\Big) = 0. \tag{9.7}$$

Făcând substituţia $y' = y\,u$, obţinem succesiv:

$$y'' = (yu)' = y'u + yu' = y(u^2 + u');$$
$$y''' = \Big(y(u^2 + u')\Big)' = y'(u^2 + u') + y(2uu' + u'') = y(u^3 + 3uu' + u'').$$

Derivatele următoare ale funcţiei y se calculează asemănător.

Din aceste calcule deducem că raportul dintre derivata de ordinul k a funcţiei y şi funcţia y este o expresie în care apar funcţia u şi derivatele până la ordinul $k-1$, deci dacă înlocuim aceste rapoarte în (9.7) obţinem o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$ în funcţia necunoscută u care depinde de aceeaşi variabilă x. ■

Exerciţiul 9.3.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^2yy'' = (y - xy')^2.$$

Soluţie. Tipul acestei ecuaţii se încadrează în cel studiat mai sus pentru că funcţia $x^2yy'' - (y - xy')^2$ este un polinom omogen de gradul al doilea în variabilele y, y' şi y''. Dacă facem schimbarea de funcţie $y' = uy$ obţinem $y'' = y(u^2 + u')$ şi ecuaţia se transformă în

$$x^2(u^2 + u') = (1 - xu)^2 \implies x^2u' + 2xu = 1,$$

care este o ecuaţie liniară cu soluţia generală

$$u = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Amintindu–ne cine este funcţia u, din ultimul rezultat obţinem ecuaţia diferenţială

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2},$$

care este o ecuaţie cu variabile separate. Integrarea ei conduce la

$$\ln y = \ln x - \frac{C_1}{x} + C_2 \implies y = x\, e^{C_2 - C_1/x},$$

unde x aparţine unui interval I cuprins în intervalul $(0, +\infty)$. ■

9.4 Ecuaţia $F(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^ny}{dx^n}) = 0$, omogenă în x, y, dx, dy, d^2y, $\cdots$, d^ny

Teorema 9.4.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma*

$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\Big) = 0 \tag{9.8}$$

omogenă în variabilele $x, y, dx, dy, d^2y, \cdots, d^ny$. Prin schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$|x| = e^t, \quad \frac{y}{x} = u \tag{9.9}$$

ordinul ecuaţiei se reduce cu o unitate.

Demonstraţie. Din faptul că ecuaţia dată este omogenă rezultă că ea se poate scrie în forma

$$G\Big(\frac{y}{x}, y', xy'', x^2y''', \cdots, x^{n-1}y^{(n)}\Big) = 0. \tag{9.10}$$

În ipoteza că intervalul I pe care se caută soluţiile ecuaţiei (9.8) este inclus în intervalul $(0, +\infty)$, facem schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$x = e^t, \quad \frac{y}{x} = u, \quad t \in J \subset I\!R, \quad u = u(t). \tag{9.11}$$

Constatăm prin calcul că obţinem succesiv:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ux) = x\dfrac{du}{dx} + u = x\dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dx} + u = \dfrac{du}{dt} + u; \\ xy'' = x\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{du}{dt} + u\Big) = x\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{du}{dt} + u\Big)\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{du}{dt}; \\ x^2y''' = \dfrac{d^3u}{dt^3} - \dfrac{du}{dt}. \end{cases} \tag{9.12}$$

Continuând calculele pentru a determina expresia $x^k y^{(k+1)}$, $k \geq 3$, ajungem la concluzia că aceasta se exprimă în funcţie numai de derivatele până la ordinul $k+1$ ale funcţiei u. Folosind (9.11) şi expresiile (9.12) ale termenilor de forma $x^s y^{(s+1)}$, $s \in \overline{1, n-1}$, constatăm că (9.10) devine o ecuaţie de forma

$$H\Big(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nu}{dt^n}\Big) = 0, \tag{9.13}$$

care este o ecuaţie de forma (9.6) despre care ştim că, cu schimbarea $\dfrac{du}{dt} = p$, admite o reducere a ordinului cu o unitate.

Dacă intervalul $I \subset (-\infty, 0)$, se fac schimbările

$$x = -e^t, \quad \frac{y}{x} = u, \quad t \in J \subset I\!R, \quad u = u(t)$$

şi raţionamentul decurge asemănător, în final ajungând tot la o ecuaţie de forma (9.13). ■

Exerciţiul 9.4.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^3y'' + xyy' - y^2 = 0$$

pe un interval I cuprins în intervalul $(0, +\infty)$.

Soluţie. Dacă folosim notaţiile lui Leibniz pentru derivatele unei funcţii reale de o variabilă reală constatăm că ecuaţia dată se scrie sub forma echivalentă

$$x^3\, d^2y + x\, y\, dx\, dy - y^2\, dx^2 = 0,$$

de unde se observă că ecuaţia este polinom omogen de grad 4 în variabilele x, y, dx, dy şi d^2y. Conform teoriei prezentată la acest punct, efectuând înlocuirile

$$x = e^t, \quad y = x\,u, \quad u = u(t),$$

deducem că derivata y' şi termenul $x\,y''$ se exprimă prin

$$y = u + u', \quad x\,y'' = u' + u''.$$

Înlocuind în ecuaţie, obţinem

$$e^{2t}(u' + u'') + e^{2t}u(u + u') - e^{2t}u^2 = 0,$$

de unde, după simplificarea cu e^{2t}, deducem ecuaţia diferenţială

$$u'' + u' + uu' = 0.$$

Trecând la funcţia p prin $u' = p$ deducem că $u'' = p\,p'$ şi ecuaţia diferenţială dată se transformă în

$$p(p' + 1 + u) = 0. \tag{9.14}$$

Considerând că $p = 0$ obţinem $u' = 0$, deci $u = C_1$ şi de aici rezultă că $y = C_1 x$ este o primă familie de soluţii ale ecuaţiei.

Anularea celui de al doilea factor din (9.14) conduce la

$$p' + 1 + u = 0 \Longrightarrow \frac{dp}{du} + 1 + u = 0 \Longrightarrow p = -u^2 - u - A_1.$$

Punând în ultimul rezultat $p = \dfrac{du}{dx}$, constatăm că acesta devine

$$\frac{du}{dx} = -u^2 - u - A_1,$$

care este o ecuaţie diferenţială de tip Riccati cu soluţia particulară $u = k$, unde k este o constantă reală, rădăcină a ecuaţiei algebrice $k^2 + k + A_1 = 0$.

În cazul $1 - 4A_1 > 0$ ecuaţia Riccati admite două soluţii reale $u_1 = k_1$ şi $u_2 = k_2$. Dacă efectuăm schimbarea de funcţie

$$v = \frac{u - k_1}{u - k_2},$$

ecuaţia Riccati devine

$$(k_1 - k_2)v' = (4A_1 - 1)v,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile cu soluţia generală

$$v = A_2\, e^{\dfrac{4A_1 - 1}{k_1 - k_2}x}.$$

Dacă avem în vedere că $\dfrac{4A_1 - 1}{k_1 - k_2} = -(k_1 - k_2)$ rezultă că putem scrie

$$ve^{(k_1-k_2)x} = A_2 \Longrightarrow \frac{u - k_1}{u - k_2}e^{(k_1-k_2)x} = A_2 \Longrightarrow \frac{ux - k_1x}{ux - k_2x}e^{(k_1-k_2)x} = A_2.$$

Însă $ux = y$, astfel că ultima egalitate se scrie

$$\frac{y - k_1x}{y - k_2x} \cdot e^{(k_1-k_2)x} = A_2$$

din care, după operaţii simple, se ajunge că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale iniţiale este

$$y = \frac{k_1 \cdot e^{(k_1-k_2)x} - A_2k_2}{e^{(k_1-k_2)x} - A_2}x.$$

Dacă $1 - 4A_1 = 0$ ecuaţia Riccati devine $\dfrac{du}{dx} = -u^2 - u - \dfrac{1}{4}$ şi are soluţia particulară $u = -\dfrac{1}{2}$. Cu substituţia $u = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z}$ ea se transformă în ecuaţia liniară $z' - 1 = 0$, cu soluţia generală $z = x + C_3$, de unde găsim

$$u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x + C_3} \implies y = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{x + C_3}\Big)x.$$

■

9.5 Ecuaţia $F(y, xy', x^2y'', \cdots, x^ny^{(n)}) = 0$

Teorema 9.5.1 *Fie ecuaţia diferenţială ordinară, de ordinul n, de forma*

$$F(y, xy', x^2y'', \cdots,\ x^ny^{(n)}) = 0. \tag{9.15}$$

Prin schimbarea de variabilă $|x| = e^t$, $t \in I\!R$ în (9.15), ordinul ecuaţiei diferenţiale se reduce cu o unitate.

Demonstraţie. Dacă intervalul I pe care este definită funcţia necunoscută y este inclus în semiaxa reală pozitivă, efectuăm schimbarea de variabilă independentă $x = e^t,\ t \in J \subset I\!R$ şi constatăm că variabilele ecuaţiei (9.15) se exprimă după cum urmează

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt} \implies x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}; \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} &= \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big) = e^{-t}\dfrac{d}{dt}\Big(e^{-t}\dfrac{dy}{dt}\Big) = e^{-2t}\Big(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\Big); \\ y''' &= e^{-3t}\Big(\dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\,\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\,\dfrac{dy}{dt}\Big), \\ \cdots . \end{cases} \tag{9.16}$$

Din relaţiile (9.16), deducem:

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} &= \dfrac{dy}{dt}; \\ x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} &= \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}; \\ x^3y''' &= \dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt},\ \cdots . \end{cases} \tag{9.17}$$

Se observă că $x^k\dfrac{d^ky}{dx^k}$ se exprimă numai cu primele k derivate în raport cu t ale funcţiei necunoscute y, acum funcţie de t. Prin urmare, utilizând (9.17), ecuaţia (9.15) se transformă întro ecuaţie diferenţială de forma

$$G\Big(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dt^n}\Big) = 0, \tag{9.18}$$

unde nu apare noua variabilă independentă t. Punând $\dfrac{dy}{dt} = p$ şi luând pe y drept variabilă independentă, ecuaţiei (9.18) i se poate reduce ordinul cu o unitate. ∎

Exerciţiul 9.5.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$x^3y''^2 + 2x^2y'y'' + 2yy' = 0,$$

pe un interval $I \subset (0, +\infty)$.

Soluţie. Prin înmulţirea cu x, ecuaţia devine

$$\Big(x^2y''\Big)^2 + 2(xy')(x^2y'') \ + \ 2\,y(') + 2\,y(xy') = 0.$$

Noua ecuaţie diferenţială fiind de forma studiată mai sus, facem schimbarea de variabilă independentă $x = e^t$. Pentru ca raţionamentul să fie mai clar, vom nota rezultatul compunerii funcţiei y cu funcţia $x = e^t$ prin η, adică $y(x(t)) = y(e^t) = \eta(t)$. Derivatele funcţiei y, calculate în funcţie de derivatele funcţiei η, sunt:

$$\begin{cases} y' \ = \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\eta}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \dfrac{d\eta}{dt}; \\ y'' \ = \ \dfrac{d}{dt}\Big(e^{-t}\eta'\Big)e^{-t} \ = \ \Big(e^{-t}\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - e^{-t}\dfrac{d\eta}{dt}\Big) = e^{-2t}\Big(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{d\eta}{dt}\Big). \end{cases}$$

De aici deducem

$$\begin{cases} xy' \ = \ \dfrac{d\eta}{dt}; \\ x^2y'' \ = \ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{d\eta}{dt}. \end{cases}$$

În acest fel ecuaţia iniţială devine $\Big(\dfrac{d^2\eta}{dt^2}\Big)^2 + 2\,\eta\,\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \Big(\dfrac{d\eta}{dt}\Big)^2 = 0.$

Deoarece în ultima ecuaţie diferenţială nu intră variabila independentă t, luăm pe $\dfrac{d\eta}{dt}$ ca funcţie necunoscută şi pe η ca variabilă independentă. Avem:

$$\frac{d\eta}{dt} = p; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = p\,\frac{dp}{d\eta}$$

şi ultima formă a ecuaţiei se poate scrie

$$\Big(p\,\frac{dp}{d\eta}\Big)^2 + 2\,\eta\,p\,\frac{dp}{d\eta} \ - \ p^2 = 0.$$

Cu schimbarea de funcţie $p^2 = u$, ajungem la ecuaţia Clairaut

$$u = \eta\,u' + \frac{1}{4}\,u'^2$$

a cărei soluţie generală este

$$u = C\,\eta + \frac{1}{4}\,C^2.$$

Luând $C = 4\,C_1$ şi $u = p^2$, constatăm că

$$p^2 = 4\,C_1\,\eta + 4\,C_1^2.$$

Pe de altă parte,

$$p = \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y'\cdot x.$$

Prin urmare,

$$x\cdot y' = \pm 2\sqrt{C_1 y + C_1^2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este

$$\pm\,2\sqrt{C_1 y + C_1^2} = C_1\,\ln x + C_2 \implies 4(C_1 y + C_1^2) = \Big(C_1\,\ln x + C_2\Big)^2,$$

iar din ultima expresie se poate obţine forma sa explicită. ■

Bibliografie

[1] Adams, Robert, A. *Calculus. A complete Course,* Forth ed., Addison–Wesley, 1999

[2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G., *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986

[3] Bucur, Gh. Câmpu, E., Găină, S. *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. III*, Editura Tehnică, Bucureşti 1967

[4] Crstici, B. (coordonator) *Matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[5] Calistru, N., Ciobanu, Gh. *Curs de analiză matematică. Vol. I,* Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1988

[6] Chiriţă, S. *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1989

[7] Colojoară, I. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983

[8] Craiu, M., Tănase, V. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980

[9] Crăciun, I. *Calcul diferenţial*, Editura Lumina, Bucureşti, 1997

[10] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, Al., Fetecău, C. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare liniară*. Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1984

[11] Cruceanu, V. *Algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1973

[12] Dieudonné, J. *Fondements de l'analyse moderne.* Gauthier–Villars, Paris 1963

[13] Dixon, C. *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester· New York· Brisbane· Toronto 1981

[14] Donciu, N., Flondor, D., Simionescu, Gh. – *Algebră şi analiză matematică.* Vol I, Vol II. Culegere de probleme. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucuresşti 1964

[15] Evgrafov, M., Béjanov, K., Sidorov, Y., Fédoruk, M., Chabounine, M. *Recueil de problèmes sur la theorie des fonctions analytiques*, Deuxième édition, Éditions Mir, Moscou 1974

[16] Flondor, P., Stănăşilă, O. *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Ediţia a II–a, Editura ALL, Bucureşti 1996

[17] Fulks, W. *Advanced Calculus. An introduction to analysis*, third edition, John Wiley & Sons, New York· Santa Barbara· Chichester· Brisbane· Toronto 1978

[18] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. II*, Editura Tehnică, Bucureşti 1966

[19] Gheorghiu, N., Precupanu, T. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1979

[20] Hewitt, E., Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York 1965

[21] Marinescu, Gh. *Analiză matematică, vol. I, Ediţia a V–a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980

[22] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. *Analiză matematică, vol I, ediţia a patra*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1971

[23] Olariu, V. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

[24] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983

[25] Precupanu, A. *Bazele analizei matematice*, Editura Universitţii *Al. I. Cuza*, Iaşi 1993

[26] Sburlan, S. *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1991

[27] Sireţchi, G. *Calcul diferenţial şi integral. Vol. I, II*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985

[28] Radu, C., Drăguşin, C., Drăguşin, L. *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1991

[29] Smirnov, V. *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxième édition, tome II, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou 1972

[30] Stănăşilă, O. *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

[31] Sykorski, R. *Advanced Calculus. Functions of several variables*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1969

[32] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988

[33] Zeldovitch, I., Mychkis, A. *Éléments de mathématiques appliquées*, Éditions Mir, Moscou 1974