GEOMETRIE SUPERIOARĂ
ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

Mircea NEAGU şi Alexandru OANĂ

Cuprins

Prefaţă

Această carte reprezintă un curs de geometrie adresat în principal studenţilor din anul I de la facultăţile tehnice. Scopul acestui curs este de a-i iniţia pe viitorii ingineri în tainele geometriei superioare din plan şi din spaţiu, atât de necesară formării unei culturi tehnice solide. Din acest motiv, s-a încercat ca materialul prezentat să aibă un puternic caracter didactic fără însă a se neglija rigurozitatea matematică specifică ştiinţelor exacte.

Actualul mod de prezentare al cărţii îmbină experienţa universitară a autorilor menţionaţi în bibliografie cu experienţa proprie dobândită de-a lungul mai multor ani de predare la catedră. Din această perspectivă, considerăm că modul de prezentare a materiei, precum şi multitudinea şi varietatea exemplelor folosite, asigură prezentei cărţi un grad destul de mare de independenţă şi de sinteză în raport cu bibliografia existentă.

În această carte noţiunile matematice sunt prezentate gradual, pornindu-se de la conceptul geometric abstract de spaţiu euclidian, continuându-se cu studiul spaţiului euclidian al vectorilor liberi, precum şi al elementelor de geometrie analitică ce derivă din acesta, şi finalizându-se cu teoria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor.

Pentru simplificarea expunerii noţiunilor, autorii au utilizat identificarea naturală a unor spaţii, pornindu-se de la ideea că spaţiul $\mathbb{R}^n$ este modelul standard de spaţiu euclidian de dimensiune n. Totodată, pentru a se evita supraîncărcarea şi a se fluentiza exprimarea, limbajul şi notaţiile sunt uneori simplificate, autorii considerând că cititorul înţelege din context sensul corect al noţiunii sau formulei expuse.

Conştienţi de faptul că materialul de faţă poate suporta îmbunătăţiri, autorii acestuia aduc mulţumiri anticipate tuturor cititorilor care vor avea de făcut critici sau sugestii legate de acesta.

Autorii

CAPITOLUL 1

STRUCTURI ALGEBRICE

Un rol însemnat în dezvoltarea fizicii teoretice şi a mecanicii îl poartă noţiunile algebrice abstracte de grup, inel, corp şi spaţiu vectorial. Acestea permit, din punct de vedere algebric, o mai bună sintetizare a cunoştinţelor respectivelor domenii, precum şi o dezvoltare matematic riguroasă a diverselor concepte fizice utilizate. În continuare, ne vom apleca studiul asupra câtorva din cele mai importante structuri algebrice de acest fel: grupul abelian, câmpul de scalari şi spaţiul vectorial.

1.1. Grupuri abeliene. Subgrupuri

Unul dintre rolurile cele mai importante în studiul fizicii teoretice îl joacă noţiunea de grup abelian.

DEFINIŢIA 1.1.1. *O mulţime de obiecte V, înzestrată cu o operaţie*

$$+ : V \times V \to V,$$

*se numeşte **grup abelian** dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:*

(1) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in V$ *-comutativitate;*

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\ x, y, z \in V$ *-asociativitate;*

(3) $\exists\ 0 \in V$ *astfel încât* $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall\ x \in V$ *-element neutru;*

(4) $\forall\ x \in V$, $\exists\ -x \in V$ *astfel încât* $x + (-x) = (-x) + x = 0$ *-opusul unui element.*

Elementul $0 \in V$ *se numeşte **elementul neutru** al grupului* V, *iar elementul* $-x \in V$ *se numeşte **opusul** elementului* $x \in V$.

EXEMPLUL 1.1.1. *Fie mulţimea*

$$V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Înzestrăm mulţimea matricilor pătratice de ordin doi cu operaţia de adunare a matricilor, definită prin

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{array} \right).$$

Se verifică uşor că operaţia de adunare a matricilor conferă acestei mulţimi o structură de grup abelian. Elementul neutru al acestui grup este

$$\mathbb{O} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in M_2(\mathbb{R}).$$

Evident, opusul unui element

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

este definit prin

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

OBSERVAŢIA 1.1.1. *Mai general, mulţimea $V = M_n(\mathbb{R})$ a matricilor pătratice de ordin $n \in \mathbb{N}^*$, împreună cu operaţia clasică de adunare a matricilor, capătă o structură de grup abelian al cărui element neutru este matricea nulă.*

EXEMPLUL 1.1.2. *Fie mulţimea perechilor de numere reale*

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definim adunarea perechilor de numere ca fiind adunarea pe componente

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Se verifică uşor că adunarea perechilor de numere este comutativă, asociativă şi are ca element neutru perechea $\mathbb{O} = (0, 0)$. Opusul unui element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ este elementul $-(x, y) = (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$. În concluzie, $(\mathbb{R}^2, +)$ este un grup abelian.

OBSERVAŢIA 1.1.2. *Mai general, pentru numărul natural $n \geq 2$, mulţimea n-uplurilor de numere reale*

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\},$$

împreună cu operaţia de adunare

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, ..., x_n + x'_n),$$

are o structură de grup abelian. Elementul neutru al acestui grup este

$$\mathbb{O} = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$$

iar opusul unui element $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ este

$$-(x_1, x_2, ..., x_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

EXEMPLUL 1.1.3. *Mulţimea polinoamelor de grad cel mult $n \geq 2$, definită de*

$$V = \mathbb{R}_n[X] = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid grad(f) \leq n\},$$

are o structură de grup abelian, relativ la operaţia de adunare clasică a polinoamelor. Cu alte cuvinte, adunarea polinoamelor este comutativă, asociativă, admite ca element neutru polinomul nul $\mathbb{O}$ şi, în plus, fiecare polinom

$$f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$$

are un opus definit prin

$$-f = -a_0 - a_1X - ... - a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X].$$

Să considerăm acum că $(V, +)$ este un grup abelian. Fie $W \subseteq V$ o submulţime a lui V. Este evident că operaţia de adunare de pe grupul V, definită prin $+ : V \times V \to V$, induce pe submulţimea W o operaţie de adunare, definită prin $+ : W \times W \to V$.

DEFINIŢIA 1.1.2. *Submulţimea $W \subseteq V$ este un* ***subgrup*** *al grupului $(V, +)$ dacă şi numai dacă $(W, +)$ are o structură de grup abelian, relativ la operaţia de adunare a elementelor din W, indusă de adunarea elementelor din V. În această situaţie, vom folosi notaţia $W \leq V$.*

PROPOZIŢIA 1.1.1 (Criteriul de subgrup). *Submulţimea* $W \subseteq V$ *este un subgrup al grupului* $(V, +)$ *dacă şi numai dacă*

$$\forall\ x, y \in W \Rightarrow x - y \in W.$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă $W \subseteq V$ este un subgrup al grupului $(V, +)$, este evident că proprietatea din propoziţie este adevărată.

Reciproc, operaţia indusă de pe V pe W este evident comutativă şi asociativă. Dacă pentru orice $x, y \in W$ rezultă că $x - y \in W$, atunci, luând $x = y$, deducem că elementul neutru 0 al grupului V se află în W. Mai mult, luând $x = 0$, deducem că $\forall\ y \in W \Rightarrow -y \in W$. Cu alte cuvinte, sunt verificate cele patru axiome ale grupului, adică $(W, +)$ este un subgrup al lui $(V, +)$. □

EXEMPLUL 1.1.4. *Fie submulţimea de matrici*

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right) \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq (M_2(\mathbb{R}), +).$$

Luând două matrici arbitrare

$$X = \left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x \end{array} \right) \text{ şi } Y = \left(\begin{array}{cc} y & 0 \\ 0 & y \end{array} \right)$$

din W*, deducem că*

$$X - Y = \left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} y & 0 \\ 0 & y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} x - y & 0 \\ 0 & x - y \end{array} \right) \in W.$$

Conform criteriului de subgrup, obţinem că $W \leq M_2(\mathbb{R})$.

EXEMPLUL 1.1.5. *Să considerăm submulţimea tripletelor de numere reale*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \subseteq (\mathbb{R}^3, +).$$

Avem evident că

$$W = \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Luând acum două triplete de numere reale

$$X = (a, b, -a - b) \text{ şi } Y = (a', b', -a' - b')$$

din W*, constatăm că*

$$\begin{array}{rcl} X - Y & = & (a - a', b - b', -a - b + a' + b') = \\ & = & (a - a', b - b', -(a - a') - (b - b')) \in W. \end{array}$$

Conform criteriului de subgrup, deducem că $W \leq \mathbb{R}^3$.

EXEMPLUL 1.1.6. *Fie submulţimea de polinoame*

$$W = \{\alpha X^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq (\mathbb{R}_2[X], +).$$

Să considerăm două polinoame arbitrare din W, notate $f = \alpha X^2$ *şi* $g = \beta X^2$. *Deducem că*

$$f - g = \alpha X^2 - \beta X^2 = (\alpha - \beta)X^2 \in W.$$

În concluzie, din criteriul de subgrup, obţinem că $W \leq \mathbb{R}_2[X]$.

1.2. Spaţii vectoriale. Subspaţii

În fizică, mecanică şi tehnică se întâlnesc mărimi pe deplin determinate de valorile lor numerice într-un anumit sistem de măsură dat. De exemplu lungimea, aria, volumul, masa sau temperatura unui corp. Toate aceste mărimi poartă numele generic de *mărimi scalare*. Alături de acestea se întâlnesc şi mărimi care, pentru a fi determinate, sunt necesare mai multe entităţi, în afară de o valoare numerică a lor. De exemplu forţele sau vitezele, care sunt determinate de mărimea lor, un sens şi o direcţie. Aceste mărimi se numesc generic *mărimi vectoriale*.

Conceptul matematic care realizează o unificare a mărimilor scalare şi vectoriale şi care, în acelaşi timp, scoate în evidenţă nuanţele diferite ale acestor mărimi distincte, este reprezentat de noţiunea de *spaţiu vectorial* peste un *câmp de scalari*. Este important de subliniat faptul că, în cele mai multe cazuri, mulţimile de mărimi vectoriale sunt înzestrate cu o operaţie internă, în raport cu care acestea capătă o structură de *grup abelian*. În contrast, mărimile scalare sunt adesea înzestrate cu două operaţii algebrice interne care le conferă o structură de *corp comutativ*.

Definiţia 1.2.1. *O mulţime de obiecte K, înzestrată cu două operaţii $+ : K \times K \to K$ (adunarea) şi $\cdot : K \times K \to K$ (înmulţirea), se numeşte* ***câmp de scalari*** *sau* ***corp comutativ*** *dacă*

(1) $(K, +)$ *este grup abelian cu elementul neutru notat* 0;

(2) $(K^*, \cdot)$ *este grup abelian cu elementul neutru* notat 1, *unde* $K^* = K \backslash \{0\}$.

Elementele acestui corp se numesc ***scalari***. ***Opusul*** *unui scalar $\lambda \in K$ este notat $-\lambda \in K$, iar* ***inversul*** *unui scalar $\lambda \in K^*$ este notat $\lambda^{-1} \in K^*$.*

Exemplul 1.2.1. *Fie $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, unde "$+$" reprezintă adunarea numerelor reale şi "$\cdot$" reprezintă înmulţirea numerelor reale. Este cunoscut faptul că $(\mathbb{R}, +)$ este un grup abelian având ca alement neutru numărul* 0. *Opusul unui număr real $\lambda \in \mathbb{R}$ este $-\lambda \in \mathbb{R}$. Mai mult, mulţimea $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ are, de asemenea, o structură algebrică de grup abelian având elementul neutru numărul* 1. *Inversul unui număr real nenul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ este $\lambda^{-1} = 1/\lambda \in \mathbb{R}^*$. În concluzie, avem că $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ, adică un* ***câmp de scalari reali***.

Exemplul 1.2.2. *Prin analogie cu mulţimea numerelor reale, să luăm mulţimea numerelor complexe $(K, +, \cdot) = (\mathbb{C}, +, \cdot)$, unde "$+$" reprezintă adunarea numerelor complexe şi "$\cdot$" reprezintă înmulţirea numerelor complexe. Este cunoscut faptul că mulţimea numerelor complexe $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este un corp comutativ. În concluzie, mulţimea numerelor complexe formează un* ***câmp de scalari complecşi***.

Fie acum $(V, +)$ o mulţime de obiecte, înzestrată cu o operaţie aditivă, în raport cu care mulţimea de obiecte are o structură algebrică de grup abelian. Într-un limbaj specific studiului fizico-geometric, elementele acestui grup se numesc generic *vectori*. Elementul neutru al acestui grup este notat 0_V şi poartă numele de *vectorul nul*. De asemenea, să fixăm un câmp de scalari $(K, +, \cdot)$.

Definiţia 1.2.2. *Mulţimea de vectori $(V, +)$ se numeşte* ***spaţiu vectorial peste câmpul de scalari*** $(K, +, \cdot)$ *sau* K***-spaţiu vectorial*** *dacă există o operaţie algebrică externă (înmulţirea vectorilor cu scalari)*

$$\cdot : K \times V \to V,\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

care verifică următoarele patru proprietăţi axiomatice:

(1) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$, $\forall\ \lambda \in K$, $\forall\ v, w \in V$;

(2) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$, $\forall\ \lambda, \mu \in K$, $\forall\ v \in V$;

(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$, $\forall\ \lambda, \mu \in K$, $\forall\ v \in V$;

(4) $1 \cdot v = v$, $\forall\ v \in V$.

În cazul în care $(V, +)$ *are o structură algebrică de* K*-spaţiu vectorial, vom nota pe scurt* ${}_K V$*, operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire cu scalari fiind subânţelese. Adesea, pentru simplificare, înmulţirea vectorilor cu scalari va fi notată pe scurt* $\lambda \cdot v \overset{not}{=} \lambda v$.

Exemplul 1.2.3. *Să luăm ca mulţime de vectori grupul abelian* $(V, +) = (\mathbb{R}^3, +)$ *şi să fixăm câmpul de scalari* $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Definim înmulţirea vectorilor cu scalari prin*

$$\lambda \cdot (x, y, z) \overset{def}{=} (\lambda x, \lambda y, \lambda z),\ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Este uşor de verificat că avem adevărate relaţiile:

(1) $\lambda \cdot [(x, y, z) + (x', y', z')] = \lambda \cdot (x, y, z) + \lambda \cdot (x', y', z')$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ (x, y, z)$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$;

(2) $(\lambda + \mu) \cdot (x, y, z) = \lambda \cdot (x, y, z) + \mu \cdot (x, y, z)$, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot (x, y, z)) = (\lambda \cdot \mu) \cdot (x, y, z)$, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(4) $1 \cdot (x, y, z) = (x, y, z)$, $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

În concluzie, putem afirma că $\mathbb{R}^3$ *este un* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial sau, cu alte cuvinte, un spaţiu vectorial real. Vectorul nul al acestui spaţiu vectorial este* $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$.

Observaţia 1.2.1. *Mai general, să luăm ca mulţime de vectori grupul abelian* $(V, +) = (\mathbb{R}^n, +)$*, unde* $n \geq 2$*, şi să fixăm câmpul de scalari* $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Definim înmulţirea vectorilor cu scalari în felul următor:*

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) \overset{def}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n),\ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci mulţimea $\mathbb{R}^n$ *are o structură de* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial, relativ la operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire cu scalari definite anterior.*

Exemplul 1.2.4. *Să considerăm că mulţimea de vectori* $(V, +)$ *este grupul abelian al matricilor pătratice de ordin doi* $M_2(\mathbb{R})$ *împreună cu adunarea clasică a matricilor. Fixăm câmpul de scalari reali* $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Definim înmulţirea vectorilor cu scalari reali ca fiind înmulţirea standard a numerelor reale cu matricile. Se ştie că această înmulţire externă verifică cele patru proprietăţi ce definesc un spaţiu vectorial. În concluzie, avem că* $M_2(\mathbb{R})$ *este un* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial. Vectorul nul al acestui spaţiu vectorial este matricea nulă*

$$0_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 1.2.2. *Mai general, să considerăm că mulţimea de vectori* $(V, +)$ *este grupul abelian* $(M_n(\mathbb{R}), +)$*, unde* $n \geq 2$*, al matricilor pătratice de ordin* n *împreună cu adunarea clasică a matricilor pătratice. Fixăm câmpul de scalari reali* $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Definim înmulţirea vectorilor cu scalari reali ca fiind înmulţirea standard a numerelor reale cu matricile pătratice. Atunci mulţimea* $M_n(\mathbb{R})$ *are o structură de* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial, relativ la operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire cu scalari definite anterior.*

Exemplul 1.2.5. *Să considerăm că mulţimea de vectori* $(V, +)$ *este grupul abelian al polinoamelor de grad cel mult doi* $\mathbb{R}_2[X]$ *împreună cu adunarea standard a polinoamelor. Să considerăm câmpul de scalari reali* $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Înmulţirea vectorilor cu scalari reali o definim ca fiind înmulţirea clasică a numerelor reale cu polinoamele. Se ştie că această operaţie verifică cele patru proprietăţi axiomatice de la spaţiile vectoriale. În concluzie, deducem că* $\mathbb{R}_2[X]$ *este un spaţiu vectorial real. Vectorul nul al acestui spaţiu vectorial este polinomul nul* $0_{\mathbb{R}_2[X]} = \mathbb{O}$.

Observaţia 1.2.3. *Mai general, să considerăm că mulţimea de vectori* $(V, +)$ *este grupul abelian* $(\mathbb{R}_n[X], +)$*, unde* $n \geq 2$*, al polinoamelor de grad cel mult* n *împreună cu adunarea standard a polinoamelor. Să considerăm câmpul de scalari reali* $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Înmulţirea vectorilor cu scalari reali o definim ca fiind înmulţirea clasică a numerelor reale cu polinoamele. Atunci mulţimea* $\mathbb{R}_n[X]$ *are o structură de* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial, relativ la operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire cu scalari definite anterior.*

Exemplul 1.2.6. *Vom considera acum o mulţime de vectori şi un câmp de scalari, împreună cu nişte operaţii, în raport cu care nu avem o structură algebrică de spaţiu vectorial. Pentru aceasta să luăm ca mulţime de vectori* V *mulţimea polinoamelor de grad mai mare sau egal cu patru*

$$\mathbb{R}^4[X] = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid grad(f) \geq 4\},$$

împreună cu adunarea vectorilor definită de adunarea clasică a polinoamelor. Luând câmpul de scalari reali $(K, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$*, definim înmulţirea vectorilor cu scalari ca fiind înmulţirea standard a numerelor reale cu polinoamele. Evident, cele patru proprietăţi de la spaţii vectoriale sunt adevărate. Cu toate acestea, mulţimea* $\mathbb{R}^4[X]$ *nu este un* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial deoarece mulţimea* $\mathbb{R}^4[X]$ *nu are o structură de grup abelian în raport cu adunarea vectorilor. În fapt, adunarea vectorilor, adică adunarea polinoamelor, nu este bine definită pe* $\mathbb{R}^4[X]$*. Cu alte cuvinte, suma a două polinoame de grad mai mare sau egal cu patru poate avea ca rezultat un polinom de grad mai mic ca patru. De exemplu, polinomul* $f = X^4 + X^5 \in \mathbb{R}^4[X]$ *adunat cu polinomul* $g = X - X^4 - X^5 \in \mathbb{R}^4[X]$ *are ca rezultat un polinom de grad unu:* $f + g = X \notin \mathbb{R}^4[X]$*. Prin urmare,* $\mathbb{R}^4[X]$ *nu este un spaţiu vectorial real relativ la operaţiile algebrice precizate mai sus.*

Fie V un K-spaţiu vectorial al cărui vector nul este notat 0_V. Să notăm cu 0 şi 1 elementele neutre, relativ la operaţiile de adunare şi înmulţire din câmpul de scalari K.

Propoziţia 1.2.1. *În spaţiul vectorial* $_KV$ *următoarele proprietăţi sunt adevărate:*

(1) $0 \cdot v = 0_V, \forall\, v \in V$;

(2) $(-1) \cdot v = -v$, $\forall\ v \in V$.

DEMONSTRAŢIE. (1) În proprietatea $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall\ \lambda, \mu \in K$, $\forall\ v \in V$, luând $\lambda = \mu = 0$, deducem că $0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Adunând la stânga cu opusul $-0 \cdot v$, obţinem că $0 \cdot v = 0_V$.

(2) În aceeaşi relaţie de mai sus, luând $\lambda = 1$ şi $\mu = -1$, deducem că

$$(1 + (-1)) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v.$$

Ţinând cont că $0 \cdot v = 0_V$ şi $1 \cdot v = v$, obţinem că $0_V = v + (-1) \cdot v$. Adunând la stânga cu opusul $-v$ al vectorului v, deducem că $(-1) \cdot v = -v$. □

Să considerăm în continuare că V este un K-spaţiu vectorial şi $W \subseteq V$ este o submulţime a lui V.

DEFINIŢIA 1.2.3. *Spunem că W este un* ***subspaţiu vectorial*** *al lui ${}_K V$ dacă submulţimea W, împreună cu operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire cu scalari induse de pe spaţiul ${}_K V$, are o structură de K-spaţiu vectorial. În această situaţie, vom folosi notaţia $W \leq_K V$.*

PROPOZIŢIA 1.2.2 (Criteriul de subspaţiu). *Submulţimea $W \subseteq V$ este un subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă sunt adevărate următoarele două proprietăţi:*

(1) $\forall\ v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$;

(2) $\forall\ \lambda \in K, \forall\ v \in W \Rightarrow \lambda v \in W$.

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Să presupunem că $W \leq_K V$. În aceste condiţii, deducem că $(W, +)$ este un grup abelian şi, mai mult, că înmulţirea vectorilor cu scalari este bine definită pe W. Cu alte cuvinte, proprietăţile (1) şi (2) sunt satisfăcute.

" $\Leftarrow$ " Să considerăm că proprietăţile (1) şi (2) sunt adevărate. Atunci, este suficient să demonstrăm că $(W, +)$ este un subgrup în $(V, +)$ şi că sunt verificate cele patru axiome de la spaţii vectoriale. Luând $\lambda = -1$ în a doua relaţie, deducem că $-v \in W$, $\forall\ v \in W$. Prin urmare, folosind prima relaţie, deducem că

$$v + (-v) = v - w \in W,\ \forall\ v, w \in W.$$

Din criteriul de subgrup, obţinem că $(W, +)$ este subgrup al lui $(V, +)$.

Este evident că înmulţirea cu scalari verifică cele patru proprietăţi de la spaţii vectoriale. În concluzie, W are o structură de K-spaţiu vectorial, relativ la operaţiile induse de pe V. Cu alte cuvinte, W este un subspaţiu vectorial al lui V. □

EXEMPLUL 1.2.7. *Fie submulţimea de matrici*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R}).$$

Considerând matricile

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in W \text{ şi } \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in W,$$

deducem că

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in W.$$

Mai mult, luând $\lambda \in \mathbb{R}$*, deducem că*

$$\lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda a \end{pmatrix} \in W.$$

Prin urmare, conform criteriului de subspaţiu, avem $W \leq_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R})$*.*

EXEMPLUL 1.2.8. *Fie submulţimea* $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$*. Luând vectorii* $(x, 0) \in W_1$ *şi* $(y, 0) \in W_1$*, deducem că*

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in W_1.$$

Mai mult, avem

$$\lambda(x, 0) = (\lambda x, 0) \in W_1, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

În consecinţă, avem $W_1 \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$*. Prin analogie, submulţimea* $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ *este un subspaţiu al spaţiului vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$*.*

EXEMPLUL 1.2.9. *Fie* $W = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid grad(f) = 2\} \subseteq \mathbb{R}_2[X]$*. Deoarece suma a două polinoame de grad doi poate avea ca rezultat un polinom de grad mai mic decât doi, deducem că prima proprietate de la criteriul de subspaţiu nu este satisfăcută. De exemplu, luând polinoamele* $f = 2+X^2 \in W$ *şi* $g = 1-X-X^2 \in W$*, obţinem* $f+g = 3-X \notin W$*. În concluzie,* W *nu este un subspaţiu în spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult doi* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$*.*

EXEMPLUL 1.2.10. *Fie* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$*. Evident avem*

$$W = \{(\alpha, \beta, \alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Fie vectorii $(\alpha, \beta, \alpha + 2\beta) \in W$ *şi* $(\alpha', \beta', \alpha' + 2\beta') \in W$*. Suma acestor vectori este*

$$(\alpha + \alpha', \beta + \beta', \alpha + \alpha' + 2(\beta + \beta')) \in W.$$

Mai mult, avem

$$\lambda(\alpha, \beta, \alpha + 2\beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\alpha + 2(\lambda\beta)) \in W, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, conform criteriului de subspaţiu, avem $W \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$*.*

EXEMPLUL 1.2.11. *Fie* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t + 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$*. Submulţimea* W *se poate rescrie sub forma*

$$W = \{(x, y, z, -x - y - z - 1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Luând doi vectori arbitrari din W*, de exemplu*

$$(x, y, z, -x - y - z - 1) \in W \text{ şi } (x', y', z', -x' - y' - z' - 1) \in W,$$

deducem că suma lor

$$(x + x', y + y', z + z', -(x + x') - (y + y') - (z + z') - 2)$$

nu aparţine lui W*. În concluzie,* W *nu este un subspaţiu al spaţiului vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$*.*

1.3. Operaţii cu subspaţii

Fie $S \subseteq_K V$ o submulţime a K-spaţiului vectorial V. Vom utiliza notaţia

$$L(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p \mid p \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_i \in K,\ v_i \in S,\ \forall\ i = \overline{1,p}\}$$

pentru a desemna ceea ce se numeşte *acoperirea liniară* a submulţimii S. Elementele acoperirii liniare $L(S)$ se numesc *combinaţii liniare finite cu vectori din* S.

PROPOZIŢIA 1.3.1. *Acoperirea liniară $L(S)$ este un subspaţiu al spaţiului vectorial ${}_KV$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p \in L(S)$ şi $w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_q w_q \in L(S)$ două combinaţii liniare finite cu vectori din S. Atunci, suma

$$v + w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_q w_q$$

este, de asemenea, o combinaţie liniară finită cu vectori din S. În consecinţă, avem $v + w \in L(S)$. Analog, dacă $\alpha \in K$ este un scalar arbitrar din K, atunci

$$\alpha v = (\alpha\alpha_1) v_1 + (\alpha\alpha_2) v_2 + ... + (\alpha\alpha_p) v_p \in L(S).$$

În concluzie, $L(S) \leq_K V$. □

EXEMPLUL 1.3.1. *Fie submulţimea $S = \{X, X^2\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X]$. Atunci, avem*

$$L(S) = \{\alpha X + \beta X^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X].$$

EXEMPLUL 1.3.2. *Fie submulţimea $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$. Atunci, avem*

$$\begin{aligned} L(S) &= \{\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Notând $\beta + \gamma = \mu$ şi $\alpha + \beta + \gamma = \nu$, rezultă că

$$L(S) = \{(\nu, \mu, \gamma) \mid \nu, \mu, \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

Fie $W_1, W_2 \leq_K V$ două subspaţii ale spaţiului vectorial ${}_KV$.

PROPOZIŢIA 1.3.2. *Intersecţia $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial ${}_KV$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $v, w \in W_1 \cap W_2$. Atunci, deducem că $v, w \in W_1$ şi $v, w \in W_2$. Deoarece W_1 şi W_2 sunt subspaţii, obţinem că $v + w \in W_1$ şi $v + w \in W_2$. Cu alte cuvinte, $v + w \in W_1 \cap W_2$. Analog, avem

$$\alpha v \in W_1 \cap W_2, \forall\ \alpha \in K,\ \forall\ v \in W_1 \cap W_2.$$

□

EXEMPLUL 1.3.3. *Fie subspaţiile vectoriale*

$$W_1 = L\{(1,0,0)\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \text{ şi } W_2 = L\{(1,1,0), (0,0,1)\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$$

Ne propunem să calculăm $W_1 \cap W_2$. Din definiţia acoperirii liniare obţinem că

$$W_1 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ şi } W_2 = \{(\beta, \beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Fie $v \in W_1 \cap W_2$. Deducem că $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = (\alpha, 0, 0)$ şi $v = (\beta, \beta, \gamma)$. Prin urmare, avem $\alpha = \beta = \gamma = 0$, adică $v = (0,0,0)$. În concluzie,

$$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}.$$

Dacă intersecţia a două subspaţii vectoriale este în mod cert un subspaţiu vectorial, prin contrast, reuniunea a două subspaţii vectoriale nu este în mod obligatoriu un subspaţiu vectorial. Din acest motiv, introducem *suma* a două subspaţii vectoriale ca fiind

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2).$$

PROPOZIŢIA 1.3.3. *Suma a două subspaţii vectoriale este dată de mulţimea*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra egalitatea din propoziţie folosind principiul dublei incluziuni.

Este evident că mulţimea $\{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$ este inclusă în $W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$.

Reciproc, să considerăm un vector $v \in W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$. Deducem că vectorul v este o combinaţie liniară finită cu vectori din $W_1 \cup W_2$, adică avem

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p,$$

unde $\alpha_i \in K$ şi $v_i \in W_1 \cup W_2$, $\forall\ i = \overline{1,p}$. Grupând termenii din combinaţia liniară a lui v, într-o parte cei care sunt în W_1 şi în cealaltă parte cei care sunt în W_2, obţinem că $v = w_1 + w_2$, unde $w_1 \in W_1$ şi $w_2 \in W_2$, adică ceea ce aveam de demonstrat.

În final, este important de subliniat faptul că vectorii $w_1 \in W_1$ şi $w_2 \in W_2$ nu sunt unici în descompunerea lui $v = w_1 + w_2$ deoarece, în combinaţia liniară a lui v, termenii comuni din $W_1 \cap W_2$ pot fi ataşaţi aleator la termenii din W_1 sau W_2. $\square$

DEFINIŢIA 1.3.1. *Subspaţiul vectorial sumă $W_1 + W_2$ se numeşte subspaţiu* ***sumă directă*** *dacă $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. În acest caz vom folosi notaţia*

$$W_1 \oplus W_2 = L(W_1 \cup W_2).$$

PROPOZIŢIA 1.3.4. *Dacă W_1 şi W_2 sunt subspaţii aflate în sumă directă, atunci avem*

$$W_1 \oplus W_2 = \{v \in V \mid \exists!\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \text{ astfel încât } v = w_1 + w_2\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Folosind propoziţia anterioară, deducem că este suficient să demonstrăm unicitatea descompunerii vectorului v. Să presupunem atunci ca avem $v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$, unde $w_1, w_1' \in W_1$ şi $w_2, w_2' \in W_2$. Rezultă că avem egalitatea $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$. Deoarece $w_1 - w_1' \in W_1$ şi $w_2' - w_2 \in W_2$, obţinem că $w_1 - w_1'$ şi $w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Cu alte cuvinte, avem $w_1 = w_1'$ şi $w_2 = w_2'$, adică ceea ce aveam de demonstrat. $\square$

EXEMPLUL 1.3.4. *Fie subspaţiile vectoriale în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$, definite prin*

$$W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ şi } W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Fie $v = (x, y) \in W_1 \cap W_2$. Este evident că avem $x = y = 0$, adică avem subspaţiul sumă directă

$$W_1 \oplus W_2 \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2.$$

Fie acum $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector arbitrar din $\mathbb{R}^2$. Acest vector se descompune unic în

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

unde $(x, 0) \in W_1$ şi $(0, y) \in W_2$. În concluzie, avem

$$\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2.$$

EXEMPLUL 1.3.5. *Fie subspaţiile vectoriale în* ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$, *definite prin*

$$W_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right) \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ şi } W_2 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & a \\ -a & 0 \end{array} \right) \middle| \ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să considerăm vectorul

$$v = \left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right) \in W_1 \cap W_2.$$

Deducem imediat că $x = t = 0$, $y = z$ *şi* $y = -z$. *Cu alte cuvinte, avem*

$$x = y = z = t = 0,$$

adică avem subspaţiul sumă directă

$$W_1 \oplus W_2 \leq_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}).$$

Fie acum

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right) \in M_2(\mathbb{R})$$

un vector arbitrar din $M_2(\mathbb{R})$. *Este evident că acest vector se descompune unic în*

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} x & (y+z)/2 \\ (y+z)/2 & t \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & (y-z)/2 \\ -(y-z)/2 & 0 \end{array} \right),$$

unde

$$\left(\begin{array}{cc} x & (y+z)/2 \\ (y+z)/2 & t \end{array} \right) \in W_1$$

şi

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & (y-z)/2 \\ -(y-z)/2 & 0 \end{array} \right) \in W_2.$$

În concluzie, avem

$$M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2.$$

CAPITOLUL 2

GEOMETRIA SPAŢIILOR VECTORIALE

Pe parcursul acestui capitol vom studia diverse noţiuni cu un puternic caracter fizico-geometric. Ne referim, pe de-o parte, la noţiunile de *bază* a unui spaţiu vectorial, *dimensiune* a unui spaţiu vectorial sau *coordonate* ale unui vector, noţiuni aflate în strânsă legătură cu ideea gradelor de libertate ale unui spaţiu fizic. Pe de altă parte, ne referim la noţiunea geometrică de *spaţiu vectorial euclidian*. Un astfel de spaţiu este un spaţiu vectorial înzestrat cu o operaţie adiţională numită *produs scalar*, operaţie care permite introducerea noţiunilor de *lungime* a unui vector sau *unghi* format de doi vectori. Toate aceste noţiuni generalizează natural, în sens matematic abstract, proprietăţi geometrice şi fizice deja utilizate.

2.1. Baze şi dimensiuni

Fie $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subseteq_K V$ o submulţime finită de vectori din K-spaţiul vectorial V.

DEFINIŢIA 2.1.1. *Mulţimea $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se numeşte* ***sistem de generatori*** *pentru spaţiul vectorial ${}_KV$ dacă*

$$L(S) = V.$$

DEFINIŢIA 2.1.2. *Dacă există în spaţiul vectorial ${}_KV$ un sistem de generatori S cu un număr finit de vectori $e_1, e_2, ..., e_n$, atunci spaţiul vectorial ${}_KV$ se numeşte spaţiu vectorial* ***finit generat****.*

PROPOZIŢIA 2.1.1. *Mulţimea $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial ${}_KV$ dacă şi numai dacă*

$$\forall\ v \in V,\ \exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \ \textit{astfel încât}\ v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n.$$

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem întâi că mulţimea $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial ${}_KV$ şi să luăm un vector arbitrar $v \in V = L(S)$. Atunci, din definiţia acoperirii liniare $L(S)$, rezultă că

$$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \text{ astfel încât } v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

adică proprietatea din propoziţie este adevărată.

Reciproc, să presupunem că proprietatea din propoziţie este adevărată şi să luăm un vector arbitrar $v \in V$. Atunci

$$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \text{ astfel încât } v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

adică $v \in L(S)$. Cu alte cuvinte, avem $V \subseteq L(S)$. Deoarece este evident că întotdeauna avem $L(S) \subseteq V$, rezultă că $L(S) = V$, adică mulţimea $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial ${}_KV$. □

EXEMPLUL 2.1.1. *Fie* $S = \{e_1 = (1,2), e_2 = (2,4)\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$. *Vom demonstra că submulţimea* S *nu este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. *Pentru aceasta, să luăm un vector arbitrar* $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Să presupunem că* $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$v = (x,y) = \alpha e_1 + \beta e_2 = \alpha(1,2) + \beta(2,4).$$

Cu alte cuvinte, presupunem că sistemul liniar în necunoscutele α *şi* β, *definit de*

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + 4\beta = y, \end{cases}$$

este compatibil pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. *Deoarece determinantul sistemului este nul, rezultă că acest sistem este compatibil doar dacă* $2x = y$. *În alţi termeni, doar pentru vectorii de forma* $v = (x, 2x)$ *există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $v = \alpha e_1 + \beta e_2$. *Deci, conform propoziţiei anterioare, mulţimea* S *nu este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$.

EXEMPLUL 2.1.2. *Fie submulţimea de vectori*

$$S = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$$

Vom demonstra că submulţimea S *este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. *Pentru aceasta, să luăm un vector arbitrar* $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Să presupunem că* $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} v &= (x,y,z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \\ &= \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1). \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, presupunem că sistemul în necunoscutele α, β *şi* γ, *definit de*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \qquad \beta + \gamma = y \\ \qquad\quad \gamma = z, \end{cases}$$

este compatibil pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Acest lucru este adevărat, deoarece determinantul sistemului este nenul. În concluzie, mulţimea* S *este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

DEFINIŢIA 2.1.3. *Mulţimea* $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *se numeşte* ***liniar independentă*** *în spaţiul vectorial* ${}_K V$ *dacă pentru*

$$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \text{ astfel încât } \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0_V$$

rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. *În cazul în care* S *nu este o mulţime liniar independentă spunem că* S *este* ***liniar dependentă***.

OBSERVAŢIA 2.1.1. *Mulţimea* $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *este liniar dependentă în spaţiul vectorial* ${}_K V$ *dacă există scalarii* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, *nu toţi nuli, astfel încât*

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0_V.$$

EXEMPLUL 2.1.3. *Fie* $S = \{e_1 = (1,2), e_2 = (2,4)\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$. *Vom demonstra că* S *nu este o mulţime liniar independentă în* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. *Pentru aceasta, fie* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \alpha(1,2) + \beta(2,4) = (0,0).$$

Deducem că $\alpha + 2\beta = 0$. *Cu alte cuvinte, există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *nu amândouă nule, astfel încât* $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. *În concluzie,* S *este o mulţime liniar dependentă în* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$.

EXEMPLUL 2.1.4. *Fie* $S = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$. *Fie* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0).$$

Deducem de aici că $\alpha = \beta = \gamma = 0$. *În concluzie,* S *este o mulţime liniar independentă în spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

DEFINIŢIA 2.1.4. *O submulţime* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subseteq_K V$ *se numeşte* ***bază*** *a spaţiului vectorial* ${}_K V$ *dacă* B *este şi un sistem de generatori şi o submulţime liniar independentă în* ${}_K V$.

EXEMPLUL 2.1.5. *Submulţimea* $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *este bază în spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. *Pentru a demonstra că* B *este un sistem de generatori, să observăm că pentru orice vector* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *avem descompunerea naturală*

$$(x,y) = xe_1 + ye_2 = x(1,0) + y(0,1).$$

Mai mult, considerând $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0),$$

deducem că $\alpha = \beta = 0$, *adică submulţimea* B *este liniar independentă. În concluzie,* B *este o bază în* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ *numită* ***baza canonică*** *a lui* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$.

EXEMPLUL 2.1.6. *Submulţimea* $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *este bază în spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. *Aceasta este un sistem de generatori deoarece avem*

$$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1), \ \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Evident, luând $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0),$$

deducem că $\alpha = \beta = \gamma = 0$. *Cu alte cuvinte,* B *este liniar independentă. În concluzie,* B *este o bază în* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ *numită* ***baza canonică*** *a lui* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

EXEMPLUL 2.1.7. *Submulţimea* $B = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ *este bază în spaţiul vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$. *Aceasta este un sistem de generatori deoarece orice polinom de grad cel mult doi are expresia* $f = a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2$, *unde* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Evident, luând* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot X + \gamma \cdot X^2 = \mathbb{O},$$

deducem că $\alpha = \beta = \gamma = 0$. *Cu alte cuvinte,* B *este liniar independentă. În concluzie,* B *este o bază în* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$ *numită* ***baza canonică*** *a lui* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$.

EXEMPLUL 2.1.8. *Submulţimea*

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

este bază în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$. *Pentru a demonstra că* B *este un sistem de generatori, să observăm că avem descompunerea naturală*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, \ \forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Mai mult, considerând $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 = 0_{M_2(\mathbb{R})},$$

deducem că $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, *adică* B *este liniar independentă. În concluzie,* B *este o bază în* ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$ *numită* ***baza canonică*** *a lui* ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$.

TEOREMA 2.1.1 (de existenţă a bazelor). *Fie* $V \neq \{0_V\}$ *un* K*-spaţiu vectorial finit generat. Atunci există în* ${}_KV$ *o bază cu un număr finit de elemente.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $S = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$, $e_i \neq e_j$, $\forall\ i \neq j$, un sistem de generatori pentru ${}_KV$. Rezultă că avem

$$V = L(\{e_1, e_2, ..., e_p\}).$$

Dacă S este liniar independentă, atunci S este o bază a lui ${}_KV$. Dacă S nu este liniar independentă, atunci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_p e_p = 0_V.$$

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $\alpha_p \neq 0$. Atunci

$$e_p \in L(\{e_1, e_2, ..., e_{p-1}\}),$$

care implică egalitatea

$$V = L(S) = L(\{e_1, e_2, ..., e_{p-1}\}).$$

Repetăm raţionamentul de mai sus pentru submulţimea

$$S_1 = \{e_1, e_2, ..., e_{p-1}\}$$

şi deducem că există o submulţime B cu mai puţin de p elemente care este liniar independentă. În plus, mulţimea B generează spaţiul vectorial ${}_KV$, adică este o bază în spaţiul vectorial ${}_KV$. □

TEOREMA 2.1.2. *Fie* $V \neq \{0_V\}$ *un* K*-spaţiu vectorial finit generat. Atunci orice două baze finite ale lui* ${}_KV$ *au acelaşi număr de elemente.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_{n'}\}$ două baze arbitrare ale lui ${}_KV$, unde n (respectiv n') reprezintă numărul de elemente al lui B (respectiv B'). Deoarece B este bază (în particular, B este un sistem de generatori), deducem că

$$\exists\ a_{ij} \in K \text{ astfel încât } e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,\ \forall\ j = \overline{1, n'}.$$

Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n'} \in K$ astfel încât

$$\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + ... + \alpha_{n'} e'_{n'} = 0_V \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j e'_j = 0_V \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j a_{ij} e_i = 0_V.$$

Deoarece $e_1, e_2, ..., e_n$ este un sistem de vectori liniar independenţi, deducem că

$$\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j a_{ij} = 0,\ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

Obţinem astfel un sistem omogen de ecuaţii având n ecuaţii şi n' necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n'}$. Pe de altă parte, deoarece şi vectorii $e'_1, e'_2, ..., e'_{n'}$ sunt liniar independenţi, rezultă că sistemul omogen anterior trebuie să aibă doar soluţia banală. Cu alte cuvinte, trebuie ca numărul de ecuaţii n să fie mai mare, cel mult egal, cu numărul de necunoscute n', adică trebuie să avem $n \geq n'$ şi $rang(A) = n'$, unde $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n'}}$ este matricea sistemului.

Aplicând acelaşi raţionament pentru bazele B' şi B, deducem că $n' \geq n$. În concluzie, avem $n = n'$, adică ceea ce aveam de demonstrat. $\square$

DEFINIŢIA 2.1.5. *Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază arbitrară finită a spaţiului vectorial finit generat ${}_K V$. Numărul elementelor din baza B se numeşte **dimensiunea** spaţiului vectorial ${}_K V$. Dimensiunea spaţiului vectorial ${}_K V$ se notează*

$$\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*.$$

OBSERVAŢIA 2.1.2. *Este important de subliniat că numărul natural n nu depinde de alegerea bazei finite B deoarece, conform teoremei precedente, orice două baze finite ale spaţiului vectorial finit generat ${}_K V$ au acelaşi număr de elemente.*

EXEMPLUL 2.1.9. *Baza canonică în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ este*

$$B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}.$$

Prin urmare, dimensiunea acestui spaţiu vectorial este $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$.

EXEMPLUL 2.1.10. *Baza canonică în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ este*

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

În concluzie, dimensiunea acestui spaţiu vectorial este $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

EXEMPLUL 2.1.11. *Baza canonică în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$ este*

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}.$$

Deducem că dimensiunea acestui spaţiu vectorial este $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3$.

EXEMPLUL 2.1.12. *Baza canonică în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$ este*

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dimensiunea acestui spaţiu vectorial este $\dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}) = 4$.

OBSERVAŢIA 2.1.3. *Este important de remarcat faptul că dimensiunea unui spaţiu vectorial real finit generat coincide cu numărul de variabile independente care determină un vector arbitrar al spaţiului. Mai mult, baza canonică a spaţiului vectorial se obţine luând, pe rând, vectorii determinaţi astfel: primul vector se obţine luând prima variabilă egală cu* 1, *restul variabilelor egale cu* 0; *al doilea vector se obţine luând a doua variabilă egală cu* 1, *celelalte variabile egale cu* 0 *şi aşa mai departe.*

EXEMPLUL 2.1.13. *Avem $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Deoarece un vector arbitrar al spaţiului $v = (x, y)$ este determinat de două variabile independente x şi y, rezultă că* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$. *Cei doi vectori ai bazei canonice a spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ se obţin luând $x = 1$ şi $y = 0$ pentru e_1, respectiv $x = 0$ şi $y = 1$ pentru e_2.*

EXEMPLUL 2.1.14. *În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ un vector arbitrar $v = (x, y, z)$ este determinat de trei variabile independente x, y şi z, deci* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$. *Cei trei vectori ai bazei canonice a spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ se obţin luând pe rând: $x = 1$, $y = z = 0$ pentru e_1, $y = 1$, $x = z = 0$ pentru e_2 şi $z = 1$, $x = y = 0$ pentru e_3.*

EXEMPLUL 2.1.15. *Deoarece un polinom arbitrar de grad cel mult doi, definit prin* $f = a+bX+cX^2$*, este determinat de trei coeficienţi independenţi* a*,* b *şi* $c \in \mathbb{R}$*, deducem că* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3$*. Cei trei vectori ai bazei canonice a spaţiului vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$ *se obţin luând pe rând:* $a = 1$*,* $b = c = 0$ *pentru* e_1*,* $b = 1$*,* $a = c = 0$ *pentru* e_2 *şi* $c = 1$*,* $a = b = 0$ *pentru* e_3*.*

EXEMPLUL 2.1.16. *Deoarece o matrice pătratică de ordin doi, definită prin*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

este bine definită de patru variabile independente a*,* b*,* c *şi* $d \in \mathbb{R}$*, rezultă că* $\dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}) = 4$*. Cei patru vectori ai bazei canonice a spaţiului vectorial* ${}_{\mathbb{R}}M_2(\mathbb{R})$ *se obţin luând pe rând:* $a = 1$*,* $b = c = d = 0$ *pentru* e_1*,* $b = 1$*,* $a = c = d = 0$ *pentru* e_2*,* $c = 1$*,* $a = b = d = 0$ *pentru* e_3 *şi* $d = 1$*,* $a = b = c = 0$ *pentru* e_4*.*

EXEMPLUL 2.1.17. *Să considerăm subspaţiul vectorial*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2.$$

În alţi termeni, subspaţiul W *se scrie sub forma*

$$W = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

În concluzie, dimensiunea acestui subspaţiu este $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$*. Mai mult, baza canonică a subspaţiului* W *este* $B = \{(1, -1)\}$*, unde vectorul din această bază s-a obţinut luând* $x = 1$*.*

TEOREMA 2.1.3. *Fie* $V \neq \{0_V\}$ *un* K*-spaţiu vectorial finit generat. Atunci orice submulţime finită liniar independentă a lui* ${}_KV$ *poate fi completată cu vectori până la o bază în* ${}_KV$*.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $L' \subseteq V$ o submulţime finită liniar independentă a lui ${}_KV$. Fie $v \in V \backslash L(L')$. Rezultă imediat că mulţimea $L' \cup \{v\}$ este liniar independentă.

Fie $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un sistem finit de generatori pentru ${}_KV$ şi fie mulţimea $R = S \backslash L(L')$. Atunci mulţimea $B = L' \cup R$ este evident liniar independentă şi un sistem de generatori. În concluzie, B este o bază în ${}_KV$. □

TEOREMA 2.1.4. *Să considerăm un* K*-spaţiu vectorial* V *de dimensiune*

$$\dim_K V = n \geq 1$$

şi fie $W \leq_K V$ *un subspaţiu vectorial al lui* ${}_KV$*. Atunci avem inegalitatea*

$$\dim_K W \leq \dim_K V$$

cu " = " *dacă şi numai dacă* $W = V$*.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $v_1 \neq 0$ un vector nenul din ${}_KV$. Atunci mulţimea $\{v_1\}$ este liniar independentă în ${}_KV$. Presupunând că $W = L(\{v_1\})$, rezultă ceea ce trebuia demonstrat. Dacă $L(\{v_1\}) \subsetneqq W$, atunci $\exists\, v_2 \in W \backslash L(\{v_1\})$ astfel încât mulţimea $\{v_1, v_2\}$ este liniar independentă. În această situaţie, ori $W = L(\{v_1, v_2\})$ ori $\exists\, v_3 \in W \backslash L(\{v_1, v_2\})$ astfel încât mulţimea $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar independentă. Continuăm procedeul până la cel mult $n = \dim_K V$. Deducem că avem inegalitatea $\dim_K W \leq \dim_K V$.

Să presupunem că $\dim_K W = n$. Atunci orice bază a subspaţiului W este liniar independentă în ${}_KV$ şi conţine n elemente. Prin urmare, aceasta este, de asemenea, o bază a spaţiului vectorial ${}_KV$. Rezultă ceea ce trebuia demonstrat, adică $W = V$. □

TEOREMA 2.1.5 (Grassmann). *Dacă U, W sunt subspaţii finit dimensionale ale lui ${}_KV$, atunci $U+W$ şi $U \cap W$ sunt, de asemenea, subspaţii finit dimensionale ale lui ${}_KV$. Mai mult, avem relaţia*

$$\dim_K(U+W) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K(U \cap W).$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ bază în $U \cap W$. Atunci există vectorii

$$u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_{p+q} \in U$$

şi

$$w_{p+1}, w_{p+2}, ..., w_{p+r} \in W$$

astfel încât

$$\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_{p+q}\}$$

bază în U şi

$$\{e_1, e_2, ..., e_p, w_{p+1}, w_{p+2}, ..., w_{p+r}\}$$

bază în W. Evident, avem

$$\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_{p+q}, w_{p+1}, w_{p+2}, ..., w_{p+r}\}$$

bază în $U+W$. Rezultă ceea ce trebuia demonstrat. □

COROLARUL 2.1.1. *Dacă U, W sunt subspaţii finit dimensionale ale lui ${}_KV$ aflate în sumă directă, atunci $U \oplus W$ este, de asemenea, subspaţiu finit dimensional al lui ${}_KV$. Mai mult, avem relaţia*

$$\dim_K(U \oplus W) = \dim_K U + \dim_K W.$$

DEMONSTRAŢIE. Folosim Teorema Grassmann şi ţinem cont că $U \cap W = \{0_V\}$. □

EXEMPLUL 2.1.18. *Fie $U = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ şi $W = \{\alpha X^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ două subspaţii ale lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$. Atunci avem*

$$\mathbb{R}_2[X] = U \oplus W.$$

Pentru a demonstra acest lucru, fie $f \in U \cap W$. Deducem că $\exists\ a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f = a + bX = \alpha X^2 \Leftrightarrow a + bX - \alpha X^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = \alpha = 0.$$

În concluzie, $U \cap W = \{0\}$, adică subspaţiile U şi W se află în sumă directă:

$$U \oplus W \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X].$$

Mai mult, avem

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \oplus W) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} W = 2 + 1 = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X].$$

2.2. Coordonate. Schimbări de coordonate

Fie V un K-spaţiu vectorial, $\dim_K V = n$. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bază în ${}_KV$. Deoarece B este bază, rezultă că

$$\forall\ v \in V,\ \exists!\ x_1, x_2, ..., x_n \in K \text{ astfel încât } v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

DEFINIŢIA 2.2.1. *Matricea $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M_{1,n}(K)$ se numeşte n**-uplul de coordonate** al vectorului v în baza B a spaţiului vectorial ${}_KV$.*

EXEMPLUL 2.2.1. *Fie vectorul* $v = (3, 2, 1)$ *şi baza*

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 1, 1)\}$$

în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. *Atunci, avem descompunerea*

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

adică, egalând pe componente, avem sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, deducem că $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. *În concluzie, matricea* $(1, 1, 1)$ *reprezintă coordonatele vectorului* v *în baza* B *a spaţiului vectorial* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

EXEMPLUL 2.2.2. *Fie vectorul* $f = 1 + X + X^2$ *şi baza*

$$B = \{e_1 = 1 - X, e_2 = 3, e_3 = 2 + X^2\}$$

în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$. *Atunci, avem descompunerea*

$$f = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

adică, egalând coeficienţii polinoamelor, avem sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 = 1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, deducem că $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ *şi* $x_3 = 1$. *Cu alte cuvinte, coordonatele vectorului* f *în baza* B *sunt* $(-1, 0, 1)$.

Să considerăm acum că $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ este o altă bază a spaţiului vectorial ${}_K V$. Deoarece $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este bază în ${}_K V$, deducem că avem descompunerile:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ...a_{1n}e_n, \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{2n}e_n, \\ . \\ . \\ . \\ e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + ... + a_{nn}e_n, \end{cases}$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$.

DEFINIŢIA 2.2.2. *Matricea* $M_{BB'} = {}^T A = (a_{ji})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ *se numeşte* ***matricea de trecere de la baza*** B ***la baza*** B'.

Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ şi $B'' = \{e''_1, e''_2, ..., e''_n\}$ trei baze ale spaţiului vectorial ${}_K V$, unde $\dim_K V = n$. În acest context, putem demonstra

PROPOZIŢIA 2.2.1. *Următoarele relaţii matriceale sunt adevărate:*

(1) $M_{BB} = I_n$, *unde* $I_n \in M_n(K)$ *este matricea identitate*;
(2) $M_{B'B} = M_{BB'}^{-1}$;

(3) $M_{BB''} = M_{BB'} \cdot M_{B'B''}$.

Demonstraţie. (1) Descompunerea elementelor bazei B în baza B se realizează evident în felul următor:

$$\begin{cases} e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + ... + 0 \cdot e_n, \\ e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + ... + 0 \cdot e_n, \\ . \\ . \\ . \\ e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + ... + 1 \cdot e_n. \end{cases}$$

Rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

(2) Să utilizăm următoarele notaţii formale:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix} \text{ şi } e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ . \\ . \\ . \\ e'_n \end{pmatrix}.$$

Atunci, din definiţia matricii de trecere de la o bază la alta, avem adevărate următoarele relaţii matriceale formale:

$$e' = {}^T M_{BB'} \cdot e \text{ şi } e = {}^T M_{B'B} \cdot e'.$$

Acestea implică egalităţile

$$e' = {}^T M_{BB'} \cdot {}^T M_{B'B} \cdot e' \Rightarrow {}^T M_{BB'} \cdot {}^T M_{B'B} = I_n.$$

Cu alte cuvinte, obţinem ceea ce trebuia demonstrat:

$$M_{BB'} \cdot M_{B'B} = I_n \Leftrightarrow M_{B'B} = M_{BB'}^{-1}.$$

(3) Următoarele relaţii matriceale formale sunt adevărate:

$$e' = {}^T M_{BB'} \cdot e, \; e'' = {}^T M_{BB''} \cdot e \text{ şi } e'' = {}^T M_{B'B''} \cdot e',$$

unde

$$e'' = \begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ . \\ . \\ . \\ e''_n \end{pmatrix}.$$

Aceste relaţii implică egalităţile

$$e'' = {}^T M_{B'B''} \cdot {}^T M_{BB'} \cdot e \Rightarrow {}^T M_{BB''} = {}^T M_{B'B''} \cdot {}^T M_{BB'},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. □

Fie $v \in V$ un vector şi fie

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ şi } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$$

coordonatele, scrise pe coloană, ale vectorului v în bazele

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ şi } B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}.$$

Propoziţia 2.2.2. *Următoarea relaţie matriceală de schimbare a coordonatelor este adevărată:*

$$X = M_{BB'} \cdot X'.$$

Demonstraţie. Deoarece $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ sunt coordonatele vectorului v în baza B', rezultă că avem

$$v = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i.$$

Folosind matricea de trecere de la baza B la baza B', această relaţie se poate scrie sub forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x'_i a_{ij} e_j.$$

În acelaşi timp, deoarece $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sunt coordonatele vectorului v în baza B, avem relaţia

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

În concluzie, din ultimele două egalităţi obţinem egalităţile de coordonate:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ij}, \ \forall\ j = \overline{1, n}.$$

Aceste egalităţi scrise la nivel matriceal conduc la ceea ce aveam de demonstrat. □

Corolarul 2.2.1. *Următoarea relaţie matriceală de schimbare a coordonatelor este adevărată:*

$$X' = M_{BB'}^{-1} \cdot X = M_{B'B} \cdot X.$$

Exemplul 2.2.3. *Fie vectorul $v = (1, 2, 3)$ şi bazele*

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

şi

$$B' = \{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (1, 1, 0), e'_3 = (1, 1, 1)\}$$

în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. Atunci avem adevărate egalităţile

$$\begin{cases} e'_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ e'_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ e'_3 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \end{cases}$$

adică avem

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este evident că vectorul v are coordonatele

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

în baza canonică B. Fie

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

coordonatele vectorului v în baza B'. Din relaţia de schimbare a coordonatelor deducem că

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLUL 2.2.4. *Fie vectorul $f = X^2 - 2X + 5$ şi bazele*

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$$

şi

$$B' = \{e'_1 = 2X, e'_2 = 3, e'_3 = X^2 - 1\}$$

în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$. Atunci avem adevărate egalităţile

$$\begin{cases} e'_1 = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ e'_2 = 3 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ e'_3 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \end{cases}$$

adică avem

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este evident că vectorul f are coordonatele

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

în baza canonică B. Fie

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

coordonatele vectorului f în baza B'. Din relaţia de schimbare a coordonatelor deducem că

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Produse scalare. Lungimi şi unghiuri

Pe întreg parcursul acestei secţiuni vom considera că câmpul de scalari $(K, +, \cdot)$ este corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

Definiţia 2.3.1. *O aplicaţie $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$, satisfăcând proprietăţile*

(1) $< v, w >=< w, v >$, $\forall\ v, w \in V$ *(simetrie);*

(2) $< v_1 + v_2, w >=< v_1, w > + < v_2, w >$, $\forall\ v_1, v_2, w \in V$ *(aditivitate);*

(3) $< \lambda v, w >= \lambda < v, w >$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ v, w \in V$ *(omogeneitate);*

(4) $< v, v >\geq 0$, $\forall\ v \in V$, *cu " = " dacă şi numai dacă $v = 0_V$ (pozitiv definire),*

*se numeşte **produs scalar** pe spaţiul vectorial real ${}_{\mathbb{R}}V$.*

Definiţia 2.3.2. *Un spaţiu vectorial real ${}_{\mathbb{R}}V$, înzestrat cu un produs scalar $<,>$, se numeşte **spaţiu euclidian**.*

Exemplul 2.3.1. *Fie $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ şi $w = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ doi vectori arbitrari ai spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. Să arătăm că aplicaţia*

$$< v, w > \stackrel{def}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \in \mathbb{R}$$

este un produs scalar pe ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. Pentru aceasta trebuie să demonstrăm cele patru proprietăţi care definesc un produs scalar. Simetria rezultă imediat din următoarele egalităţi:

$$< v, w >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 =< w, v > .$$

Luând un scalar arbitrar $\lambda \in \mathbb{R}$, omogeneitatea rezultă din relaţiile:

$$< \lambda v, w >= (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + (\lambda x_3)y_3 = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \lambda < v, w > .$$

Prin analogie, rezultă şi proprietatea de aditivitate a aplicaţiei $<,>$. Pentru a demonstra proprietatea de pozitiv definire să observăm că avem

$$< v, v >= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0,$$

cu " = " dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. În concluzie, $(\mathbb{R}^3, <,>)$ este un spaţiu euclidian.

Exemplul 2.3.2. *Să arătăm că aplicaţia*

$$< f, g > \stackrel{def}{=} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \in \mathbb{R},$$

unde f, g sunt polinoame de grad cel mult doi, este un produs scalar pe ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$. Este evident că avem proprietatea de simetrie:

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx =< g, f > .$$

Luând un scalar arbitrar $\lambda \in \mathbb{R}$, omogeneitatea rezultă din relaţiile:

$$< \lambda f, g >= \int_{-1}^{1} [\lambda f(x)]g(x)dx = \lambda \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \lambda < f, g > .$$

Printr-un calcul simplu, folosind proprietatea de aditivitate a integralei, rezultă şi proprietatea de aditivitate a aplicaţiei $<,>$. Pentru a demonstra proprietatea de pozitiv definire să observăm că inegalitatea $f^2(x) \geq 0,\ \forall\ x \in [-1, 1]$, implică inegalitatea integrală

$$< f, f >= \int_{-1}^{1} f^2(x)dx \geq 0.$$

Mai mult, să presupunem că avem $< f, f >= 0$. Din punct de vedere geometric aceasta înseamnă că aria subgraficului funcţiei pozitive $f^2 \geq 0$ este nulă. Însă această arie este nulă dacă şi numai dacă $f(x) = 0,\ \forall\ x \in [-1, 1]$. Cu alte cuvinte, avem $< f, f >= 0$ dacă şi numai dacă $f = \mathbb{O}$. În concluzie, $(\mathbb{R}_2[X], <, >)$ este un spaţiu euclidian.

TEOREMA 2.3.1 (inegalitatea Cauchy). *În orice spaţiu euclidian $(V, <, >)$ produsul scalar satisface următoarea inegalitate Cauchy:*

$$< v, w >^2 \leq < v, v > \cdot < w, w >,\ \forall\ v, w \in V,$$

cu " = " dacă şi numai dacă v şi w sunt liniar dependenţi.

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că $w = 0$. Atunci avem $< w, w >= 0$. Pe de altă parte, folosind aditivitatea produsului scalar, obţinem

$$< v, 0 > + < v, 0 >=< v, 0 >,\ \forall\ v \in V,$$

adică $< v, 0 >= 0$, $\forall\ v \in V$. Cu alte cuvinte, inegalitatea Cauchy este adevărată în acest caz.

Să presupunem acum că $w \neq 0$ şi să luăm un vector arbitrar $v \in V$. Pozitiv definirea produsului scalar implică inegalitatea

$$< v + \alpha w, v + \alpha w > \geq 0,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Folosind aditivitatea şi omogeneitatea produsului scalar, deducem că

$$< w, w > \alpha^2 + 2\alpha < v, w > + < v, v > \geq 0,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare trebuie ca discriminantul ecuaţiei de grad doi să fie negativ, adică

$$\Delta = 4 < v, w >^2 - 4 < w, w >< v, v > \leq 0.$$

Mai mult, dacă discriminantul este nul rezultă că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$v + \alpha w = 0,$$

adică v şi w sunt liniar dependenţi. Rezultă ceea ce aveam de demonstrat. □

COROLARUL 2.3.1. *Fie* $(V, <,>)$ *un spaţiu euclidian. Atunci funcţia*

$$|| \; || : V \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$||v|| = \sqrt{<v,v>}, \; \forall \; v \in V,$$

verifică următoarele proprietăţi:

(1) $||v|| \geq 0, \forall \; v \in V$, *cu* $" = "$ *dacă şi numai dacă* $v = 0_V$*;*
(2) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||, \forall \; \lambda \in \mathbb{R}, \forall \; v \in V$*;*
(3) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||, \forall \; v, w \in V$, *(inegalitatea triunghiului).*

DEMONSTRAŢIE. Pozitiv definirea şi omogeneitatea produsului scalar implică imediat proprietăţile (1) şi (2). Folosind proprietăţile produsului scalar şi inegalitatea lui Cauchy, deducem inegalitatea triunghiului:

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= <v+w, v+w> = <v,v> + 2<v,w> + <w,w> \leq \\ &\leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2 \cdot |<v,w>| \leq \\ &\leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2 \cdot ||v|| \cdot ||w|| = (||v|| + ||w||)^2, \; \forall \; v, w \in V. \end{aligned}$$

□

DEFINIŢIA 2.3.3. *Funcţia* $|| \; || : V \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$||v|| = \sqrt{<v,v>}, \; \forall \; v \in V,$$

se numeşte ***norma (lungimea) euclidiană*** *a spaţiului euclidian* $(V, <,>)$.

EXEMPLUL 2.3.3. *Să calculăm lungimea (norma) vectorului* $v = (1, 2, 3)$ *în spaţiul euclidian* $(\mathbb{R}^3, <,>)$. *Folosind definiţia produsului scalar pe spaţiul vectorial real* $\mathbb{R}^3$, *obţinem*

$$||v|| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

EXEMPLUL 2.3.4. *Să calculăm lungimea (norma) vectorului* $f = X$ *în spaţiul euclidian* $(\mathbb{R}_2[X], <,>)$. *Folosind definiţia produsului scalar pe spaţiul vectorial real* $\mathbb{R}_2[X]$, *obţinem*

$$||f|| = \sqrt{<f,f>} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

DEFINIŢIA 2.3.4. *Fie* $(V, <,>)$ *un spaţiu euclidian şi fie* $v, w \in V \backslash \{0_V\}$ *doi vectori arbitrari nenuli. Atunci, numărul real* $\theta \in [0, \pi]$, *definit de relaţia*

$$\cos\theta = \frac{<v,w>}{||v|| \cdot ||w||} \in [-1, 1],$$

se numeşte ***unghiul*** *dintre* v *şi* w *în spaţiul euclidian* $(V, <,>)$.

EXEMPLUL 2.3.5. *Să calculăm unghiul dintre vectorii*

$$v = (1, 2, 3) \text{ şi } w = (3, 2, 0)$$

în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$. *Conform definiţiei produsului scalar pe spaţiul vectorial real* $\mathbb{R}^3$, *avem*

$$<v,w> = <(1,2,3),(3,2,0)> = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 7,$$

$$||v|| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \text{ şi } ||w|| = \sqrt{3^2+2^2+0^2} = \sqrt{13}.$$

În concluzie, obţinem

$$\cos\theta = \frac{<v,w>}{||v||\cdot||w||} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{7}{26}} \Leftrightarrow \theta = \arccos\sqrt{\frac{7}{26}}.$$

EXEMPLUL 2.3.6. *Să calculăm unghiul dintre vectorii*

$$f = X \text{ şi } g = X^2$$

în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}_2[X], <,>)$. *Conform definiţiei produsului scalar pe spaţiul vectorial real* $\mathbb{R}_2[X]$, *avem*

$$<f,g>= \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

Deducem că $\cos\theta = 0$, *adică* $\theta = \pi/2$.

DEFINIŢIA 2.3.5. *Doi vectori nenuli* $v, w \in V\backslash\{0_V\}$ *sunt* ***ortogonali (perpendiculari)*** *în spaţiul euclidian* $(V, <,>)$ *dacă*

$$<v,w>= 0.$$

În această situaţie, vom folosi notaţia $v \perp w$.

PROPOZIŢIA 2.3.1. *Orice doi vectori nenuli ortogonali* $v \perp w$ *în spaţiul euclidian* $(V, <,>)$ *sunt liniar independenţi.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha v + \beta w = 0_V$, unde

$$<v,w>= 0.$$

Aplicând în egalitatea precedentă produsul scalar cu vectorul v, obţinem

$$\alpha <v,v> + \beta <w,v>= 0,$$

adică $\alpha = 0$. Analog, făcând produsul scalar al egalităţii de mai sus cu vectorul w, deducem că $\beta = 0$. În concluzie, mulţimea $\{v, w\}$ este liniar independentă. □

COROLARUL 2.3.2. *Fie* $(V, <,>)$ *un spaţiu euclidian de dimensiune*

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n \geq 1.$$

În acest context, orice mulţime de n *vectori ortogonali unul pe celălalt formează o bază a spaţiului euclidian* $(V, <,>)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie mulţimea de vectori $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subseteq_{\mathbb{R}} V$, unde

$$e_i \perp e_j, \ \forall\, i,j = \overline{1,n}, \ i \neq j.$$

Conform propoziţiei anterioare, deducem că mulţimea B este liniar independentă. Deoarece avem

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n,$$

rezultă că mulţimea B este de fapt bază în spaţiului euclidian $(V, <,>)$. □

2.4. Baze ortonormate. Complemente ortogonale

Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în spaţiul euclidian $(V, <, >)$, unde $\dim_{\mathbb{R}} V = n$.

DEFINIŢIA 2.4.1. *Spunem că baza* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *este o bază* ***ortonormată*** *a spaţiului euclidian* $(V, <, >)$ *dacă sunt adevărate proprietăţile:*

$$e_i \perp e_j, \ \forall\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j \ \text{şi}\ ||e_i|| = 1, \ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

OBSERVAŢIA 2.4.1. *O bază* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *este ortonormată în spaţiul euclidian* $(V, <, >)$ *dacă sunt adevărate proprietăţile:*

$$< e_i, e_j >= 0, \ \forall\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j \ \text{şi}\ < e_i, e_i >= 1, \ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

EXEMPLUL 2.4.1. *În spaţiul euclidian* $(\mathbb{R}^3, <, >)$ *baza canonică*

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

este o bază ortonormată deoarece, prin calcule simple, deducem că

$$e_1 \perp e_2 \perp e_3 \perp e_1 \ \text{şi}\ ||e_1|| = ||e_2|| = ||e_3|| = 1.$$

EXEMPLUL 2.4.2. *În spaţiul euclidian* $(\mathbb{R}_2[X], <, >)$ *baza canonică*

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$$

nu este o bază ortonormată deoarece

$$\begin{aligned} ||e_1|| &= ||1|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2} \neq 1, \\ ||e_2|| &= ||X|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 1, \\ ||e_3|| &= ||X^2|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4 dx} = \sqrt{\frac{2}{5}} \neq 1 \end{aligned}$$

şi, mai mult, avem

$$< e_1, e_3 >=< 1, X^2 >= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0.$$

În studiul spaţiilor euclidiene este mult mai convenabil să utilizăm baze ortonormate decât baze neortonormate deoarece primele furnizează importante proprietăţi geometrice ale spaţiului. În consecinţă, vom detalia în continuare un procedeu prin care putem asocia unei baze neortonormate o bază nouă, care este ortonormată. Evident, un asemenea procedeu ne asigură de faptul că în orice spaţiu euclidian există cel puţin o bază ortonormată.

TEOREMA 2.4.1 (Procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt). *Fie*

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

o bază neortonormată a spaţiului euclidian $(V, <, >)$, *unde* $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. *În acest context, se poate construi o nouă bază*

$$GS(B) = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$$

care este ortonormată în spaţiul euclidian $(V, <, >)$ *şi a cărei construcţie este furnizată de baza iniţială* B.

DEMONSTRAŢIE. Pornind de la elementele bazei B, construim sistemul de vectori

$$B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$$

ale cărui elemente sunt definite în felul următor:

$e'_1 = e_1;$

$e'_2 = e_2 + k_{21}e'_1,\ k_{21} \in \mathbb{R};$

$e'_3 = e_3 + k_{31}e'_1 + k_{32}e'_2,\ k_{31}, k_{32} \in \mathbb{R};$

.

.

.

$e'_i = e_i + k_{i1}e'_1 + k_{i2}e'_2 + ... + k_{ii-1}e'_{i-1},\ k_{im} \in \mathbb{R},\ \forall\ m = \overline{1, i-1};$

.

.

.

$e'_n = e_n + k_{n1}e'_1 + k_{n2}e'_2 + ... + k_{nn-1}e'_{n-1},\ k_{nm} \in \mathbb{R},\ \forall\ m = \overline{1, n-1}.$

Vom arăta în continuare că mulţimea de vectori B' reprezintă un sistem de generatori pentru spaţiul euclidian $(V, <, >)$. Pentru aceasta vom demonstra prin inducţie după $i \in \{1, 2, ..., n\}$ că avem

$$L(\{e_1, e_2, ..., e_i\}) = L(\{e'_1, e'_2, ..., e'_i\}).$$

Pentru $i = 1$ este evident că avem

$$L(\{e_1\}) = L(\{e'_1\}).$$

Să considerăm $i \in \{2, 3, ..., n\}$ şi să presupunem că

$$L(\{e_1, e_2, ..., e_{i-1}\}) = L(\{e'_1, e'_2, ..., e'_{i-1}\}).$$

Atunci, din ipoteza de inducţie şi modul de de construcţie al vectorului e'_i, deducem egalităţile:

$$\begin{aligned} L(\{e_1, e_2, ..., e_i\}) &= L(\{e_1, e_2, ..., e_{i-1}\}) + L(\{e_i\}) = \\ &= L(\{e'_1, e'_2, ..., e'_{i-1}\}) + L(\{e_i\}) = \\ &= L(\{e'_1, e'_2, ..., e'_{i-1}, e_i\}) = \\ &= L(\{e'_1, e'_2, ..., e'_{i-1}, e'_i\}). \end{aligned}$$

În concluzie, avem

$$L(\{e_1, e_2, ..., e_n\}) = L(\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}) = V,$$

adică B' este un sistem de generatori pentru spaţiul euclidian $(V, <, >)$.

Pentru ca sistemul de vectori B' să fie şi liniar independent, vom alege constantele $k_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{2, n}$, $j = \overline{1, i-1}$, astfel încât vectorii mulţimii B' să fie ortogonali unul pe celălalt. Pentru aceasta trebuie ca următoarele condiţii să fie adevărate:

$$< e'_i, e'_j >= 0,\ \forall\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, i-1}.$$

Impunând aceste condiţii vectorilor din B' şi ţinând cont de modul de de construcţie al vectorilor e'_i, $\forall\ i = \overline{1, n}$, deducem că trebuie să avem adevărate egalităţile

$$< e_i, e'_j > + k_{ij} < e'_j, e'_j >= 0,\ \forall\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, i-1},$$

adică trebuie să luăm constantele

$$k_{ij} = -\frac{< e_i, e'_j >}{< e'_j, e'_j >} = \frac{< e_i, e'_j >}{||e'_j||^2}, \ \forall\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, i-1}.$$

În concluzie, sistemul de vectori $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, construit cu ajutorul constantelor de mai sus, reprezintă o bază de vectori ortogonali pentru spaţiul euclidian $(V, <, >)$. Luând acum mulţimea de vectori

$$GS(B) = \{f_1, f_2, ..., f_n\},$$

unde

$$f_i = \frac{1}{||e'_i||} \cdot e'_i,\ \forall\ i = \overline{1, n},$$

găsim ceea ce aveam de demonstrat. Cu alte cuvinte, mulţimea de vectori $GS(B)$ este o bază ortonormată a spaţiului euclidian $(V, <, >)$. Evident, această bază este furnizată de baza neortonormată iniţială B. □

EXEMPLUL 2.4.3. *Utilizând procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt, să ortonormăm baza canonică*

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$$

în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}_2[X], <, >)$. *Pentru aceasta, vom lua vectorul*

$$e'_1 = e_1 = 1.$$

Să considerăm acum vectorul

$$e'_2 = e_2 + k_{21}e'_1 = X + k_{21},\ k_{21} \in \mathbb{R},$$

unde constanta k_{21} *o determinăm din următoarea condiţie de ortogonalitate:*

$$< e'_2, e'_1 >= 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (x + k_{21})dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + k_{21}x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0 \Leftrightarrow k_{21} = 0.$$

Prin urmare, avem

$$e'_2 = X.$$

Să considerăm şi vectorul

$$e'_3 = e_3 + k_{31}e'_1 + k_{32}e'_2 = X^2 + k_{32}X + k_{31},\ k_{31}, k_{32} \in \mathbb{R},$$

unde constantele k_{31} *şi* k_{32} *le determinăm din următoarele condiţii de ortogonalitate:*

$$\begin{cases} < e'_3, e'_1 >= 0 \\ < e'_3, e'_2 >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1}(x^2 + k_{32}x + k_{31})dx = 0 \\ \int_{-1}^{1}(x^3 + k_{32}x^2 + k_{31}x)dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^3}{3} + k_{32}\frac{x^2}{2} + k_{31}x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0 \\ \left(\frac{x^4}{4} + k_{32}\frac{x^3}{3} + k_{31}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} + 2k_{31} = 0 \\ \frac{2}{3}k_{32} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{31} = -\frac{1}{3} \\ k_{32} = 0. \end{cases}$$

Prin urmare, avem

$$e'_3 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Să calculăm acum normele vectorilor e_1', e_2' *şi* e_3'. *Avem evident că*

$$\begin{aligned} ||e_1'|| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2}, \\ ||e_2'|| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ ||e_3'|| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{45}}. \end{aligned}$$

Baza ortonormată obţinută în urma procedeului Gramm-Schmidt este

$$GS(B) = \{f_1, f_2, f_3\},$$

unde

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{||e_1'||} e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ f_2 &= \frac{1}{||e_2'||} e_2' = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot X, \\ f_3 &= \frac{1}{||e_3'||} e_3' = \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(X^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

EXEMPLUL 2.4.4. *Utilizând procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt, să ortonormăm baza*

$$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)\}$$

în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$. *Pentru aceasta, vom lua vectorul*

$$e_1' = e_1 = (1,0,0).$$

Să considerăm acum vectorul

$$e_2' = e_2 + k_{21} e_1' = (1,1,0) + k_{21}(1,0,0) = (1 + k_{21}, 1, 0), \ \ k_{21} \in \mathbb{R},$$

unde constanta k_{21} *o determinăm din următoarea condiţie de ortogonalitate:*

$$< e_2', e_1' >= 0 \Leftrightarrow < (1 + k_{21}, 1, 0), (1,0,0) >= 0 \Leftrightarrow 1 + k_{21} = 0 \Leftrightarrow k_{21} = -1.$$

Prin urmare, avem

$$e_2' = (0,1,0).$$

Să considerăm şi vectorul

$$\begin{aligned} e_3' &= e_3 + k_{31} e_1' + k_{32} e_2' = \\ &= (1,1,1) + k_{31}(1,0,0) + k_{32}(0,1,0) = \\ &= (1 + k_{31}, 1 + k_{32}, 1), \ \ k_{31}, k_{32} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

unde constantele k_{31} *şi* k_{32} *le determinăm din următoarele condiţii de ortogonalitate:*

$$\left\{ \begin{array}{l} < e_3', e_1' >= 0 \\ < e_3', e_2' >= 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} < (1 + k_{31}, 1 + k_{32}, 1), (1,0,0) >= 0 \\ < (1 + k_{31}, 1 + k_{32}, 1), (0,1,0) >= 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + k_{31} = 0 \\ 1 + k_{32} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_{31} = -1 \\ k_{32} = -1. \end{array} \right.$$

Prin urmare, avem

$$e_3' = (0,0,1).$$

Deoarece avem $||e_1'|| = ||e_2'|| = ||e_3'|| = 1$, *rezultă că baza ortonormată obţinută în urma procedeului Gramm-Schmidt este exact baza canonică a spaţiului euclidian* $(\mathbb{R}^3, <,>)$, *şi anume*

$$GS(B) = \{f_1 = e_1' = (1,0,0), f_2 = e_2' = (0,1,0), f_3 = e_3' = (0,0,1)\}.$$

DEFINIŢIA 2.4.2. *Fie* W *un subspaţiu vectorial al spaţiului euclidian* $(V, <,>)$. *Submulţimea*

$$W^\perp = \{v \in V \mid v \perp w, \ \forall\, w \in W\}$$

se numeşte ***complementul ortogonal*** *al subspaţiului vectorial* W *în spaţiul euclidian* $(V, <,>)$.

TEOREMA 2.4.2. *Complementul ortogonal* $W^\perp$ *al subspaţiului vectorial* W *în spaţiul euclidian* $(V, <,>)$ *este un subspaţiu vectorial al spaţiului euclidian* $(V, <,>)$. *Mai mult, complementul ortogonal verifică relaţia de complementaritate*

$$V = W \oplus W^\perp.$$

DEMONSTRAŢIE. Să demonstrăm întâi că $W^\perp$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului euclidian $(V, <,>)$. Pentru a demonstra acest lucru vom utiliza criteriul de subspaţiu. Fie doi vectori arbitrari $v_1, v_2 \in W^\perp$. Din definiţia complementului ortogonal $W^\perp$ rezultă că avem

$$< v_1, w >=< v_2, w >= 0, \ \forall\, w \in W.$$

Atunci, printr-un calcul simplu, deducem că avem

$$< v_1 + v_2, w >=< v_1, w > + < v_2, w >= 0, \ \forall\, w \in W,$$

adică $v_1 + v_2 \in W^\perp$. Să luăm acum un scalar arbitrar $\alpha \in \mathbb{R}$ şi un vector arbitrar $v \in W^\perp$. Atunci, este evident că avem

$$< v, w >= 0, \ \forall\, w \in W.$$

Prin urmare, deducem că avem

$$< \alpha v, w >= \alpha < v, w >= 0, \ \forall\, w \in W,$$

adică $\alpha v \in W^\perp$. În concluzie, $W^\perp$ este un subspaţiu vectorial al lui V.

Să demonstrăm acum că subspaţiile W şi $W^\perp$ se află în sumă directă. Pentru aceasta fie $v \in W \cap W^\perp$. Rezultă că

$$< v, w >= 0, \ \forall\, w \in W.$$

Particularizând $w = v$, obţinem că $< v, v >= 0$, adică $v = 0_V$. Prin urmare, avem

$$W \cap W^\perp = \{0_V\},$$

adică

$$W \oplus W^\perp \leq_{\mathbb{R}} V.$$

Pentru a arăta că subspaţiul sumă directă $W \oplus W^\perp$ coincide cu întreg spaţiul V, vom demonstra că orice vector al spaţiului V se descompune în mod unic ca suma dintre un vector al lui W şi un vector al lui $W^\perp$. Pentru aceasta fie

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$$

o bază ortonormată în subspaţiul W, unde $p = \dim_{\mathbb{R}} W$, şi fie $v \in V$ un vector arbitrar. Să considerăm vectorul

$$w =< v, e_1 > e_1 + < v, e_2 > e_2 + ... + < v, e_p > e_p \in W.$$

Vom demonstra că $v - w \in W^{\perp}$. Pentru aceasta este suficient să observăm că avem

$$< v - w, e_i > = < v, e_i > - < w, e_i > = < v, e_i > - < v, e_i > = 0, \ \forall \ i = \overline{1, n}.$$

În concluzie, avem descompunerea unică

$$v = w + (v - w),$$

unde $w \in W$ şi $v - w \in W^{\perp}$. Cu alte cuvinte, obţinem egalitatea

$$W \oplus W^{\perp} = V.$$

□

Corolarul 2.4.1. *Fie W un subspaţiu al spaţiului euclidian $(V, <, >)$ şi fie $v \in V$ un vector arbitrar. Atunci există şi sunt unici nişte vectori $w \in W$ şi $w^{\perp} \in W^{\perp}$ astfel încât*

$$v = w + w^{\perp}.$$

Demonstraţie. Proprietaea din corolar este evidentă din relaţia

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

□

Definiţia 2.4.3. *Fie W un subspaţiu al spaţiului euclidian $(V, <, >)$ şi fie $v \in V$ un vector arbitrar. Vectorii $w \in W$ şi $w^{\perp} \in W^{\perp}$, cu proprietatea*

$$v = w + w^{\perp},$$

se numesc ***proiecţiile*** *vectorului v pe subspaţiile W şi $W^{\perp}$.*

Exemplul 2.4.5. *Fie subspaţiul vectorial*

$$W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2.$$

Să calculăm complementul ortogonal $W^{\perp}$ în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^2, <, >)$ şi să determinăm proiecţiile vectorului $v = (1, 2)$ pe subspaţiile W şi $W^{\perp}$. Pentru aceasta să observăm că

$$\dim_{\mathbb{R}} W = 1.$$

O bază în W este

$$B = \{e_1 = (1, 0)\}.$$

Căutăm acum toţi vectorii $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$< (x, y), (1, 0) > = 0.$$

Rezultă că $x = 0$. Prin urmare, complementul ortogonal al subspaţiului W este subspaţiul

$$W^{\perp} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Din teorema precedentă deducem că

$$\mathbb{R}^2 = W \oplus W^{\perp}.$$

Evident avem descompunerea unică

$$(1, 2) = (1, 0) + (0, 2),$$

unde $(1, 0) \in W$ şi $(0, 2) \in W^{\perp}$. Este important de remarcat că, din punct de vedere geometric, proiecţiile vectorului $v = (1, 2)$ pe subspaţiile W şi $W^{\perp}$, adică vectorii $(1, 0) \in W$ şi $(0, 2) \in W^{\perp}$, reprezintă exact coordonatele proiecţiilor ortogonale ale punctului $P(1, 2)$ pe axele de coordonate Ox şi Oy.

Exemplul 2.4.6. *Fie subspaţiul vectorial*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$$

Să calculăm complementul ortogonal $W^\perp$ *în spaţiul euclidian* $(\mathbb{R}^3, <, >)$ *şi să determinăm proiecţiile vectorului* $v = (1, 2, 3)$ *pe subspaţiile* W *şi* $W^\perp$*. Pentru aceasta să observăm că avem*

$$W = \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Rezultă că

$$\dim_{\mathbb{R}} W = 2.$$

O bază în W *este*

$$B = \{e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)\}.$$

Căutăm acum toţi vectorii $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *astfel încât*

$$\begin{cases} < (x, y, z), (1, 0, -1) >= 0 \\ < (x, y, z), (0, 1, -1) >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}.$$

Rezultă că $x = y = z$*. Prin urmare, complementul ortogonal al subspaţiului* W *este subspaţiul*

$$W^\perp = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Din teorema precedentă deducem că

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp.$$

Atunci există $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât să avem descompunerea*

$$(1, 2, 3) = (x, y, -x - y) + (\alpha, \alpha, \alpha),$$

unde $(x, y, -x - y) \in W$ *şi* $(\alpha, \alpha, \alpha) \in W^\perp$*. Rezultă că avem sistemul*

$$\begin{cases} x + \alpha = 1 \\ y + \alpha = 2 \\ -x - y + \alpha = 3, \end{cases}$$

a cărui soluţie este $x = -1$*,* $y = 0$ *şi* $\alpha = 2$*.*

În concluzie, proiecţiile vectorului $v = (1, 2, 3)$ *pe subspaţiile* W *şi* $W^\perp$ *sunt*

$$w = (-1, 0, 1) \in W \text{ şi } w^\perp = (2, 2, 2) \in W^\perp.$$

Cu alte cuvinte, avem adevărată descompunerea unică

$$(1, 2, 3) = (-1, 0, 1) + (2, 2, 2),$$

unde $(-1, 0, 1) \in W$ *şi* $(2, 2, 2) \in W^\perp$*.*

CAPITOLUL 3

APLICAŢII LINIARE

În studiul structurilor algebrice de grup, inel sau corp, un rol extrem de important este jucat de morfismele şi, mai ales, de izomorfismele de grupuri, inele sau corpuri. Prin analogie, un rol important în studiul spaţiilor vectoriale este jucat de *morfismele de spaţii vectoriale* numite, pe scurt, *aplicaţii liniare*. Un rol aparte este jucat de *izomorfismele de spaţii vectoriale*, reprezentate de aplicaţiile liniare bijective. Aceste izomorfisme scot în evidenţă anumite spaţii vectoriale care, din cauză că sunt izomorfe cu o clasă întreagă de alte spaţii vectoriale, reprezintă obiectul principal de studiu în algebra liniară. În acest sens, de exemplu, subliniem importanţa studiului spaţiului vectorial real $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ care este izomorf cu orice spaţiu vectorial real de dimensiune n.

3.1. Definiţie. Proprietăţi. Exemple

Fie V şi W două K-spaţii vectoriale.

Definiţia 3.1.1. *O aplicaţie $f : V \to W$ care verifică proprietăţile:*

(1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$, $\forall\ v, w \in V$;

(2) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, $\forall\ \alpha \in K$, $\forall\ v \in V$,

se numeşte ***aplicaţie liniară*** *sau* ***transformare liniară*** *sau* ***morfism de spaţii vectoriale.***

Observaţia 3.1.1. *Mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial W se notează $\mathcal{L}_K(V, W)$.*

Definiţia 3.1.2. *O aplicaţie liniară $f : V \to V$ se numeşte* ***endomorfism*** *al K-spaţiului vectorial V.*

Observaţia 3.1.2. *Mulţimea tuturor endomorfimelor K-spaţiului vectorial V se notează $End_K(V)$. Mulţimea*

$$(End_K(V), +, \circ),$$

unde " $+$ " reprezintă adunarea funcţiilor şi " $\circ$ " reprezintă compunerea funcţiilor, are o structură algebrică de inel necomutativ.

Definiţia 3.1.3. *Fie $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ o aplicaţie liniară. Dacă $f : V \to W$ este bijectivă, atunci aplicaţia f se numeşte* ***izomorfism*** *de spaţii vectoriale. În această situaţie, vom folosi notaţia*

$$V \overset{f}{\simeq} W.$$

Propoziţia 3.1.1. *Fie $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ o aplicaţie liniară. Atunci aplicaţia f verifică următoarele proprietăţi:*

(1) $f(0_V) = 0_W$;

(2) $f(-v) = -f(v)$, $\forall\ v \in V$;

(3) $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\forall\ v, w \in V$.

Demonstraţie. (1) Din prima proprietate a unei aplicaţii liniare deducem că

$$f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V) \Leftrightarrow f(0_V) = f(0_V) + f(0_V).$$

În ultima egalitate, adunând la dreapta cu vectorul $-f(0_V)$, obţinem

$$0_W = f(0_V).$$

(2) Din prima proprietate a unei aplicaţii liniare deducem egalităţile:

$$f(v + (-v)) = f(v) + f(-v) \Leftrightarrow f(0_V) = f(v) + f(-v),\ \forall\ v \in V.$$

Folosind acum proprietatea (1), obţinem

$$0_W = f(v) + f(-v) \Leftrightarrow f(-v) = -f(v),\ \forall\ v \in V.$$

(3) Fie $\alpha, \beta \in K$ doi scalari arbitrari şi fie $v, w \in V$ doi vectori arbitrari. Folosind proprietăţile unei aplicaţii liniare deducem imediat egalităţile:

$$f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v) + f(\beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w).$$

□

Exemplul 3.1.1. *Fie aplicaţia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *definită prin*

$$f(x, y, z) = (x + z, y - z).$$

Vom demonstra că aplicaţia f *este o aplicaţie liniară. Pentru aceasta să considerăm*

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$$

doi vectori arbitrari. Atunci, următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\ &= (x_1 + x_2 + z_1 + z_2, y_1 + y_2 - (z_1 + z_2)) = \\ &= (x_1 + z_1, y_1 - z_1) + (x_2 + z_2, y_2 - z_2) = \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Fie acum $\alpha \in \mathbb{R}$ *un scalar arbitrar şi* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *un vector arbitrar. Atunci, avem egalităţile:*

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y, z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \\ &= (\alpha x + \alpha z, \alpha y - \alpha z) = \\ &= \alpha(x + z, y - z) = \\ &= \alpha f(x, y, z). \end{aligned}$$

În concluzie, aplicaţia f *este o aplicaţie liniară.*

Exemplul 3.1.2. *Fie aplicaţia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *definită prin*

$$f(x, y, z) = (x + y, z - x + 1).$$

Conform propoziţiei anterioare, dacă aplicaţia f *ar fi liniară ar trebui ca ea să ducă vectorul nul din* $\mathbb{R}^3$ *în vectorul nul din* $\mathbb{R}^2$*. Acest lucru nu este însă adevărat deoarece*

$$f(0, 0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0).$$

În concluzie, aplicaţia f nu este o aplicaţie liniară.

EXEMPLUL 3.1.3. *Fie aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin*

$$f(x, y) = (x - y, x + \sin y).$$

Vom arăta în continuare că, deşi această aplicaţie duce vectorul nul din $\mathbb{R}^2$ în vectorul nul din $\mathbb{R}^2$, totuşi ea nu este o aplicaţie liniară. Acest lucru subliniază faptul că condiţia

$$f(0, 0) = (0, 0)$$

este una necesară nu şi suficientă. Să presupunem că aplicaţia f este liniară. Atunci, următoarea proprietate ar trebui să fie adevărată:

$$f(\alpha(x, y)) = \alpha f(x, y),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Această proprietate este însă echivalentă cu

$$(\alpha(x - y), \alpha x + \sin(\alpha y)) = \alpha(x - y, x + \sin y),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prin urmare, dacă aplicaţia f ar fi liniară ar trebui ca următoarea egalitate trigonometrică să fie adevărată:

$$\sin(\alpha y) = \alpha \sin y,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R}.$$

Această egalitate trigonometrică nu este însă adevărată pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Spre exemplu, pentru $\alpha = 2$ avem

$$\sin(2y) = 2 \sin y \cos y \neq 2 \sin y,\ \forall\ y \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

În concluzie, aplicaţia f nu este o aplicaţie liniară, deşi $f(0, 0) = (0, 0)$.

EXEMPLUL 3.1.4. *Fie aplicaţia $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, definită prin*

$$D(f) = f',$$

unde $f' \in \mathbb{R}_1[X]$ reprezintă derivata polinomului $f \in \mathbb{R}_2[X]$. Atunci, următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g),\ \forall\ f, g \in \mathbb{R}_2[X].$$

Mai mult, avem

$$D(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha D(f),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ f \in \mathbb{R}_2[X].$$

În concluzie, aplicaţia D este o aplicaţie liniară. Această aplicaţie liniară se numeşte ***operatorul liniar de derivare.***

EXEMPLUL 3.1.5. *Fie aplicaţia $I : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, definită prin*

$$I(f) = \int_0^x f(t)dt,$$

unde $f \in \mathbb{R}_2[X]$. În acest context, următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$I(f+g) = \int_0^x [f(t)+g(t)]dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = I(f)+I(g),\ \forall\ f, g \in \mathbb{R}_2[X],$$

şi

$$I(\alpha f) = \int_0^x [\alpha f(t)]dt = \alpha \int_0^x f(t)dt = \alpha I(f),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ f \in \mathbb{R}_2[X].$$

În concluzie, aplicaţia I este o aplicaţie liniară. Această aplicaţie liniară se numeşte ***operatorul liniar de integrare.***

EXEMPLUL 3.1.6. *Fie aplicaţia* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, *definită prin*

$$T(A) = {}^{T}A,$$

unde ${}^{T}A \in M_2(\mathbb{R})$ *reprezintă transpusa matricii* $A \in M_2(\mathbb{R})$. *Ţinând cont de proprietăţile transpusei unei matrici, deducem că avem adevărate egalităţile:*

$$T(A+B) = {}^{T}(A+B) = {}^{T}A + {}^{T}B = T(A) + T(B), \ \forall\ A, B \in M_2(\mathbb{R}),$$

şi

$$T(\alpha A) = {}^{T}(\alpha A) = \alpha\ {}^{T}A = \alpha T(A), \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall\ A \in M_2(\mathbb{R}).$$

În concluzie, aplicaţia T *este o aplicaţie liniară. Această aplicaţie liniară se numeşte* ***operatorul liniar de transpunere****.*

3.2. Nucleul unei aplicaţii liniare. Injectivitate

Fie $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ o aplicaţie liniară.

DEFINIŢIA 3.2.1. *Submulţimea*

$$Ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V$$

se numeşte ***nucleul*** *aplicaţiei liniare* f.

PROPOZIŢIA 3.2.1. *Nucleul aplicaţiei liniare* $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ *este un subspaţiu vectorial al domeniului* V. *Cu alte cuvinte, avem*

$$Ker(f) \leq_K V.$$

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm criteriul de subspaţiu. Pentru aceasta, fie doi vectori arbitrari $v, w \in Ker(f)$. Din definiţia nucleului deducem că avem

$$f(v) = f(w) = 0_W.$$

Folosind liniaritatea aplicaţiei f, rezultă că avem

$$f(v + w) = f(v) + f(w) = 0_W.$$

Prin urmare $v + w \in Ker(f)$. Să considerăm acum un scalar arbitrar $\alpha \in K$ şi un vector arbitrar $v \in Ker(f)$. Rezultă că avem

$$f(v) = 0_W.$$

Folosind din nou liniaritatea aplicaţiei f, deducem că

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = 0_W,$$

adică $\alpha v \in Ker(f)$. În concluzie, conform criteriului de subspaţiu, avem

$$Ker(f) \leq_K V.$$

□

DEFINIŢIA 3.2.2. *Dimensiunea nucleului* $Ker(f)$ *se numeşte* ***defectul*** *aplicaţiei liniare* f. *În acest context, vom folosi notaţia*

$$def(f) = \dim_K Ker(f).$$

TEOREMA 3.2.1 (de caracterizare a injectivităţii unei aplicaţii liniare). *Fie* $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ *o aplicaţie liniară. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *Aplicaţia* f *este injectivă;*

(2) $Ker(f) = \{0_V\}$;

(3) $def(f) = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Este evident că afirmaţiile (2) şi (3) sunt echivalente. Să demonstrăm acum că (1) $\Rightarrow$ (2). Pentru aceasta, să presupunem că aplicaţia liniară f este injectivă şi să luăm un vector arbitrar $v \in Ker(f)$. Deducem că

$$f(v) = 0_W.$$

Pe de altă parte, deoarece f este aplicaţie liniară, avem

$$f(0_V) = 0_W.$$

Atunci, din injectivitatea aplicaţiei f, rezultă că $v = 0_V$. Prin urmare, avem

$$Ker(f) = \{0_V\}.$$

Reciproc, să demonstrăm că (2) $\Rightarrow$ (1). Pentru aceasta, să presupunem că

$$Ker(f) = \{0_V\}$$

şi să luăm doi vectori arbitrari $v, w \in V$ astfel încât

$$f(v) = f(w).$$

Deoarece aplicaţia f este liniară, egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$f(v) - f(w) = 0_W \Leftrightarrow f(v - w) = 0_W \Leftrightarrow v - w \in Ker(f) = \{0_V\}.$$

Prin urmare, deducem că

$$v - w = 0_V \Leftrightarrow v = w.$$

În concluzie, aplicaţia liniară f este injectivă. Rezultă ceea ce aveam de demonstrat. $\square$

EXEMPLUL 3.2.1. *Fie aplicaţia liniară* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *definită prin*

$$f(x, y) = (3x - y, 2x + y, x - 2y).$$

Să calculăm nucleul aplicaţiei liniare f. Din definiţia nucleului unei aplicaţii liniare deducem că avem

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0, 2x + y = 0, x - 2y = 0\}. \end{aligned}$$

Deoarece sistemul liniar

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

are doar soluţia banală, rezultă că

$$Ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

Conform teoremei anterioare, deducem că aplicaţia liniară f este injectivă.

EXEMPLUL 3.2.2. *Fie aplicaţia liniară de derivare* $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, *definită prin*

$$D(f) = f',$$

unde $f \in \mathbb{R}_2[X]$. *Să calculăm nucleul aplicaţiei liniare de derivare* D. *Avem*

$$\begin{aligned} Ker(D) &= \{f \in \mathbb{R}_2[X] \mid D(f) = \mathbb{O}\} = \\ &= \{f \in \mathbb{R}_2[X] \mid f' = \mathbb{O}\} = \\ &= \{c \mid c \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deoarece $Ker(D) \neq \{\mathbb{O}\}$, *rezultă că aplicaţia de derivare* D *nu este injectivă.*

3.3. Imaginea unei aplicaţii liniare. Surjectivitate

Fie $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ o aplicaţie liniară.

DEFINIŢIA 3.3.1. *Submulţimea*

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \exists\ v \in V \ \textit{astfel încât}\ f(v) = w\} \subseteq W$$

se numeşte ***imaginea*** *aplicaţiei liniare* f.

PROPOZIŢIA 3.3.1. *Imaginea aplicaţiei liniare* $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ *este un subspaţiu vectorial al codomeniului* W. *Cu alte cuvinte, avem*

$$\mathrm{Im}(f) \leq_K W.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom aplica criteriul de subspaţiu. Pentru aceasta, fie doi vectori arbitrari $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Din definiţia imaginii unei aplicaţii liniare, rezultă că există $v_1, v_2 \in V$ astfel încât $f(v_1) = w_1$ şi $f(v_2) = w_2$. Deoarece aplicaţia f este liniară, deducem că

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2,$$

adică $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Să considerăm acum un scalar arbitrar $\alpha \in K$ şi un vector arbitrar $w \in \mathrm{Im}(f)$. Rezultă că există $v \in V$ astfel încât $f(v) = w$. Folosind din nou liniaritatea aplicaţiei f, deducem că

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha w,$$

adică $\alpha w \in \mathrm{Im}(f)$. În concluzie, conform criteriului de subspaţiu, avem

$$\mathrm{Im}(f) \leq_K W.$$

$\square$

DEFINIŢIA 3.3.2. *Dimensiunea imaginii* $\mathrm{Im}(f)$ *se numeşte* ***rangul*** *aplicaţiei liniare* f. *În acest context, vom folosi notaţia*

$$rang(f) = \dim_K \mathrm{Im}(f).$$

TEOREMA 3.3.1 (de caracterizare a surjectivităţii unei aplicaţii liniare). *Fie* $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ *o aplicaţie liniară. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *Aplicaţia* f *este surjectivă;*
(2) $\mathrm{Im}(f) = W$;
(3) $rang(f) = \dim_K W$.

DEMONSTRAŢIE. Este evident că afirmaţiile (2) şi (3) sunt echivalente. Să demonstrăm acum că (1) $\Rightarrow$ (2). Pentru aceasta, să presupunem că aplicaţia liniară f este surjectivă şi să luăm un vector arbitrar $w \in W$. Deoarece aplicaţia f este surjectivă, rezultă că există un vector $v \in V$ astfel încât $f(v) = w$. Prin urmare, avem $w \in \text{Im}(f)$. În concluzie, avem $W \subseteq \text{Im}(f)$. Deoarece este evident că avem $\text{Im}(f) \subseteq W$, obţinem că avem egalitatea $W = \text{Im}(f)$. Reciproc, să presupunem că $\text{Im}(f) = W$ şi să considerăm un vector arbitrar $w \in W = \text{Im}(f)$. Din definiţia imaginii unei aplicaţii liniare rezultă că există un vector $v \in V$ astfel încât $f(v) = w$. Cu alte cuvinte, din definiţia surjectivităţii unei aplicaţii rezultă că aplicaţia liniară f este surjectivă. $\square$

EXEMPLUL 3.3.1. *Fie aplicaţia liniară* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *definită prin*

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z).$$

Să calculăm imaginea aplicaţiei liniare f. *Din definiţia imaginii unei aplicaţii liniare deducem că avem*

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \textit{ astfel încât } f(x, y, z) = (u, v)\} = \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \textit{ astfel încât } x - y = u, 2x + y + z = v\}. \end{aligned}$$

Deoarece sistemul liniar

$$\begin{cases} x - y = u \\ 2x + y + z = v \end{cases}$$

are soluţie pentru orice valori $u, v \in \mathbb{R}$, *rezultă că*

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2.$$

Conform teoremei anterioare, deducem că aplicaţia liniară f *este surjectivă.*

EXEMPLUL 3.3.2. *Fie aplicaţia liniară de integrare* $I : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, *definită prin*

$$I(f) = \int_0^x f(t)dt,$$

unde $f \in \mathbb{R}_2[X]$. *Să calculăm imaginea aplicaţiei liniare de integrare* I. *Prin definiţie, avem*

$$\text{Im}(I) = \{g \in \mathbb{R}_3[X] \mid \exists\ f \in \mathbb{R}_2[X] \textit{ astfel încât } I(f) = g\}$$

Fie un polinom arbitrar de grad cel mult trei, definit prin

$$g = AX^3 + BX^2 + CX + D,\ \ A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Să presupunem că există un polinom de grad cel mult doi, definit prin

$$f = aX^2 + bX + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R},$$

astfel încât $I(f) = g$. *Atunci avem*

$$\int_0^x (at^2 + bt + c)dt = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

adică

$$a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Egalând coeficienţii celor două polinoame, găsim egalităţile: $a = 3A, b = 2B, c = C$ *şi* $D = 0$. *În concluzie, imaginea aplicaţiei liniare de integrare* I *este*

$$\text{Im}(I) = \{AX^3 + BX^2 + CX \mid A, B, C \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}_3[X].$$

Rezultă că aplicaţia de integrare I nu este surjectivă.

3.4. Izomorfisme de spaţii vectoriale

În această secţiune vom studia condiţii necesare şi suficiente ca două spaţii vectoriale finit dimensionale să fie izomorfe. Pentru aceasta vom demonstra mai întâi următorul rezultat.

TEOREMA 3.4.1 (a dimensiunii). *Fie $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ o aplicaţie liniară. Dacă domeniul V este un K-spaţiu vectorial finit dimensional, atunci avem adevărată următoarea egalitate:*

$$\dim_K V = def(f) + rang(f).$$

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că

$$\dim_K V = n$$

şi

$$def(f) = \dim_K Ker(f) = p,$$

unde $0 \leq p \leq n < \infty$. Fie

$$B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$$

o bază în nucleul $Ker(f)$. Deoarece nucleul $Ker(f)$ este subspaţiu vectorial al domeniului V, putem completa cu vectori baza B_1 până la o bază

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_p, v_1, v_2, ..., v_{n-p}\}$$

în spaţiul vectorial V. Vom demonstra în continuare că mulţimea

$$B_2 = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_{n-p})\}$$

este o bază a imaginii $\text{Im}(f)$, ceea ce va implica egalitatea

$$rang(f) = \dim_K \text{Im}(f) = n - p,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. Să demonstrăm întâi că mulţimea B_2 este liniar independentă. Pentru aceasta fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-p} \in K$ astfel încât

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_{n-p} f(v_{n-p}) = 0_W.$$

Din proprietatea de liniaritate a aplicaţiei f deducem că egalitatea de mai sus se poate rescrie sub forma

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{n-p} v_{n-p}) = 0_W.$$

Această egalitate este echivalentă cu condiţia

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{n-p} v_{n-p} \in Ker(f).$$

Deoarece mulţimea B_1 este o bază a nucleului $Ker(f)$, rezultă că există scalarii $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p \in K$ astfel încât

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{n-p} v_{n-p} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_p e_p.$$

Trecând toţi termenii în membrul stâng, deducem că avem egalitatea

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{n-p} v_{n-p} - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - ... - \beta_p e_p = 0_V.$$

Deoarece mulţimea B este o bază în spaţiul vectorial V, în particular, mulţimea B este liniar independentă. Liniar independenţa mulţimii B implică

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-p} = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0,$$

adică mulţimea B_2 este liniar independentă. Să demonstrăm acum că mulţimea B_2 este un sistem de generatori pentru imaginea $\mathrm{Im}(f)$. Pentru aceasta să considerăm un vector arbitrar $w \in \mathrm{Im}(f)$. Din definiţia imaginii $\mathrm{Im}(f)$ deducem că există un vector $v \in V$ astfel încât $f(v) = w$. Deoarece mulţimea B este o bază în spaţiul vectorial V, rezultă că există scalarii $k_1, k_2, ..., k_n \in K$ astfel încât

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_pe_p + k_{p+1}v_1 + k_{p+2}v_2 + ... + k_nv_{n-p}.$$

Calculând aplicaţia liniară f în egalitatea de mai sus şi ţinând cont că

$$f(v) = w \text{ şi } f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_p) = 0,$$

deducem că avem egalitatea

$$w = k_{p+1}f(v_1) + k_{p+2}f(v_2) + ... + k_nf(v_{n-p}).$$

Cu alte cuvinte, vectorul arbitrar $w \in \mathrm{Im}(f)$ este o combinaţie liniară de vectorii

$$f(v_1), f(v_2), ..., f(v_{n-p}),$$

adică mulţimea B_2 este un sistem de generatori pentru imaginea $\mathrm{Im}(f)$. □

COROLARUL 3.4.1. *Fie $f \in \mathcal{L}_K(V, W)$ o aplicaţie liniară. Dacă domeniul V este un K-spaţiu vectorial finit dimensional, atunci avem adevărate următoarele afirmaţii:*

(1) *Dacă f este injectivă, atunci* $\dim_K V \leq \dim_K W$*;*

(2) *Dacă f este surjectivă, atunci* $\dim_K V \geq \dim_K W$*;*

(3) *Dacă f este bijectivă, atunci* $\dim_K V = \dim_K W$*.*

DEMONSTRAŢIE. Teorema dimensiunii de mai sus ne asigură că întotdeauna avem egalitatea

$$\dim_K V = def(f) + rang(f).$$

(1) Dacă f este injectivă, atunci, conform teoremei de caracterizare a injectivităţii, avem

$$def(f) = 0.$$

Deoarece imaginea $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu vectorial al codomeniului W, obţinem inegalitatea

$$\dim_K V = rang(f) = \dim_K \mathrm{Im}(f) \leq \dim_K W.$$

(2) Dacă f este surjectivă, atunci, conform teoremei de caracterizare a surjectivităţii, avem

$$rang(f) = \dim_K W.$$

Deoarece întotdeauna avem $def(f) \geq 0$, obţinem inegalitatea

$$\dim_K V = def(f) + \dim_K W \geq \dim_K W.$$

(3) Dacă f este bijectivă, atunci f este şi injectivă şi surjectivă. Prin urmare, conform punctelor (1) şi (2), avem inegalităţile

$$\dim_K V \leq \dim_K W \text{ şi } \dim_K V \geq \dim_K W.$$

În concluzie, avem egalitatea

$$\dim_K V = \dim_K W.$$

□

Punctul (3) al corolarului de mai sus afirmă că dacă două spaţii vectoriale sunt izomorfe, atunci în mod obligatoriu ele au aceeaşi dimensiune. Reciproc, vom demonstra în continuare că dacă două spaţii vectoriale au aceeaşi dimensiune, atunci ele sunt în mod obligatoriu izomorfe. Cu alte cuvinte, demonstrăm în această secţiune că condiţia necesară şi suficientă ca două K-spaţii vectoriale V şi W să fie izomorfe este ca $\dim_K V = \dim_K W$.

Teorema 3.4.2 (fundamentală de izomorfism). *Fie V şi W două K-spaţii vectoriale astfel încât* $\dim_K V = \dim_K W$. *Atunci, spaţiile vectoriale V şi W sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Să presupunem că mulţimea

$$B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

este o bază în spaţiul vectorial V şi mulţimea

$$B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

este o bază în spaţiul vectorial W, unde

$$n = \dim_K V = \dim_K W.$$

Deoarece mulţimea B_1 este o bază în spaţiul vectorial V, rezultă că orice vector $v \in V$ se descompune unic ca

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n,$$

unde $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ reprezintă coordonatele vectorului v în baza B_1. Definim aplicaţia

$$f : V \to W$$

în felul următor:

$$f(v) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) \stackrel{def}{=} x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n.$$

Să demonstrăm că aplicaţia f este liniară. Pentru aceasta să considerăm doi vectori arbitrari

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in V$$

şi

$$v' = x'_1e_1 + x'_2e_2 + ... + x'_ne_n \in V,$$

unde $x'_1, x'_2, ..., x'_n \in K$ reprezintă coordonatele vectorului v' în baza B_1. Atunci avem

$$\begin{aligned} f(v + v') &= f((x_1 + x'_1)e_1 + (x_2 + x'_2)e_2 + ... + (x_n + x'_n)e_n) = \\ &= (x_1 + x'_1)v_1 + (x_2 + x'_2)v_2 + ... + (x_n + x'_n)v_n = \\ &= x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n + x'_1v_1 + x'_2v_2 + ... + x'_nv_n = \\ &= f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Fie acum un scalar arbitrar $\alpha \in K$ şi un vector arbitrar

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in V.$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= f((\alpha x_1)e_1 + (\alpha x_2)e_2 + ... + (\alpha x_n)e_n) = \\ &= (\alpha x_1)v_1 + (\alpha x_2)v_2 + ... + (\alpha x_n)v_n = \\ &= \alpha(x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n) = \\ &= \alpha f(v). \end{aligned}$$

În concluzie, aplicaţia f este liniară.

Vom demonstra în continuare că aplicaţia liniară f este bijectivă.

Pentru a demonstra injectivitatea aplicaţiei liniare f să considerăm un vector arbitrar $v \in Ker(f)$, unde

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Atunci avem

$$f(v) = 0_W \Leftrightarrow x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0_W.$$

Din liniar independenţa bazei B_2 deducem că

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0,$$

adică $v = 0_V$. Cu alte cuvinte, avem

$$Ker(f) = \{0_V\},$$

adică aplicaţia liniară f este injectivă.

Pentru a demonstra surjectivitatea aplicaţiei liniare f să considerăm un vector arbitrar $w \in W$. Deoarece mulţimea B_2 este o bază în spaţiul vectorial W, rezultă că există scalarii $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ astfel încât să avem descompunerea unică

$$w = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n.$$

Este evident că, luând vectorul

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in V,$$

avem adevărată relaţia $f(v) = w$. Prin urmare, aplicaţia liniară f este surjectivă.

În concluzie, aplicaţia f este un izomorfism între spaţiile vectoriale V şi W. □

COROLARUL 3.4.2. *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune* $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. *Atunci spaţiul vectorial* $_{\mathbb{R}}V$ *este izomorf cu spaţiul vectorial* $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAŢIE. Spaţiul vectorial real $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ are dimensiunea $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$. Baza canonică a spaţiului vectorial $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ este

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0, ..., 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0, 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 0, 1)\}.$$

Conform teoremei fundamentale de izomorfism, rezultă ceea ce aveam de demonstrat. □

3.5. Endomorfisme şi matrici pătratice

Pe tot parcursul acestei secţiuni vom considera V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $\dim_K V = n$. Să presupunem că

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

este o bază în spaţiul vectorial V. Dacă $v \in V$ este un vector arbitrar, atunci există scalarii $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ astfel încât să avem descompunerea unică

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Fie acum $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V. Deoarece endomorfismul f este o aplicaţie liniară, rezultă că valoarea endomorfismului f calculată în v este dată de expresia

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n).$$

Prin urmare, endomorfismul f este bine definit de valorile sale pe baza B, adică de valorile

$$f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n).$$

Aceşti vectori însă aparţin tot spaţiului vectorial V. În consecinţă, putem să descompunem şi aceşti vectori în baza B. Să presupunem că aceste descompuneri sunt date de relaţiile:

$$\begin{cases} f(e_1) = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + ... + c_{1n}e_n, \\ f(e_2) = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{2n}e_n, \\ . \\ . \\ . \\ f(e_n) = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + ... + c_{nn}e_n, \end{cases}$$

unde $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$.

Definiţia 3.5.1. *Matricea* $M_B(f) = {}^TC = (c_{ji})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ *se numeşte* ***matricea în baza*** B ***a endomorfismului*** f.

Să considerăm că mulţimea

$$B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$$

este o altă bază în spaţiul vectorial V şi să presupunem că matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$M_{BB'} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K).$$

Propoziţia 3.5.1. *Dacă* $f \in End_K(V)$ *este un endomorfism al spaţiului vectorial* V, *atunci relaţia de legătură dintre matricile* $M_B(f)$ *şi* $M_{B'}(f)$ *este exprimată prin formula*

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot M_{BB'}.$$

Demonstraţie. Definiţia matricii de trecere de la baza B la baza B' implică egalităţile

$$e'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k, \ \forall\ j = \overline{1,n}.$$

Definiţiile matricilor $M_B(f)$ şi $M_{B'}(f)$ conduc la relaţiile:

$$f(e_k) = \sum_{l=1}^{n} c_{kl}e_l, \ \forall\ k = \overline{1,n}, \ \text{şi}\ f(e'_i) = \sum_{j=1}^{n} c'_{ij}e'_j, \ \forall\ i = \overline{1,n},$$

unde $M_{B'}(f) = {}^TC' = (c'_{ji})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$. În acest context, din liniaritatea endomorfismului f obţinem egalităţile:

$$f(e'_i) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n} c_{kl}e_l\right), \ \forall\ i = \overline{1,n},$$

şi

$$f(e_i') = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}' e_j' = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}' \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l \right), \ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Din aceste două egalităţi deducem că avem relaţiile

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} c_{kl} e_l = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}' a_{lj} e_l, \ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Deoarece mulţimea B este o bază în spaţiul vectorial V, rezultă că avem relaţiile

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}' a_{lj}, \ \forall\, i = \overline{1,n}, \ \forall\, l = \overline{1,n}.$$

La nivel matriceal, aceste ultime relaţii se scriu sub forma

$$M_B(f) \cdot M_{BB'} = M_{BB'} \cdot M_{B'}(f),$$

adică ceea ce aveam de demonstrat. □

EXEMPLUL 3.5.1. *Să determinăm matricea endomorfismului $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin*

$$f(x,y,z) = (2x - y, x + y + z, y - z),$$

în baza

$$B' = \{e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,0,1), e_3' = (0,1,1)\}.$$

Pentru aceasta să considerăm baza canonică

$$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Matricea de trecere de la baza canonică B la baza B' este

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversa acestei matrici este

$$M_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece avem egalităţile

$$\begin{cases} f(e_1) = (2,1,0) = 2e_1 + e_2, \\ f(e_2) = (-1,1,1) = -e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_3) = (0,1,-1) = e_2 - e_3, \end{cases}$$

rezultă că matricea endomorfismului f în baza canonică B este

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea endomorfismului f în baza B' este

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot M_{BB'} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cu alte cuvinte, sunt adevărate relaţiile

$$\begin{cases} f(e'_1) = (1,3,0) = 4e'_1 - 3e'_2 - e'_3, \\ f(e'_2) = (2,2,-1) = 5e'_1 - 3e'_2 - 3e'_3, \\ f(e'_3) = (-1,2,0) = e'_1 - 2e'_2 + e'_3. \end{cases}$$

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $\dim_K V = n$ şi fie $End_K(V)$ mulţimea tuturor endomorfismelor spaţiului vectorial V. Atunci putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 3.5.1 (identificarea endomorfismelor cu matricile pătratice). *Inelul necomutativ al endomorfismelor* $(End_K(V), +, \circ)$ *este izomorf cu inelul necomutativ al matricilor pătratice* $(M_n(K), +, \cdot)$.

DEMONSTRAŢIE. Să fixăm

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

o bază în spaţiul vectorial V şi să definim aplicaţia

$$\mathcal{T} : End_K(V) \to M_n(K),\ \mathcal{T}(f) \stackrel{def}{=} M_B(f),\ \forall\ f \in End_K(V).$$

Folosind definiţia matricii unui endomorfism într-o anumită bază, se poate arăta că pentru orice două endomorfisme $f, g \in End_K(V)$ avem relaţiile:

$$\mathcal{T}(f+g) = M_B(f+g) = M_B(f) + M_B(g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g),$$

şi

$$\mathcal{T}(f \circ g) = M_B(f \circ g) = M_B(f) \cdot M_B(g) = \mathcal{T}(f) \cdot \mathcal{T}(g).$$

În consecinţă, aplicaţia $\mathcal{T}$ este un morfism de inele necomutative. Vom demonstra în continuare că aplicaţia $\mathcal{T}$ este inversabilă. Pentru aceasta să considerăm aplicaţia

$$\mathcal{T}' : M_n(K) \to End_K(V),\ \mathcal{T}'(A) \stackrel{def}{=} f_A,\ \forall\ A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K),$$

unde endomorfismul f_A este definit prin

$$f_A(v) = f_A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} e_j\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i a_{ji} e_j,$$

pentru orice vector $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$. Folosind definiţiile aplicaţiilor $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{T}'$, deducem că avem relaţiile:

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{T}')(A) = \mathcal{T}(\mathcal{T}'(A)) = \mathcal{T}(f_A) = M_B(f_A) = A,\ \forall\ A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K),$$

şi

$$\begin{aligned} [(\mathcal{T}' \circ \mathcal{T})(f)](v) &= [\mathcal{T}'(\mathcal{T}(f))](v) = [\mathcal{T}'(M_B(f))](v) = f_{M_B(f)}(v) = \\ &= f_{M_B(f)}\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i c_{ji} e_j = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = f(v),\ \forall\ f \in End_K(V),\ \forall\ v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V, \end{aligned}$$

unde $M_B(f) = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$. În concluzie, aplicaţia $\mathcal{T}$ este un izomorfism de inele necomutative. $\square$

OBSERVAŢIA 3.5.1. *Teorema de mai sus subliniază faptul că în algebra liniară nu se mai face distincţie între endomorfisme şi matrici pătratice. Astfel, unui endomorfism dat i se poate asocia imediat o matrice scrisă într-o anumită bază şi, reciproc, având o matrice pătratică dată, putem construi imediat un endomorfism a cărui matrice într-o anumită bază să fie exact matricea pătratică dată. Mai mult, adunarea a două endomorfisme se identifică cu adunarea a două matrici pătratice, compunerea a două endomorfisme se identifică cu înmulţirea a două matrici pătratice iar inversarea unui endomorfism se identifică cu inversarea unei matrici pătratice. Cu alte cuvinte, următoarele relaţii matriceale sunt adevărate:*

(1) $M_B(f+g) = M_B(f) + M_B(g), \forall\ f, g \in End_K(V)$;
(2) $M_B(f \circ g) = M_B(f) \cdot M_B(g), \forall\ f, g \in End_K(V)$;
(3) $M_B(f^{-1}) = (M_B(f))^{-1}, \forall\ f \in End_K(V)$;
(4) $M_B(1_V) = I_n$, *unde* $1_V : V \to V$, $1_V(v) = v$, $\forall\ v \in V$, *este endomorfismul identitate iar* $I_n \in M_n(K)$ *este matricea identitate.*

3.6. Valori şi vectori proprii

Fie V un K-spaţiu vectorial şi fie $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V. Conceptele de vector şi valoare proprie ale unui endomorfism sunt intim legate de noţiunea de subspaţiu invariant al unui endomorfism.

DEFINIŢIA 3.6.1. *Un scalar* $\lambda \in K$ *se numeşte* ***valoare proprie*** *a endomorfismului* $f \in End_K(V)$ *dacă există un vector nenul* $v \in V \setminus \{0_V\}$ *cu proprietatea*

$$f(v) = \lambda v.$$

DEFINIŢIA 3.6.2. *Mulţimea tuturor valorilor proprii asociate unui endomorfismului* f *este notată cu* $\sigma(f)$ *şi se numeşte* ***spectrul*** *endomorfismului* f.

Fie $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V şi fie $\lambda \in \sigma(f)$ o valoare proprie a endomorfismului f.

DEFINIŢIA 3.6.3. *Orice vector nenul* $v \in V \setminus \{0_V\}$ *cu proprietatea*

$$f(v) = \lambda v$$

se numeşte ***vector propriu*** *corespunzător valorii proprii* λ.

Să considerăm mulţimea

$$V_\lambda \stackrel{def}{=} \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

OBSERVAŢIA 3.6.1. *Mulţimea* V_λ *este un subspaţiu al spaţiului vectorial* V *deoarece mulţimea* V_λ *este nucleul endomorfismului* $f - \lambda \cdot 1_V$. *Cu alte cuvinte, avem egalitatea de mulţimi*

$$V_\lambda = Ker(f - \lambda \cdot 1_V)$$

DEFINIŢIA 3.6.4. *Mulţimea* V_λ *se numeşte* ***subspaţiul propriu*** *corespunzător valorii proprii* $\lambda \in \sigma(f)$.

EXEMPLUL 3.6.1. *Fie operatorul de derivare* $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, *definit prin*

$$D(f) = f',$$

unde $f \in \mathbb{R}_2[X]$. *Să calculăm spectrul endomorfismului* D. *Pentru aceasta să presupunem că* $\lambda \in \mathbb{R}$ *este o valoare proprie a operatorului de derivare* D. *Din definiţia valorii proprii asociate unui endomorfism deducem că există un polinom nenul de grad cel mult doi* $f \neq \mathbb{O}$ *cu proprietatea*

$$D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f.$$

Egalitatea de mai sus implică relaţiile:

$$\frac{f'}{f} = \lambda \Leftrightarrow (\ln f)' = \lambda \Leftrightarrow \ln f = \lambda x + \ln C,$$

unde $C > 0$. *Prin urmare avem*

$$f = Ce^{\lambda x}.$$

Deoarece funcţia $Ce^{\lambda x}$ *nu este o funcţie polinomială de grad cel mult doi, rezultă că spectrul endomorfismului* D *este*

$$\sigma(D) = \{\emptyset\}.$$

EXEMPLUL 3.6.2. *Fie endomorfismul* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definit prin*

$$f(x, y, z) = (4x + 6y, -3x - 5y, -3x - 6y + z).$$

Ne propunem să calculăm spectrul endomorfismului f. *Pentru aceasta să presupunem că* $\lambda \in \mathbb{R}$ *este o valoare proprie a endomorfismului* f. *Din definiţia valorii proprii asociate unui endomorfism deducem că există un vector nenul*

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$$

cu proprietatea

$$f(x, y, z) = \lambda(x, y, z) \Leftrightarrow (4x + 6y, -3x - 5y, -3x - 6y + z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Egalând pe componente, deducem că sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} (4 - \lambda)x + 6y = 0 \\ -3x - (5 + \lambda)y = 0 \\ -3x - 6y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

trebuie să admită o soluţie nenulă. Aceasta înseamnă că determinantul sistemului trebuie să fie nul, adică avem

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5 - \lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2(\lambda + 2) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $\lambda_1 = 1$ *şi* $\lambda_2 = -2$. *Prin urmare, spectrul endomorfismului* f *este*

$$\sigma(f) = \{1, -2\}.$$

Să calculăm acum subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -2$. Din definiţia subspaţiului propriu corespunzător unei valori proprii deducem că avem

$$\begin{aligned} V_{\lambda=1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 6y = 0 \right\} = \\ &= \{(-2y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} V_{\lambda=-2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x + 6y = 0, \; -3x - 6y + 3z = 0 \right\} = \\ &= \{(-y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunile acestor subspaţii proprii sunt

$$\dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda=1} = 2 \text{ şi } \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda=-2} = 1.$$

Bazele canonice ale acestor subspaţii proprii sunt

$$B_{\lambda=1} = \{(-2,1,0), (0,0,1)\} \text{ şi } B_{\lambda=-2} = \{(-1,1,1)\}.$$

Fie V un K-spaţiu vectorial şi fie $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V. Vom demonstra în continuare câteva proprietăţi de algebră liniară ale vectorilor proprii şi subspaţiilor proprii ale endomorfismului f.

TEOREMA 3.6.1. *Nu există vector propriu corespunzător la două valori proprii distincte ale endomorfismului f.*

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că vectorul $v \neq 0_V$ este un vector propriu corespunzător la două valori proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(f)$. Rezultă că avem egalităţile $f(v) = \lambda_1 v$ şi $f(v) = \lambda_2 v$. Aceste egalităţi implică relaţiile

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0_V.$$

Deoarece $v \neq 0_V$, deducem că $\lambda_1 = \lambda_2$. □

TEOREMA 3.6.2. *Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte ale endomorfismului f sunt liniar independenţi.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $v_1, v_2, ..., v_p \in V$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \sigma(f)$. Vom demonstra că sistemul de vectori proprii

$$\{v_1, v_2, ..., v_p\}$$

este liniar independent prin inducţie după $p \in \mathbb{N}$. Pentru $p = 1$ este evident că mulţimea $\{v_1\}$ este liniar independentă deoarece $v_1 \neq 0_V$. Să presupunem acum că afirmaţia este adevărată pentru $p - 1$ vectori proprii corespunzători la $p - 1$ valori proprii distincte ale endomorfismului f şi să demonstrăm afirmaţia pentru sistemul de vectori proprii

$$\{v_1, v_2, ..., v_p\}$$

corespunzători valorilor proprii distincte

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \sigma(f),$$

unde $p \geq 2$. Pentru aceasta fie scalarii $k_1, k_2, ..., k_p \in K$ astfel încât

$$k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_pv_p = 0_V.$$

Atunci, aplicând endomorfismul f, obţinem

$$f(k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_pv_p) = 0_V \Leftrightarrow k_1\lambda_1v_1 + k_2\lambda_2v_2 + ... + k_p\lambda_pv_p = 0_V.$$

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că avem $\lambda_p \neq 0$. Atunci, multiplicând prima relaţie cu scalarul λ_p şi scăzând-o din ultima relaţie, deducem că avem egalitatea

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_p)v_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_p)v_2 + ... + k_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)v_{p-1} = 0_V.$$

Dar, din ipoteza de inducţie, sistemul de vectori proprii

$$\{v_1, v_2, ..., v_{p-1}\}$$

este liniar independent. Prin urmare, deducem că

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_p) = k_2(\lambda_2 - \lambda_p) = ... = k_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) = 0.$$

Deoarece valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sunt distincte, rezultă că

$$k_1 = k_2 = ... = k_{p-1} = 0,$$

ceea ce implică egalitatea $k_pv_p = 0_V$. Deoarece $v_p \neq 0_V$, rezultă $k_p = 0$, adică ceea ce aveam de demonstrat. □

TEOREMA 3.6.3. *Subspaţiile proprii corespunzătoare la valori proprii distincte ale endomorfismului f se află în sumă directă.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii distincte ale endomorfismului f. Vom demonstra că

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}.$$

Pentru aceasta fie un vector arbitrar $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$. Atunci avem $f(v) = \lambda_1 v$ şi $f(v) = \lambda_2 v$. Scăzând aceste relaţii, deducem că

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V.$$

Deoarece valorile proprii λ_1 şi λ_2 sunt distincte, rezultă că $v = 0_V$, adică ceea ce aveam de demonstrat. □

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $\dim_K V = n$. Fie $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V. Să presupunem că

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

este o bază a spaţiului vectorial V şi să considerăm că $M_B(f)$ este matricea endomorfismului f în baza B. În acest context, putem demonstra următoarele rezultate de algebră liniară.

TEOREMA 3.6.4. *Orice valoare proprie $\lambda \in \sigma(f)$ este o rădăcină a ecuaţiei*

$$\det [M_B(f) - \lambda I_n] = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\lambda \in \sigma(f)$ o valoare proprie a endomorfismului f şi fie $v \in V \backslash \{0_V\}$ un vector propriu asociat valorii proprii λ. Atunci avem

$$(f - \lambda \cdot 1_V)(v) = 0_V.$$

Considerând că

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M_{1,n}(K)$$

reprezintă coordonatele vectorului nenul $v \neq 0_V$ în baza B, relaţia anterioară poate fi scrisă la nivel matriceal în felul următor:

$$X \cdot [M_B(f) - \lambda I_n] = \mathbb{O},$$

unde

$$\mathbb{O} = (0, 0, ..., 0) \in M_{1,n}(K).$$

Această relaţie matriceală reprezintă un sistem liniar omogen care admite soluţii nebanale $X \neq \mathbb{O}$. Prin urmare, determinantul sistemului este nul, adică avem

$$\det [M_B(f) - \lambda I_n] = 0.$$

$\square$

TEOREMA 3.6.5. *Polinomul* $P_f(\lambda) = \det [M_B(f) - \lambda I_n]$ *este independent de alegerea bazei* B.

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm că

$$B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$$

este o altă bază a spaţiului vectorial V şi că $M_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B'. Atunci avem adevărată relaţia matriceală

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot M_{BB'}.$$

Din această relaţie matriceală rezultă egalităţile

$$\begin{aligned} \det [M_{B'}(f) - \lambda I_n] &= \det \left[M_{BB'}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot M_{BB'} - \lambda I_n\right] = \\ &= \det \left[M_{BB'}^{-1} \cdot (M_B(f) - \lambda I_n) \cdot M_{BB'}\right] = \\ &= \det M_{BB'}^{-1} \cdot \det [M_B(f) - \lambda I_n] \cdot \det M_{BB'} = \\ &= \det [M_B(f) - \lambda I_n] = P_f(\lambda). \end{aligned}$$

$\square$

DEFINIŢIA 3.6.5. *Polinomul* $P_f(\lambda)$ *se numeşte* ***polinomul caracteristic*** *al endomorfismului* f *iar ecuaţia polinomială*

$$P_f(\lambda) = 0$$

se numeşte ***ecuaţia caracteristică*** *a endomorfismului* f.

OBSERVAŢIA 3.6.2. *Din cele expuse până acum rezultă că dacă* V *este un* K*-spaţiu vectorial de dimensiune finită*

$$\dim_K V = n,$$

atunci orice valoare proprie a unui endomorfism $f \in End_K(V)$ *este o rădăcină a polinomului caracteristic* $P_f(\lambda)$*. Deoarece acest polinom are gradul* n*, deducem că endomorfismul* f *are cel mult* n *valori proprii distincte.*

3.7. Forma diagonală a unui endomorfism

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $\dim_K V = n$ şi fie $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V. Am văzut într-o secţiune precedentă că endomorfismului f i se poate asocia o matrice pătratică $M_B(f)$ corespunzătoare unei anumite baze B a spaţiului vectorial V. În această secţiune vom căuta o bază convenabilă B a spaţiului vectorial V în raport cu care matricea endomorfismului f să aibă o formă cât mai simplă, în sensul ca matricea să conţină cât mai multe zerouri. O astfel de matrice simplă este o matrice care are toate elementele nule, cu excepţia celor de pe diagonala principală. Din acest motiv introducem următorul concept.

Definiţia 3.7.1. *Endomorfismul $f \in End_K(V)$ se numeşte **diagonalizabil** dacă există o bază $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a spaţiului vectorial V, în raport cu care avem*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & d_n \end{pmatrix},$$

unde $d_i \in K$, $\forall\, i = \overline{1,n}$.

În continuare, vom demonstra o serie de rezultate care conduc la condiţii necesare şi suficiente ca un endomorfism $f \in End_K(V)$ să fie diagonalizabil.

Lema 3.7.1. *Un endomorfism $f \in End_K(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă există în spaţiul vectorial V o bază formată numai din vectori proprii ai endomorfismului f.*

Demonstraţie. Să presupunem întâi că endomorfismul f este diagonalizabil. Atunci există în spaţiul vectorial V o bază

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

astfel încât

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & d_n \end{pmatrix},$$

unde $d_i \in K$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Din definiţia matricii unui endomorfism într-o anumită bază deducem că următoarele relaţii sunt adevărate:

$$f(e_i) = d_i e_i,\ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Prin urmare, vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ sunt vectori proprii ai endomorfismului f iar scalarii $d_1, d_2, ..., d_n$ sunt valorile proprii corespunzătoare, nu neapărat distincte.

Reciproc, să presupunem că există în spaţiul vectorial V o bază

$$B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

formată numai din vectori proprii ai endomorfismului f. Atunci următoarele relaţii sunt adevărate:

$$f(v_i) = \lambda_i v_i, \ \forall\, i = \overline{1,n},$$

unde scalarii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii asociate endomorfismului f, nu neapărat distincte. În consecinţă, avem

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix},$$

adică endomorfismul f este diagonalizabil. □

Să considerăm $\lambda_0 \in \sigma(f)$ o valoare proprie a endomorfismului $f \in End_K(V)$ şi

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

o bază a spaţiului vectorial V, unde

$$\dim_K V = n.$$

Evident, valoarea proprie λ_0 este o rădăcină a polinomului caracteristic

$$P_f(\lambda) = \det\left[M_B(f) - \lambda I_n\right].$$

Să presupunem că $m_0 \in \mathbb{N}$ este multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_0 privită ca rădăcină a polinomului caracteristic. Mai mult, să presupunem că dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_0} este

$$\dim_K V_{\lambda_0} = p_0 \leq n.$$

În acest context, putem enunţa următorul rezultat:

LEMA 3.7.2. *Următoarea inegalitate este adevărată:* $p_0 \leq m_0$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $p_0 = n$, atunci $V_{\lambda_0} = V$ şi $f = \lambda_0 \cdot 1_V$. Rezultă că polinomul caracteristic al endomorfismului f este

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^n.$$

Prin urmare, multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_0 este $m_0 = n = p_0$.

Să presupunem acum că $p_0 < n$ şi să considerăm că sistemul de vectori

$$\{v_1, v_2, ..., v_{p_0}\}$$

este o bază a subspaţiului propriu V_{λ_0}. Completăm cu vectori această bază până la o bază

$$B = \{v_1, v_2, ..., v_{p_0}, v_{p_0+1}, ..., v_n\}$$

a spaţiului vectorial V. Deoarece primii p_0 vectori sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii λ_0, deducem că avem următoarele relaţii:

$$\begin{cases} f(v_i) = \lambda_0 v_i, \ \forall\, i = \overline{1, p_0}, \\ f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j, \ \forall\, i = \overline{p_0 + 1, n}, \end{cases}$$

unde $a_{ij} \in K$, $\forall\ i = \overline{p_0 + 1, n}$, $\forall\ j = \overline{1, n}$. Prin urmare, matricea endomorfismului f în baza B este

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{1p_0+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p_0p_0+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{np_0+1} \\ a_{1p_0+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p_0p_0+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{np_0+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p_0n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că polinomul caracteristic are forma

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{p_0} \cdot D(\lambda),$$

unde $D(\lambda)$ este un determinant de ordin $n - p_0$. Pe de altă parte, deoarece multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_0 este m_0, deducem că polinomul caracteristic are forma

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{m_0} \cdot Q(\lambda),$$

unde $Q(\lambda_0) \neq 0$. Din definiţia multiplicităţii algebrice a rădăcini λ_0 rezultă că

$$p_0 \leq m_0.$$

□

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $\dim_K V = n$ şi fie $f \in End_K(V)$ un endomorfism al spaţiului vectorial V.

TEOREMA 3.7.1. *Endomorfismul f este diagonalizabil dacă şi numai dacă sunt adevărate afirmaţiile:*

(1) *Toate rădăcinile polinomului caracteristic $P_f(\lambda)$ se află în corpul K;*
(2) *Dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu asociat unei valori proprii este egală cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii care îi corespunde.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$, unde $p \leq n$, toate valorile proprii distincte ale endomorfismului f şi fie $m_1, m_2, ..., m_p \in \mathbb{N}$ multiplicităţile lor algebrice ca rădăcini ale polinomului caracteristic $P_f(\lambda)$. În acest context, rezultă că polinomul caracteristic $P_f(\lambda)$ are forma

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}...(\lambda - \lambda_p)^{m_p}Q(\lambda),$$

unde

$$\sum_{j=1}^{p} m_j \leq n$$

deoarece polinomul caracteristic $P_f(\lambda)$ are gradul n.

Este evident că condiţia ca polinomul caracteristic $P_f(\lambda)$ să aibă toate rădăcinile în corpul K este ca polinomul $Q(\lambda)$ să fie un polinom constant. Această condiţie este însă echivalentă cu condiţia

$$\sum_{j=1}^{p} m_j = n.$$

Să presupunem acum că endomorfismul f este diagonalizabil. Atunci există în spaţiul vectorial V o bază

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

formată numai din vectori proprii. Pentru orice $j \in \{1, 2, ..., p\}$ să notăm cu s_j numărul de vectori din baza B care aparţin subspaţiului propriu V_{λ_j}. Să presupunem că dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_j} este

$$p_j = \dim_K V_{\lambda_j}.$$

Deoarece mulţimea B este liniar independentă, rezultă că avem inegalităţile

$$s_j \leq p_j, \ \forall\ j = \overline{1,p}.$$

Deoarece $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sunt toate valorile proprii distincte ale endomorfismului f, deducem că avem egalitatea

$$\sum_{j=1}^{p} s_j = n.$$

Mai mult, conform lemei precedente, următoarele inegalităţi sunt adevărate:

$$s_j \leq p_j \leq m_j, \ \forall\ j = \overline{1,p}.$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{p} m_j \leq n = \sum_{j=1}^{p} s_j,$$

deducem că

$$s_j = p_j = m_j, \ \forall\ j = \overline{1,p}, \text{ şi } \sum_{j=1}^{p} m_j = n.$$

Reciproc, să presupunem că următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$p_j = m_j, \ \forall\ j = \overline{1,p}, \text{ şi } \sum_{j=1}^{p} m_j = n.$$

Să considerăm mulţimea ordonată

$$B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\},$$

unde primii m_1 vectori reprezintă o bază în subspaţiul propriu V_{λ_1}, următorii m_2 vectori reprezintă o bază în subspaţiul propriu V_{λ_2} şi aşa mai departe. Din proprietăţile subspaţiilor proprii corespunzătoare la valori proprii distincte deducem că mulţimea B' este o bază în spaţiul vectorial V. Deoarece mulţimea B' este o bază formată numai din vectori proprii, rezultă că endomorfismul f este diagonalizabil. Mai mult, matricea endomorfismului f în baza B_1 este matricea care are pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, scrise de atâtea ori cât arată multiplicităţile lor algebrice $m_1, m_2, ..., m_p$, iar în afara diagonalei principale are numai zerouri. $\square$

Din demonstraţia acestei teoreme iese în evidenţă următorul algoritm de diagonalizare al unui endomorfism pe un spaţiu vectorial finit dimensional.

Algoritm de diagonalizare a unui endomorfism

(1) Se fixează o bază B a spaţiului vectorial finit dimensional V şi se scrie matricea $M_B(f)$ a endomorfismului f în baza B.

(2) Se determină toate valorile proprii λ_j, unde $j = \overline{1,p}$, rezolvând ecuaţia caracteristică

$$P_f(\lambda) = \det\left[M_B(f) - \lambda I_n\right] = 0.$$

(3) Se verifică dacă toate valorile proprii λ_j, unde $j = \overline{1,p}$, aparţin câmpului de scalari K. În caz contrar, se opreşte algoritmul şi se afirmă că endomorfismul f nu este diagonalizabil.

(4) Pentru fiecare valoare proprie λ_j se scrie multiplicitatea algebrică corespunzătoare m_j.

(5) Pentru fiecare valoare proprie λ_j se determină subspaţiul propriu corespunzător V_{λ_j}.

(6) Fiecărui subspaţiu propriu V_{λ_j} i se calculează dimensiunea $p_j = \dim_K V_{\lambda_j}$.

(7) Se verifică dacă este adevărată egalitatea

$$p_j = m_j.$$

În caz contrar, se opreşte algoritmul şi se afirmă că endomorfismul f nu este diagonalizabil.

(8) În fiecare subspaţiu propriu V_{λ_j} se scrie câte o bază B_j.

(9) În spaţiul vectorial V se scrie baza

$$B' = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$$

în care se obţine forma diagonală a endomorfismului f.

(10) Se scrie forma diagonală $M_{B'}(f)$ a endomorfismului f, punându-se pe diagonală valorile proprii ale matricii $M_B(f)$, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atâtea ori cât arată multiplicitatea sa algebrică.

(11) Se verifică relaţia matriceală

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot M_{BB'}.$$

Exemplul 3.7.1. *Fie endomorfismul* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definit prin*

$$f(x, y, z) = (4x + 6y, -3x - 5y, -3x - 6y + z).$$

Să studiem dacă endomorfismul f este diagonalizabil şi, în caz afirmativ, să determinăm baza în care se obţine matricea diagonală a acestui endomorfism. Pentru aceasta să fixăm

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

baza canonică a spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. *Evident, matricea endomorfismului* f *în baza canonică* B *este*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic asociat endomorfismului f *este*

$$P_f(\lambda) = \det\left[M_B(f) - \lambda I_3\right] = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

Rădăcinile acestui polinom sunt valorile proprii ale endomorfismului f. *Prin urmare, valorile proprii ale endomorfismului* f *sunt*

$$\lambda_1 = -2,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_1 = 1,$$

şi

$$\lambda_2 = 1,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_2 = 2.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -2$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x + 6y = 0, \ -3x - 6y + 3z = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (-y,y,y) \mid y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} *este*

$$p_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 = m_1.$$

Baza canonică a subspaţiului propriu V_{λ_1} *este*

$$B_1 = \{(-1,1,1)\}.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 6y = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (-2y,y,z) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} *este*

$$p_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 2 = m_2.$$

Baza canonică a subspaţiului propriu V_{λ_2} *este*

$$B_2 = \{(-2,1,0), (0,0,1)\}.$$

Baza în care se obţine forma diagonală a endomorfismului f *este*

$$B' = \{e_1' = (-1,1,1), e_2' = (-2,1,0), e_3' = (0,0,1)\}.$$

Forma diagonală a endomorfismului f este

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifică uşor că următoarea relaţie matriceală este adevărată:

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}^{-1} \cdot M_B(f) \cdot M_{BB'},$$

unde

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLUL 3.7.2. *Fie endomorfismul $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ a cărui matrice în baza canonică este*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să studiem dacă matricea A este diagonalizabilă. Pentru aceasta să observăm că polinomul caracteristic al acestei matrici este

$$P_A(\lambda) = \det\left[A - \lambda I_3\right] = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

Prin urmare, valorile proprii ale acestei matrici sunt

$$\lambda_1 = 4,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_1 = 1,$$

şi

$$\lambda_2 = 1,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_2 = 2.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 4$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4y + z = 0, \ -y - 2z = 0 \big\} = \\ &= \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 = m_1.$$

Baza canonică a subspaţiului propriu V_{λ_1} este

$$B_1 = \{(1,0,0)\}.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1$ *este*

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, \; -y + z = 0 \big\} = \\
&= \{ (0,y,y) \mid y \in \mathbb{R} \}.
\end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} *este*

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1.$$

Deoarece dimensiunea $d_2 = 1$ *a subspaţiului propriu* V_{λ_2} *este diferită de multiplicitatea algebrică* $m_2 = 2$ *a valorii proprii* λ_2*, rezultă că matricea* A *nu este diagonalizabilă.*

3.8. Diagonalizarea endomorfismelor simetrice

Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune finită

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n.$$

DEFINIŢIA 3.8.1. *Un endomorfism* $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ *care verifică proprietatea*

$$< v, f(w) > = < f(v), w >, \; \forall \; v, w \in V,$$

se numeşte ***endomorfism simetric*** *al spaţiului euclidian real* $(V, <,>)$.

TEOREMA 3.8.1. *Orice endomorfism simetric* $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ *al spaţiului euclidian real* $(V, <,>)$ *este diagonalizabil.*

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra afirmaţia din teoremă prin inducţie după

$$n = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Pentru început să presupunem că $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$, unde $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$, este un endomorfism simetric. Deoarece avem $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$, rezultă că există un vector nenul $v_0 \neq 0_V$ astfel încât mulţimea $\{v_0\}$ să fie bază în spaţiul vectorial real V. Din relaţia $f(v_0) \in V$, deducem că există un unic scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(v_0) = \lambda v_0.$$

Cu alte cuvinte, vectorul v_0 este vector propriu al endomorfismului simetric f. În concluzie, endomorfismul simetric f este diagonalizabil.

Să presupunem acum că afirmaţia din teoremă este adevărată pentru orice spaţiu euclidian real de dimensiune mai mică sau egală decât $n-1$ şi să demonstrăm afirmaţia pentru un spaţiu euclidian real de dimensiune n. Fie $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ un endomorfism simetric al spaţiului euclidian real $(V, <,>)$, unde

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n.$$

Să considerăm $v_1 \neq 0_V$ un vector nenul al spaţiului euclidian real $(V, <,>)$ şi să luăm scalarul

$$\lambda_1 = \frac{< f(v_1), v_1 >}{< v_1, v_1 >} \in \mathbb{R}.$$

Vom demonstra în continuare, prin reducere la absurd, că există un vector nenul $v \neq 0_V$ cu proprietatea

$$f(v) = \lambda_1 v.$$

Să presupunem că această afirmaţie nu este adevărată. Deducem atunci că avem

$$f(v) \neq \lambda_1 v, \ \forall\ v \in V \backslash \{0_V\}.$$

Prin urmare avem

$$< f(v), v > \neq \lambda_1 < v, v >, \ \forall\ v \in V \backslash \{0_V\}.$$

În particular, pentru vectorul $v_1 \neq 0_V$, obţinem contradicţia

$$< f(v_1), v_1 > \neq \lambda_1 < v_1, v_1 > = < f(v_1), v_1 > .$$

În consecinţă, există un vector nenul $v \neq 0_V$ cu proprietatea

$$f(v) = \lambda_1 v.$$

Să considerăm acum că subspaţiul vectorial $W = L\{v\}$ este acoperirea liniară a vectorului nenul $v \neq 0_V$. Evident, mulţimea $\{v\}$ este o bază a subspatiului W, deci avem

$$\dim_{\mathbb{R}} W = 1.$$

Să considerăm că $W^\perp$ este complementul ortogonal al subspaţiului W. Din relaţia

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W + \dim_{\mathbb{R}} W^\perp$$

deducem că avem

$$\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = n - 1.$$

Vom demonstra în continuare că $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Pentru aceasta să considerăm un vector arbitrar $w \in W^\perp$. Deoarece endomorfismul f este simetric, deducem că avem

$$< f(w), v > = < w, f(v) > = < w, \lambda_1 v > = \lambda_1 < w, v > = 0.$$

Cu alte cuvinte, avem $f(w) \in W^\perp$, adică ceea ce aveam de demonstrat.

În consecinţă, din ipoteza de inducţie, endomorfismul simetric

$$f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp,$$

unde $\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = n - 1$, este diagonalizabil.

Să considerăm că mulţimea de vectori proprii

$$\{u_2, u_3, ..., u_n\} \subset W^\perp$$

reprezintă baza în care se obţine forma diagonală a endomorfismului $f|_{W^\perp}$. Atunci, deoarece avem

$$V = W \oplus W^\perp,$$

rezultă că mulţimea de vectori

$$\{v, u_2, u_3, ..., u_n\} \subset V$$

reprezintă baza în care se obţine forma diagonală a endomorfismului simetric

$$f : V \to V.$$

□

Definiţia 3.8.2. *O matrice pătratică $A \in M_n(\mathbb{R})$ care verifică proprietatea*

$$A = {}^T\! A$$

*se numeşte **matrice simetrică.***

OBSERVAŢIA 3.8.1. *O matrice simetrică* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ *verifică proprietatea*

$$a_{ij} = a_{ji}, \ \forall \ i, j = \overline{1,n}.$$

Cu alte cuvinte, elementele unei matrici simetrice sunt simetrice faţă de diagonala principală.

Să presupunem acum că $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ este un endomorfism simetric şi că mulţimea

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

este o bază ortonormată a spaţiului euclidian real $(V, <,>)$. Să considerăm că

$$M_B(f) = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$$

este matricea endomorfismului simetric f în baza ortonormată B. În acest context, putem demonstra următorul rezultat.

TEOREMA 3.8.2. *Matricea* $M_B(f)$ *este o matrice simetrică.*

DEMONSTRAŢIE. Trebuie să demonstrăm că proprietatea

$$c_{ij} = c_{ji}, \ \forall \ i, j = \overline{1,n},$$

este adevărată. Ţinând cont că endomorfismul f este simetric, rezultă că următoarele relaţii sunt adevărate:

$$< f(e_i), e_j >=< e_i, f(e_j) >, \ \forall \ i, j = \overline{1,n}.$$

Din definiţia matricii unui endomorfism într-o anumită bază deducem că avem relaţiile

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, e_j \right\rangle = \left\langle e_i, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_l \right\rangle, \ \forall \ i, j = \overline{1,n}.$$

Folosind proprietăţile produsului scalar şi faptul că baza B este ortonormată, găsim relaţiile:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\delta_{kj} = \sum_{l=1}^{n} c_{lj}\delta_{il}, \ \forall \ i, j = \overline{1,n},$$

unde

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1, \ r = s \\ 0, \ r \neq s. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, am obţinut ceea ce aveam de demonstrat. □

COROLARUL 3.8.1. *Orice matrice simetrică* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *este diagonalizabilă.*

DEMONSTRAŢIE. Evident, orice matrice simetrică $A \in M_n(\mathbb{R})$ poate fi privită ca matricea unui endomorfism simetric $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ într-o bază ortonormată a spaţiului euclidian real $(\mathbb{R}^n, <,>)$. Prin urmare, deoarece orice endomorfism simetric este diagonalizabil, deducem ceea ce aveam de demonstrat. □

EXEMPLUL 3.8.1. *Să se diagonalizeze endomorfismul simetric* $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ *a cărui matrice în baza canonică este matricea simetrică*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al acestei matrici simetrice este

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I_3] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Prin urmare, valorile proprii ale acestei matrici simetrice sunt

$$\lambda_1 = 0,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_1 = 1,$$

şi

$$\lambda_2 = -1,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_2 = 1,$$

şi

$$\lambda_3 = 2,$$

de multiplicitate algebrică

$$m_2 = 1.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x+y+z = 0 \right\} = \\ &= \{(x,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} *este*

$$d_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 1 = m_1.$$

Baza canonică a subspaţiului propriu V_{λ_1} *este*

$$B_1 = \{(1,0,-1)\}.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -1$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0,\ x+2y+z = 0,\ y+z = 0 \right\} = \\ &= \{(x,-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} *este*

$$d_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_2} = 1 = m_2.$$

Baza canonică a subspaţiului propriu V_{λ_2} *este*

$$B_2 = \{(1,-1,1)\}.$$

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 2$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y = 0,\ x - y + z = 0,\ y - 2z = 0 \big\} = \\ &= \{ (z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_3} *este*

$$d_3 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_3} = 1 = m_3.$$

Baza canonică a subspaţiului propriu V_{λ_3} *este*

$$B_3 = \{(1,2,1)\}.$$

Baza în care se obţine forma diagonală a matricii simetrice A *este*

$$B' = \{e_1' = (1,0,-1), e_2' = (1,-1,1), e_3' = (1,2,1)\}.$$

Forma diagonală a matricii simetrice A *este*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se verifică uşor că următoarea relaţie matriceală este adevărată:

$$D = M_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot M_{BB'},$$

unde

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL 4

FORME PĂTRATICE

În studiul maximelor şi minimelor funcţiilor de mai multe variabile, un rol extrem de important este jucat de *signatura formelor pătratice*. Acestea pot fi introduse cu ajutorul *aplicaţiilor biliniare şi simetrice* care generalizează natural produsele scalare.

4.1. Aplicaţii biliniare şi simetrice. Forme pătratice

Fie V un K-spaţiu vectorial.

DEFINIŢIA 4.1.1. *O aplicaţie $\mathcal{A} : V \times V \to K$ care are proprietăţile*

(1) $\mathcal{A}(v, w) = \mathcal{A}(w, v)$, $\forall\ v, w \in V$,

(2) $\mathcal{A}(\alpha v + \beta w, w') = \alpha\mathcal{A}(v, w') + \beta\mathcal{A}(w, w')$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\forall\ v, w, w' \in V$,

se numeşte ***aplicaţie biliniară şi simetrică*** *pe spaţiul vectorial ${}_K V$.*

EXEMPLUL 4.1.1. *Orice produs scalar*

$$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$$

pe un spaţiu vectorial real ${}_{\mathbb{R}}V$ este o aplicaţie biliniară şi simetrică.

Să presupunem că V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită

$$\dim_K V = n$$

şi să considerăm că mulţimea

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

este o bază a spaţiului vectorial ${}_K V$. Fie $v, w \in V$ doi vectori arbitrari care se descompun în baza B după cum urmează:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ şi } w = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

unde $x_i, y_i \in K$, $\forall\ i = \overline{1, n}$. În acest context, dacă $\mathcal{A} : V \times V \to K$ este o aplicaţie biliniară şi simetrică, atunci avem relaţia:

$$\mathcal{A}(v, w) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathcal{A}(e_i, e_j).$$

Această relaţie arată că aplicaţia biliniară şi simetrică $\mathcal{A}$ este unic definită de valorile sale pe produsul cartezian $B \times B$. Din acest motiv, introducem următoarea noţiune:

DEFINIŢIA 4.1.2. *Matricea simetrică* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$, *unde*

$$a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j),\ \forall\ i, j = \overline{1, n},$$

se numeşte ***matricea în baza*** B ***a aplicaţiei biliniare şi simetrice***

$$\mathcal{A} : V \times V \to K.$$

Folosind această definiţie deducem că expresia analitică a aplicaţiei biliniare şi simetrice

$$\mathcal{A} : V \times V \to K$$

este

$$\mathcal{A}(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Mai mult, utilizând notaţiile

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ şi } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix},$$

obţinem relaţia matriceală

$$\mathcal{A}(v, w) = \ {}^{T}X \cdot A \cdot Y.$$

Să presupunem acum că mulţimea

$$B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$$

este o alta bază a spaţiului vectorial ${}_KV$ şi că vectorii arbitrari v şi w se descompun în baza B' după cum urmează:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \text{ şi } w = \sum_{j=1}^{n} y'_j e'_j,$$

unde $x'_i, y'_i \in K$, $\forall\ i = \overline{1, n}$. În acest context, dacă $A' = (a'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$, unde

$$a'_{ij} = \mathcal{A}(e'_i, e'_j),\ \forall\ i, j = \overline{1, n},$$

este matricea în baza B' a aplicaţiei biliniare şi simetrice

$$\mathcal{A} : V \times V \to K,$$

atunci următoarea relaţie matriceală este adevărată:

$$\mathcal{A}(v, w) = \ {}^{T}X' \cdot A' \cdot Y',$$

unde

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ şi } Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ . \\ . \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 4.1.1. *Următoarea relaţie de legătură între matricile A şi A' este adevărată:*

$$A' = {}^{T}M_{BB'} \cdot A \cdot M_{BB'},$$

unde matricea $M_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

DEMONSTRAŢIE. Utilizând formulele matriceale de schimbare a coordonatelor

$$X = M_{BB'} \cdot X' \text{ şi } Y = M_{BB'} \cdot Y',$$

deducem că avem

$$\mathcal{A}(v, w) = {}^{T}X \cdot A \cdot Y = {}^{T}X' \cdot \left[{}^{T}M_{BB'} \cdot A \cdot M_{BB'} \right] \cdot Y'.$$

Pe de altă parte, ştim însă că avem

$$\mathcal{A}(v, w) = {}^{T}X' \cdot A' \cdot Y'.$$

Din cele două relaţii rezultă ceea ce aveam de demonstrat. □

DEFINIŢIA 4.1.3. *O aplicaţie $Q : V \to K$ pentru care există o aplicaţie biliniară şi simetrică*

$$\mathcal{A} : V \times V \to K$$

cu proprietatea

$$Q(x) = \mathcal{A}(x, x), \ \forall\ x \in V,$$

se numeşte ***formă pătratică ataşată aplicaţiei biliniare şi simetrice*** *$\mathcal{A}$.*

OBSERVAŢIA 4.1.1. *Dacă $Q : V \to K$ este o formă pătratică dată ataşată aplicaţiei biliniare şi simetrice*

$$\mathcal{A} : V \times V \to K,$$

atunci aplicaţia biliniară şi simetrică $\mathcal{A}$ este determinată din forma pătratică Q prin intermediul următoarei formule:

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right], \ \forall\ x, y \in V.$$

Fie $Q : V \to K$ o formă pătratică ataşată aplicaţiei biliniare şi simetrice

$$\mathcal{A} : V \times V \to K.$$

Dacă vectorul arbitrar $x \in V$ se descompune în baza

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

ca

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

unde $x_i \in K$, $\forall\ i = \overline{1, n}$, atunci forma pătratică Q are expresia analitică

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde matricea

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$$

este matricea în baza B a aplicaţiei biliniare şi simetrice $\mathcal{A}$. Mai mult, următoarea relaţie matriceală este adevărată:

$$Q(x) = {}^{T}X \cdot A \cdot X,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

DEFINIŢIA 4.1.4. *Matricea simetrică A se numeşte* ***matricea în baza*** B ***a formei pătratice*** Q.

DEFINIŢIA 4.1.5. *O formă pătratică exprimată analitic prin*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

este în ***formă canonică*** *dacă*

$$a_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}, \ \forall \ i, j = \overline{1, n},$$

unde $\lambda_j \in K$, $\forall \ j = \overline{1, n}$, *şi*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j; \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

OBSERVAŢIA 4.1.2. *Expresia analitică a unei forme pătratice aflate în formă canonică este*

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2,$$

unde $\lambda_j \in K$, $\forall \ j = \overline{1, n}$.

4.2. Reducerea formelor pătratice la forma canonică

În această secţiune vom studia trei posibilităţi de reducere la forma canonică a formelor pătratice: metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi şi metoda valorilor proprii. Pentru aceasta să presupunem că V este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

TEOREMA 4.2.1 (Metoda lui Gauss). *Dacă* $Q : V \to \mathbb{R}$ *este o formă pătratică a cărei expresie analitică în baza*

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

este

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall \ i, j = \overline{1, n}$, *atunci există o bază în spaţiul vectorial real* V *în raport cu care forma pătratică* Q *să aibă formă canonică.*

DEMONSTRAŢIE. Vom descrie în continuare un algoritm inductiv care reduce problema studiată la o formă pătratică pe un spaţiu vectorial real de dimensiune mai mică decât

$$n = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Cazul 1. Să presupunem că există un indice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ cu proprietatea că $a_{ii} \neq 0$. Efectuând eventual o renumerotare a coordonatelor $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, putem presupune fără a restrânge generalitatea că $i = 1$, adică $a_{11} \neq 0$. În acest context, forma pătratică Q poate fi rescrisă sub forma

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Scoţând factor comun forţat pe $1/a_{11}$ din primii doi termeni şi adunând şi scăzând termeni până la un pătrat perfect, putem rescrie forma pătratică Q sub forma

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}x_ix_j,$$

unde $a'_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\ i, j = \overline{2, n}$. Făcând acum schimbarea de coordonate

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

deducem că, la nivel de coordonate $x'_1, x'_2, ..., x'_n \in \mathbb{R}$, forma pătratică Q are expresia

$$Q(x') = \frac{1}{a_{11}}(x'_1)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}x'_ix'_j.$$

Schimbarea de coordonate de mai sus este corespunzătoare unei noi baze

$$B' = \{e'_1, e'_2 = e_2, e'_3 = e_3, ..., e'_n = e_n\}$$

a cărei matrice de schimbare este

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Evident, forma pătratică

$$Q'(x') = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}x'_ix'_j$$

este o formă pătratică definită pe un spaţiu vectorial real de dimensiune $n - 1$. Mai mult, baza în care forma pătratică Q are expresia analitică de mai sus este determinată de vectorii $e'_2, e'_3, ..., e'_n$.

În acest context, dacă există un indice $k \in \{2, 3, ..., n\}$ cu proprietatea că $a'_{kk} \neq 0$, atunci aplicăm din nou acelaşi procedeu al formării de pătrate perfecte pentru forma pătratică Q'. În caz contrar, trecem la **Cazul 2**.

Cazul 2. Să presupunem că $a_{ii} = 0, \forall\ i = \overline{1, n}$. Deoarece forma pătratică Q nu este identic nulă, deducem că există $a_{ij} \neq 0$, unde $i \neq j$. Făcând acum schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_i = x'_i + x'_j \\ x_j = x'_i - x'_j \\ x_k = x'_k, \ \forall\, k \neq i, j, \end{cases}$$

găsim că expresia formei pătratice Q devine

$$Q(x') = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a''_{rs} x'_r x'_s,$$

unde $a''_{ii} \neq 0$ deoarece avem

$$x_i x_j = (x'_i)^2 - (x'_j)^2.$$

Matricea de schimbare a bazei corespunzătoare acestei schimbări de coordonate este

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

unde B' este baza corespunzătoare sistemului de coordonate $x'_1, x'_2, ..., x'_n$. Deoarece după această schimbare de coordonate apare un termen la pătrat în expresia formei pătratice Q, înseamnă că putem aplica acum procedeul de la **Cazul 1** pentru ultima expresie analitică a formei pătratice Q.

În final, continuând procedeele combinate de la **Cazurile 1** şi **2**, după cel mult $n-1$ paşi, găsim o bază în raport cu care forma pătratică Q să aibă forma canonică. □

OBSERVAŢIA 4.2.1. *Metoda lui Gauss de reducere la forma canonică a formelor pătratice este o metodă elementară de formări de pătrate perfecte. Această metodă acţionează la nivel de coordonate fără a se obţine direct baza corespunzătoare formei canonice.*

EXEMPLUL 4.2.1. *Folosind metoda lui Gauss, să se reducă la forma canonică forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită în baza canonică a spaţiului vectorial real ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ prin*

$$Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, fără a se preciza baza în care se obţine această formă canonică.

Deoarece avem $a_{ii} = 0$, $\forall\ i = 1, 2, 3$, (i. e. nu avem nici un termen la pătrat în expresia formei pătratice Q) pornim procedeul cu o schimbare de coordonate ca *în **Cazul 2**. Astfel, făcând schimbarea de coordonate*

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 \\ x_3 = x'_3, \end{cases}$$

obţinem

$$Q(x') = 2(x'_1)^2 - 2(x'_2)^2 + 2x'_1x'_3 + 2x'_2x'_3.$$

*În continuare, deoarece există termeni la pătrat în expresia formei pătratice Q, putem aplica procedeul din **Cazul 1.** Cu alte cuvinte, putem forma în expresia formei pătratice Q pătrate perfecte prin adunarea şi scăderea unor termeni convenabili. Obţinem astfel*

$$\begin{aligned} Q(x') &= \frac{1}{2}(2x'_1 + x'_3)^2 - \frac{1}{2}(x'_3)^2 - 2(x'_2)^2 + 2x'_2x'_3 = \\ &= \frac{1}{2}(2x'_1 + x'_3)^2 - \frac{1}{2}(x'_3 - 2x'_2)^2. \end{aligned}$$

Făcând acum schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x''_1 = 2x'_1 + x'_3 \\ x''_2 = x'_3 - 2x'_2 \\ x''_3 = x'_3, \end{cases}$$

găsim forma canonică

$$Q(x'') = \frac{1}{2}(x''_1)^2 - \frac{1}{2}(x''_2)^2.$$

TEOREMA 4.2.2 (Metoda lui Jacobi). *Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică şi*

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$$

matricea simetrică a formei pătratice într-o bază fixată

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

a spaţiului vectorial real V. Dacă determinanţii

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \det A$$

sunt diferiţi de zero, atunci există o bază

$$B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$$

astfel încât expresia analitică a formei pătratice Q în baza B' să fie

$$Q(x') = \frac{1}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x'_3)^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2,$$

unde $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ sunt coordonatele corespunzătoare bazei B'.

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm $\mathcal{A}$ aplicaţia biliniară şi simetrică din care provine forma pătratică Q şi să căutăm baza

$$B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$$

de forma

$$\begin{aligned}
&f_1 = c_{11}e_1,\\
&f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2,\\
&.\\
&.\\
&.\\
&f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + ... + c_{nn}e_n,
\end{aligned}$$

unde $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq i \leq j \leq n$. Să presupunem că vectorii bazei B' verifică proprietăţile

$$\mathcal{A}(e_i, f_j) = 0,\ \forall\ 1 \leq i < j \leq n,$$

şi

$$\mathcal{A}(e_i, f_i) = 1,\ \forall\ i = \overline{1, n}.$$

Vom demonstra în continuare că baza B' este baza căutată în teoremă. Pentru aceasta vom arăta că matricea formei pătratice Q în baza B' este matricea diagonală

$$A' = \begin{pmatrix}
1/\Delta_1 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0\\
0 & \Delta_1/\Delta_2 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0\\
0 & 0 & \Delta_2/\Delta_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & \Delta_{n-1}/\Delta_n
\end{pmatrix}.$$

Prin definiţie, matricea A' a formei pătratice Q în baza B' este descrisă de elementele

$$a'_{ij} = \mathcal{A}(f_i, f_j) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{i} c_{ki}e_k, f_j\right) = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}\mathcal{A}(e_k, f_j),\ \forall\ i, j = \overline{1, n}.$$

Dacă $1 \leq i < j \leq n$, atunci avem $a'_{ij} = 0$ deoarece

$$\mathcal{A}(e_k, f_j) = 0,\ \forall\ 1 \leq k < j \leq n.$$

Din simetria aplicaţiei biliniare şi simetrice $\mathcal{A}$ deducem că

$$a'_{ij} = 0,\ \forall\ 1 \leq j < i \leq n.$$

Dacă $i \in \{1, 2, ..., n\}$ este un indice fixat, atunci avem

$$a'_{ii} = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}\mathcal{A}(e_k, f_i) = c_{ii}.$$

Dar constantele c_{ki}, $\forall\ 1 \leq k \leq i$, verifică sistemul liniar

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1, f_i) = c_{1i}a_{11} + c_{2i}a_{12} + ... + c_{ii}a_{1i} = 0 \\ \mathcal{A}(e_2, f_i) = c_{1i}a_{21} + c_{2i}a_{22} + ... + c_{ii}a_{2i} = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \mathcal{A}(e_{i-1}, f_i) = c_{1i}a_{i-1,1} + c_{2i}a_{i-1,2} + ... + c_{ii}a_{i-1,i} = 0 \\ \mathcal{A}(e_i, f_i) = c_{1i}a_{i1} + c_{2i}a_{i2} + ... + c_{ii}a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este $\Delta_i \neq 0$ şi deci, utilizând regula lui Cramer, obţinem

$$a'_{ii} = c_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

□

OBSERVAŢIA 4.2.2. *Metoda lui Jacobi de reducere la forma canonică a formelor pătratice este extrem de utilă când ne trebuie rapid o formă canonică a unei forme pătratice (de exemplu în aprecierea naturii punctelor de extrem ale unei funcţii reale de mai mult variabile) fără a fi interesaţi şi de baza în care se obţine această formă canonică.*

EXEMPLUL 4.2.2. *Folosind metoda lui Jacobi, să se reducă la forma canonică forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită în baza canonică a spaţiului vectorial real ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ prin*

$$Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, fără a se preciza baza în care se obţine această formă canonică.

Matricea formei pătratice Q în baza canonică a spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinanţii

$$\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80$$

sunt nenuli, rezultă că există nişte coordonate x'_1, x'_2, x'_3 în raport cu care forma pătratică Q să aibă forma canonică

$$Q(x') = \frac{1}{5}(x'_1)^2 + \frac{5}{26}(x'_2)^2 + \frac{13}{40}(x'_3)^2.$$

TEOREMA 4.2.3 (Metoda valorilor proprii). *Fie $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian real şi fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică a spaţiului vectorial real V. Să presupunem că*

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$$

este matricea simetrică a formei pătratice Q într-o bază ortonormată fixată

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}.$$

Atunci există o bază ortonormată

$$B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\},$$

formată numai din vectori proprii ai matricii simetrice A, astfel încât expresia analitică a formei pătratice Q în baza B' să fie

$$Q(x') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valorile proprii ale matricii simetrice A, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atâtea ori cât este multiplicitatea sa algebrică, iar $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ sunt coordonatele corespunzătoare bazei B'.

Demonstraţie. Deoarece matricea A a formei pătratice Q este o matrice simetrică, rezultă că ea este diagonalizabilă. Să considerăm atunci baza ortonormată

$$B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\},$$

formată numai din vectori proprii ai matricii simetrice A, care determină forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a matricii simetrice A, unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valorile proprii ale matricii simetrice A. Deoarece bazele B şi B' sunt baze ortonormate, rezultă că avem relaţia matriceală

$$^{T}C = C^{-1},$$

unde $C = M_{B'B}$ este matricea de trecere de la baza ortonormată B' la baza ortonormată B. În concluzie, vom avea relaţiile matriceale

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C = \ ^{T}C \cdot A \cdot C.$$

Aceasta înseamnă că matricea diagonală D este matricea formei pătratice Q în baza ortonormată B', adică ceea ce aveam de demonstrat. □

Observaţia 4.2.3. *Metoda valorilor proprii de reducere a formelor pătratice la forma canonică este o metodă eficace, ea dând destul de comod şi o formă canonică a formei pătratice şi o bază ortonormată în care se obţine această formă canonică. Această metodă se foloseşte în geometria analitică pentru a reduce la forma canonică* ***conicele*** *şi* ***cuadricele*** *date prin ecuaţia generală.*

Exemplul 4.2.3. *Folosind metoda valorilor proprii, să se reducă la forma canonică forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită în baza canonică a spaţiului euclidian real $(\mathbb{R}^3, <, >)$ prin*

$$Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, precizându-se baza ortonormată în care se obţine această formă canonică. Pentru aceasta să considerăm că

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

este baza canonică ortonormată a spaţiului euclidian real $(\mathbb{R}^3, <,>)$. *În această bază, matricea formei pătratice* Q *este matricea simetrică*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrici simetrice sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-9)^2(\lambda+9) = 0,$$

adică $\lambda_1 = -9$, *de multiplicitate algebrică* $m_1 = 1$, *şi* $\lambda_2 = 9$, *de multiplicitate algebrică* $m_2 = 2$.

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = -9$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 \\ -4 & 16 & -4 \\ -8 & -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 10x - 4y - 8z = 0 \\ -4x + 16y - 4z = 0 \\ -8x - 4y + 10z = 0 \end{cases} \right\} = \\ &= \{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O bază ortonormată a subspaţiului propriu V_{λ_1} *este*

$$B_1 = \left\{ f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_2 = 9$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} -8x - 4y - 8z = 0 \\ -4x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \right\} = \\ &= \{(x, -2x - 2z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O bază neortonormată a subspaţiului propriu V_{λ_2} *este*

$$B_2' = \{e_2' = (1, -2, 0), e_3' = (0, -2, 1)\}.$$

Ortonormând această bază neortonormată a subspaţiului propriu V_{λ_2} *prin procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt, găsim următoarea bază ortonormată a subspaţiului propriu* V_{λ_2} :

$$B_2 = \left\{ f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), f_3 = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

În concluzie, baza ortonormată în care se obţine forma canonică a formei pătratice Q *este*

$$B' = \left\{ f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), f_3 = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

Cu alte cuvinte, făcând schimbarea de coordonate

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

găsim forma canonică a formei pătratice Q :

$$Q(x') = -9(x_1')^2 + 9(x_2')^2 + 9(x_3')^2.$$

4.3. Signatura unei forme pătratice

Să considerăm că V este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n \in \mathbb{N}$$

şi că

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2,$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, este forma canonică a unei forme pătratice $Q : V \to \mathbb{R}$. Fie $p \in \mathbb{N}$ numărul de coeficienţi $a_1, a_2, ..., a_n$ care sunt strict pozitivi, $q \in \mathbb{N}$ numărul de coeficienţi strict negativi şi $d = n - (p + q) \in \mathbb{N}$ numărul de coeficienţi egali cu zero.

Definiţia 4.3.1. *Tripletul de numere naturale, notat*

$$sign(Q) = (p, q, d) \in \mathbb{N}^3,$$

se numeşte ***signatura*** *formei pătratice* Q.

Vom demonstra în continuare că deşi forma canonică a unei forme pătratice nu este unică totuşi toate formele canonice ale aceleiaşi forme pătratice au aceeaşi signatură.

Teorema 4.3.1 (Legea de inerţie). *Signatura unei forme pătratice* Q *este aceeaşi pentru orice formă canonică a lui* Q.

Demonstraţie. Să considerăm două baze

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

şi

$$B' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\}$$

în spaţiul vectorial real V astfel încât expresia analitică a formei pătratice Q relativ la cele două baze să fie una canonică:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \text{ şi } Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(x_i')^2,$$

unde $a_i, a_i' \in \mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ şi } x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'.$$

Putem presupune fără a restrânge generalitatea că

$$a_i, a_i' \in \{-1, 0, 1\},\ \forall\ i = \overline{1,n},$$

deoarece, în caz contrar, facem o schimbare de coordonate de forma:

$$x_i'' = \sqrt{|a_i|} \cdot x_i, \ \forall\ i = \overline{1,n}, \text{ sau } x_i'' = \sqrt{|a_i'|} \cdot x_i', \ \forall\ i = \overline{1,n}.$$

Mai mult chiar, putem să presupunem (printr-o eventuală renumerotare) că în expresia canonică a formei pătratice Q relativ la baza B (resp. B') primii p (resp. p') coeficienţi sunt strict pozitivi, următorii q (resp. q') coeficienţi sunt strict negativi iar ultimii d (resp. d') sunt nuli. Atunci avem

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 = \sum_{i=1}^{p'} (x_i')^2 - \sum_{i=p'+1}^{p'+q'} (x_i')^2.$$

Vom demonstra acum că $p = p'$ şi $q = q'$. Pentru aceasta să presupunem prin absurd că $p > p'$ şi să considerăm subspaţiile

$$U = L(\{e_1, e_2, ..., e_p\}) \text{ şi } U' = L(\{e'_{p'+1}, e'_{p'+2}, ..., e'_n\}).$$

Evident dimensiunile subspaţiilor U şi U' sunt

$$\dim_{\mathbb{R}} U = p \text{ şi } \dim_{\mathbb{R}} U' = n - p'.$$

Deoarece avem relaţia

$$\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U' = p + n - p' > n = \dim_{\mathbb{R}} V,$$

rezultă că subspaţiile U şi U' nu se află în sumă directă, adică

$$U \cap U' \neq \{0_V\}.$$

Prin urmare, există un vector nenul $x \in U \cap U'$ de forma

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_p e_p = x'_{p'+1} e'_{p'+1} + x'_{p'+2} e'_{p'+2} + ... + x'_n e'_n$$

care verifică relaţiile

$$0 \leq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 = Q(x) = -(x'_{p'+1})^2 - (x'_{p'+2})^2 - ... - (x'_n)^2 \leq 0.$$

Din aceste relaţii rezultă că

$$x_1 = x_2 = .. = x_p = x'_{p'+1} = x'_{p'+2} = ... = x'_n = 0,$$

adică $x = 0$. Acest lucru se află în contradicţie cu alegerea vectorului $x \in U \cap U'$. Această contradicţie este furnizată de presupunerea $p > p'$. Analog, presupunerea $p' > p$ ne conduce la o contradicţie. În consecinţă, avem $p = p'$. Prin aceeaşi metodă se arată că $q = q'$ şi deci $d = d'$. Rezultă că

$$(p, q, d) = (p', q', d').$$

□

EXEMPLUL 4.3.1. *Folosind pe rând metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi şi metoda valorilor proprii, să să se reducă la forma canonică forma pătratică*

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

definită în baza canonică a spaţiului vectorial real ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ *prin*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, *verificându-se legea de inerţie pentru formele canonice obţinute.*

(1) ***Metoda lui Gauss.*** *Deoarece în expresia formei pătratice Q apar termeni la pătrat putem aduna şi scădea termeni pentru a obţine pătrate perfecte. Astfel avem*

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_2^2 - 4x_1x_2) + x_1^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 = \\ &= (x_2 - 2x_1)^2 - 3x_1^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 = \\ &= (x_2 - 2x_1)^2 + 4(x_3^2 - x_1x_3) - 3x_1^2 = \\ &= (x_2 - 2x_1)^2 + 4\left[\left(x_3 - \frac{x_1}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2}{4}\right] - 3x_1^2 = \\ &= (x_2 - 2x_1)^2 + 4\left(x_3 - \frac{x_1}{2}\right)^2 - 4x_1^2. \end{aligned}$$

Efectuând acum schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - 2x_1 \\ x_2' = x_3 - x_1/2 \\ x_3' = x_1, \end{cases}$$

obţinem forma canonică

$$Q(x') = (x_1')^2 + 4(x_2')^2 - 4(x_3')^2.$$

Evident, signatura formei pătratice Q este

$$sign(Q) = (2, 1, 0).$$

(2) ***Metoda lui Jacobi.*** *Matricea formei pătratice Q în baza canonică a spaţiului vectorial real $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ este matricea simetrică*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinanţii

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16,$$

sunt nenuli, rezultă că există un sistem de coordonate x_1', x_2', x_3' în raport cu care forma pătratică Q să aibă forma canonică

$$Q(x') = (x_1')^2 - \frac{1}{3}(x_2')^2 + \frac{3}{16}(x_3')^2.$$

Evident, signatura formei pătratice Q este

$$sign(Q) = (2, 1, 0).$$

(3) ***Metoda valorilor proprii.*** *Valorile proprii ale matricii A a formei pătratice Q sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - \lambda - 16 = 0.$$

Deoarece funcţia polinomială $P_A(\lambda)$ este o funcţie continuă pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi întrucât avem schimbările de semn

$$P_A(-2) = 18 > 0,\ P_A(0) = -16 < 0,\ P_A(3) = 8 > 0 \text{ şi } P_A(6) = -22 < 0,$$

rezultă că polinomul caracteristic $P_A(\lambda)$ are rădăcinile reale

$$\lambda_1 \in (-2,0),\ \lambda_2 \in (0,3) \text{ şi } \lambda_3 \in (3,6).$$

Prin urmare, există un sistem de coordonate x'_1, x'_2, x'_3 în raport cu care forma pătratică Q să aibă forma canonică

$$Q(x') = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2.$$

Evident, signatura formei pătratice Q este

$$sign(Q) = (2,1,0),$$

deoarece avem

$$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0 \text{ şi } \lambda_3 > 0.$$

DEFINIŢIA 4.3.2. *O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***pozitiv definită*** *dacă are signatura*

$$sign(Q) = (n,0,0),$$

unde

$$n = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

OBSERVAŢIA 4.3.1. *O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă într-o formă canonică fixată toţi coeficienţii care apar sunt strict pozitivi.*

DEFINIŢIA 4.3.3. *O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***negativ definită*** *dacă are signatura*

$$sign(Q) = (0,n,0),$$

unde

$$n = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

OBSERVAŢIA 4.3.2. *O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ este negativ definită dacă într-o formă canonică fixată toţi coeficienţii care apar sunt strict negativi.*

Reducerea la forma canonică a formelor pătratice prin metoda lui Jacobi şi metoda valorilor proprii ne permite să obţinem următoarele condiţii necesare şi suficiente ca o formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ să fie pozitiv definită.

COROLARUL 4.3.1 (Criteriul lui Sylvester). *O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(1) *Toţi determinanţii Δ_i verifică inegalităţile*

$$\Delta_i > 0,\ \forall\ i = \overline{1,n};$$

(2) *Toate valorile proprii ale matricii simetrice A a formei pătratice Q sunt strict pozitive.*

Reducerea la forma canonică a formelor pătratice prin metoda lui Jacobi şi metoda valorilor proprii ne permite să obţinem următoarele condiţii necesare şi suficiente ca o formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ să fie negativ definită.

COROLARUL 4.3.2 (Criteriul lui Sylvester). *O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ este negativ definită dacă şi numai dacă una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(1) *Toţi determinanţii Δ_i verifică inegalităţile*

$$(-1)^i \Delta_i > 0,\ \forall\ i = \overline{1,n};$$

(2) *Toate valorile proprii ale matricii simetrice A a formei pătratice Q sunt strict negative.*

EXEMPLUL 4.3.2. *Utilizând criteriul lui Sylvester, să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită în baza canonică a spaţiului vectorial real ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ prin*

$$Q(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, să fie pozitiv (resp. negativ) definită.

Matricea formei pătratice Q în baza canonică a spaţiului vectorial real ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, avem determinanţii

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(\lambda^2 - 8\lambda + 10).$$

Conform criteriului lui Sylvester, forma pătratică Q este pozitiv definită dacă avem

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 > 0 \\ 2 - \lambda^2 > 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \{\emptyset\}.$$

Conform criteriului lui Sylvester, forma pătratică Q este negativ definită dacă avem

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ 2 - \lambda^2 > 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \lambda \in (4 - \sqrt{6}, 4 + \sqrt{6}) \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \{\emptyset\}.$$

CAPITOLUL 5

SPAŢIUL VECTORIAL REAL AL VECTORILOR LIBERI

În acest capitol vom studia proprietăţile geometrice particulare ale unui spaţiu vectorial real remarcabil, numit *spaţiul vectorilor liberi.* Acest spaţiu modelează, din punct de vedere matematic, spaţiul marimilor fizice vectoriale ca forţele, acceleraţiile, vitezele sau momentele. Este important de subliniat că spaţiul vectorial real al vectorilor liberi poate fi înzestrat cu o structură naturală de spaţiu euclidian, care permite măsurarea lungimii unui vector liber, precum şi a unghiului format de doi vectori liberi. Mai mult, vom vedea că putem defini în acest spaţiu o serie de produse specifice, cu o puternică semnificaţie fizico-geometrică, cum ar fi *produsul vectorial* sau *produsul mixt.*

5.1. Segmente orientate. Vectori liberi

Vom nota cu E_3 spaţiul punctual tridimensional al geometriei euclidiene elementare. Pentru orice două puncte distincte $A, B \in E_3$ vom nota cu $\overrightarrow{AB}$ *segmentul orientat* caracterizat de următoarele entităţi:

(1) *direcţia* = dreapta suport a segmentului $[AB]$;

(2) *orientarea* (*sensul*) = de la A la B;

(3) *lungimea* (*norma*) = lungimea segmentului $[AB]$ notată cu $||\overrightarrow{AB}||$.

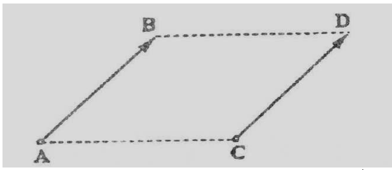
Segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$

Punctul A se numeşte *originea* segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ iar punctul B se numeşte *vârful* segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

În cazul în care originea A şi vârful B ale unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ coincid ($A = B$) se obţine *segmentul orientat nul*. Prin definiţie, segmentul orientat nul $\overrightarrow{AA}$ are lungimea egală cu zero, nu are nici o direcţie şi nici un sens, fiind reprezentat geometric de punctul A.

Spunem că două segmente orientate nenule au *aceeaşi direcţie* dacă direcţiile lor sunt paralele sau confundate.

DEFINIŢIA 5.1.1. *Două segmente orientate nenule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ se numesc* ***echipolente*** *dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime. În acest caz vom folosi notaţia $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*



Segmente orientate echipolente: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$

OBSERVAŢIA 5.1.1. *Două segmente orientate nenule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolente*

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

dacă şi numai dacă pot fi suprapuse prin paralelism astfel încât originile A şi C (resp. vârfurile B şi D) să coincidă.

OBSERVAŢIA 5.1.2. *Prelungim relaţia de echipolenţă şi la segmentele orientate nule: admitem că toate segmentele orientate nule sunt echipolente între ele.*

Folosind observaţia de mai sus, definiţia relaţiei de echipolenţă şi câteva proprietăţi geometrice elementare, deducem uşor următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 5.1.1. *Relaţia de echipolenţă satisface următoarele proprietăţi:*

(1) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ *(reflexivitate);*

(2) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$ *(simetrie);*

(3) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ *şi* $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{A''B''} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A''B''}$ *(tranzitivitate).*

Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat arbitrar. Vom nota cu $\overline{AB}$ mulţimea

$$\overline{AB} \overset{def}{=} \left\{ \overrightarrow{A'B'} \;\middle|\; \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB} \right\}.$$

DEFINIŢIA 5.1.2. *Mulţimea $\overline{AB}$ se numeşte* ***clasa de echipolenţă*** *a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.*

OBSERVAŢIA 5.1.3. *Evident avem $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$ şi fiecare segment orientat din clasa de echipolenţă $\overline{AB}$ este un* ***reprezentant*** *al clasei.*

DEFINIŢIA 5.1.3. *Clasele de echipolenţă ale segmentelor orientate se numesc* ***vectori liberi.***

OBSERVAŢIA 5.1.4. *Vectorii liberi vor fi notaţi prin $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ sau $\overline{AB}$, $\overline{CD}, \ldots$, iar în desen vor fi reprezentaţi printr-unul dintre segmentele orientate echipolente care definesc acel vector liber.*

DEFINIŢIA 5.1.4. *Direcţia, sensul şi lungimea (norma) segmentelor orientate echipolente care definesc un vector liber se numesc* ***direcţia, sensul*** *şi* ***lungimea (norma)*** *vectorului liber.*

OBSERVAŢIA 5.1.5. *Lungimea (norma) unui vector liber* $\overline{a}$ *sau* $\overline{AB}$ *se notează cu* $||\overline{a}||$ *sau* $\left|\left|\overline{AB}\right|\right|$.

DEFINIŢIA 5.1.5. *Vectorul liber care are lungimea zero se numeşte* ***vectorul nul*** *şi se notează cu* $\overline{0}$.

OBSERVAŢIA 5.1.6. *Vectorul nul* $\overline{0}$ *este reprezentat de segmentul orientat nul* $\overrightarrow{AA}$.

DEFINIŢIA 5.1.6. *Un vector liber de lungime unu se numeşte* ***versor*** *şi în general se notează cu* $\overline{e}$.

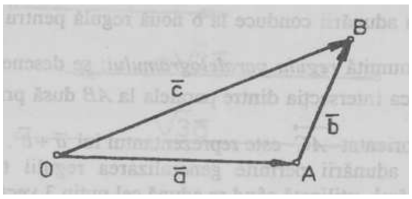
5.2. Adunarea vectorilor liberi

Vom nota cu V_3 (resp. V_2) mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu (resp. plan). În continuare vom demonstra o serie de proprietăţi algebrice sau geometrice ale spaţiului V_3, ele putând fi simplu particularizate şi aplicate la spaţiul V_2.

Fie doi vectori liberi $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ şi fie $\overrightarrow{OA}$, respectiv $\overrightarrow{AB}$, nişte segmente orientate reprezentative ale acestor vectori liberi. Atunci vectorul liber $\overline{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numeşte *suma vectorilor* $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi se notează

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}.$$

DEFINIŢIA 5.2.1. *Regula de adunare a vectorilor liberi prezentată mai sus se numeşte* ***regula triunghiului*** *sau* ***regula paralelogramului***.



Regula triunghiului: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

OBSERVAŢIA 5.2.1. *Operaţia de adunare a vectorilor liberi este bine definită şi nu depinde de alegerea reprezentanţilor* $\overrightarrow{OA}$ *şi* $\overrightarrow{AB}$. *Cu alte cuvinte, dacă alegem alţi reprezentanţi pentru efectuarea sumei* $\overline{a} + \overline{b}$, *vectorul liber rezultat este reprezentat de un segment orientat echipolent cu* $\overrightarrow{OB}$.

În concluzie, adunarea vectorilor liberi

$$+ : V_3 \times V_3 \to V_3, \ (\overline{a}, \overline{b}) \to \overline{a} + \overline{b},$$

este o lege de compoziţie internă pe spaţiul V_3. În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 5.2.1. $(V_3, +)$ *este un grup abelian. Cu alte cuvinte, sunt adevărate următoarele proprietăţi:*

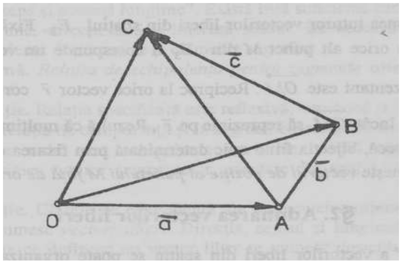
(1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$ *(comutativitate);*

(2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ *(asociativitate);*

(3) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$, $\forall\ \overline{a} \in V_3$, *unde* $\overline{0}$ *este vectorul nul (element neutru);*

(4) $\forall\ \overline{a} \in V_3$, $\exists\ -\overline{a} \in V_3$ *astfel încât* $\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$ *(orice element are un opus).*

Demonstraţie. Proprietăţile (1) şi (3) sunt evidente din definiţia adunării a doi vectori liberi. Pentru a demonstra asociativitatea să considerăm trei vectori liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$. Folosind regula triunghiului, asociativitatea rezultă din figura de mai jos:



Asociativitatea: $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

Este evident că opusul unui vector liber $\overline{a}$ este vectorul liber $-\overline{a}$ caracterizat de aceeaşi direcţie, sens opus şi aceeaşi lungime cu a vectorului liber $\overline{a}$.

Opusul vectorului liber $\overline{a}$

□

5.3. Înmulţirea vectorilor liberi cu scalari reali

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalar real şi fie $\overline{a} \in V_3$ un vector liber. Vom defini înmulţirea cu scalari reali

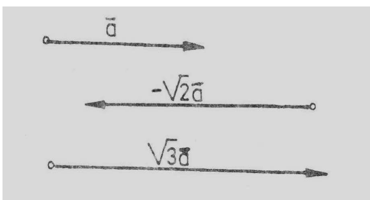
$$\lambda\overline{a} \in V_3$$

în felul următor:

(1) dacă $\lambda = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$, atunci $\lambda\overline{a} = \overline{0}$;

(2) dacă $\lambda \neq 0$ şi $\overline{a} \neq \overline{0}$, atunci vectorul liber $\lambda\overline{a}$ este caracterizat de aceeaşi direcţie cu a vectorului liber $\overline{a}$, acelaşi sens cu al vectorului liber $\overline{a}$ dacă $\lambda > 0$ şi sens opus cu al vectorului liber $\overline{a}$ dacă $\lambda < 0$ şi are lungimea

$$||\lambda\overline{a}|| = |\lambda| \cdot ||\overline{a}||.$$



Înmulţirea vectorilor liberi cu scalari reali

TEOREMA 5.3.1. *Spaţiul vectorilor liberi V_3, împreună cu operaţiile de adunare a vectorilor liberi şi de înmulţire a acestora cu scalari reali, are o structură de spaţiu vectorial real. Cu alte cuvinte, următoarele proprietăţi sunt adevărate:*

(1) $\lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$;

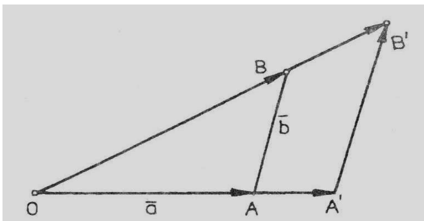
(2) $(\lambda+\mu)\overline{a} = \lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\ \overline{a} \in V_3$;

(3) $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\ \overline{a} \in V_3$;

(4) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$, $\forall\ \overline{a} \in V_3$.

DEMONSTRAŢIE. Proprietăţile (2), (3) şi (4) sunt evidente din modul de definire a operaţiilor cu vectori liberi.

Pentru a demonstra proprietatea (1) să considerăm că segmentul orientat $\overrightarrow{OA}$ este reprezentantul vectorului liber $\overline{a}$ şi segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul vectorului liber $\overrightarrow{b}$. Atunci, din regula triunghiului, segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ este reprezentantul vectorului liber $\overline{a}+\overline{b}$. Să presupunem acum că $\lambda > 0$ şi să notăm cu $\overrightarrow{OA'}$ reprezentantul vectorului $\lambda\overline{a}$ şi cu $\overrightarrow{OB'}$ reprezentantul vectorului $\lambda(\overline{a}+\overline{b})$.



Proprietatea: $\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}) = \lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}$

Se observă că $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, având un unghi comun şi laturile (care determină acest unghi) de lungimi proporţionale. Rezultă că avem

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$$

şi

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB},$$

adică segmentul orientat $\overrightarrow{A'B'}$ este reprezentantul vectorului liber $\lambda\overline{b}$. Prin urmare, segmentul orientat $\overrightarrow{OB'}$ este reprezentantul sumei $\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$, adică

$$\lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}.$$

Analog se tratează cazul $\lambda < 0$. □

5.4. Coliniaritate şi coplanaritate

Din punct de vedere geometric, doi vectori liberi nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari dacă au aceeaşi direcţie (i. e. direcţiile segmentelor orientate reprezentative sunt paralele sau confundate).

TEOREMA 5.4.1. *Doi vectori liberi nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ astfel încât*

$$\overline{a} = \lambda\overline{b}.$$

DEMONSTRAŢIE. " $\Leftarrow$ " este evidentă deoarece relaţia $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, unde $\lambda \neq 0$, implică faptul că vectorii liberi nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ au aceeaşi direcţie.

" $\Rightarrow$ " Dacă vectorii liberi nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari, rezultă că au aceeaşi direcţie. Dacă $\overline{b}$ are acelaşi sens cu $\overline{a}$, atunci este evident că avem

$$\overline{b} = \frac{||\overline{b}||}{||\overline{a}||} \cdot \overline{a}.$$

Dacă $\overline{b}$ are sens opus lui $\overline{a}$, atunci este evident că avem

$$\overline{b} = -\frac{||\overline{b}||}{||\overline{a}||} \cdot \overline{a}.$$

□

COROLARUL 5.4.1. *Doi vectori liberi nenuli necoliniari sunt liniar independenţi în spaţiul vectorial real V_3.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori liberi nenuli necoliniari.

Să presupunem prin absurd că vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi în spaţiul vectorial real V_3. Din definiţia liniar dependenţei a doi vectori liberi rezultă că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, unde $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, astfel încât $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \overline{0}$. Pentru $\beta \neq 0$ această relaţie se transcrie $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, unde $\lambda = -\alpha/\beta \neq 0$. Prin urmare, conform propoziţiei anterioare, vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari. Acest lucru se află în contradicţie cu necoliniaritatea vectorilor liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

În concluzie vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt liniar independenţi în spaţiul vectorial real V_3. □

Din punct de vedere geometric, trei vectori liberi nenuli $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt coplanari dacă segmentele orientate reprezentative ale celor trei vectori liberi sunt paralele cu un plan dat în spaţiu.

TEOREMA 5.4.2. *Trei vectori liberi nenuli $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, unde $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, astfel încât*

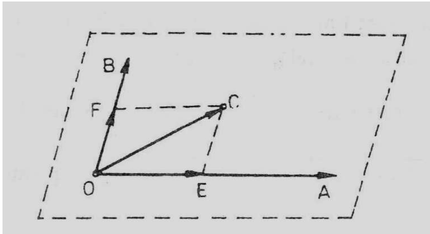
$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}.$$

DEMONSTRAŢIE. " $\Leftarrow$ " este evidentă deoarece, din modul de definire al operaţiilor cu vectori liberi, vectorul liber $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, unde $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, se află în acelaşi plan cu vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

" $\Rightarrow$ " Să presupunem că vectorul liber $\overline{c}$ se află în acelaşi plan cu vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ segmentele orientate coplanare reprezentative ale vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$. Ducând din punctul C paralele la dreptele OA şi OB, deducem că avem

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB},$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.



Descompunerea: $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$

Ţinând cont că $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt segmentele orientate reprezentative ale vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$, rezultă ceea ce aveam de demonstrat. □

COROLARUL 5.4.2. *Trei vectori liberi nenuli necoplanari sunt liniar independenţi în spaţiul vectorial real V_3.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ trei vectori liberi nenuli necoplanari.

Să presupunem prin absurd că vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt liniar dependenţi în spaţiul vectorial real V_3. Din definiţia liniar dependenţei a trei vectori liberi rezultă că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, unde $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, astfel încât $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0}$. Pentru $\gamma \neq 0$ această relaţie se transcrie $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, unde $\lambda = -\alpha/\gamma$ şi $\mu = -\beta/\gamma$ au proprietatea $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Prin urmare, conform propoziţiei anterioare, vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt coplanari. Acest lucru se află în contradicţie cu necoplanaritatea vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$.

În concluzie, vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt liniar independenţi în spaţiul vectorial real V_3. □

TEOREMA 5.4.3. *Orice trei vectori liberi nenuli necoplanari formează o bază în spaţiul vectorial real V_3 . În consecinţă, avem*

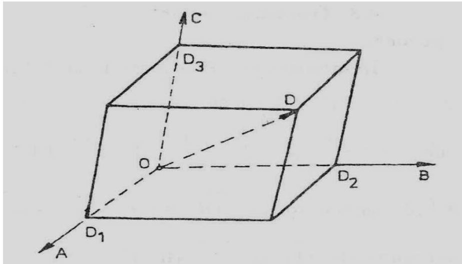
$$\dim_{\mathbb{R}} V_3 = 3.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ trei vectori liberi nenuli necoplanari. Atunci, conform corolarului anterior, sistemul de vectori $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este liniar independent în spaţiul vectorial real V_3.

Vom demonstra în continuare că sistemul de vectori $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este un sistem de generatori în spaţiul vectorial real V_3. Pentru aceasta să considerăm $\overline{d}$ un vector liber arbitrar din V_3. Fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD}$ segmentele orientate reprezentative ale vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ şi $\overline{d}$. Ducând din punctul D plane paralele la planele $(AOB), (BOC)$ şi (AOC), deducem că avem

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Descompunerea: $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$

Ţinând cont că $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD}$ sunt segmentele orientate reprezentative ale vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ şi $\overline{d}$, rezultă că sistemul de vectori $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este un sistem de generatori în spaţiul vectorial real V_3.

În concluzie, sistemul de vectori liberi nenuli necoplanari $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ formează o bază în spaţiul vectorial real V_3. □

5.5. Produsul scalar a doi vectori liberi

Deoarece în spaţiul vectorial real al vectorilor liberi V_3 o bază este formată din orice trei vectori liberi nenuli necoplanari, ne vom fixa în continuare atenţia asupra unei baze privilegiate, extrem de utilizată. Este vorba despre o bază formată din trei versori $\overline{i}, \overline{j}$ şi $\overline{k}$, care sunt perpendiculari unul pe celălalt. Baza

$$B = \left\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right\},$$

unde

$$\overline{i} \perp \overline{j} \perp \overline{k} \perp \overline{i} \text{ şi } \left|\left|\overline{i}\right|\right| = \left|\left|\overline{j}\right|\right| = \left|\left|\overline{k}\right|\right| = 1,$$

reprezintă *baza canonică* a spaţiului vectorial real al vectorilor liberi V_3. Deoarece mulţimea B este o bază în spaţiul vectorial real al vectorilor liberi V_3, rezultă că orice vector liber $\overline{v} \in V_3$ se descompune în mod unic ca

$$\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$

unde $x, y, z \in \mathbb{R}$ reprezintă coordonatele vectorului liber $\overline{v}$ în baza canonică B.

Fie acum doi vectori liberi arbitrari

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

şi

$$\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k},$$

unde $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i \in \{1, 2\}$.

Definiţia 5.5.1. *Aplicaţia*

$$\langle , \rangle : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \stackrel{def}{=} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

se numeşte ***produsul scalar*** *pe spaţiul vectorilor liberi* V_3.

Teorema 5.5.1. *Spaţiul* $(V_3, \langle , \rangle)$ *este un spaţiu euclidian real. Cu alte cuvinte, aplicaţia produs scalar are următoarele proprietăţi:*

(1) $\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = \left\langle \overline{b}, \overline{a} \right\rangle, \ \forall \ \overline{a}, \overline{b} \in V_3;$

(2) $\left\langle \lambda \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = \lambda \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \ \overline{a}, \overline{b} \in V_3;$

(3) $\left\langle \overline{a}, \overline{b} + \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle + \left\langle \overline{a}, \overline{c} \right\rangle, \ \forall \ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3;$

(4) $\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle \geq 0, \ \forall \ \overline{a} \in V_3,$ *cu egalitate dacă şi numai dacă* $\overline{a} = \overline{0}$.

DEMONSTRAŢIE. Proprietăţile (1), (2) şi (4) sunt imediate din folosirea definiţiei produsului scalar $\langle , \rangle$. Pentru a demonstra proprietatea (3) să considerăm vectorul liber arbitrar

$$\overline{c} = x_3 \overline{i} + y_3 \overline{j} + z_3 \overline{k},$$

unde $x_3, y_3, z_3 \in \mathbb{R}$. Atunci avem egalităţile:

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{a}, \overline{b} + \overline{c} \right\rangle &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = \\ &= \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle + \left\langle \overline{a}, \overline{c} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Folosind teoria generală de la spaţiile euclidiene reale, cu ajutorul produsului scalar $\langle , \rangle$ pe spaţiul vectorial real al vectorilor liberi V_3 putem introduce noţiunile de *lungime* (*normă*) a unui vector liber şi *unghi* format de doi vectori liberi.

Astfel, dacă avem vectorul liber arbitrar

$$\overline{v} = x \overline{i} + y \overline{j} + z \overline{k},$$

unde $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci *lungimea* (*norma*) sa este dată de formula

$$||\overline{v}|| = \sqrt{\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dacă avem vectorii liberi arbitrari

$$\overline{a} = x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k}$$

şi

$$\overline{b} = x_2 \overline{i} + y_2 \overline{j} + z_2 \overline{k},$$

unde $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, \ \forall \ i \in \{1, 2\}$, atunci aceşti doi vectori liberi formează un *unghi* $\varphi \in [0, \pi]$ definit de formula

$$\cos \varphi \stackrel{def}{=} \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle}{||\overline{a}|| \cdot \left|\left|\overline{b}\right|\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

În particular, vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt *perpendiculari* (*ortogonali*) $\overline{a} \perp \overline{b}$ dacă şi numai dacă $\varphi = \pi/2$, adică

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Conform definiţiei de mai sus, deducem că întotdeauna avem adevărată relaţia

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = ||\overline{a}|| \cdot \left|\left|\overline{b}\right|\right| \cdot \cos \varphi.$$

5.6. Produsul vectorial a doi vectori liberi

Fie doi vectori liberi arbitrari

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

şi

$$\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k},$$

unde $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i \in \{1, 2\}$.

Definiţia 5.6.1. *Aplicaţia*

$$\times : V_3 \times V_3 \to V_3,$$

definită prin

$$\overline{a} \times \overline{b} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overline{k},$$

se numeşte ***produsul vectorial*** *pe spaţiul vectorilor liberi* V_3.

Aplicaţia produs vectorial are o serie importantă de proprietăţi geometrice pe care le expunem în rezultatul care urmează.

Teorema 5.6.1. *Următoarele proprietăţi ale produsului vectorial sunt adevărate:*

(1) $\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{a} \rangle = \langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{b} \rangle = 0$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$*;*

(2) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$ *(anticomutativitate);*

(3) $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$, $\forall\ \overline{a} \in V_3$*;*

(4) $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *sunt coliniari;*

(5) $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b})$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$ *(omogeneitate);*

(6) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ *(distributivitate);*

(7) $\left|\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|\right| = ||\overline{a}|| \cdot \left|\left|\overline{b}\right|\right| \cdot \sin\varphi$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$, *unde* φ *este unghiul dintre vectorii liberi* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$*;*

(8) $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle \overline{b} - \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \overline{c}$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ *(formula dublului produs vectorial).*

Demonstraţie. Proprietăţile (2), (3), (4), (5) şi (6) sunt imediate din definiţia produsului vectorial şi proprietăţile determinanţilor.

Pentru a demonstra proprietatea (1) să observăm că avem

$$\begin{aligned} \langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{a} \rangle &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_1 = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Analog se obţine relaţia $\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{b} \rangle = 0$.

Pentru a demonstra proprietatea (7) să observăm că, pe de o parte, prin calcul, avem

$$\begin{aligned}
||\overline{a}\times\overline{b}|| &= \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} = \\
&= \sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2} = \\
&= \sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2} = \\
&= \sqrt{||\overline{a}||^2\cdot||\overline{b}||^2-\langle\overline{a},\overline{b}\rangle^2}.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned}
||\overline{a}||\cdot||\overline{b}||\cdot\sin\varphi &= ||\overline{a}||\cdot||\overline{b}||\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \\
&= ||\overline{a}||\cdot||\overline{b}||\sqrt{1-\frac{\langle\overline{a},\overline{b}\rangle^2}{||\overline{a}||^2\cdot||\overline{b}||^2}} = \\
&= \sqrt{||\overline{a}||^2\cdot||\overline{b}||^2-\langle\overline{a},\overline{b}\rangle^2}.
\end{aligned}$$

Pentru a demonstra proprietatea (8), să considerăm vectorul liber

$$\overline{c} = x_3\overline{i}+y_3\overline{j}+z_3\overline{k},$$

unde $x_3, y_3, z_3 \in \mathbb{R}$. Atunci avem

$$\begin{aligned}
\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \\
&= [y_1(x_2y_3-x_3y_2)+z_1(x_2z_3-x_3z_2)]\overline{i} - \\
&\quad -[x_1(x_2y_3-x_3y_2)-z_1(y_2z_3-y_3z_2)]\overline{j} - \\
&\quad -[x_1(x_2z_3-x_3z_2)+y_1(y_2z_3-y_3z_2)]\overline{k} \\
&= [x_2(y_1y_3+z_1z_3)-x_3(y_1y_2+z_1z_2)]\overline{i} - \\
&\quad -[y_3(x_1x_2+z_1z_2)-y_2(x_1x_3+z_1z_3)]\overline{j} - \\
&\quad -[z_3(x_1x_2+y_1y_2)-z_2(x_1x_3+y_1y_3)]\overline{k} \\
&= [x_2(\langle\overline{a},\overline{c}\rangle-x_1x_3)-x_3(\langle\overline{a},\overline{b}\rangle-x_1x_2)]\overline{i} - \\
&\quad -[y_3(\langle\overline{a},\overline{b}\rangle-y_1y_2)-y_2(\langle\overline{a},\overline{c}\rangle-y_1y_3)]\overline{j} - \\
&\quad -[z_3(\langle\overline{a},\overline{b}\rangle-z_1z_2)-z_2(\langle\overline{a},\overline{c}\rangle-z_1z_3)]\overline{k} \\
&= \left[x_2\langle\overline{a},\overline{c}\rangle-x_3\langle\overline{a},\overline{b}\rangle\right]\overline{i} - \\
&\quad -\left[y_3\langle\overline{a},\overline{b}\rangle-y_2\langle\overline{a},\overline{c}\rangle\right]\overline{j} - \\
&\quad -\left[z_3\langle\overline{a},\overline{b}\rangle-z_2\langle\overline{a},\overline{c}\rangle\right]\overline{k} \\
&= \langle\overline{a},\overline{c}\rangle(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k})-\langle\overline{a},\overline{b}\rangle(x_3\overline{i}+y_3\overline{j}+z_3\overline{k}) = \\
&= \langle\overline{a},\overline{c}\rangle\overline{b}-\langle\overline{a},\overline{b}\rangle\overline{c}.
\end{aligned}$$

□

OBSERVAŢIA 5.6.1. *Proprietăţile (1), (2) şi (7) ale produsului vectorial arată că, în cazul a doi vectori liberi nenuli necoliniari, produsul vectorial*

$$\overline{a} \times \overline{b} \neq \overline{0}$$

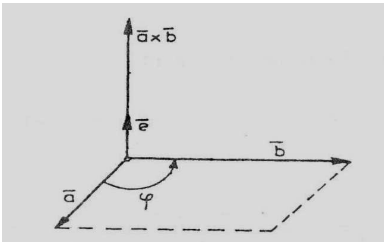
este un vector liber cu proprietăţile:

(1) *este perpendicular pe planul determinat de vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$;*

(2) *prin convenţie, are sensul determinat de* ***regula burghiului*** *(ducem vectorul liber $\overline{a}$ peste vectorul liber $\overline{b}$ şi vedem ce se întâmplă cu burghiul (burghiul urcă sau coboară)); acest sens este desemnat în figura de mai jos prin versorul $\overline{e}$.*

(3) *are lungimea (norma) egală numeric cu aria paralelogramului determinat de vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Cu alte cuvinte, avem formula*

$$\mathcal{A}_{paralelogram} = \left|\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|\right| = ||\overline{a}|| \cdot \left|\left|\overline{b}\right|\right| \cdot \sin\varphi.$$



Produsul vectorial şi aria paralelogramului

OBSERVAŢIA 5.6.2. *Formula dublului produs vectorial se reţine mai uşor dacă este scrisă sub forma determinantului simbolic*

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} \overline{b} & \overline{c} \\ \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

Este important de subliniat faptul că

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} \neq \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$$

deoarece avem

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle \\ \overline{a} & \overline{b} \end{vmatrix}.$$

EXEMPLUL 5.6.1. *Fie vectorii liberi*

$$\overline{a} = -2\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$$

şi

$$\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}.$$

Vom calcula în continuare aria triunghiului determinat de vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ precum şi înălţimea triunghiului corespunzătoare bazei $\overline{b}$. Pentru aceasta să calculăm produsul vectorial

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}.$$

Pe de o parte, deoarece aria triunghiului determinat de vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este jumătate din aria paralelogramului determinat de vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, rezultă că aria triunghiului determinat de vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este dată de formula

$$\mathcal{A}_{\triangle} = \frac{\left|\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\right|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+1^2+4^2} = \frac{\sqrt{42}}{2}.$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu h înălţimea triunghiului corespunzătoare bazei $\overline{b}$, formula corespunzătoare ariei triunghiului este

$$\mathcal{A}_{\triangle} = \frac{\left|\left|\overline{b}\right|\right|\cdot h}{2}.$$

Prin urmare, înălţimea triunghiului corespunzătoare bazei $\overline{b}$ este

$$h = \frac{2\mathcal{A}_{\triangle}}{\left|\left|\overline{b}\right|\right|} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}.$$

5.7. Produsul mixt a trei vectori liberi

Fie trei vectori liberi arbitrari

$$\begin{aligned}\overline{a} &= x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k},\\ \overline{b} &= x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k},\\ \overline{c} &= x_3\overline{i}+y_3\overline{j}+z_3\overline{k},\end{aligned}$$

unde $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i \in \{1,2,3\}$.

Definiţia 5.7.1. *Aplicaţia*

$$(\ ,\ ,\ ): V_3\times V_3\times V_3 \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \stackrel{def}{=} \left\langle \overline{a},\overline{b}\times\overline{c}\right\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix},$$

se numeşte ***produsul mixt*** *pe spaţiul vectorilor liberi V_3.*

Teorema 5.7.1. *Următoarele proprietăţi ale produsului mixt sunt adevărate:*

(1) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b}) = (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$, $\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V_3$;

(2) $\lambda(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\lambda\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a},\lambda\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a},\overline{b},\lambda\overline{c})$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V_3$;

(3) $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c},\overline{d}) = (\overline{a},\overline{c},\overline{d}) + (\overline{b},\overline{c},\overline{d})$, $\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}\in V_3$;

(4) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$ *dacă şi numai dacă*

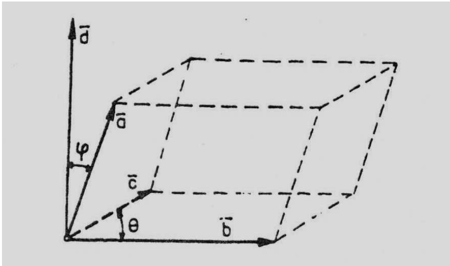
   (a) *cel puţin unul din vectorii liberi $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ este nul;*

   (b) *doi dintre vectorii liberi $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ sunt coliniari;*

   (c) *vectorii liberi $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ sunt coplanari.*

(5) *Dacă vectorii liberi $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului construit pe vectorii liberi $\overline{a},\overline{b}$ şi $\overline{c}$. Cu alte cuvinte, avem formula*

$$V_{paralelipiped} = \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.$$



Produsul mixt şi volumul paralelipipedului

DEMONSTRAŢIE. Proprietăţile (1), (2), (3) şi (4) sunt imediate din definiţia produsului mixt şi proprietăţile determinanţilor. Pentru a demonstra proprietatea (5) să observăm că, notând $\overline{d} = \overline{b} \times \overline{c}$, avem

$$\begin{aligned}\left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right| &= \left|\langle \overline{a}, \overline{d}\rangle\right| = \left|\|\overline{a}\| \cdot \left\|\overline{d}\right\| \cdot \cos\varphi\right| = \\ &= \left|\|\overline{a}\| \cdot \left\|\overline{b} \times \overline{c}\right\| \cdot \cos\varphi\right| = \\ &= \left|\left(\left\|\overline{b}\right\| \cdot \|\overline{c}\| \cdot \sin\theta\right) \cdot \|\overline{a}\| \cdot \cos\varphi\right| = V_{\text{paralelipiped}},\end{aligned}$$

unde φ este unghiul dintre vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{d} = \overline{b} \times \overline{c}$ iar θ este unghiul dintre vectorii liberi $\overline{b}$ şi $\overline{c}$. □

EXEMPLUL 5.7.1. *Fie vectorii liberi*

$$\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k},$$
$$\overline{b} = -\overline{i} + 3\overline{k}$$

şi

$$\overline{c} = -2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}.$$

Vom calcula în continuare volumul tetraedrului determinat de vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ precum şi înălţimea tetraedrului corespunzătoare bazei determinate de vectorii liberi $\overline{b}$ şi $\overline{c}$. Pentru aceasta să calculăm produsul mixt

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -19.$$

Pe de o parte, deoarece volumul tetraedrului construit pe vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ este o şesime din volumul paralelipipedului construit pe vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$, rezultă că volumul tetraedrului determinat de vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ este dat de formula

$$V_{tetraedru} = \frac{\left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right|}{6} = \frac{19}{6}.$$

Să calculăm acum produsul vectorial

$$\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\overline{i} - 7\overline{j} - \overline{k}.$$

Atunci, aria bazei determinate de vectorii liberi $\overline{b}$ *şi* $\overline{c}$ *este dată de formula*

$$\mathcal{A}_{bazei} = \frac{\left|\left|\overline{b} \times \overline{c}\right|\right|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{59}}{2}.$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu h înălţimea tetraedrului corespunzătoare bazei determinate de vectorii liberi $\overline{b}$ *şi* $\overline{c}$, *formula corespunzătoare volumului tetraedrului este*

$$V_{tetraedru} = \frac{\mathcal{A}_{bazei} \cdot h}{3}.$$

Prin urmare, înălţimea tetraedrului corespunzătoare bazei determinate de vectorii liberi $\overline{b}$ *şi* $\overline{c}$ *este*

$$h = \frac{3V_{tetraedru}}{\mathcal{A}_{bazei}} = \frac{\frac{19}{2}}{\frac{\sqrt{59}}{2}} == \frac{19}{\sqrt{59}}.$$

CAPITOLUL 6

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN SPAŢIU

6.1. Coordonatele unui punct din spaţiu

Cu ajutorul spaţiului vectorilor liberi V_3 putem introduce riguros matematic noţiunea de *coordonate* ale unui punct arbitrar M din spaţiul tridimensional al geometriei elementare E_3. Pentru aceasta să fixăm baza canonică

$$B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$$

în spaţiul vectorial real al vectorilor liberi V_3 şi să considerăm că această bază este *legată* într-un punct fixat O al spaţiului tridimensional al geometriei elementare E_3.

Definiţia 6.1.1. *Ansamblul*

$$\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$$

se numeşte ***reperul cartezian canonic*** *al spaţiului tridimensional al geometriei elementare* E_3. *Dreptele directoare ale versorilor* $\overline{i}, \overline{j}$ *şi* $\overline{k}$ *sunt axele* Ox, Oy *şi* Oz *ale unui* ***sistem de coordonate*** $Oxyz$ *în spaţiul tridimensional al geometriei elementare* E_3 *(aceste axe au acelaşi sens cu al versorilor* $\overline{i}, \overline{j}$ *şi* $\overline{k}$*) iar punctul* O *este* ***originea*** *sistemului de coordonate* $Oxyz$.

Definiţia 6.1.2. *Spunem că un punct arbitrar* M *din spaţiul tridimensional al geometriei elementare* E_3 *are* ***coordonatele carteziene***

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

în reperul cartezian canonic

$$\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$$

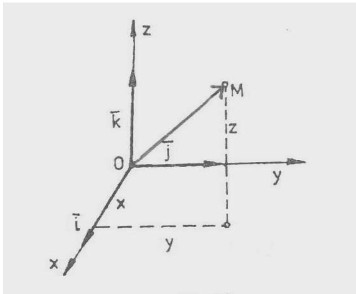
dacă ***vectorul de poziţie*** $\overline{OM}$ *se descompune în baza canonică*

$$B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$$

după formula

$$\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Observaţia 6.1.1. *Coordonatele carteziene* (x, y, z) *ale punctului* M *reprezintă lungimile proiecţiilor ortogonale ale vectorului de poziţie* $\overline{OM}$ *pe cele trei axe de coordonate:* Ox, Oy *şi* Oz.



Punctul $M(x, y, z)$ din spaţiul E_3

Exemplul 6.1.1. *Să considerăm un cub* $[OABCO'A'B'C']$, *având muchiile de lungime* $l > 0$, *şi să legăm în vârful* O *baza canonică*

$$B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$$

astfel încât direcţiile şi sensurile versorilor $\bar{i}, \bar{j}$ *şi* $\bar{k}$ *să coincidă cu ale muchiilor cubului* $\overline{OA}, \overline{OB}$ *şi* $\overline{OO'}$.

Este evident că punctul O *este originea sistemului de axe. Vectorul de poziţie al acestei origini este* $\overline{OO} = \bar{0}$ *şi deci punctul* O *are coordonatele* $O(0, 0, 0)$.

Deoarece vectorul de poziţie $\overline{OA}$ *este coliniar cu* $\bar{i}$ *şi are lungimea* $||\overline{OA}|| = l$, *rezultă că avem*

$$\overline{OA} = l\bar{i}.$$

Prin urmare, coordonatele vârfului A *sunt* $A(l, 0, 0)$.

Deoarece vectorul de poziţie $\overline{OB}$ *(resp.* $\overline{OO'}$*) este coliniar cu* $\bar{j}$ *(resp.* $\bar{k}$*) şi are lungimea* $||\overline{OB}|| = l$ *(resp.* $||\overline{OO'}|| = l$*), rezultă că avem*

$$\overline{OB} = l\bar{j} \text{ (resp. } \overline{OO'} = l\bar{k}\text{)}.$$

Prin urmare, coordonatele vârfurilor B *şi* O' *sunt* $B(0, l, 0)$ *şi* $O'(0, 0, l)$.

Coordonatele vârfului C *se determină considerând vectorul de poziţie* $\overline{OC}$ *care, conform regulii paralelogramului, este*

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = l\bar{i} + l\bar{j}.$$

Prin urmare, vârful C *are coordonatele* $C(l, l, 0)$. *Prin analogie, vârful* A' *are coordonatele* $A'(l, 0, l)$ *iar vârful* B' *are coordonatele* $B'(0, l, l)$.

Vectorul de poziţie $\overline{OC'}$ *se descompune, conform regulii paralelogramului, în*

$$\overline{OC'} = \overline{OC} + \overline{OO'} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OO'} = l\bar{i} + l\bar{j} + l\bar{k}.$$

Prin urmare, vârful C' *are coordonatele* $C'(l, l, l)$.

Cu ajutorul noţiunii de coordonate ale unui punct din spaţiu se pot descrie ecuaţiile planelor în spaţiu, a dreptelor în spaţiu sau, cu alte cuvinte, se poate dezvolta o întreagă geometrie analitică în spaţiu. În continuare, vom considera fixat reperul cartezian canonic

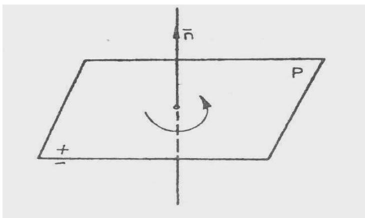
$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$$

în spaţiul tridimensional al geometriei elementare E_3. Cu alte cuvinte, vom considera fixat sistemul de coordonate $Oxyz$ în spaţiul tridimensional al geometriei elementare E_3

6.2. Plane orientate în spaţiu

Din perspectiva geometriei analitice în spaţiu un plan în spaţiu este considerat ca *plan orientat* (*plan cu faţă*). Acest lucru înseamnă că pentru a identifica un plan P în spaţiu este necesar să fixăm o *orientare* (*faţă*) a planului P. Această orientare (faţă) fixată ne arată din ce semispaţiu este privit planul P sau care faţă a planului P este considerată vizibilă. Pentru a fixa o orientare (faţă) a planului P este suficient să fixăm un vector liber nenul $\overline{n}$ care să fie *perpendicular* pe planul P. Un asemenea vector liber nenul $\overline{n}$ perpendicular pe planul P se numeşte *vector normal* la planul P. Prin definiţie, sensul vectorului normal $\overline{n}$ fixează orientarea (faţa) planului P. Referitor la reprezentarea intuitivă a planului P orientat în spaţiu sunt evidente următoarele afirmaţii:

(1) alegerea unui vector normal $\overline{n}$ la planul P este echivalentă cu alegerea unei orientări (feţe);
(2) alegerea unui sens de rotaţie în planul P este echivalentă cu alegerea unui vector normal $\overline{n}$ la planul P. Acest lucru este adevărat deoarece considerăm, prin definiţie, că vectorul normal $\overline{n}$ la planul P are sensul determinat de sensul de rotaţie din planul P prin *regula burghiului.*
(3) planul P are două orientări (feţe). Orientarea (faţa) care corespunde sensului vectorului normal $\overline{n}$ se notează cu $(+)$ iar orientarea (faţa) opusă se notează cu $(-)$.

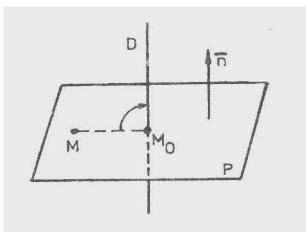


Orientarea unui plan P în spaţiu

6.2.1. Planul determinat de un punct şi un vector normal nenul. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct fixat în spaţiul E_3 şi că

$$\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k},$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, este un vector liber nenul dat din V_3. Atunci, există un unic plan P care trece prin punctul M_0 şi este perpendicular pe vectorul liber $\overline{n}$ (vectorul liber $\overline{n}$ este un vector normal la planul P).



Planul P determinat de punctul M_0 şi vectorul normal $\overline{n}$

Pentru a descrie ecuaţia planului P să considerăm că $M(x,y,z)$ este un punct arbitrar al planului P. Este evident că apartenenţa $M \in P$ este echivalentă cu condiţia

$$\overline{M_0M} \perp \overline{n} \Leftrightarrow \langle \overline{M_0M}, \overline{n} \rangle = 0.$$

Folosind definiţia coordonatelor unui punct în spaţiu, împreună cu regula triunghiului, obţinem relaţia

$$\overline{M_0M} = \overline{M_0O} + \overline{OM} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = (x-x_0)\overline{i} + (y-y_0)\overline{j} + (z-z_0)\overline{k}.$$

Prin urmare ecuaţia vectorială $\langle \overline{M_0M}, \overline{n} \rangle = 0$ se transcrie, la nivel de coordonate carteziene, ca ecuaţia în $\mathbb{R}^3$:

$$P : A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Definiţia 6.2.1. *Ecuaţia anterioară se numeşte* ***ecuaţia carteziană a planului*** *P determinat de punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi vectorul normal $\overline{n}(A,B,C)$. Dreapta D care trece prin punctul M_0 şi care este paralelă cu vectorul normal $\overline{n}$ se numeşte* ***normala*** *la planul P.*

Observaţia 6.2.1. *Prelucrând membrul stâng al ecuaţiei precedente şi notând*

$$D \overset{not}{=} -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

ecuaţia planului de mai sus se transcrie ca ecuaţia carteziană:

$$P : Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

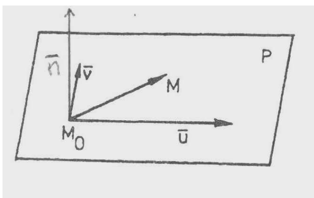
Ecuaţia precedentă se numeşte ***ecuaţia generală a unui plan****.*

Evident, vectorul normal la planul P, definit de ecuaţia generală anterioară, este dat de vectorul liber nenul

$$\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}.$$

Cu alte cuvinte, coeficienţii A, B şi C ai lui x, y şi z din ecuaţia generală a unui plan P determină coordonatele vectorului normal $\overline{n}$ la planul P.

6.2.2. Planul determinat de un punct şi doi vectori liberi necoliniari. Este cunoscut din geometria sintetică euclidiană faptul că două drepte concurente determină un plan. În consecinţă, în geometria analitică în spaţiu un plan P este unic determinat de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi doi vectori liberi necoliniari $\overline{u}(l_1,m_1,n_1)$ şi $\overline{v}(l_2,m_2,n_2)$.



Planul P determinat de punctul M_0 şi vectorii liberi $\overline{u}$ şi $\overline{v}$

Să considerăm că $M(x, y, z)$ este un punct arbitrar al planului P. Este evident că punctul M aparţine planului P determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul normal

$$\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v}.$$

Ţinând seama de definiţia produsului vectorial a doi vectori liberi, rezultă că coordonatele (A, B, C) ale vectorului normal $\overline{n}$ la planul P sunt

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \ B = -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \text{ şi } C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Prin urmare, folosind ecuaţia carteziană a unui plan ce trece printr-un punct fixat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care are vectorul normal $\overline{n}(A, B, C)$ dat, obţinem ecuaţia carteziană

$$P : (x - x_0)\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

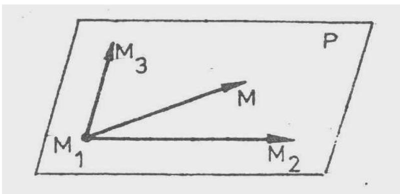
Ţinând cont acum de descompunerea după prima linie a unui determinant de ordin trei, observăm că ecuaţia carteziană de mai sus se poate restrânge sub forma mai simplă de determinant de ordin trei:

$$P : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6.2.3. Planul determinat de trei puncte necoliniare. Este cunoscut din geometria sintetică euclidiană faptul că trei puncte necoliniare

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \ M_2(x_2, y_2, z_2) \text{ şi } M_3(x_3, y_3, z_3)$$

determină un unic plan $P = (M_1M_2M_3)$ în spaţiu.



Planul $P = (M_1M_2M_3)$

Să considerăm că $M(x, y, z)$ este un punct arbitrar al planului $P = (M_1M_2M_3)$. Este evident că punctul M aparţine planului P determinat de punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi vectorii liberi necoliniari

$$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ şi } \overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Prin urmare, folosind ecuaţia carteziană a unui plan determinat de un punct şi doi vectori liberi necoliniari, rezultă că ecuaţia carteziană a planului P este

$$P : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - 0$$

Ţinând cont acum de descompunerea după ultima ultima coloană a unui determinant de ordin patru şi de proprietăţile determinanţilor, observăm că ecuaţia carteziană de mai sus se poate restrânge sub forma mai simplă de determinant de ordin patru:

$$P: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ca o consecinţă imediată a ecuaţiei anterioare, obţinem că condiţia necesară şi suficientă ca patru puncte în spaţiu

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3) \text{ şi } M_4(x_4, y_4, z_4)$$

să fie coplanare este

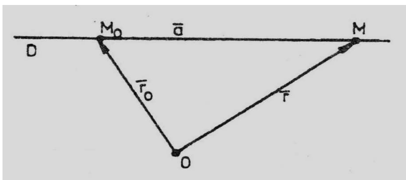
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.3. Drepte orientate în spaţiu

Ca şi în cazul planelor, în geometria analitică în spaţiu dreptele sunt considerate ca *drepte orientate* (*drepte cu sens de parcurs*). Acest lucru înseamnă că pentru a identifica o dreaptă D în spaţiu este necesar să fixăm o *orientare* (*un sens de parcurs*) a dreptei D. Pentru a fixa o orientare (un sens de parcurs) a dreptei D este suficient să fixăm un vector liber nenul $\overline{a}$ a cărui dreaptă suport să fie exact dreapta D. Un asemenea vector liber nenul $\overline{a}$ se numeşte *vector director* al dreptei D. Prin definiţie, sensul vectorului director $\overline{a}$ fixează orientarea (sensul de parcurs) dreptei D. Referitor la reprezentarea intuitivă a dreptei D orientate în spaţiu sunt evidente următoarele afirmaţii:

(1) alegerea unui vector director $\overline{a}$ pe dreapta D este echivalentă cu alegerea unei orientări (unui sens de parcurs);
(2) dreapta D are două orientări (sensuri de parcurs). Orientarea (sensul de parcurs) care corespunde sensului vectorului director $\overline{a}$ se notează cu $(+)$ iar orientarea (sensul de parcurs) opusă se notează cu $(-)$.

6.3.1. Dreapta determinată de un punct şi un vector liber nenul. Să descriem acum ecuaţiile unei drepte D care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este orientată (direcţionată) de un vector liber nenul $\overline{a}(l, m, n)$.



Drepta determinată de punctul M_0 şi vectorul director $\overline{a}$

Este evident că un punct arbitrar $M(x, y, z)$ din spaţiu se află pe dreapta D dacă şi numai dacă vectorul liber $\overline{M_0M}$ este coliniar cu vectorul director $\overline{a}$.

Ţinând cont de regula triunghiului şi de definiţia coordonatelor unui punct în spaţiu, rezultă că avem relaţiile

$$\overline{M_0M} = \overline{M_0O} + \overline{OM} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \overline{r} - \overline{r_0} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} + (z - z_0)\overline{k}.$$

Condiţia de coliniaritate a vectorului liber $\overline{M_0M}$ cu vectorul director $\overline{a}$ se reduce la existenţa unui parametru $t \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{M_0M} = t\overline{a}.$$

Scriind această egalitate vectorială la nivel de coordonate, obţinem *ecuaţiile parametrice* ale dreptei D:

$$D : \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

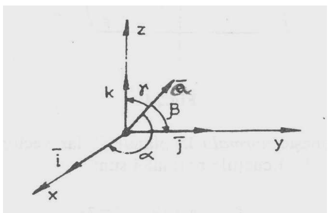
unde $t \in \mathbb{R}$. Eliminând parametrul $t \in \mathbb{R}$ din ecuaţiile parametrice de mai sus, obţinem *ecuaţiile carteziene* ale dreptei D:

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

unde $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$. Coeficienţii l, m şi n care determină orientarea dreptei D se numesc *parametrii directori* ai dreptei D.

OBSERVAŢIA 6.3.1. *Rapoartele care intervin în ecuaţiile carteziene ale dreptei D au un caracter formal în sensul că dacă la numitor avem vreun parametru director egal cu zero atunci obligatoriu numărătorul corespunzător este şi el egal cu zero.*

Să notăm acum cu α, β şi γ *unghiurile directoare* formate de vectorul director $\overline{a}$ cu versorii $\overline{i}, \overline{j}$ şi $\overline{k}$.



Unghiurile directoare α, β şi γ

OBSERVAŢIA 6.3.2. *Unghiurile directoare α, β şi γ măsoară **gradul de înclinare** al dreptei D faţă de axele Ox, Oy şi Oz.*

Din definiţia unghiului format de doi vectori liberi obţinem că avem *cosinusurile directoare*

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overline{a}, \overline{i} \rangle}{||\overline{a}|| \cdot ||\overline{i}||} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\langle \overline{a}, \overline{j} \rangle}{||\overline{a}|| \cdot ||\overline{j}||} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle \overline{a}, \overline{k} \rangle}{||\overline{a}|| \cdot ||\overline{k}||} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

care verifică relaţia

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

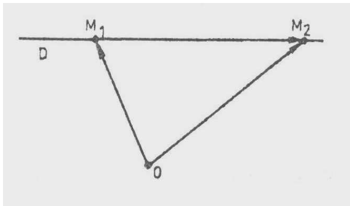
Prin urmare, înmulţind ecuaţiile carteziene ale dreptei D cu factorul nenul

$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2},$$

deducem că ecuaţiile carteziene ale dreptei D pot fi rescrise sub forma echivalentă

$$D : \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}.$$

6.3.2. Dreapta determinată de două puncte distincte. Ştim din geometria sintetică euclidiană că două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ determină o unică dreaptă $D = M_1M_2$.



Dreapta $D = M_1M_2$

Pentru a descrie ecuaţiile carteziene ale dreptei $D = M_1M_2$ să observăm că dreapta D este dreapta care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi este orientată de vectorul director

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_1O} + \overline{OM_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}.$$

Prin urmare, ţinând cont de expresiile ecuaţiilor unei drepte determinate de un punct şi un vector director, deducem că ecuaţiile carteziene ale dreptei $D = M_1M_2$ sunt

$$D : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6.3.3. Dreapta determinată ca intersecţia a două plane neparalele. Este cunoscut din cadrul geometriei sintetice euclidiene că intersecţia a două plane neparalele este o dreaptă. În acest context, fie P_1 şi P_2 două plane neparalele de ecuaţii

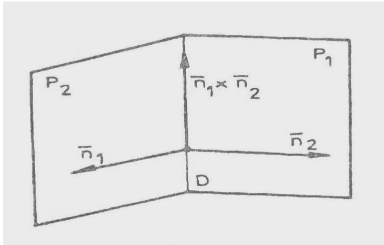
$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ şi } P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Condiţia de neparalelism a planelor P_1 şi P_2 este echivalentă cu condiţia

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Deoarece planele P_1 şi P_2 sunt neparalele, rezultă că intersecţia lor determină o unică dreaptă $D = P_1 \cap P_2$ determinată de ecuaţiile carteziene

$$D = P_1 \cap P_2 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$



Dreapta $D = P_1 \cap P_2$

Este evident că dacă vectorii liberi $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ reprezintă vectorii normali la planele P_1 şi P_2 atunci vectorul liber $\overline{a} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$ reprezintă vectorul director al dreptei $D = P_1 \cap P_2$. Deoarece avem

$$\overline{a} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \overline{k},$$

rezultă că parametrii directori l, m şi n ai dreptei $D = P_1 \cap P_2$ sunt

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ şi } n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

În acest context, rezultă că ecuaţiile carteziene ale dreptei $D = P_1 \cap P_2$ au forma

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

unde (x_0, y_0, z_0) este o soluţie arbitrară a sistemului de ecuaţii care determină dreapta $D = P_1 \cap P_2$ (coordonatele unui punct arbitrar M_0 al dreptei $D = P_1 \cap P_2$).

6.4. Unghiuri în spaţiu

Deoarece planele şi dreptele în spaţiu sunt definite ca figuri geometrice orientate, putem introduce în mod riguros noţiunile de *unghi* dintre două plane orientate, dintre o dreaptă orientată şi un plan orientat şi dintre două drepte orientate.

6.4.1. Unghiul dintre două plane orientate. Să considerăm că

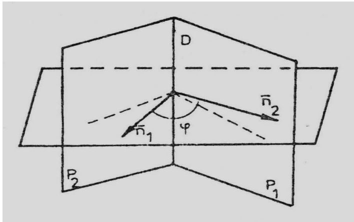
$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ şi } P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

unde $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0$, $\forall\ i \in \{1, 2\}$, sunt două plane orientate arbitrare în spaţiu. Atunci, vectorii normali la planele P_1 şi P_2 sunt

$$\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1) \text{ şi } \overline{n}_2(A_2, B_2, C_2).$$

Prin definiţie, unghiul dintre planele orientate P_1 şi P_2 este unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ format de vectorii normali $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$. Acest unghi se determină prin formula

$$\cos\varphi = \frac{\langle \overline{n}_1, \overline{n}_2 \rangle}{||\overline{n}_1|| \cdot ||\overline{n}_2||} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



Unghiul dintre planele orientate P_1 şi P_2

Observaţia 6.4.1. *Prin definiţia dată în geometria sintetică euclidiană, unghiul diedru format de planele P_1 şi P_2 este unghiul plan $\theta \in [0, \pi]$, care se obţine secţionând planele P_1 şi P_2 cu un plan perpendicular pe dreapta de intersecţie $D = P_1 \cap P_2$. Unghiul θ este însă congruent sau suplementar cu unghiul φ, ca unghiuri cu laturile perpendiculare.*

Observaţia 6.4.2. *Planele P_1 şi P_2 sunt perpendiculare ($P_1 \perp P_2$) dacă şi numai dacă:*

$$\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow \langle \overline{n}_1, \overline{n}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Observaţia 6.4.3. *Planele P_1 şi P_2 sunt paralele neconfundate ($P_1 \parallel P_2$) dacă şi numai dacă:*

$$\overline{n}_1 \text{ este coliniar cu } \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Observaţia 6.4.4. *Planele P_1 şi P_2 sunt confundate ($P_1 = P_2$) dacă şi numai dacă:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Observaţia 6.4.5. *Rapoartele care intervin în observaţiile anterioare au un caracter formal în sensul că dacă vreun numitor este egal cu zero atunci şi numărătorul corespunzător este egal cu zero.*

6.4.2. Unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan orientat. Fie

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

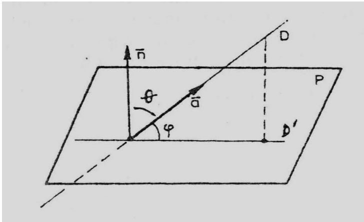
unde $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$, o dreaptă orientată arbitrară în spaţiu şi fie

$$P : Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, un plan orientat arbitrar în spaţiu. Atunci, vectorul director al dreptei D este $\overline{a}(l, m, n)$ iar vectorul normal la planul P este $\overline{n}(A, B, C)$.

Prin definiţie, unghiul dintre dreapta orientată D şi planul orientat P este unghiul $\theta \in [0, \pi]$ format de vectorul normal $\overline{n}$ cu vectorul director $\overline{a}$. Acest unghi se determină prin formula

$$\cos\theta = \frac{\langle \overline{n}, \overline{a} \rangle}{||\overline{n}|| \cdot ||\overline{a}||} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$



Unghiul dintre dreapta orientată D şi planul orientat P

OBSERVAŢIA 6.4.6. *Prin definiţia dată în geometria sintetică euclidiană, unghiul format de dreapta D şi planul P este unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ dintre dreapta D şi dreapta D', unde D' este proiecţia dreptei D pe planul P. Unghiul θ este legat de unghiul φ prin relaţia $\theta + \varphi = 90^\circ$ sau $\theta = 90^\circ + \varphi$.*

OBSERVAŢIA 6.4.7. *Dreapta D este paralelă cu planul P ($D \parallel P$, caz particular, $D \subset P$) dacă şi numai dacă:*

$$\langle \overline{n}, \overline{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0.$$

Cazul particular de incluziune $D \subset P$ apare odată cu condiţia suplimentară

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

OBSERVAŢIA 6.4.8. *Dreapta D este perpendiculară pe planul P ($D \perp P$) dacă şi numai dacă:*

$$\overline{n} \text{ este coliniar cu } \overline{a} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

OBSERVAŢIA 6.4.9. *Rapoartele care intervin în observaţia anterioară au un caracter formal în sensul că dacă vreun numitor este egal cu zero atunci şi numărătorul corespunzător este egal cu zero.*

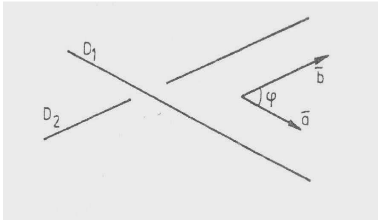
6.4.3. Unghiul dintre două drepte orientate. Să considerăm că

$$D_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ şi } D_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

unde $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 \neq 0$, $\forall\, i \in \{1, 2\}$, sunt două drepte orientate arbitrare în spaţiu. Atunci, vectorul director al dreptei D_1 este $\overline{a}(l_1, m_1, n_1)$ iar vectorul director al dreptei D_2 este $\overline{b}(l_2, m_2, n_2)$.

Prin definiţie, unghiul dintre dreapta orientată D_1 şi dreapta orientată D_2 este unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ format de vectorul director $\overline{a}$ cu vectorul director $\overline{b}$. Acest unghi se determină prin formula

$$\cos \varphi = \frac{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}{||\overline{a}|| \cdot ||\overline{b}||} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$



Ughiul format de dreptele orientate D_1 şi D_2

Observaţia 6.4.10. *Dreptele D_1 şi D_2 sunt perpendiculare ($D_1 \perp D_2$) dacă şi numai dacă:*

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Observaţia 6.4.11. *Dreptele D_1 şi D_2 sunt paralele ($D_1 \parallel D_2$) dacă şi numai dacă:*

$$\overline{a} \text{ este coliniar cu } \overline{b} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Observaţia 6.4.12. *Rapoartele care intervin în observaţia anterioară au un caracter formal în sensul că dacă vreun numitor este egal cu zero atunci şi numărătorul corespunzător este egal cu zero.*

6.5. Distanţe în spaţiu

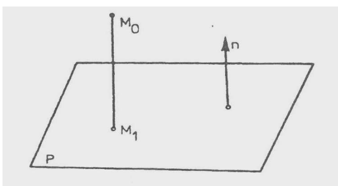
În această secţiune ne propunem să găsim formule pentru determinarea următoarelor distanţe: distanţa de la un punct la un plan, distanţa de la un punct la o dreaptă şi distanţa dintre două drepte.

6.5.1. Distanţa de la un punct la un plan. Să considerăm că

$$P : Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, este un plan orientat arbitrar în spaţiu şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct din spaţiu exterior planului P. Evident, vectorul normal la planul P este $\overline{n}(A, B, C)$.

Construim acum segmentul $[M_0M_1] \perp P$, unde $M_1 \in P$ este proiecţia punctului M_0 pe planul P. Atunci, distanţa de la punctul M_0 la planul P este egală cu lungimea vectorului liber $\overline{M_0M_1}$, pe care o notăm cu $d(M_0, P)$.



Distanţa de la punctul M_0 la planul P

Să presupunem că punctul M_1 are coordonatele necunoscute $M_1(\alpha, \beta, \gamma)$. Atunci, deoarece $M_1 \in P$ iar vectorul liber

$$\overline{M_0M_1} = (\alpha - x_0)\overline{i} + (\beta - y_0)\overline{j} + (\gamma - z_0)\overline{k}$$

este coliniar cu vectorul normal $\overline{n}(A, B, C)$, rezultă că coordonatele necunoscute α, β şi γ verifică sistemul

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0 \\ \dfrac{\alpha - x_0}{A} = \dfrac{\beta - y_0}{B} = \dfrac{\gamma - z_0}{C}. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim soluţiile

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - \dfrac{A}{A^2 + B^2 + C^2}(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \\ \beta = y_0 - \dfrac{B}{A^2 + B^2 + C^2}(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \\ \gamma = z_0 - \dfrac{C}{A^2 + B^2 + C^2}(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D). \end{cases}$$

Prin urmare, lungimea vectorului liber $\overline{M_0M_1}$ este

$$\begin{aligned} ||\overline{M_0M_1}|| &= \sqrt{(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2 + (\gamma - z_0)^2} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

În concluzie, distanţa de la punctul M_0 la planul P este determinată de formula

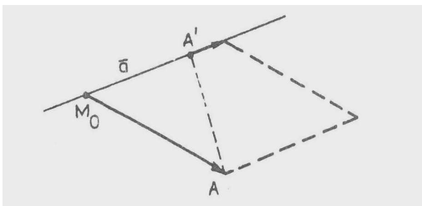
$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6.5.2. Distanţa de la un punct la o dreaptă. Să considerăm că

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

unde $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$, este o dreaptă orientată arbitrară în spaţiu iar $A(x_1, y_1, z_1)$ este un punct din spaţiu exterior dreptei D. Evident, dreapta D trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\overline{a}(l, m, n)$.

Construim acum segmentul $[AA'] \perp D$, unde $A' \in D$ este proiecţia punctului A pe dreapta D. Atunci, distanţa de la punctul A la dreapta D este egală cu lungimea segmentului $[AA']$, pe care o notăm cu $d(A, D)$.



Distanţa de la punctul A la dreapta D

Segmentul $[AA']$ este însă înălţimea paralelogramului construit pe vectorii liberi

$$\overline{a}(l, m, n) \text{ şi } \overline{M_0A}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Atunci, din formula care dă aria paralelogramului construit pe vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{M_0A}$ obţinem că formula care dă distanţa de la punctul A la dreapta D este

$$d(A,D)=\frac{\left|\left|\overline{a}\times\overline{M_0A}\right|\right|}{||\overline{a}||}.$$

6.5.3. Distanţa dintre două drepte oarecare din spaţiu. Să considerăm că

$$D_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\text{ şi } D_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

unde $l_i^2+m_i^2+n_i^2\neq 0$, $\forall\ i\in\{1,2\}$, sunt două drepte orientate arbitrare în spaţiu. Evident, dreapta D_1 trece prin punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi are vectorul director $\overline{a}_1(l_1,m_1,n_1)$ iar dreapta D_2 trece prin punctul $M_2(x_2,y_2,z_2)$ şi are vectorul director $\overline{a}_2(l_2,m_2,n_2)$.

Se ştie din geometria sintetică euclidiană că dreptele D_1 şi D_2 din spaţiu pot fi confundate, paralele, concurente sau în poziţie generală.

(1) Dacă dreptele D_1 şi D_2 sunt confundate sau concurente, atunci, prin definiţie, distanţa dintre dreptele D_1 şi D_2 este egală cu zero.

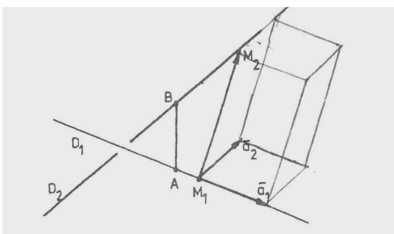
(2) Dacă dreptele D_1 şi D_2 sunt paralele, atunci distanţa dintre dreptele D_1 şi D_2 este dată de formula

$$d(D_1,D_2)=\frac{\left|\left|\overline{a}_1\times\overline{M_1M_2}\right|\right|}{||\overline{a}_1||}$$

sau

$$d(D_1,D_2)=\frac{\left|\left|\overline{a}_2\times\overline{M_1M_2}\right|\right|}{||\overline{a}_2||}.$$

(3) Dacă dreptele D_1 şi D_2 sunt în poziţie generală, atunci există o unică dreaptă perpendiculară comună AB, unde $A\in D_1$, $B\in D_2$, $A\neq B$, $AB\perp D_1$ şi $AB\perp D_2$, a dreptelor D_1 şi D_2.



Distanţa dintre dreptele D_1 şi D_2

Prin definiţie, distanţa dintre dreptele D_1 şi D_2 este $d(D_1,D_2)=\left|\left|\overline{AB}\right|\right|$. Din figura de mai sus, rezultă evident că segmentul $[AB]$ este înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii liberi

$$\overline{a}_1(l_1,m_1,n_1),\overline{a}_2(l_2,m_2,n_2)\text{ şi }\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Atunci, din formula care dă volumul paralelipipedului construit pe vectorii liberi $\overline{a}_1,\overline{a}_2$ şi $\overline{M_1M_2}$ obţinem că formula care dă distanţa dintre dreptele D_1 şi D_2 este

$$d(D_1,D_2)=\frac{\left|\left(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{M_1M_2}\right)\right|}{||\overline{a}_1\times\overline{a}_2||}.$$

6.5.4. Ecuaţiile carteziene ale perpendicularei comune AB. În contextul anterior, este important de subliniat faptul că perpendiculara comună AB a dreptelor D_1 şi D_2, aflate în poziţie generală, are vectorul director dat de produsul vectorial $\overline{a}_1 \times \overline{a}_2$. Prin urmare, perpendiculara comună AB a dreptelor D_1 şi D_2 poate fi privită ca intersecţia dintre planele determinate de

$$M_1, \overline{a}_1 \text{ şi } \overline{a}_1 \times \overline{a}_2,$$

respectiv

$$M_2, \overline{a}_2 \text{ şi } \overline{a}_1 \times \overline{a}_2.$$

În consecinţă, ecuaţiile carteziene ale perpendicularei comune AB a dreptelor D_1 şi D_2, aflate în poziţie generală, sunt

$$AB : \begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

unde

$$l_3 = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \; m_3 = - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \text{ şi } n_3 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

CAPITOLUL 7

CONICE

Conicele sau *curbele algebrice de grad doi* reprezintă o clasă de curbe plane cu proprietăţi remarcabile, întâlnite în aplicaţii din diverse domenii. Acestea sunt caracterizate, într-un reper cartezian ortonormat din planul E_2, printr-o ecuaţie de forma

$$\Gamma : g(x, y) = 0,$$

unde funcţia $g(x, y)$ este o funcţie polinomială de grad doi în nedeterminatele x şi y. Din punct de vedere geometric, în acest capitol vom demostra că o conică nu poate reprezenta în plan decât una dintre următoarele figuri geometrice: *elipsă*, în particular *cerc*, *hiperbolă*, *parabolă*, *reuniune de drepte paralele*, *confundate* sau *concurente*, *un punct* sau *mulţimea vidă*.

7.1. Conice pe ecuaţii reduse

Vom prezenta în această secţiune caracterizările algebrice şi principalele proprietăţi geometrice ale elipselor, în particular cercurilor, hiperbolelor şi parabolelor, studiate în repere carteziene ortonormate alese convenabil, după fiecare caz în parte. Fixăm pentru început reperul ortonormat

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$$

în planul bidimensional al geometriei euclidiene E_2, adică fixăm în E_2 un sistem ortogonal de axe (coordonate) xOy.

7.1.1. Cercul.

Definiţia 7.1.1. *Se numeşte* **cerc** *de centru* $C(x_0, y_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$ *mulţimea* (C) *a punctelor din plan* $M(x, y)$ *care verifică relaţia*

$$d(M, C) = r.$$

Observaţia 7.1.1. *Este evident că mulţimea punctelor din plan* $M(x, y)$ *care aparţin cercului* (C) *de centru* $C(x_0, y_0)$ *şi de rază* $r > 0$ *satisface ecuaţia de grad doi*

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

numită ***ecuaţia carteziană implicită a cercului de centru*** $C(x_0, y_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$.

Dezvoltând pătratele în ecuaţia carteziană implicită a cercului (C), obţinem ecuaţia

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0,$$

care ne sugerează studiul geometric al ecuaţiei de gradul doi (ecuaţie de conică) de forma

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Deoarece ecuaţia conicei Γ se transcrie sub forma

$$\Gamma : (x+a)^2 + (y+b)^2 = \rho,$$

unde $\rho = a^2 + b^2 - c$, rezultă că avem următoarele situaţii:

(1) Dacă $\rho > 0$, atunci mulţimea Γ este un cerc de centru $C(x_0, y_0)$, unde $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, şi de rază $r = \sqrt{\rho}$;

(2) Dacă $\rho = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a, -b)\}$;

(3) Dacă $\rho < 0$, atunci $\Gamma = \{\emptyset\}$.

DEFINIŢIA 7.1.2. *Ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

unde

$$a^2 + b^2 - c > 0,$$

se numeşte ***ecuaţia carteziană generală a cercului****.*

7.1.2. Elipsa.

DEFINIŢIA 7.1.3. *Locul geometric al punctelor din plan a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe F_1 şi F_2 este constantă se numeşte* ***elipsă****.*

Dacă alegem xOy un sistem de axe ortogonal preferenţial, astfel încât $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$, unde $c > 0$, atunci mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ cu proprietatea

$$MF_1 + MF_2 = 2a,$$

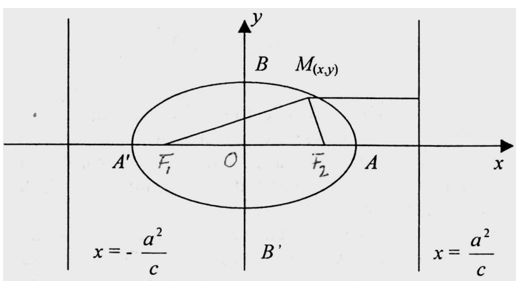
unde $a > 0$, este caracterizată algebric de ecuaţia

$$(E) : \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

În această ecuaţie, trecând al doilea termen din stânga în membrul drept şi ridicând de două ori consecutiv la pătrat, obţinem, în urma calculelor, următoarea *ecuaţie carteziană redusă a elipsei*:

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.



Elipsa (E)

În cazul elipsei (E), descrisă prin ecuaţia carteziană redusă de mai sus, întâlnim următoarele noţiuni uzuale:

(1) Punctele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$ se numesc *focarele* elipsei (E);

(2) Segmentele $OA = a$ şi $OB = b$ se numesc *semiaxa mare* şi *semiaxa mică* ale elipsei (E) şi reprezintă *axele de simetrie* ale elipsei (E);

(3) Punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(b, 0)$ şi $B'(-b, 0)$ se numesc *vârfurile* elipsei (E);

(4) Punctul $O(0, 0)$ se numeşte *centrul de simetrie* al elipsei (E);

(5) Dreptele $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ se numesc *directoarele* elipsei (E);

(6) Numărul real $e = \dfrac{c}{a} < 1$ se numeşte *excentricitatea* elipsei (E).

Observaţia 7.1.2. *Elipsa (E) poate fi gândită şi ca locul geometric al punctelor din plan $M(x, y)$ care verifică una dintre relaţiile:*

$$\frac{MF_1}{d(M, D_1)} = e < 1 \text{ sau } \frac{MF_2}{d(M, D_2)} = e < 1,$$

unde $D_1 : x = -\dfrac{a^2}{c}$ şi $D_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$ reprezintă directoarele elipsei (E).

Observaţia 7.1.3. *Dacă în ecuaţia elipsei (E) luăm*

$$a = b = r > 0,$$

atunci elipsa (E) devine un cerc (C) centrat în originea $O(0, 0)$ şi de rază r. Ecuaţia acestui cerc (C) este exprimată prin

$$(C) : x^2 + y^2 = r^2.$$

Deoarece egalitatea $a = b$ implică $c = 0$, rezultă că focarele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$ ale cercului (C) se suprapun şi coincid cu centrul $O(0, 0)$ al cercului (C). Mai mult, prin definiţie, admitem că excentricitatea cercului (C) este

$$e = \frac{c}{r} = 0.$$

7.1.3. Hiperbola.

Definiţia 7.1.4. *Locul geometric al punctelor din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la două puncte fixe F_1 şi F_2 este constantă se numeşte* ***hiperbolă****.*

Dacă alegem xOy un sistem de axe ortogonal preferenţial, astfel încât $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$, unde $c > 0$, atunci mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ cu proprietatea

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

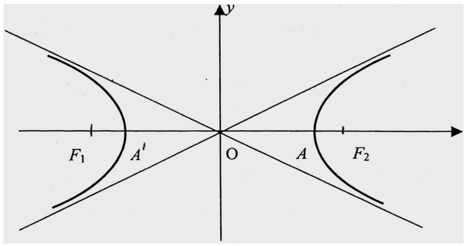
unde $a > 0$, este caracterizată algebric de ecuaţia

$$(H) : \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

În această ecuaţie, ridicând de două ori consecutiv la pătrat şi reducând termenii asemenea, obţinem, în urma calculelor, următoarea *ecuaţie carteziană redusă a hiperbolei*:

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



Hiperbola (H)

În cazul hiperbolei (H), descrisă prin ecuaţia carteziană redusă de mai sus, întâlnim următoarele noţiuni uzuale:

(1) Punctele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$ se numesc *focarele* hiperbolei (H);

(2) Axele Ox şi Oy se numesc *axele de simetrie* ale hiperbolei (H);

(3) Punctele $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$ se numesc *vârfurile* hiperbolei (H);

(4) Punctul $O(0, 0)$ se numeşte *centrul de simetrie* al hiperbolei (H);

(5) Dreptele $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ se numesc *asimptotele* hiperbolei (H);

(6) Dreptele $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ se numesc *directoarele* hiperbolei (H);

(7) Numărul real $e = \dfrac{c}{a} > 1$ se numeşte *excentricitatea* hiperbolei (H).

Observaţia 7.1.4. *Hiperbola (H) poate fi gândită şi ca locul geometric al punctelor din plan $M(x, y)$ care verifică una dintre relaţiile:*

$$\frac{MF_1}{d(M, D_1)} = e > 1 \text{ sau } \frac{MF_2}{d(M, D_2)} = e > 1,$$

unde $D_1 : x = -\dfrac{a^2}{c}$ şi $D_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$ reprezintă directoarele hiperbolei (H).

7.1.4. Parabola.

Definiţia 7.1.5. *Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix F şi o dreaptă fixă Δ se numeşte* ***parabolă****.*

Dacă alegem xOy un sistem de axe ortogonal preferenţial, astfel încât $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ şi $\Delta : x = -\dfrac{p}{2}$, unde $p > 0$, atunci mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ cu proprietatea

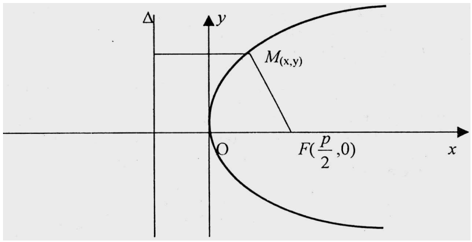
$$MF = d(M, \Delta)$$

este caracterizată algebric de ecuaţia

$$(P) : \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Ridicând această ecuaţie la pătrat şi reducând termenii asemenea, obţinem, în urma calculelor, următoarea *ecuaţie carteziană redusă a parabolei*:

$$(P) : y^2 = 2px.$$



Parabola (P)

În cazul parabolei (P), descrisă prin ecuaţia carteziană redusă de mai sus, întâlnim următoarele noţiuni uzuale:

(1) Punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ se numeşte *focarul* parabolei (P);

(2) Axa Ox se numeşte *axa de simetrie* a parabolei (P);

(3) Punctul $O(0,0)$ se numeşte *vârful* parabolei (P);

(4) Dreapta $\Delta : x = -\frac{p}{2}$ se numeşte *directoarea* parabolei (P).

OBSERVAŢIA 7.1.5. ***Excentricitatea*** *parabolei* (P) *poate fi gândită ca raportul constant:*

$$e = \frac{MF}{d(M, \Delta)} = 1.$$

7.1.5. Reuniuni de drepte, punct şi mulţime vidă.

DEFINIŢIA 7.1.6. *Conica* $(DC) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(DC) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***reuniune de drepte concurente.***

DEFINIŢIA 7.1.7. *Conica* $(DP) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(DP) : x^2 - a^2 = 0,$$

unde $a > 0$, *se numeşte* ***reuniune de drepte paralele.***

DEFINIŢIA 7.1.8. *Conica* $(D) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(D) : x^2 = 0$$

se numeşte ***reuniune de drepte confundate.***

DEFINIŢIA 7.1.9. *Conica* $(PCT) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(PCT) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***punct.***

DEFINIŢIA 7.1.10. *Conica* $(V) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(V) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***mulţimea vidă.***

7.2. Conice pe ecuaţie generală

Să considerăm spaţiul bidimensional al geometriei euclidiene plane E_2 în care am fixat un reper cartezian ortogonal

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\},$$

adică am fixat un sistem ortogonal de axe (coordonate) xOy.

Definiţia 7.2.1. *Mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ ale căror coordonate verifică o relaţie polinomială de forma*

$$\Gamma : g(x, y) = 0,$$

unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

coeficienţii reali

$$a_{ij} \in \mathbb{R},\ \forall\ i, j = \overline{1, 3},$$

verificând relaţia

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0,$$

se numeşte ***conică****.*

7.3. Invarianţii metrici Δ, δ şi I ai unei conice

Pentru început este important să subliniem faptul că dacă unui punct din plan

$$M(x, y) \in E_2$$

îi ataşăm coordonatele *omogene* în spaţiu

$$M(x_1, x_2, x_3) \in E_3$$

legate prin relaţiile

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ şi } y = \frac{x_2}{x_3},$$

unde $x_3 \neq 0$, atunci expresia ecuaţiei unei conice

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării unei forme pătratice

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Definiţia 7.3.1. *Matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea conicei*** Γ ***în sistemul ortogonal de axe*** *xOy.*

DEFINIŢIA 7.3.2. *Numerele reale*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \ \text{şi } I = a_{11} + a_{22}$$

se numesc ***invarianţii metrici*** *ai conicei* Γ.

Vom demonstra în continuare că invarianţii metrici Δ, δ şi I nu îşi modifică valoarea în urma efectuării unei translaţii sau a unei transformări ortogonale de coordonate.

7.3.1. Invarianţa lui Δ, δ şi I la translaţii. Să considerăm că $C(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar din planul geometriei euclidiene E_2. Este evident că translaţia sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x'Cy'$, translaţie definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

este echivalentă cu o transformare de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o translaţie ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei conicei

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x') \quad &= \quad a_{11}(x_1')^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}(x_2')^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x_1'x_3' + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)x_2'x_3' + g(x_0, y_0)(x_3')^2, \end{aligned}$$

unde $x' = (x_1', x_2', x_3')$ iar

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}).$$

DEFINIŢIA 7.3.3. *Matricea simetrică*

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea conicei Γ în sistemul ortogonal de axe*** *$x'Cy'$.*

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\begin{aligned} \Delta' \quad &= \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & g(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \\ \delta' \quad &= \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \ \text{şi } I' = a_{11} + a_{22}, \end{aligned}$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 7.3.1. *Numerele reale* Δ, δ, I *şi* Δ', δ', I' *verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta', \ \ \delta = \delta' \ \text{şi} \ I = I'.$$

DEMONSTRAŢIE. Egalităţile $\delta = \delta'$ şi $I = I'$ sunt evidente. Pentru a demonstra egalitatea $\Delta = \Delta'$ folosim proprietăţile determinanţilor. Astfel, dacă înmulţim în determinantul Δ' prima coloană cu $(-x_0)$ şi a doua coloană cu $(-y_0)$ şi rezultatele le adunăm la ultima coloană, obţinem ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

7.3.2. Invarianţa lui Δ, δ şi I la transformări ortogonale. Este evident că o transformare ortogonală de coordonate în plan definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

unde $B \cdot {}^TB = I_2$, este echivalentă cu o transformare ortogonală de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o transformare ortogonală de coordonate ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei conicei

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x'') = a_{11}''(x_1'')^2 + 2a_{12}''x_1''x_2'' + a_{22}''(x_2'')^2 + 2a_{13}''x_1''x_3'' + 2a_{23}''x_2''x_3'' + a_{33}''(x_3'')^2,$$

unde $x'' = (x_1'', x_2'', x_3'')$.

DEFINIŢIA 7.3.4. *Matricea simetrică*

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' & a_{13}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' & a_{23}'' \\ a_{13}'' & a_{23}'' & a_{33}'' \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q *se numeşte* ***matricea conicei*** Γ ***în sistemul ortogonal de axe*** $x''Oy''$.

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' & a_{13}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' & a_{23}'' \\ a_{13}'' & a_{23}'' & a_{33}'' \end{vmatrix}, \ \delta'' = \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' \end{vmatrix} \ \text{şi} \ I'' = a_{11}'' + a_{22}''.$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 7.3.2. *Numerele reale* Δ, δ, I *şi* Δ'', δ'', I'' *verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta'', \ \ \delta = \delta'' \ \text{şi} \ I = I''.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra mai întâi că avem $\delta = \delta''$ şi $I = I''$. Pentru aceasta, fie forma pătratică

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

În urma transformării ortogonale de mai sus, forma pătratică φ capătă expresia

$$\varphi(x'', y'') = (x'', y'') \cdot\ {}^T B \cdot A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numerele reale δ şi I caracterizează polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - I\lambda + \delta,$$

rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$A'' = {}^T B \cdot A \cdot B.$$

În concluzie, avem

$$\delta = \delta'' \text{ şi } I = I''.$$

Repetând raţionamentul de mai sus pentru forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

deducem că, în urma transformării ortogonale omogene de mai sus, forma pătratică Q capătă expresia

$$Q(x'') = (x_1'', x_2'', x_3'') \cdot \begin{pmatrix} {}^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numărul real Δ caracterizează polinomul caracteristic

$$P_{\overline{A}}(\lambda) = \det(\overline{A} - \lambda I_3) = \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - \Delta,$$

unde $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$, rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} {}^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, avem

$$\Delta = \Delta''.$$

□

7.4. Centrul unei conice

Fie conica $\Gamma : g(x,y) = 0$, unde

$$g(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

şi fie $C(x_0, y_0)$ un punct arbitrar din planul geometriei euclidiene E_2.

DEFINIŢIA 7.4.1. *Punctul $C(x_0, y_0)$ se numeşte* ***centru*** *al conicei Γ dacă este satisfăcută următoarea afirmaţie logică:*

$$\forall\ P(x,y) \in \Gamma \Rightarrow P'(2x_0 - x, 2y_0 - y) \in \Gamma.$$

OBSERVAŢIA 7.4.1. *Din punct de vedere geometric, definiţia anterioară arată că punctul C este centrul unei conice Γ dacă pentru orice punct P de pe conica Γ simetricul său faţă de punctul C se află tot pe conica Γ. Din acest motiv, dacă există, centrul unei conice Γ se mai numeşte şi* ***centrul de simetrie*** *al conicei Γ.*

TEOREMA 7.4.1. *Punctul $C(x_0, y_0)$ este centru al conicei Γ dacă şi numai dacă*

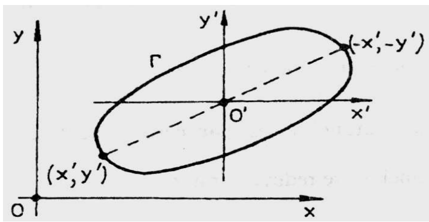
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases}$$

DEMONSTRAŢIE. Efectuând translaţia sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x'O'y'$, unde $O' = C$, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0, \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ devine

$$\Gamma : a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y' + g(x_0, y_0) = 0.$$



Centrul $O' = C$ al conicei Γ

Evident, din definiţia centrului unei conice deducem că condiţia ca noua origine

$$O'(0,0) = C(x_0, y_0)$$

a sistemului de axe $x'O'y'$ să fie centru al conicei Γ se reduce la verificarea afirmaţiei logice

$$\forall\ P(x', y') \in \Gamma \Rightarrow P'(-x', -y') \in \Gamma.$$

Această condiţie este echivalentă cu egalitatea

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x' - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y' + g(x_0, y_0) = 0$$

pentru orice punct $P(x', y') \in \Gamma$. Prin scădere, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y' = 0, \ \forall\ P(x', y') \in \Gamma.$$

Deoarece punctul $P(x', y') \in \Gamma$ este arbitrar, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

□

OBSERVAŢIA 7.4.2. *Deoarece determinantul sistemului liniar*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

rezultă că următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) *Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica $\Gamma : g(x, y) = 0$ are* ***un unic centru*** *$C(x_0, y_0)$ ale cărui coordonate sunt determinate de sistemul Cramer anterior. Vom demonstra în acest capitol că conicele cu centru sunt:* ***cercul, elipsa, hiperbola, perechea de drepte concurente, un punct*** *şi* ***mulţimea vidă****.*

(2) *Dacă $\delta = 0$, atunci conica $\Gamma : g(x, y) = 0$ ori nu are* ***nici un centru****, ori admite* ***o dreaptă de centre****. Vom demonstra în acest capitol că conicele* ***fără centru*** *sunt* ***parabolele*** *iar conicele cu* ***o dreaptă de centre*** *sunt:* ***perechile de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *şi* ***mulţimea vidă****.*

7.5. Reducerea la forma canonică a conicelor cu centru ($\delta \neq 0$)

Să considerăm acum că $\Gamma : g(x, y) = 0$ este o conică cu centrul $C(x_0, y_0)$. După cum am observat în demonstraţia teoremei precedente, efectuând o translaţie a sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x'O'y'$, unde $O' = C$, ecuaţia conicei Γ devine

$$\Gamma : a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + g(x_0, y_0) = 0.$$

Să studiem în continuare forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x', y') = a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2.$$

Evident, matricea simetrică ataşată formei pătratice φ în baza canonică a spaţiului vectorial euclidian ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$este

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Atunci, conform metodei valorilor proprii de reducere la forma canonică a formelor pătratice, există un sistem de coordonate $XO'Y$ în raport cu care forma pătratică φ are forma canonică

$$\varphi(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2,$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt valorile proprii ale matricii A.

Evident, valorile proprii λ_1 şi λ_2 sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0,$$

unde $\delta \neq 0$.

Să presupunem acum că baza în care se obţine forma canonică a formei pătratice φ este baza ortonormată formată din vectorii proprii

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2) \text{ şi } \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$$

corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2. Atunci, transformarea de coordonate care realizează forma canonică a formei pătratice φ este dată de relaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

este ortogonală, adică verifică relaţia $\mathcal{R} \cdot {}^T\mathcal{R} = I_2$.

(1) Relaţia matriceală $\mathcal{R} \cdot {}^T\mathcal{R} = I_2$ implică egalitatea $\det \mathcal{R} = \pm 1$.

(2) Dacă $\det \mathcal{R} = 1$, atunci trecerea de la sistemul de axe $x'O'y'$ la sistemul de axe $XO'Y$ se realizează geometric printr-o rotaţie. Direcţiile şi sensurile noilor axe de coordonate $O'X$ şi $O'Y$ sunt determinate de reprezentanţii legaţi în punctul $O' = C$ ai vectorilor proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$.

(3) Dacă $\det \mathcal{R} = -1$, atunci trecerea de la sistemul de axe $x'O'y'$ la sistemul de axe $XO'Y$ se realizează geometric printr-o rotaţie urmată de o simetrie. Din acest motiv, în aplicaţii vom renumerota, dacă este cazul, valorile proprii λ_1 şi λ_2 şi, implicit, vectorii proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$, astfel încât $\det \mathcal{R} = 1$.

În urma rotaţiei de mai sus (i. e. $\det \mathcal{R} = 1$), expresia ecuaţiei conicei Γ devine

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + g(x_0, y_0) = 0.$$

Evident, matricea conicei Γ în sistemul de axe $XO'Y$ este

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & g(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de invarianţa lui Δ şi δ la translaţii şi transformări ortogonale de coordonate, deducem că

$$\Delta = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot g(x_0, y_0) \text{ şi } \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

adică

$$g(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

În concluzie, în urma unei roto-translaţii convenabile, ecuaţia conicei Γ cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$ poate fi scrisă în *forma canonică:*

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

TEOREMA 7.5.1. *Dacă* $\Gamma : g(x, y) = 0$ *este o conică cu centrul în punctul* $C(x_0, y_0)$*, atunci conica* Γ *poate reprezenta în plan una dintre următoarele figuri geometrice: o* ***elipsă****, în particular un* ***cerc****, o* ***hiperbolă****, o* ***reuniune de drepte concurente****,* ***un punct*** *sau* ***mulţimea vidă****.*

DEMONSTRAŢIE. Ţinând cont de ecuaţia canonică a conicei Γ scrisă anterior şi utilizând notaţiile

$$a = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right|},\ b = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}\right|},\ \alpha = \sqrt{|\lambda_1|} \text{ şi } \beta = \sqrt{|\lambda_2|},$$

avem următoarele situaţii posibile:

(1) $\Delta \neq 0$;

(a) $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$;

(i) Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ şi $\Delta < 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ şi $\Delta > 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

$$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

În acest caz suntem în prezenţa unei *elipse*;

(ii) Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ şi $\Delta > 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ şi $\Delta < 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

$$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0;$$

În acest caz suntem în prezenţa *mulţimii vide*;

(b) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ sau $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$;

(i) Dacă $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ şi $\Delta < 0$ sau $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ şi $\Delta > 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

$$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0;$$

(ii) Dacă $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ şi $\Delta > 0$ sau $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ şi $\Delta < 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

$$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

În ambele cazuri suntem în prezenţa unei *hiperbole*;

(2) $\Delta = 0$;

(a) $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$;

În acest caz ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

$$\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 = 0 \Leftrightarrow X = Y = 0.$$

În această situaţie avem de-a face cu *un punct* care este exact centrul conicei $C(x_0, y_0)$;

(b) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ sau $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$;

În acest caz ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

$$\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha X - \beta Y)(\alpha X + \beta Y) = 0.$$

În această situaţie avem de-a face cu *reuniunea a două drepte concurente* D_1 şi D_2 descrise de ecuaţiile

$$D_1 : \alpha X - \beta Y = 0 \text{ şi } D_2 : \alpha X + \beta Y = 0.$$

Punctul de intersecţie $D_1 \cap D_2$ al dreptelor D_1 şi D_2 este exact centrul conicei $C(x_0, y_0)$.

□

COROLARUL 7.5.1 (Clasificarea conicelor cu centru). *Să considerăm că*

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

este o conică cu centru ($\delta \neq 0$)*. Atunci, următoarea clasificare a conicelor cu centru este adevărată:*

(1) *pentru* $\Delta \neq 0$ *avem:*
  (a) *dacă* $\delta < 0$, *atunci conica* Γ *este o* ***hiperbolă****;*
  (b) *dacă* $\delta > 0$, *atunci avem:*
    (i) *dacă* $I \cdot \Delta < 0$, *atunci conica* Γ *este o* ***elipsă****;*
    (ii) *dacă* $I \cdot \Delta > 0$, *atunci conica* Γ *este o* ***mulţimea vidă****;*

(2) *pentru* $\Delta = 0$ *avem:*
  (a) *dacă* $\delta < 0$, *atunci conica* Γ *este o* ***reuniune de drepte concurente****;*
  (b) *dacă* $\delta > 0$, *atunci conica* Γ *este o* ***un punct****.*

OBSERVAŢIA 7.5.1. *În cazul* $\Delta \neq 0$ *şi* $\delta > 0$ *nu putem avea* $I \cdot \Delta = 0$.

7.6. Reducerea la forma canonică a conicelor fără centru ($\delta = 0$)

Fie $\Gamma : g(x, y) = 0$, unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

o conică cu $\delta = 0$. Reaminitm că, în acest caz, sistemul liniar

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

este ori incompatibil ori admite o infinitate de soluţii. Cu alte cuvinte, conica Γ ori nu admite niciun centru de simetrie ori admite o dreaptă de centre de simetrie.

DEFINIŢIA 7.6.1. *O conică* $\Gamma : g(x, y) = 0$*, unde* $\delta = 0$*, se numeşte* ***conică fără centru****.*

TEOREMA 7.6.1. *Dacă* $\Gamma : g(x, y) = 0$ *este o conică fără centru, atunci conica* Γ *poate reprezenta în plan una dintre următoarele figuri geometrice: o* ***parabolă****, o* ***reuniune de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *sau* ***mulţimea vidă****.*

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm din nou forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

unde $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Matricea formei pătratice φ în sistemul de coordonate xOy este evident matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

unde $\det A = \delta = 0$. Mai mult, valorile proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii A sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda = 0,$$

adică valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I \neq 0$. Dacă notăm acum cu

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2) \text{ şi } \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I \neq 0$ şi efectuăm rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

verifică egalitatea

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

atunci ecuaţia conicei Γ se rescrie sub forma

$$\Gamma : I(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Evident, matricea conicei Γ în sistemul de coordonate $x'Oy'$ este matricea simetrică

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & I & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Deoarece trecerea de la sistemul de coordonate xOy la sistemul de coordonate $x'Oy'$ s-a făcut printr-o rotaţie, deducem că invariantul Δ are valoarea

$$\Delta = -I(a'_{13})^2,$$

adică avem

$$a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}.$$

Vom considera în continuare următoarele cazuri posibile:

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $a'_{13} \neq 0$. În această situaţie, efectuăm o translaţie a sistemului de axe $x'Oy'$ în sistemul de axe XCY, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0, \end{cases}$$

unde punctul $C(x_0, y_0)$ este ales astfel încât ecuaţia conicei Γ să capete o formă cât mai simplă. Deoarece efectuând o asemenea translaţie ecuaţia conicei Γ se reduce la

$$\Gamma : IY^2 + 2a'_{13}X + 2(Iy_0 + a'_{23})Y + Iy_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a'_{33} = 0,$$

determinăm punctul $C(x_0, y_0)$ impunând condiţiile

$$\begin{cases} Iy_0 + a'_{23} = 0 \\ Iy_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a'_{33} = 0. \end{cases}$$

Este evident că acest sistem are o soluţia unică

$$\begin{cases} y_0 = -\dfrac{a'_{23}}{I} \\ x_0 = -\dfrac{Iy_0^2 + 2a'_{23}y_0 + a'_{33}}{2a'_{13}} \end{cases}$$

şi deci ecuaţia conicei Γ se poate scrie sub forma canonică

$$\Gamma : Y^2 = 2pX,$$

unde

$$p = -\frac{2a'_{13}}{I} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Prin urmare, conica Γ este o *parabolă* cu vârful în punctul $C(x_0, y_0)$ şi axa de simetrie CX.

(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci $a'_{13} = 0$. În această situaţie, ecuaţia conicei Γ se scrie sub forma

$$\Gamma : I(y')^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

adică avem de-a face cu o ecuaţie polinomială de gradul doi în y'. Fie k_1 şi k_2 rădăcinile reale sau complexe ale acestui polinom.

(a) (i) Dacă $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ şi $k_1 \neq k_2$, atunci forma canonică a ecuaţiei conicei Γ este

$$\Gamma : \left(y' + \frac{a'_{23}}{I}\right)^2 + \frac{a'_{33}}{I} - \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{I^2} = 0,$$

unde

$$\frac{a'_{33}}{I} - \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{I^2} < 0.$$

Efectuând atunci translaţia

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{I} \end{cases}$$

şi utilizând notaţia

$$k = \sqrt{\frac{\left(a'_{23}\right)^2}{I^2} - \frac{a'_{33}}{I}},$$

expresia canonică a ecuaţiei conicei Γ devine

$$\Gamma : Y^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow (Y - k)(Y + k) = 0,$$

unde $k \neq 0$. Prin urmare, conica Γ este *reuniunea* $D_1 \cup D_2$ *a două drepte paralele*, unde

$$D_1 : Y - k = 0 \text{ şi } D_2 : Y + k = 0.$$

(ii) Dacă $k_1 = k_2 \in \mathbb{R}$, atunci după efectuarea translaţiei de la punctul (i) expresia canonică a ecuaţiei conicei Γ devine

$$\Gamma : Y^2 = 0.$$

Prin urmare, conica Γ este *reuniunea* $D_1 \cup D_2$ *a două drepte confundate*, unde

$$D_1 = D_2 : Y = 0.$$

(iii) Dacă $k_1, k_2 \notin \mathbb{R}$, atunci, evident, ecuaţia conicei Γ caracterizează *mulţimea vidă.*

□

COROLARUL 7.6.1 (Clasificarea conicelor fără centru). *Să considerăm că*

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

este o conică fără centru ($\delta = 0$). *Atunci, următoarea clasificare a conicelor fără centru este adevărată:*

(1) *Dacă* $\Delta \neq 0$*, atunci conica* Γ *este o* ***parabolă;***
(2) *Dacă* $\Delta = 0$*, atunci conica* Γ *este o* ***reuniune de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *sau* ***mulţimea vidă.***

7.7. Clasificarea izometrică a conicelor. Reprezentare grafică

Să considerăm că

$$\Gamma : g(x, y) = 0,$$

unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0,$$

este o conică şi să presupunem că Δ, δ şi I sunt invarianţii metrici ai conicei Γ.

După cum am observat în secţiunile precedente invarianţii metrici Δ, δ şi I ne dau informaţii în ceea ce priveşte clasificarea conicei Γ. Din această perspectivă vom spune că invariantul Δ ne oferă informaţii despre *natura* conicei Γ, în timp ce invariantul δ ne oferă informaţii despre *genul* conicei Γ. Atunci, pentru o mai clară sintetizare a rezultatelor din secţiunile precedente, vom utiliza următoarea terminologie naturală:

(1) Conica Γ pentru care $\Delta \neq 0$ (elipsă, hiperbolă, parabolă, mulţime vidă) se numeşte conică *nedegenerată.*

(2) Conica Γ pentru care $\Delta = 0$ (reuniune de drepte concurente sau paralele sau confundate, un punct, mulţime vidă) se numeşte conică *degenerată.*

(3) Conica Γ pentru care $\delta > 0$ (elipsă, un punct, mulţime vidă) se numeşte conică de *tip eliptic.*

(4) Conica Γ pentru care $\delta < 0$ (hiperbolă, reuniune de drepte concurente) se numeşte conică de *tip hiperbolic.*

(5) Conica Γ pentru care $\delta = 0$ (parabolă, reuniune de drepte paralele sau confundate, mulţime vidă) se numeşte conică de *tip parabolic.*

În acest context, folosind invarianţii metrici Δ, δ şi I ai unei conice Γ, suntem în măsură să dăm următoarea *clasificare izometrică* a conicelor:

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica Γ este o conică *nedegenerată*;
   (a) Dacă $\delta > 0$, atunci conica Γ este:
      (i) o *elipsă* pentru $I\Delta < 0$;
      (ii) *mulţimea vidă* pentru $I\Delta > 0$;
   (b) Dacă $\delta = 0$, atunci conica Γ este o *parabolă*;
   (c) Dacă $\delta < 0$, atunci conica Γ este o *hiperbolă*;
(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci conica Γ este o conică *degenerată*;
   (a) Dacă $\delta > 0$, atunci conica Γ este o *un punct*;
   (b) Dacă $\delta = 0$, atunci conica Γ este o *reuniune de drepte paralele* sau *confundate* sau *mulţimea vidă*;
   (c) Dacă $\delta < 0$, atunci conica Γ este o *reuniune de drepte concurente.*

Mai mult, în urma studiilor făcute în secţiunile precedente, putem scoate în evidenţă următorul

Algoritm de reprezentare grafică a conicei Γ
-Metoda roto-translaţiei-

(1) Se precizează natura şi genul conicei Γ după valorile invarianţilor metrici Δ, δ şi I.
(2) Se asociază conicei Γ forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin
$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$
şi se scrie matricea simetrică
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
a formei pătratice φ.
(3) Se calculează valorile proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii A ca rădăcini ale ecuaţiei caracteristice
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$
(4) Se calculează subspaţiile proprii
$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
şi
$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
corespunzătoare valorilor proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii A.

(5) Printr-o eventuală renumerotare, se aleg

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2) \text{ şi } \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2 astfel încât

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

unde

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

(6) Se efectuează rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

în urma căreia ecuaţia conicei Γ devine

$$\Gamma : \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

unde a'_{13}, a'_{23}, $a'_{33} \in \mathbb{R}$.

(7) Forţând factorii comuni λ_1 şi λ_2 (dacă este cazul) şi restrângând pătratele descompuse, se rescrie ecuaţia conicei Γ sub forma

$$\Gamma : \lambda_1 (x' + x_0)^2 + \lambda_2 (y' + y_0)^2 + a = 0,$$

unde x_0, y_0, $a \in \mathbb{R}$.

(8) Se efectuează translaţia

$$\begin{cases} X = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \end{cases}$$

şi se scrie ecuaţia canonică

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a = 0.$$

(9) Se trasează sistemul iniţial de axe xOy şi se efectuează rotaţia acestuia în sistemul de axe $x'Oy'$. Direcţiile şi sensurile axelor Ox' şi Oy' coincid cu direcţiile şi sensurile vectorilor proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$.

(10) Se efectuează translaţia sistemului de axe $x'Oy'$ în sistemul de axe XCY, unde punctul C are coordonatele $C(x_0, y_0)$.

(11) Se reprezintă grafic ecuaţia canonică de la punctul (8) în ultimul sistem de axe XCY.

Observaţia 7.7.1. *În unele aplicaţii vom folosi notaţiile $x'' = X$ şi $y'' = Y$.*

Observaţia 7.7.2. *Dacă $a_{12} = 0$, atunci algoritmul de mai sus începe direct de la punctul (7), adică se efectuează doar o **translaţie**.*

Observaţia 7.7.3. *Dacă $a'_{13} = a'_{23} = 0$, atunci în algoritmul de mai sus se sar punctele (7), (8) şi (10), adică se efectuează doar o **rotaţie**.*

Observaţia 7.7.4. *Dacă în algoritmul de mai sus nu se sare nici un pas, atunci spunem că am aplicat **metoda roto-translaţiei**.*

EXEMPLUL 7.7.1. *Să se precizeze natura şi genul conicei*

$$\Gamma : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Mai mult, utilizând metoda roto-translaţiei, să se reducă ecuaţia conicei Γ *la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica* Γ.

Matricea conicei Γ *este matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Atunci, invarianţii metrici ai conicei Γ *sunt*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81 \neq 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0 \text{ şi } I = 10.$$

Deoarece avem

$$I\Delta = -810 < 0$$

rezultă că conica Γ *este o* ***elipsă***.

Pentru a găsi forma canonică a elipsei Γ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = 9 \text{ şi } \lambda_2 = 1.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 9$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y = 0\right\} = \\ &= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

iar subspaţiul propriu V_{λ_2} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 1$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\} = \\ &= \{(-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 *şi* λ_2 *sunt*

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \text{ şi } \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ *se reduce la*

$$\Gamma : 9(x')^2 + (y')^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Gamma : 9(x' - \sqrt{2})^2 + (y')^2 - 9 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y', \end{cases}$$

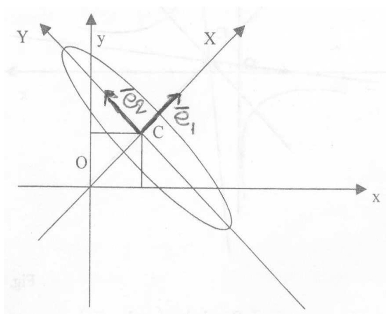
ecuaţia conicei Γ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Gamma : 9X^2 + Y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \Gamma : \frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unei elipse.

Graficul elipsei Γ *este reprezentat mai jos în sistemul de axe* XCY*, unde punctul* C *are coordonatele*

$$C(x' = \sqrt{2}, y' = 0) \Leftrightarrow C\,(x = 1, y = 1)\,.$$



Elipsa Γ

Este evident că elipsa Γ *are axele de simetrie* $D_1 = CY$ *şi* $D_2 = CX$ *de ecuaţii*

$$D_1 : X = 0 \text{ şi } D_2 : Y = 0$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y'*, de ecuaţii*

$$D_1 : x' - \sqrt{2} = 0 \text{ şi } D_2 : y' = 0.$$

Deoarece avem relaţiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y), \end{cases}$$

rezultă că axele de simetrie D_1 *şi* D_2 *ale elipsei* Γ *au ecuaţiile*

$$D_1 : x + y - 2 = 0 \text{ şi } D_2 : y - x = 0.$$

EXEMPLUL 7.7.2. *Să se precizeze natura şi genul conicei*

$$\Gamma : 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0.$$

Mai mult, utilizând metoda roto-translaţiei, să se reducă ecuaţia conicei Γ *la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica* Γ.

Matricea conicei Γ *este matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Atunci, invarianţii metrici ai conicei Γ *sunt*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0, \; \delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \text{ şi } I = 3,$$

adică conica Γ *este o* ***hiperbolă***.

Pentru a găsi forma canonică a hiperbolei Γ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x, y) = 3x^2 - 4xy$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = -1 \text{ şi } \lambda_2 = 4.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = -1$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, \middle| \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + y = 0 \right\} = \\ &= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

iar subspaţiul propriu V_{λ_2} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 4$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, \middle| \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\} = \\ &= \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2 sunt

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \text{ şi } \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = -1.$$

În acest context, renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$ şi corespunzător $\overline{e}_1' = \overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = \overline{e}_1$, pentru a obţine matricea de rotaţie

$$\mathcal{R}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

unde

$$\det \mathcal{R}' = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2y' - x'), \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ se reduce la

$$\Gamma : 4(x')^2 - (y')^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Gamma : 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{3}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

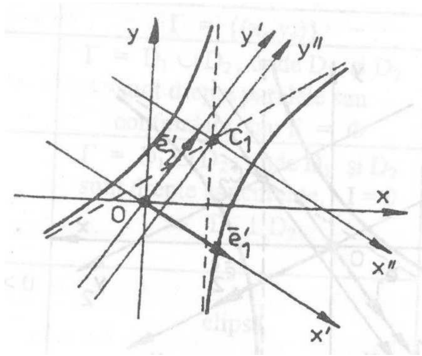
ecuaţia conicei Γ se reduce la ecuaţia canonică

$$\Gamma : 4(x'')^2 - (y'')^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \Gamma : \frac{(x'')^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(y'')^2}{2} - 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unei hiperbole.

Graficul hiperbolei Γ este reprezentat mai jos în sistemul de axe $x''C_1y''$, unde punctul C_1 are coordonatele

$$C_1\left(x' = \frac{1}{\sqrt{5}}, y' = \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow C_1\left(x = 1, y = 1\right).$$



Hiperbola Γ

Este evident că hiperbola Γ *are axele de simetrie* $D_1 = C_1y''$ *şi* $D_2 = C_1x''$ *de ecuaţii*

$$D_1 : x'' = 0 \text{ şi } D_2 : y'' = 0$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y', *de ecuaţii*

$$D_1 : x' - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \text{ şi } D_2 : y' - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0.$$

Deoarece avem relaţiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y), \end{cases}$$

rezultă că axele de simetrie D_1 *şi* D_2 *ale hiperbolei* Γ *au ecuaţiile*

$$D_1 : 2x - y - 1 = 0 \text{ şi } D_2 : x + 2y - 3 = 0.$$

Mai mult, hiperbola Γ *admite asimptotele* d_1 *şi* d_2 *(reprezentate punctat) de ecuaţii*

$$d_{1,2} : y'' = \pm 2x''$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y', *de ecuaţii*

$$d_1 : -2x' + y' - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \text{ şi } d_2 : 2x' + y' - \sqrt{5} = 0$$

sau, la nivel de coordonate x *şi* y, *de ecuaţii*

$$d_1 : -3x + 4y - 1 = 0 \text{ şi } d_2 : x - 1 = 0.$$

Exemplul 7.7.3. *Să se precizeze natura şi genul conicei*

$$\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Mai mult, utilizând metoda roto-translaţiei, să se reducă ecuaţia conicei Γ *la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica* Γ.

Matricea conicei Γ *este matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci, invarianţii metrici ai conicei Γ *sunt*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100 \neq 0,\ \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } I = 10,$$

adică conica Γ *este o* ***parabolă****.*

Pentru a găsi forma canonică a parabolei Γ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x,y) = 9x^2 - 6xy + y^2$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = 0 \text{ şi } \lambda_2 = 10.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 0$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3x + y = 0 \right\} = \\ &= \{ (x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

iar subspaţiul propriu V_{λ_2} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 10$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0 \right\} = \\ &= \{ (-3y, y) \mid y \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 *şi* λ_2 *sunt*

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3) \text{ şi } \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'), \end{cases} \end{aligned}$$

ecuaţia conicei Γ *se reduce la*

$$\Gamma : 10(y')^2 + \frac{20}{\sqrt{10}}x' - \frac{60}{\sqrt{10}}y' = 0 \Leftrightarrow \Gamma : (y')^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Gamma : \left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{9}{10} = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \end{cases}$$

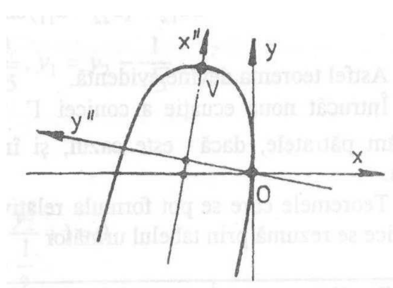
ecuaţia conicei Γ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Gamma : (y'')^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'' + \frac{9}{10},$$

adică la ecuaţia unei parabole.

Graficul parabolei Γ *este reprezentat mai jos în sistemul de axe* $x''Cy''$*, unde punctul* C *are coordonatele*

$$C\left(x' = 0, y' = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \Leftrightarrow C\left(x = -\frac{9}{10}, y = \frac{3}{10}\right).$$



Parabola Γ

Este evident că parabola Γ *are vârful în punctul* V *de coordonate*

$$V\left(x'' = \frac{9}{2\sqrt{10}}, y'' = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad V\left(x' = \frac{9}{2\sqrt{10}}, y' = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad V\left(x = -\frac{9}{20}, y = \frac{3}{4}\right)$$

şi axa de simetrie $D = Cx''$ *de ecuaţie*

$$D : y'' = 0$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y'*, de ecuaţie*

$$D : y' - \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.$$

Deoarece avem relaţiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x+3y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x+y), \end{cases}$$

rezultă că axa de simetrie D *a parabolei* Γ *are ecuaţia*

$$D : -3x + y - 3 = 0.$$

CAPITOLUL 8

CUADRICE

Cuadricele sau *suprafeţele algebrice de grad doi* reprezintă o clasă de suprafeţe în spaţiu, cu proprietăţi remarcabile, întâlnite în aplicaţii din diverse domenii. Acestea sunt caracterizate, într-un reper cartezian ortonormat din spaţiul E_3, printr-o ecuaţie de forma

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde funcţia $g(x, y, z)$ este o funcţie polinomială de grad doi în nedeterminatele x, y şi z. Din punct de vedere geometric, în acest capitol vom demostra că o cuadrică nu poate reprezenta în spaţiu decât una dintre următoarele figuri geometrice: *o sferă*, *un elipsoid*, *un hiperboloid cu o pânză* sau *două*, *un paraboloid eliptic* sau *hiperbolic*, *un con eliptic* sau *circular*, *un cilindru circular*, *eliptic*, *hiperbolic* sau *parabolic*, *o reuniune de plane secante*, *paralele* sau *confundate*, *o dreaptă*, *un punct* sau *mulţimea vidă*.

8.1. Cuadrice pe ecuaţii reduse

Vom prezenta în această secţiune caracterizările algebrice şi principalele proprietăţi geometrice ale cuadricelor, studiate în repere carteziene ortonormate alese convenabil, după fiecare caz în parte. Fixăm pentru început reperul ortonormat

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$$

în spaţiul tridimensional al geometriei euclidiene E_3, adică fixăm în E_3 un sistem ortogonal de axe (coordonate) $Oxyz$.

8.1.1. Sfera.

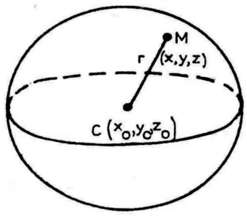
DEFINIŢIA 8.1.1. *Se numeşte* ***sferă de centru*** $C(x_0, y_0, z_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$ *mulţimea* (S) *a punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *care verifică relaţia*

$$d(M, C) = r.$$

OBSERVAŢIA 8.1.1. *Este evident că mulţimea punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *care aparţin sferei* (S) *de centru* $C(x_0, y_0, z_0)$ *şi de rază* $r > 0$ *satisface ecuaţia de grad doi*

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

numită ***ecuaţia carteziană implicită a sferei de centru*** $C(x_0, y_0, z_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$.



Sfera (S)

Dezvoltând pătratele în ecuaţia carteziană implicită a sferei (S), obţinem ecuaţia

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0,$$

care ne sugerează studiul geometric al ecuaţiei de gradul doi (ecuaţie de cuadrică) de forma

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Deoarece ecuaţia cuadricei Σ se transcrie sub forma

$$\Sigma : (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = \rho,$$

unde $\rho = a^2 + b^2 + c^2 - d$, rezultă că avem următoarele situaţii:

(1) Dacă $\rho > 0$, atunci mulţimea Σ este o sferă de centru $C(x_0, y_0, z_0)$, unde $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, $z_0 = -c$, şi de rază $r = \sqrt{\rho}$;

(2) Dacă $\rho = 0$, atunci $\Sigma = \{(-a, -b, -c)\}$;

(3) Dacă $\rho < 0$, atunci $\Sigma = \{\emptyset\}$.

Definiţia 8.1.2. *Ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

unde

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0,$$

se numeşte ***ecuaţia carteziană generală a sferei.***

8.1.2. Elipsoidul.

Definiţia 8.1.3. *Cuadrica* $(E) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***elipsoid.***

Este evident că putem determina forma elipsoidului (E) studiind intersecţiile acestuia cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$. Astfel, observăm că intersecţiile elipsoidului (E) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

(1) *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{\alpha^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \alpha, \end{cases}$$

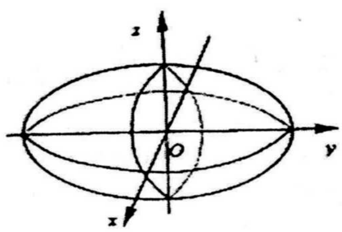
$$(E_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(E_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} - 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $|\alpha| < c$, $|\beta| < b$ şi $|\gamma| < a$;

(2) *Un punct* pentru $|\alpha| = c$ sau $|\beta| = b$ sau $|\gamma| = a$;

(3) *Mulţimea vidă* pentru $|\alpha| > c$, $|\beta| > b$ şi $|\gamma| > a$.



Elipsoidul (E)

Planele de coordonate xOy, xOz şi yOz sunt *plane de simetrie* ale elipsoidului (E) deoarece schimbând pe rând pe x în $-x$, pe y în $-y$ şi pe z în $-z$ ecuaţia elipsoidului (E) nu se modifică. Mai mult, deoarece schimbările tripletului (x, y, z) respectiv în $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$ nu modifică ecuaţia elipsoidului (E), rezultă că axele de coordonate Ox, Oy şi Oz sunt *axe de simetrie* ale elipsoidului (E). Prin urmare, originea O este *centru de simetrie* al elipsoidului (E).

Punctele în care axele de simetrie înţeapă elipsoidul (E) se numesc *vârfurile* elipsoidului (E).

Observaţia 8.1.2. *În cazul în care avem $a = b = c = r > 0$ elipsoidul (E) devine o sferă (S) centrată în originea $O(0, 0, 0)$ şi de rază r care are ecuaţia*

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Observaţia 8.1.3. *Elipsoidul este utilizat ca suprafaţă de referinţă în mecanică (elipsoidul de inerţie) şi în geodezie şi topografie (pentru măsurători).*

8.1.3. Hiperboloidul cu o pânză.

Definiţia 8.1.4. *Cuadrica $(H_1) \subset E_3$ de ecuaţie*

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

*unde $a, b, c > 0$, se numeşte **hiperboloid cu o pânză**.*

Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză (H_1) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

(1) *Elipsele*

$$(E_\alpha): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{\alpha^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

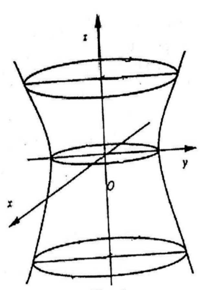
pentru $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$;

(2) *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\beta): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_\gamma): \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} - 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Hiperboloidul cu o pânză (H_1)

Din punct de vedere al simetriilor, hiperboloidul cu o pânză (H_1) are aceleaşi simetrii cu ale elipsoidului (E).

OBSERVAŢIA 8.1.4. *Hiperboloidul cu o pânză este folosit în construcţii industriale ca model pentru turnuri de răcire sau coşuri de fum.*

Dacă scriem ecuaţia hiperboloidului cu o pânză (H_1) sub forma

$$(H_1): \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

şi considerăm familiile de drepte

$$D_\lambda: \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 1 - \dfrac{y}{b} \end{cases}, \quad D_\infty: \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{D}_\mu: \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 1 + \dfrac{y}{b} \end{cases}, \quad \overline{D}_\infty: \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, atunci obţinem evident următorul rezultat geometric:

TEOREMA 8.1.1. *(i) Prin orice punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al hiperboloidului cu o pânză (H_1) trec două drepte distincte: una din familia*

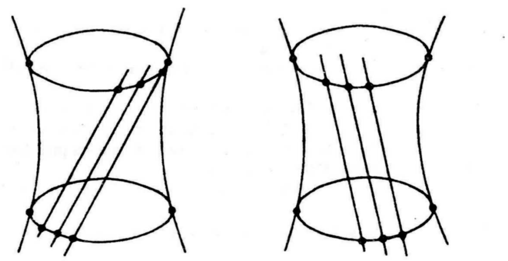
$$(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}} \cup D_\infty$$

şi una din familia

$$(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}} \cup \overline{D}_\infty.$$

(ii) Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup\overline{D}_\infty$ sunt incluse în întregime în hiperboloidul cu o pânză (H_1) şi verifică relaţiile

$$(H_1) = \left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} D_\lambda\right) \bigcup D_\infty = \left(\bigcup_{\mu\in\mathbb{R}} \overline{D}_\mu\right) \bigcup \overline{D}_\infty.$$



Generatoarele hiperboloidului cu o pânză (H_1)

DEFINIŢIA 8.1.5. *Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup\overline{D}_\infty$ se numesc* ***generatoarele rectilinii*** *ale hiperboloidului cu o pânză (H_1).*

DEFINIŢIA 8.1.6. *O cuadrică cu proprietatea că prin fiecare punct al său trec două drepte distincte conţinute în cuadrică se numeşte cuadrică* ***dublu riglată****.*

COROLARUL 8.1.1. *Hiperboloidul cu o pânză (H_1) este o cuadrică dublu riglată.*

8.1.4. Hiperboloidul cu două pânze.

DEFINIŢIA 8.1.7. *Cuadrica $(H_2) \subset E_3$ de ecuaţie*

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, se numeşte ***hiperboloid cu două pânze****.*

Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze (H_2) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

(1) *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{\alpha^2}{c^2} + 1 = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

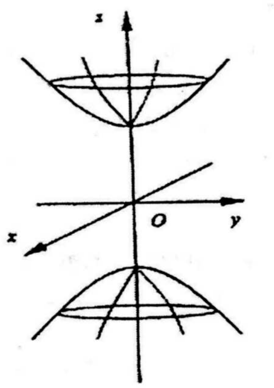
pentru $|\alpha| > c$, *un punct* pentru $|\alpha| = c$ şi *mulţimea vidă* pentru $|\alpha| < c$;

(2) *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} + 1 = 0 \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} + 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Hiperboloidul cu două pânze (H_2)

Hiperboloidul cu două pânze (H_2) are aceleaşi simetrii cu ale hiperboloidului cu o pânză (H_1). Cele două puncte de intersecţie ale axei Oz cu hiperboloidul cu două pânze (H_2) se numesc *vârfurile* hiperboloidului cu două pânze (H_2).

8.1.5. Paraboloidul eliptic.

Definiţia 8.1.8. *Cuadrica $(P_e) \subset E_3$ de ecuaţie*

$$(P_e) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$$

unde $a, b > 0$, se numeşte ***paraboloid eliptic****.*

Intersecţiile paraboloidului eliptic (P_e) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

(1) *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

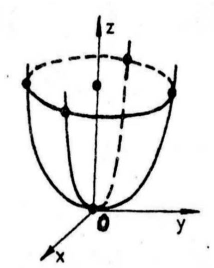
pentru $\alpha > 0$, *punctul* O pentru $\alpha = 0$ şi *mulţimea vidă* pentru $\alpha < 0$;

(2) *Parabolele*

$$(\mathcal{P}_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - z = -\dfrac{\beta^2}{b^2} \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_\gamma):\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-z=-\dfrac{\gamma^2}{a^2}\\ x=\gamma\end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$.



Paraboloidul eliptic (P_e)

Planele $x=0$ şi $y=0$ sunt plane de simetrie ale paraboloidului eliptic (P_e). Axa Oz este axă de simetrie a paraboloidului eliptic (P_e) şi înţeapă suprafaţa în originea O. Originea O se numeşte *vârful* paraboloidului eliptic (P_e).

OBSERVAŢIA 8.1.5. *Paraboloidului eliptic (P_e) este folosit în industria de confecţii drept model pendtru calapoade de căciuli de iarnă dat fiind faptul că acest model asigură mularea căciulii pe cap.*

8.1.6. Paraboloidul hiperbolic.

DEFINIŢIA 8.1.9. *Cuadrica $(P_h)\subset E_3$ de ecuaţie*

$$(P_h):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z,$$

*unde $a,b>0$, se numeşte **paraboloid hiperbolic** sau **şa**.*

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic (P_h) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

(1) *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\alpha):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$$

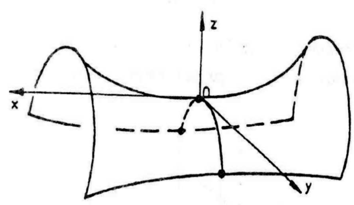
pentru $\alpha\neq 0$ şi *o reuniune de drepte concurente* pentru $\alpha=0$;

(2) *Parabolele*

$$(\mathcal{P}_\beta):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-z=\dfrac{\beta^2}{b^2}\\ y=\beta,\end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_\gamma):\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+z=\dfrac{\gamma^2}{a^2}\\ x=\gamma\end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$.



Paraboloidul hiperbolic (P_h)

Simetriile paraboloidului hiperbolic (P_h) sunt aceleaşi cu ale paraboloidului eliptic (P_e). Originea O se numeşte *vârful* paraboloidului hiperbolic (P_h).

OBSERVAŢIA 8.1.6. *Paraboloidului hiperbolic (P_h) este folosit în construcţii industriale ca model pentru acoperişuri (spre exemplu, acoperişul gării din Predeal) întrucât această suprafaţă se poate realiza din elemente rectilinii aşezate convemabil unei eficienţe maxime.*

Dacă scriem ecuaţia paraboloidului hiperbolic (P_h) sub forma

$$(P_h): \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$$

şi considerăm familiile de drepte

$$D_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases}, \quad D_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{D}_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \mu z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases}, \quad \overline{D}_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, atunci obţinem evident următorul rezultat geometric:

TEOREMA 8.1.2. *(i) Prin orice punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al paraboloidului hiperbolic (P_h) trec două drepte distincte: una din familia*

$$(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}} \cup D_\infty$$

şi una din familia

$$(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}} \cup \overline{D}_\infty.$$

(ii) Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup\overline{D}_\infty$ sunt incluse în întregime în paraboloidul hiperbolic (P_h) şi verifică relaţiile

$$(P_h) = \left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} D_\lambda\right) \bigcup D_\infty = \left(\bigcup_{\mu\in\mathbb{R}} \overline{D}_\mu\right) \bigcup \overline{D}_\infty.$$

DEFINIŢIA 8.1.10. *Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}} \cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}} \cup \overline{D}_\infty$ se numesc **generatoarele rectilinii** ale paraboloidului hiperbolic (P_h).*

COROLARUL 8.1.2. *Paraboloidul hiperbolic (P_h) este o cuadrică dublu riglată.*

8.1.7. Conul.

DEFINIŢIA 8.1.11. *Cuadrica* $(C) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***con***.

Intersecţiile conului (C) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

(1) *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{\alpha^2}{c^2} \\ z = \alpha \end{cases}$$

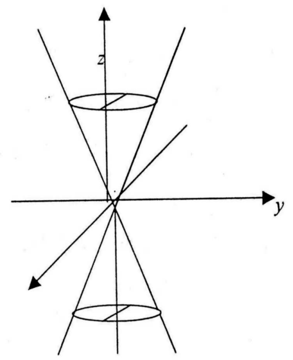
pentru $\alpha \neq 0$ şi *punctul* O pentru $\alpha = 0$;

(2) *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{\beta^2}{b^2} \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{\gamma^2}{a^2} \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\beta, \gamma \neq 0$ şi *reuniuni de drepte concurente* pentru $\beta = 0$ sau $\gamma = 0$.



Conul (C)

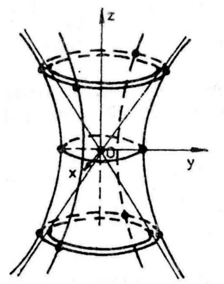
DEFINIŢIA 8.1.12. *În cazul în care avem* $a \neq b$ *spunem că conul* (C) *este un* ***con eliptic***.

DEFINIŢIA 8.1.13. *În cazul în care avem* $a = b = r > 0$ *spunem că conul* (C) *este un* ***con circular***.

OBSERVAŢIA 8.1.7. *Conul* (C) *se mai numeşte* ***conul asimptot*** *al hiperboloidului cu o pânză*

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

datorită formei acestui con în raport cu forma hiperboloidului cu o pânză.

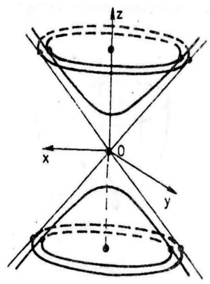


Conul (C) asimptot hiperboloidului cu o pânză (H_1)

OBSERVAŢIA 8.1.8. *Conul* (C) *se mai numeşte* ***conul asimptot*** *al hiperboloidului cu două pânze*

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

datorită formei acestui con în raport cu forma hiperboloidului cu două pânze.



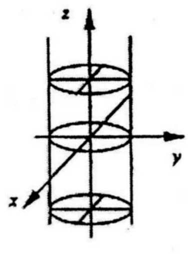
Conul (C) asimptot hiperboloidului cu două pânze (H_2)

8.1.8. Cilindri.

DEFINIŢIA 8.1.14. *Cuadrica* $(C_c) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_c) : x^2 + y^2 = r^2,$$

unde $r > 0$*, se numeşte* ***cilindru circular****.*

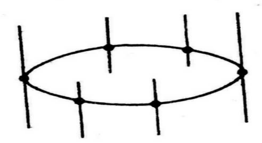


Cilindrul circular (C_c)

Definiţia 8.1.15. *Cuadrica* $(C_e) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_e): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$*, se numeşte* ***cilindru eliptic****.*

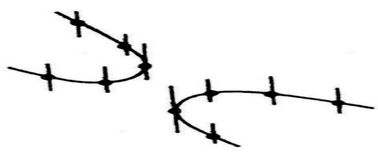


Cilindrul eliptic (C_e)

Definiţia 8.1.16. *Cuadrica* $(C_h) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_h): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$*, se numeşte* ***cilindru hiperbolic****.*

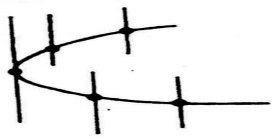


Cilindrul hiperbolic (C_h)

Definiţia 8.1.17. *Cuadrica* $(C_p) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_p): y^2 = 2px,$$

unde $p > 0$*, se numeşte* ***cilindru parabolic****.*



Cilindrul parabolic (C_p)

8.1.9. Reuniuni de plane, dreaptă, punct şi mulţime vidă.

Definiţia 8.1.18. *Cuadrica* $(PS) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(PS): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$*, se numeşte* ***reuniune de plane secante****.*

Definiţia 8.1.19. *Cuadrica* $(PP) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(PP) : x^2 - a^2 = 0,$$

unde $a > 0$*, se numeşte* ***reuniune de plane paralele****.*

Definiţia 8.1.20. *Cuadrica* $(PC) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(PC) : x^2 = 0$$

se numeşte ***reuniune de plane confundate****.*

Definiţia 8.1.21. *Cuadrica* $(D) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(D) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$*, se numeşte* ***dreaptă****.*

Definiţia 8.1.22. *Cuadrica* $(P) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(P) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

unde $a, b, c > 0$*, se numeşte* ***punct****.*

Definiţia 8.1.23. *Cuadrica* $(V) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(V) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$*, se numeşte* ***mulţimea vidă****.*

8.2. Cuadrice pe ecuaţie generală

Să considerăm spaţiul tridimensional al geometriei euclidiene E_3 în care am fixat un reper cartezian ortogonal

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\},$$

adică am fixat un sistem ortogonal de axe (coordonate) $Oxyz$.

Definiţia 8.2.1. *Mulţimea punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *ale căror coordonate verifică o relaţie polinomială de forma*

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} g(x,y,z) \quad = \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

coeficienţii reali

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall \ i, j = \overline{1, 4},$$

verificând relaţia

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0,$$

se numeşte ***cuadrică****.*

8.3. Invarianţii metrici Δ, δ, I şi J ai unei cuadrice

Pentru început este important să subliniem faptul că dacă unui punct din spaţiu

$$M(x,y,z)\in E_3$$

îi ataşăm coordonatele *omogene* în hiperspaţiu

$$M(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_4$$

legate prin relaţiile

$$x=\frac{x_1}{x_4},\ y=\frac{x_2}{x_4}\text{ şi } z=\frac{x_3}{x_4},$$

unde $x_4\neq 0$, atunci expresia ecuaţiei unei cuadrice

$$\Sigma : g(x,y,z)=0$$

devine expresia echivalentă a anulării unei forme pătratice

$$Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned}Q(x) \quad = \quad & a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+\\ & +2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2,\end{aligned}$$

unde $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Definiţia 8.3.1. *Matricea simetrică*

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea cuadricei Σ în sistemul ortogonal de axe*** *$Oxyz$.*

Definiţia 8.3.2. *Numerele reale*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix},\ \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},\ I=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

şi

$$J=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

se numesc ***invarianţii metrici*** *ai cuadricei Σ.*

Vom demonstra în continuare că invarianţii metrici Δ, δ, I şi J nu îşi modifică valoarea în urma efectuării unei translaţii sau a unei transformări ortogonale de coordonate în spaţiu.

8.3.1. Invarianţa lui Δ, δ, I şi J la translaţii. Să considerăm că $C(x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar din spaţiul geometriei euclidiene E_3. Este evident că translaţia sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $Cx'y'z'$, translaţie definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

este echivalentă cu o transformare de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o translaţie ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei cuadricei

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x') \quad = \quad & a_{11}(x_1')^2 + a_{22}(x_2')^2 + a_{33}(x_3')^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' + \\ & + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x_1'x_4' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)x_2'x_4' + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)x_3'x_4' + \\ & + g(x_0, y_0, z_0)(x_4')^2, \end{aligned}$$

unde $x' = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}), \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}), \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= 2(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}). \end{aligned}$$

Definiţia 8.3.3. *Matricea simetrică*

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) & g(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea cuadricei Σ în sistemul ortogonal de axe*** *$Cx'y'z'$.*

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) & g(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix},$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \; I' = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

şi

$$J' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 8.3.1. *Numerele reale Δ, δ, I, J şi Δ', δ', I', J verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta', \; \delta = \delta', \; I = I' \text{ şi } J = J'.$$

DEMONSTRAŢIE. Egalităţile $\delta = \delta'$, $I = I'$ şi $J = J'$ sunt evidente. Pentru a demonstra egalitatea $\Delta = \Delta'$ folosim proprietăţile determinanţilor. Astfel, dacă înmulţim în determinantul Δ' prima coloană cu $(-x_0)$, a doua coloană cu $(-y_0)$ şi a treia coloană cu $(-z_0)$ şi rezultatele le adunăm la ultima coloană, obţinem ceea ce trebuia demonstrat. □

8.3.2. Invarianţa lui Δ, δ, I şi J la transformări ortogonale. Este evident că o transformare ortogonală de coordonate în spaţiu definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

unde $B \cdot {}^T B = I_3$, este echivalentă cu o transformare ortogonală de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \\ x_4'' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o transformare ortogonală de coordonate ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei cuadricei

$$\Sigma : g(x,y,z) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x'') \; = \; & a_{11}''(x_1'')^2 + a_{22}''(x_2'')^2 + a_{33}''(x_3'')^2 + 2a_{12}''x_1''x_2'' + 2a_{13}''x_1''x_3'' + 2a_{14}''x_1''x_4'' + \\ & + 2a_{23}''x_2''x_3'' + 2a_{24}''x_2''x_4'' + 2a_{34}''x_3''x_4'' + a_{44}''(x_4'')^2, \end{aligned}$$

unde $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$.

Definiţia 8.3.4. *Matricea simetrică*

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} & a''_{34} \\ a''_{14} & a''_{24} & a''_{34} & a''_{44} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea cuadricei*** Σ ***în sistemul ortogonal de axe*** $Ox''y''z''$.

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} & a''_{34} \\ a''_{14} & a''_{24} & a''_{34} & a''_{44} \end{vmatrix}, \ \delta'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}, \ I'' = a''_{11} + a''_{22} + a''_{33}$$

şi

$$J'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{12} & a''_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{13} \\ a''_{13} & a''_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 8.3.2. *Numerele reale Δ, δ, I, J şi Δ'', δ'', I'', J'' verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta'', \ \delta = \delta'', \ I = I'' \text{ şi } J = J''.$$

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că avem $\delta = \delta''$, $I = I''$ şi $J = J''$. Pentru aceasta, fie forma pătratică

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = \\ &= (x, y, z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

În urma transformării ortogonale de mai sus, forma pătratică φ capătă expresia

$$\varphi(x'', y'', z'') = (x'', y'', z'') \cdot \ {}^TB \cdot A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numerele reale δ, I şi J caracterizează polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + I\lambda^2 - J\lambda + \delta,$$

rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$A'' = {}^T B \cdot A \cdot B.$$

În concluzie, avem

$$\delta = \delta'', \ I = I'' \text{ şi } J = J''.$$

Repetând raţionamentul de mai sus pentru forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

deducem că, în urma transformării ortogonale omogene de mai sus, forma pătratică Q capătă expresia

$$Q(x'') = (x_1'', x_2'', x_3'', x_4'') \cdot \begin{pmatrix} {}^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \\ x_4'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numărul real Δ caracterizează polinomul caracteristic

$$P_{\overline{A}}(\lambda) = \det(\overline{A} - \lambda I_4) = \lambda^4 - \overline{I}\lambda^3 + L\lambda^2 - K\lambda + \Delta,$$

unde $\overline{I}, L, K \in \mathbb{R}$, rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} {}^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, avem

$$\Delta = \Delta''.$$

□

8.4. Centrul unei cuadrice

Fie cuadrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, unde

$$\begin{aligned} g(x, y, z) \quad = \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

şi fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct arbitrar din spaţiul geometriei euclidiene E_3.

DEFINIŢIA 8.4.1. *Punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte **centru** al cuadricei Σ dacă este satisfăcută următoarea afirmaţie logică:*

$$\forall\ P(x, y, z) \in \Sigma \Rightarrow P'(2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z) \in \Sigma.$$

OBSERVAŢIA 8.4.1. *Din punct de vedere geometric, definiţia anterioară arată că punctul C este centrul unei cuadrice Σ dacă pentru orice punct P de pe cuadrica Σ simetricul său faţă de punctul C se află tot pe cuadrica Σ. Din acest motiv, dacă există, centrul C al unei cuadrice Σ se mai numeşte şi **centrul de simetrie** al cuadricei Σ.*

TEOREMA 8.4.1. *Punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ este centru al cuadricei Σ dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0. \end{cases}$$

DEMONSTRAŢIE. Efectuând translaţia sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $O'x'y'z'$, unde $O' = C$, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ devine

$$\Sigma : a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' +$$
$$+\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y' + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z' + g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Evident, din definiţia centrului unei cuadrice deducem că condiţia ca noua origine

$$O'(0, 0, 0) = C(x_0, y_0, z_0)$$

a sistemului de axe $O'x'y'z'$ să fie centru al cuadricei Σ se reduce la verificarea afirmaţiei logice

$$\forall\ P(x', y', z') \in \Sigma \Rightarrow P'(-x', -y', -z') \in \Sigma.$$

Această condiţie este echivalentă cu egalitatea

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' -$$
$$-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x' - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y' - \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z' + g(x_0, y_0, z_0) = 0$$

pentru orice punct $P(x', y', z') \in \Sigma$. Prin scădere, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y' + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z' = 0,\ \forall\ P(x', y', z') \in \Sigma.$$

Deoarece punctul $P(x', y', z') \in \Sigma$ este arbitrar, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

□

OBSERVAŢIA 8.4.2. *Deoarece determinantul sistemului liniar*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases}$$

este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

rezultă că următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(1) *Dacă $\delta \neq 0$, atunci cuadrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ are* ***un unic centru*** *$C(x_0, y_0, z_0)$ ale cărui coordonate sunt determinate de sistemul Cramer anterior. Vom demonstra în acest capitol că cuadricele cu centru sunt:* ***sfera****,* ***elipsoidul****,* ***hiperboloidul cu o pânză sau două****,* ***conul****,* ***un punct*** *şi* ***mulţimea vidă****.*

(2) *Dacă $\delta = 0$, atunci cuadrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ ori nu are* ***niciun centru*** *ori admite* ***o dreaptă de centre*** *ori admite* ***un plan de centre****. Vom demonstra în acest capitol că conicele* ***fără centru*** *sunt* ***paraboloidul eliptic****,* ***paraboloidul hiperbolic*** *şi* ***cilindrul parabolic****, cuadricele cu* ***o dreaptă de centre*** *sunt* ***cilindri circulari****,* ***cilindri eliptici, cilindri hiperbolici, dreapta*** *şi* ***reuniunea de plane secante*** *iar cuadricele cu* ***un plan de centre*** *sunt* ***reuniunea de plane paralele*** *sau* ***confundate*** *şi* ***mulţimea vidă****.*

8.5. Reducerea la forma canonică a cuadricelor cu centru ($\delta \neq 0$)

Să considerăm acum că $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ este o cuadrică cu centrul $C(x_0, y_0, z_0)$, ceea ce implică $\delta \neq 0$. După cum am observat în demonstraţia teoremei precedente, efectuând o translaţie a sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $O'x'y'z'$, unde $O' = C$, ecuaţia cuadricei Σ devine

$$\Sigma : a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Să studiem în continuare forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x', y', z') = a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'.$$

Evident, matricea simetrică ataşată formei pătratice φ în baza canonică a spaţiului vectorial euclidian ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$este

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Atunci, conform metodei valorilor proprii de reducere la forma canonică a formelor pătratice, există un sistem de coordonate $O'XYZ$ în raport cu care forma pătratică φ are forma canonică

$$\varphi(X, Y, Z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2,$$

unde λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt valorile proprii ale matricii A.

Evident, valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - \delta = 0.$$

Să presupunem acum că baza în care se obţine forma canonică a formei pătratice φ este baza ortonormată formată din vectorii proprii

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ şi } \overline{e}_3 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3. Atunci, rotaţia care realizează forma canonică a formei pătratice φ este dată de relaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia $\det \mathcal{R} = 1$.

Observaţia 8.5.1. *În aplicaţii vom renumerota, dacă este cazul, valorile proprii* λ_1, λ_2 *şi* λ_3 *şi, implicit, vectorii proprii ortonormaţi* $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ *şi* $\overline{e}_3$, *astfel încât*

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

În urma rotaţiei de mai sus, expresia ecuaţiei cuadricei Σ devine

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Evident, matricea cuadricei Σ în sistemul de axe $O'XYZ$ este

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de invarianţa lui Δ şi δ la translaţii şi transformări ortogonale de coordonate, deducem că

$$\Delta = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3) \cdot g(x_0, y_0, z_0) \text{ şi } \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3,$$

adică

$$g(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

În concluzie, în urma unei roto-translaţii convenabile, ecuaţia cuadricei Σ cu centrul în punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ poate fi scrisă în *forma canonică:*

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Teorema 8.5.1 (Clasificarea cuadricelor cu centru ($\delta \neq 0$)). *Dacă*

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

este o cuadrică cu centrul în punctul $C(x_0, y_0, z_0)$, *atunci cuadrica* Σ *poate reprezenta în spaţiu una dintre următoarele figuri geometrice: un* ***elipsoid****, în particular o* ***sferă****, un* ***hiperboloid cu o pânză*** *sau* ***două****, un* ***con****, un* ***punct*** *sau* ***mulţimea vidă****.*

Demonstraţie. Ţinând cont de ecuaţia canonică a cuadricei Σ, avem următoarele situaţii posibile:

(1) $\Delta \neq 0$;

(a) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt de acelaşi semn, contrar semnului termenului liber $\dfrac{\Delta}{\delta}$, atunci cuadrica Σ este un *elipsoid*;

(b) Dacă numai două valori proprii au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este un *hiperboloid cu o pânză* sau *două*;

(c) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ şi $\dfrac{\Delta}{\delta}$ au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este *mulţimea vidă*;

(2) $\Delta = 0$;

(a) Dacă numai două valori proprii au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este un *con*;

(b) Dacă λ_1, λ_2 şi λ_3 au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este un *punct* care este exact centrul $C(x_0, y_0, z_0)$.

□

8.6. Reducerea la forma canonică a cuadricelor fără centru ($\delta = 0$)

Fie $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, unde

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

o cuadrică cu $\delta = 0$. Reaminitm că, în acest caz, sistemul liniar

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

este ori *incompatibil* ori *compatibil simplu nedeterminat* ori *compatibil dublu nedeterminat.* Cu alte cuvinte, cuadrica Σ ori nu admite *niciun centru de simetrie* ori admite *o dreaptă de centre de simetrie* ori admite *un plan de centre de simetrie.*

Definiţia 8.6.1. *O cuadrică $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, unde $\delta = 0$, se numeşte **cuadrică fără centru**.*

Teorema 8.6.1 (Clasificarea cuadricelor fără centru ($\delta = 0$)). *Dacă*

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

*este o cuadrică fără centru, atunci cuadrica Σ poate reprezenta în spaţiu una dintre următoarele figuri geometrice: un **paraboloid eliptic** sau **hiperbolic**, un **cilindru eliptic**, **hiperbolic** sau **parabolic**, o **reuniune de plane secante**, **paralele** sau **confundate**, o **dreaptă** sau **mulţimea vidă**.*

Demonstraţie. Să considerăm din nou forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

unde $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0$. Matricea formei pătratice φ în sistemul de coordonate $Oxyz$ este evident matricea simetrică

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},$$

unde $\det A=\delta=0$. Mai mult, valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii A sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \lambda^3-I\lambda^2+J\lambda=0,$$

adică valorile proprii sunt, după o eventuală renumerotare, $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}$ şi $\lambda_3=0$, unde

$$\lambda_1+\lambda_2=I \text{ şi } \lambda_1\lambda_2=J.$$

Dacă notăm acum cu

$$\overline{e}_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\ \overline{e}_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \text{ şi } \overline{e}_3=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}$ şi $\lambda_3=0$ şi efectuăm rotaţia

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R}=\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\end{pmatrix}$$

verifică egalitatea

$$\det\mathcal{R}=1,$$

atunci ecuaţia cuadricei Σ se rescrie sub forma

$$\Sigma:\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}'z'+a_{44}'=0.$$

Evident, matricea cuadricei Σ în sistemul de coordonate $Ox'y'z'$ este matricea simetrică

$$\overline{A}'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a_{14}'\\ 0 & \lambda_2 & 0 & a_{24}'\\ 0 & 0 & 0 & a_{34}'\\ a_{14}' & a_{24}' & a_{34}' & a_{44}'\end{pmatrix}.$$

Deoarece trecerea de la sistemul de coordonate $Oxyz$ la sistemul de coordonate $Ox'y'z'$ s-a făcut printr-o rotaţie, deducem că invariantul Δ are valoarea

$$\Delta=-J(a_{34}')^2.$$

Vom considera în continuare următoarele cazuri posibile:

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $J = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$ şi $a'_{34} = \pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{J}} \neq 0$. În această situaţie, efectuăm o translaţie a sistemului de axe $Ox'y'z'$ în sistemul de axe $CXYZ$, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \\ z' = Z + z_0, \end{cases}$$

unde punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ este ales astfel încât ecuaţia cuadricei Σ să capete o formă cât mai simplă. Deoarece efectuând o asemenea translaţie ecuaţia cuadricei Σ se reduce la

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a'_{34}Z + 2(\lambda_1 x_0 + a'_{14})X + 2(\lambda_2 y_0 + a'_{24})Y +$$

$$+\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{14}x_0 + 2a'_{24}y_0 + 2a'_{34}z_0 + a'_{44} = 0,$$

determinăm punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ impunând condiţiile

$$\begin{cases} \lambda_1 x_0 + a'_{14} = 0 \\ \lambda_2 y_0 + a'_{24} = 0 \\ \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{14}x_0 + 2a'_{24}y_0 + 2a'_{34}z_0 + a'_{44} = 0. \end{cases}$$

Este evident că acest sistem are o soluţia unică

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ y_0 = -\dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ z_0 = -\dfrac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{14}x_0 + 2a'_{24}y_0 + a'_{44}}{2a'_{34}}. \end{cases}$$

şi deci ecuaţia cuadricei Σ se poate scrie sub forma canonică

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{J}} \cdot Z = 0.$$

Prin urmare, cuadrica Σ este:

(a) un *paraboloid eliptic* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 > 0$;

(b) un *paraboloid hiperbolic* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 < 0$.

(2) Dacă $\Delta = 0$ şi $J = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, atunci $a'_{34} = 0$. În această situaţie, ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0,$$

adică avem de-a face cu o ecuaţie polinomială de gradul doi în x' şi y' ce poate fi pusă sub forma

$$\Sigma : \lambda_1\left(x' + \frac{a'_{14}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{24}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{24})^2}{\lambda_2} = 0.$$

Efectuând acum translaţia în spaţiu

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ Z = z', \end{cases}$$

deducem că ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{44} = 0,$$

unde

$$a''_{44} = a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{24})^2}{\lambda_2}.$$

Prin urmare, cuadrica Σ este:

(a) dacă $a''_{44} \neq 0$;
   (i) un *cilindru eliptic* dacă λ_1, λ_2 au acelaşi semn, contrar semnului lui a''_{44};
   (ii) un *cilindru hiperbolic* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 < 0$;
   (iii) *mulţimea vidă* dacă λ_1, λ_2 şi a''_{44} au acelaşi semn;

(b) dacă $a''_{44} = 0$;
   (i) o *reuniune de plane secante* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 < 0$;
   (ii) o *dreaptă* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

(3) Dacă $\Delta = 0$ şi $J = \lambda_1\lambda_2 = 0$, atunci $\lambda_1 = 0$ sau $\lambda_2 = 0$. Presupunând că $\lambda_2 = 0$, ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

unde $\lambda_1 = I \neq 0$, adică avem de-a face cu o ecuaţie polinomială de gradul doi în x' ce poate fi pusă sub forma

$$\Sigma : I\left(x' + \frac{a'_{14}}{I}\right)^2 + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{I} = 0.$$

Efectuând acum translaţia în spaţiu

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{a'_{14}}{I} \\ y'' = y' \\ z'' = z', \end{cases}$$

deducem că ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : I(x'')^2 + 2a'_{24}y'' + 2a'_{34}z'' + a''_{44} = 0,$$

unde

$$a''_{44} = a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{I}.$$

(a) Dacă $k = (a'_{24})^2 + (a'_{34})^2 \neq 0$, atunci, efectuând rotaţia în spaţiu definită prin

$$\begin{cases} x'' = X \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{(a'_{24})^2 + (a'_{34})^2}}(a'_{24}Y - a'_{34}Z) \\ z'' = \dfrac{1}{\sqrt{(a'_{24})^2 + (a'_{34})^2}}(a'_{34}Y + a'_{24}Z), \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : IX^2 + 2kY + a''_{44} = 0 \Leftrightarrow Y = -\frac{I}{2k}X^2 - \frac{a''_{44}}{2k}.$$

Prin urmare, cuadrica Σ este un *cilindru parabolic.*

(b) Dacă $k = (a'_{24})^2 + (a'_{34})^2 = 0$, atunci $a'_{24} = a'_{34} = 0$ şi deci ecuaţia cuadricei Σ este

$$\Sigma : I(x'')^2 + a''_{44} = 0 \Leftrightarrow (x'')^2 + \frac{a''_{44}}{I} = 0.$$

Prin urmare, cuadrica Σ este:

(i) o *reuniune de plane paralele* dacă $\dfrac{a''_{44}}{I} < 0$;

(ii) o *reuniune de plane confundate* dacă $a''_{44} = 0$;

(iii) *mulţimea vidă* dacă $\dfrac{a''_{44}}{I} > 0$.

□

8.7. Metoda roto-translaţiei pentru recunoaşterea cuadricelor

Să considerăm că

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} g(x,y,z) \;&=\; a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \\ &\quad a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0, \end{aligned}$$

este o cuadrică şi fie Δ, δ, I şi J invarianţii metrici ai cuadricei Σ. Atunci, pentru o mai clară sintetizare a rezultatelor din secţiunile precedente, vom utiliza următoarea terminologie naturală:

(1) Cuadrica Σ pentru care $\Delta \neq 0$ (elipsoid, hiperboloid cu o pânză sau două, paraboloid eliptic sau hiperbolic sau mulţime vidă) se numeşte cuadrică *nedegenerată.*

(2) Cuadrica Σ pentru care $\Delta = 0$ (con, cilindru eliptic, hiperbolic sau parabolic, reuniune de plane secante, paralele sau confundate, dreaptă, punct sau mulţime vidă) se numeşte cuadrică *degenerată.*

(3) Cuadrica Σ pentru care $\delta \neq 0$ (elipsoid, hiperboloid cu o pânză sau două, con, punct, mulţime vidă) se numeşte cuadrică *cu centru.*

(4) Cuadrica Σ pentru care $\delta = 0$ (paraboloid eliptic sau hiperbolic, cilindru eliptic, hiperbolic sau parabolic, reuniune de plane secante, paralele sau confundate, dreaptă, mulţime vidă) se numeşte cuadrică *fără centru.*

Să presupunem acum că invarianţii metrici Δ, δ şi J ai cuadricei Σ ori satisfac condiţia

$$\Delta^2 + \delta^2 + J^2 \neq 0,$$

ori, în cazul contrar, cuadrica Σ nu este un cilindru parabolic. În acest context, putem scoate în evidenţă următorul

Algoritm de reducere la forma canonică a cuadricei Σ
-Metoda roto-translaţiei în spaţiu-

(1) Se asociază cuadricei Σ forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

şi se scrie matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice φ.

(2) Se calculează valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii A ca rădăcini ale ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda + \delta = 0.$$

(3) Se calculează subspaţiile proprii

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

şi

$$V_{\lambda_3} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_3 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

corespunzătoare valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii A.

(4) Printr-o eventuală renumerotare, se aleg

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \; \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ şi } \overline{e}_3 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 astfel încât

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

unde

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix}.$$

(5) Se efectuează rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

în urma căreia ecuaţia cuadricei Σ devine

$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

unde a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, $a'_{44} \in \mathbb{R}$.

(6) Forţând factorii comuni λ_1, λ_2 şi λ_3 (dacă este cazul) şi restrângând pătratele descompuse, se rescrie ecuaţia cuadricei Σ sub forma

$$\Sigma : \lambda_1(x' + x_0)^2 + \lambda_2(y' + y_0)^2 + \lambda_3(z' + z_0) + a = 0,$$

unde x_0, y_0, z_0, $a \in \mathbb{R}$.

(7) Se efectuează translaţia

$$\begin{cases} X = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \\ Z = z' + z_0 \end{cases}$$

şi se scrie ecuaţia canonică

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + a = 0.$$

(8) Se recunoaşte cuadrica Σ.

Observaţia 8.7.1. *Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, atunci metoda roto-translaţiei începe direct de la punctul (6).*

Exemplul 8.7.1. *Utilizând metoda roto-translaţiei în spaţiu, să se reducă la forma canonică şi să se recunoască cuadrica*

$$\Sigma : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0.$$

Pentru a găsi forma canonică a cuadricei Σ să considerăm forma pătratică

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A sunt

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \text{ şi } \lambda_3 = 4.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\ 2y-z=0 \right\} = \\ &= \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0,\ 2y+z=0 \right\} = \\ &= \{(0,y,-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_3} corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 4$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0,\ -y+2z=0 \right\} = \\ &= \{(0,2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt

$$\overline{e}_1 = (1,0,0),\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2) \text{ şi } \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z'), \end{cases} \end{aligned}$$

ecuaţia cuadricei Σ se reduce la

$$\Sigma : (x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Sigma : (x' - 3)^2 - \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' - 3 \\ Y = y' - \dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ Z = z' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Sigma : X^2 - Y^2 + 4Z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \Sigma : X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unui ***hiperboloid cu o pânză****.*

Exemplul 8.7.2. *Utilizând metoda roto-translaţiei în spaţiu, să se reducă la forma canonică şi să se recunoască cuadrica*

$$\Sigma : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0.$$

Pentru a găsi forma canonică a cuadricei Σ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x, y, z) = 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda + 4)(\lambda - 6) = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4 \text{ şi } \lambda_3 = 6.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 0$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0,\ x + y - z = 0,\ 2x + y = 0 \right\} = \\ &= \{(-z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -4$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 2z = 0,\ x + 3y - z = 0 \right\} = \\ &= \{ (z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_3} corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 6$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y - 2z = 0,\ x - 2y - z = 0,\ 2x + y + 3z = 0 \right\} = \\ &= \{ (-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1),\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \text{ şi } \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z', \end{cases} \end{aligned}$$

ecuaţia cuadricei Σ se reduce la

$$\Sigma : -4(y')^2 + 6(z')^2 - \sqrt{6}x' + 3\sqrt{2}y' + 2\sqrt{3}z' - 5 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Sigma : -4\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 + 6\left(z' + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \sqrt{6}x' - \frac{35}{8} = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{35}{8\sqrt{6}} \\ Y = y' - \dfrac{3\sqrt{2}}{8} \\ Z = z' + \dfrac{\sqrt{3}}{6}, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Sigma : -4Y^2 + 6Z^2 - \sqrt{6}X = 0 \Leftrightarrow \Sigma : -\frac{Y^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}} + \frac{Z^2}{\sqrt{6}} = X,$$

adică la ecuaţia unui ***paraboloid hiperbolic.***

Exemplul 8.7.3. *Utilizând metoda roto-translaţiei în spaţiu, să se reducă la forma canonică şi să se recunoască cuadrica*

$$\Sigma : x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0.$$

Pentru a găsi forma canonică a cuadricei Σ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3 \text{ şi } \lambda_3 = 6.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = -2$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 3y + z = 0,\ x - y + 7z = 0 \right\} = \\ &= \{ (x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 3$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-z=0,\ 3x+2y+z=0,\ x-y+2z=0 \right\} = \\ &= \{(-z,z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_3} corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 6$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 5x+3y-z=0,\ 3x+5y+z=0,\ x-y-z=0 \right\} = \\ &= \{(x,-x,2x) \mid x\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \text{ şi } \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det\mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \mathcal{R}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \end{cases} \end{aligned}$$

ecuaţia cuadricei Σ se reduce la

$$\Sigma : -2(x')^2 + 3(y')^2 + 6(z')^2 + 2\sqrt{2}x' - 6\sqrt{6}z' + 14 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Sigma : -2\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\,(y')^2 + 6\left(z' - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 6 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y' \\ Z = z' - \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Sigma : -2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \Sigma : -\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unui ***hiperboloid cu două pânze****.*

CAPITOLUL 9

GENERĂRI DE SUPRAFEŢE

În acest capitol vor fi descrise ecuaţiile carteziene ale *suprafeţelor cilindrice*, *suprafeţelor conice* şi *suprafeţelor de rotaţie* din spaţiu. Aceste suprafeţe vor fi obţinute prin deplasarea condiţionată geometric a unei curbe din spaţiu (în particular, această curbă va fi o dreaptă). Pentru a putea obţine aceste ecuaţii carteziene vom admite geometric-intuitiv, fără o demonstraţie riguroasă, că o *curbă în spaţiu* C este definită ca intersecţia a două *suprafeţe* Σ_1 şi Σ_2 din spaţiul E_3, adică avem

$$C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2,$$

unde

$$\Sigma_1 : f(x, y, z) = 0 \text{ şi } \Sigma_2 : g(x, y, z) = 0.$$

O expunere riguroasă şi detaliată a *teoriei curbelor şi suprafeţelor în spaţiu* va fi făcută în capitolele următoare.

9.1. Suprafeţe cilindrice

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu şi să considerăm că

$$D : \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

este o dreaptă în spaţiu definită ca intersecţia a două plane P şi Q.

DEFINIŢIA 9.1.1. *Suprafaţa $\Sigma \subset E_3$ obţinută prin deplasarea unei drepte paralele cu dreapta D, care se sprijină pe curba C, se numeşte* ***suprafaţă cilindrică*** *de* ***curbă directoare*** *C şi* ***generatoare*** *D.*

TEOREMA 9.1.1. *Suprafaţa cilindrică Σ de curbă directoare C şi generatoare D este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană de forma*

$$\Sigma : \Phi(P, Q) = 0,$$

unde funcţia Φ se numeşte ***funcţia de contact*** *a suprafeţei cilindrice Σ.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru a descrie ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare C şi generatoare D să notăm că mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu paralele cu generatoarea D este reprezentată de familia de drepte

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este compatibil (i. e. are cel puţin o soluţie în necunoscutele x, y şi z). Deoarece sistemul $(\mathcal{S})$ este un sistem cu patru ecuaţii şi trei necunoscute x, y şi z, rezultă că valorile λ şi μ trebuie să satisfacă o condiţie de compatibilitate (*condiţie de contact*) despre care presupunem că are forma

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0.$$

În concluzie, ţinând cont de faptul că

$$\lambda = P \text{ şi } \mu = Q,$$

deducem că ecuaţia carteziană a suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare C şi generatoare D este

$$\Sigma : \Phi(P, Q) = 0.$$

□

EXEMPLUL 9.1.1. *Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ având generatoarele paralele cu dreapta*

$$D : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

şi care se sprijină pe curba directoare

$$C : \begin{cases} x = y^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Pentru început să observăm că dreapta D poate fi privită ca intersecţia planelor

$$P : x - y = 0 \text{ şi } Q : y - z = 0,$$

adică avem

$$D : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Familia de drepte din spaţiu paralele cu dreapta D este

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - y = \lambda \\ y - z = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - y = \lambda \\ y - z = \mu \\ x = y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

este compatibil în necunoscutele x, y şi z. Deoarece din ultimele trei ecuaţii găsim

$$z = 0,\ y = \mu \text{ şi } x = \mu^2,$$

*rezultă că condiţia de compatibilitate (**de contact**) a sistemului $(\mathcal{S})$ este*

$$\mu^2 - \mu = \lambda \Leftrightarrow \Phi(\lambda, \mu) = 0,$$

unde

$$\Phi(\lambda, \mu) = \mu^2 - \lambda - \mu.$$

Înlocuind în condiţia de contact

$$\lambda = x - y \text{ şi } \mu = y - z,$$

găsim că ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare C şi generatoare D este

$$\Sigma : (y - z)^2 - x + z = 0.$$

9.2. Suprafeţe conice

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu şi să considerăm că

$$V : \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

este un punct din spaţiu definit ca intersecţia a trei plane P, Q şi R, alese convenabil.

DEFINIŢIA 9.2.1. *Suprafaţa $\Sigma \subset E_3$ obţinută prin deplasarea unei drepte care se sprijină pe curba C şi care trece prin punctul fix V se numeşte **suprafaţă conică** de **curbă directoare** C şi **vârf** V.*

TEOREMA 9.2.1. *Submulţimea $\Sigma' = \Sigma \backslash \{M(x, y, z) \mid R = 0\}$ a suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană de forma*

$$\Sigma' : \Phi\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0,$$

*unde funcţia Φ se numeşte **funcţia de contact** a suprafeţei conice Σ.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru a descrie ecuaţia suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V să notăm că mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu care nu sunt incluse în planul $R = 0$ şi care trec prin vârful V este reprezentată de familia de drepte

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} P - \lambda R = 0 \\ Q - \mu R = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} P - \lambda R = 0 \\ Q - \mu R = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este compatibil (i. e. are cel puţin o soluţie în necunoscutele x, y şi z). Deoarece sistemul $(\mathcal{S})$ este un sistem cu patru ecuaţii şi trei necunoscute x, y şi z, rezultă că valorile λ şi μ trebuie să satisfacă o condiţie de compatibilitate (*condiţie de contact*) despre care presupunem că are forma

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0.$$

În concluzie, presupunând că $R \neq 0$ şi ţinând cont de faptul că

$$\lambda = \frac{P}{R} \text{ şi } \mu = \frac{Q}{R},$$

deducem că ecuaţia carteziană a submulţimii

$$\Sigma' = \Sigma \backslash \{M(x, y, z) \mid R = 0\}$$

a suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V este

$$\Sigma' : \Phi\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

□

Exemplul 9.2.1. *Să se determine ecuaţia suprafeţei conice Σ cu vârful în punctul $V(1, 1, 1)$ şi care are curba directoare*

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Pentru început să observăm că vârful V poate fi privit ca intersecţia planelor

$$P : x - 1 = 0,\ Q : y - 1 = 0 \text{ şi } R : z - 1 = 0,$$

adică avem

$$V : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

Familia de drepte din spaţiu care trec prin vârful V este

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - 1 - \lambda(z - 1) = 0 \\ y - 1 - \mu(z - 1) = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care *sistemul*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - 1 - \lambda(z-1) = 0 \\ y - 1 - \mu(z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

este compatibil în necunoscutele x, y şi z. Din prima, a doua şi ultima ecuaţie găsim

$$z = 0,\ x = 1 - \lambda \text{ şi } y = 1 - \mu.$$

*Rezultă că condiţia de compatibilitate (**de contact**) a sistemului $(\mathcal{S})$ este*

$$(1-\lambda)^2 + (1-\mu)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \Phi(\lambda, \mu) = 0,$$

unde

$$\Phi(\lambda, \mu) = (1-\lambda)^2 + (1-\mu)^2 - 4.$$

Presupunând că $z - 1 \neq 0$ şi înlocuind în condiţia de contact

$$\lambda = \frac{x-1}{z-1} \text{ şi } \mu = \frac{y-1}{z-1},$$

găsim că ecuaţia submulţimii

$$\Sigma' = \Sigma \backslash \{M(x,y,z) \mid z - 1 = 0\}$$

a suprafeţei conice Σ este

$$\Sigma' : \left(1 - \frac{x-1}{z-1}\right)^2 + \left(1 - \frac{y-1}{z-1}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \Sigma' : (z-x)^2 + (z-y)^2 = 4(z-1)^2.$$

Deoarece planul $R : z - 1 = 0$ nu are nici un punct comun cu curba directoare

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

rezultă că ecuaţia suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V este

$$\Sigma : (z-x)^2 + (z-y)^2 - 4(z-1)^2 = 0.$$

9.3. Suprafeţe de rotaţie

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu şi să considerăm că

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

este o dreaptă din spaţiu care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este direcţionată de vectorul liber $\overline{v}(l, m, n)$.

DEFINIŢIA 9.3.1. *Suprafaţa $\Sigma \subset E_3$ obţinută prin rotirea curbei C în jurul dreptei fixe D se numeşte **suprafaţă de rotaţie** de **curbă generatoare** C şi **axă de rotaţie** D.*

TEOREMA 9.3.1. *Suprafaţa de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană de forma*

$$\Sigma : \Phi\left(\pm\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},\ lx+my+nz\right)=0,$$

*unde funcţia Φ se numeşte **funcţia de contact** a suprafeţei de rotaţie Σ.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru a descrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D să notăm că suprafaţa de rotaţie Σ poate fi gândită ca reuniunea tuturor cercurilor care se sprijină pe curba C, au centrele pe axa de rotaţie D şi sunt situate în plane perpendiculare pe dreapta D.

Deoarece un cerc arbitrar din spaţiu cu centrul pe dreapta D şi situat într-un plan perpendicular pe dreapta D poate fi descris ca intersecţia dintre o sferă de rază arbitrară şi centru în punctul M_0 şi un plan perpendicular pe dreapta D, rezultă că mulţimea tuturor cercurilor din spaţiu cu centrul pe dreapta D şi situate în plane perpendiculare pe dreapta D este reprezentată de familia de cercuri

$$C_{\lambda\mu} : \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2 \\ lx+my+nz=\mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de cercuri $C_{\lambda\mu}$ doar acele cercuri care au un punct comun cu curba generatoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2 \\ lx+my+nz=\mu \\ f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

este compatibil (i. e. are cel puţin o soluţie în necunoscutele x, y şi z). Deoarece sistemul $(\mathcal{S})$ este un sistem cu patru ecuaţii şi trei necunoscute x, y şi z, rezultă că valorile λ şi μ trebuie să satisfacă o condiţie de compatibilitate (*condiţie de contact*) despre care presupunem că are forma

$$\Phi(\lambda,\mu)=0.$$

În concluzie, ţinând cont de faptul că

$$\lambda=\pm\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \text{ şi } \mu=lx+my+nz,$$

deducem că ecuaţia carteziană a suprafeţei de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D este

$$\Sigma : \Phi\left(\pm\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},\ lx+my+nz\right)=0.$$

□

EXEMPLUL 9.3.1. *Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie Σ care se obţine prin rotirea curbei generatoare*

$$C : \begin{cases} x^2-2y^2+z^2-5=0 \\ x+z+3=0 \end{cases}$$

în jurul axei de rotaţie

$$D : x=y=z.$$

Din ecuaţiile axei de rotaţie D deducem că

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \text{ şi } l = m = n = 1.$$

Familia de cercuri din spaţiu cu centrul pe dreapta D şi situate în plane perpendiculare pe dreapta D este dată de

$$C_{\lambda\mu} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de cercuri $C_{\lambda\mu}$ doar acele cercuri care au un punct comun cu curba generatoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \\ x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

este compatibil în necunoscutele x, y şi z. Scăzând a treia ecuaţie din prima ecuaţie, respectiv a patra din a doua, găsim

$$3y^2 = \lambda^2 - 5 \text{ şi } y = \mu + 3.$$

*Rezultă că condiţia de compatibilitate (**de contact**) a sistemului $(\mathcal{S})$ este*

$$3\left(\mu + 3\right)^2 = \lambda^2 - 5 \Leftrightarrow \Phi(\lambda, \mu) = 0,$$

unde

$$\Phi(\lambda, \mu) = 3\left(\mu + 3\right)^2 - \lambda^2 + 5.$$

Înlocuind în condiţia de contact

$$\lambda = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ şi } \mu = x + y + z,$$

găsim că ecuaţia suprafeţei de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D este

$$\Sigma : 3(x + y + z + 3)^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 5 = 0.$$

CAPITOLUL 10

CURBE PLANE

În acest capitol vom defini riguros *curbele plane* şi vom studia principalele proprietăţi geometrice ale acestora. Totodată vom scoate în evidenţă o mărime scalară (*curbură*) care ne va da informaţii asupra formei unei curbe plane. Pe parcursul acestui capitol, prin aplicaţie diferenţiabilă vom înţelege o *aplicaţie netedă*, adică o aplicaţie diferenţiabilă de o infinitate de ori pe un domeniu deschis, convenabil ales, în sensul că acesta este inclus în domeniile de definiţie ale aplicaţiei studiate şi derivatelor acesteia.

10.1. Definiţii şi exemple

DEFINIŢIA 10.1.1. *O aplicaţie diferenţiabilă*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$

unde I este un interval real, definită prin

$$c(t) = (x(t), y(t)),\ \forall\ t \in I,$$

unde

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0,\ \forall\ t \in I,$$

se numeşte ***parametrizare regulată****.*

DEFINIŢIA 10.1.2. *Variabila $t \in I$, care defineşte parametrizarea regulată $c(t)$, se numeşte* ***parametru****.*

DEFINIŢIA 10.1.3. *Mulţimea de puncte din plan*

$$\operatorname{Im} c \overset{not}{=} \{P(x(t), y(t)) \mid t \in I\} \subset E_2,$$

care reprezintă imaginea unei parametrizări regulate $c(t)$, se numeşte ***curbă plană parametrizată****.*

DEFINIŢIA 10.1.4. *O mulţime nevidă C de puncte din plan cu proprietatea că pentru fiecare punct $M_0(x_0, y_0) \in C$ există în $\mathbb{R}^2$ o vecinătate V a punctului M_0 şi există o parametrizare regulată*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

astfel încât

$$C \cap V = \operatorname{Im} c$$

se numeşte ***curbă plană****.*

OBSERVAŢIA 10.1.1. *Intuitiv vorbind, o mulţime nevidă C de puncte din plan este o curbă plană dacă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct $M_0 \in C$ curba plană poate fi identificată cu imaginea unei parametrizări regulate.*

OBSERVAŢIA 10.1.2. *Este evident că orice curbă plană parametrizată este o curbă plană.*

EXEMPLUL 10.1.1. *Fie aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t),$$

unde $r > 0$. *Deoarece funcţiile*

$$x(t) = r \cos t \text{ şi } y(t) = r \sin t$$

verifică relaţia

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2 \neq 0, \ \forall \ t \in [0, 2\pi),$$

rezultă că aplicaţia diferenţiabilă c *este o parametrizare regulată.*

Deoarece imaginea parametrizării regulate c *este mulţimea de puncte*

$$\operatorname{Im} c = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\},$$

rezultă că cercul centrat în originea $O(0, 0)$ *şi de rază* $r > 0$, *definit de ecuaţia*

$$C : x^2 + y^2 = r^2,$$

este o curbă plană. Este important de subliniat însă că cercul C *mai poate fi privit, spre exemplu, şi ca imaginea parametrizării regulate*

$$\widetilde{c} : [0, \pi) \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$\widetilde{c}(\tau) = (r \sin 2\tau, r \cos 2\tau).$$

OBSERVAŢIA 10.1.3. *O curbă plană poate fi privită ca imaginea mai multor parametrizări regulate distincte.*

EXEMPLUL 10.1.2. *Să considerăm mulţimea de puncte din plan*

$$C : x^3 - y^3 + 2xy = 0.$$

Pentru a studia dacă mulţimea de puncte C *este o curbă plană vom căuta o parametrizare regulată* $x(t)$ *şi* $y(t)$ *a mulţimii de puncte* C *de forma*

$$y = tx.$$

Cu alte cuvinte, vom căuta $x(t)$ *astfel încât să avem adevărată relaţia*

$$x^3 - t^3 x^3 + 2tx^2 = 0, \ \forall \ t, x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $x \neq 0$ *şi* $t \neq 1$ *deducem că avem*

$$x = \frac{2t}{t^3 - 1} \text{ şi } y = \frac{2t^2}{t^3 - 1}.$$

Prin urmare, considerând parametrizarea regulată

$$c : \mathbb{R} \backslash \{0, 1\} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = \left(\frac{2t}{t^3 - 1}, \frac{2t^2}{t^3 - 1} \right),$$

obţinem că avem adevărată relaţia

$$C \backslash \{O(0, 0)\} = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, mulţimea de puncte $C\backslash\{O(0,0)\}$ *este o curbă plană.*

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu deschis din $\mathbb{R}^2$, o funcţie diferenţiabilă. Reamintim din analiza matematică faptul că pentru orice punct $P(x, y) \in D$ vectorul

$$grad(f)(P) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right),$$

unde $\partial f/\partial x$ şi $\partial f/\partial y$ reprezintă derivatele parţiale ale funcţiei $f(x, y)$, se numeşte *gradientul* funcţiei f în punctul $P(x, y)$.

Definiţia 10.1.5. *Un punct $M_0(x_0, y_0) \in D$ care verifică relaţia*

$$grad(f)(M_0) \neq (0,0)$$

*se numeşte **punct regulat** al funcţiei f.*

În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 10.1.1. *Mulţimea de puncte din plan $P(x, y) \in E_2$ ale căror coordonate verifică relaţia*

$$C : f(x, y) = 0,$$

unde

$$grad(f)(P) \neq (0,0),\ \forall\ P \in C,$$

este o curbă plană.

Demonstraţie. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0) \in C$ este un punct arbitrar al mulţimii de puncte C (i. e. $f(x_0, y_0) = 0$ şi $grad(f)(M_0) \neq (0,0)$). Deoarece condiţia

$$grad(f)(M_0) \neq (0,0)$$

este echivalentă cu condiţia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)^2 \neq 0,$$

să presupunem că

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0.$$

În condiţiile de mai sus, conform teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică aplicată funcţiei f şi punctului $M_0(x_0, y_0)$, deducem că există o vecinătate I a lui x_0 în $\mathbb{R}$ şi există o funcţie derivabilă

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\varphi(x_0) = y_0,\ f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0,\ \forall\ x \in I.$$

Prin derivare, din ultimele relaţii obţinem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0,\ \forall\ x \in I,$$

adică

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \ \forall\, x \in I.$$

Să considerăm acum aplicaţia diferenţiabilă

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = (t, \varphi(t)).$$

Deoarece condiţia

$$grad(f)(P) \neq (0, 0), \ \forall\, P \in C,$$

este echivalentă cu condiţia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)^2 \neq 0, \ \forall\, P \in C,$$

deducem că

$$1 + (\varphi'(t))^2 = 1 + \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))\right)^2} \neq 0, \ \forall\, t \in I,$$

adică deducem că aplicaţia diferenţiabilă $c(t)$ este o parametrizare regulată. Mai mult, luând în $\mathbb{R}^2$ o vecinătate convenabilă V a punctului $M_0(x_0, y_0) \in C$, obţinem că

$$C \cap V = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, deoarece punctul $M_0(x_0, y_0) \in C$ a fost ales arbitrar, rezultă că mulţimea de puncte C este o curbă plană. □

Definiţia 10.1.6. *O curbă plană definită ca în teorema precedentă se numeşte* ***curbă plană definită implicit****.*

Corolarul 10.1.1. *Orice conică cu proprietatea că nu conţine nici un centru de simetrie (i. e.* ***elipsa****, în particular* ***cercul****,* ***hiperbola****,* ***parabola****,* ***reuniunea de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *şi* ***mulţimea vidă****) este o curbă plană.*

Demonstraţie. Fie Γ o conică arbitrară care nu conţine nici un centru de simetrie şi care este definită implicit de ecuaţia

$$\Gamma : g(x, y) = 0,$$

unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Vom demonstra prin reducere la absurd că

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(P)\right)^2 \neq 0, \ \forall\, P(x, y) \in \Gamma.$$

Să presupunem prin absurd că există un punct din plan $M_0(x_0, y_0)$ aparţinând conicei Γ care verifică relaţia

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(M_0)\right)^2 = 0.$$

Atunci, deducem imediat că

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(M_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \end{cases}$$

adică punctul $M_0(x_0, y_0)$ este un centru de simetrie al conicei Γ. Acest lucru se află în contradicţie cu ipoteza că conica Γ nu conţine nici un centru de simetrie.

În concluzie, conica Γ este o curbă plană. □

EXEMPLUL 10.1.3. *Elipsa de ecuaţie carteziană implicită*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$, *este o curbă plană. O parametrizare regulată a elipsei* (E) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$(E) = \operatorname{Im} c.$$

EXEMPLUL 10.1.4. *Hiperbola de ecuaţie carteziană implicită*

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$, *este o curbă plană. O parametrizare regulată a ramurii din dreapta axei* Oy *a hiperbolei* (H) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c_1(t) = (a \cosh t, b \sinh t),$$

unde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ şi } \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

iar o parametrizare regulată a ramurii din stânga axei Oy *a hiperbolei* (H) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c_2(t) = (-a \cosh t, b \sinh t).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$(H) = \operatorname{Im} c_1 \cup \operatorname{Im} c_2.$$

EXEMPLUL 10.1.5. *Parabola de ecuaţie carteziană implicită*

$$(P) : y^2 - 2px = 0,$$

unde $p > 0$, *este o curbă plană. O parametrizare regulată a parabolei* (P) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$(P) = \operatorname{Im} c.$$

OBSERVAŢIA 10.1.4. *Din cele descrise până acum deducem că o* ***curbă plană*** *poate fi descrisă în două feluri:*

(1) ***parametric*** *(ca imaginea unei parametrizări regulate $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$);*

(2) ***implicit*** *(ca o mulţime de puncte regulate $C : f(x, y) = 0$).*

OBSERVAŢIA 10.1.5. *Din punct de vedere teoretic, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică, orice curbă plană definită implicit poate fi parametrizată local, într-o vecinătate a fiecărui punct. Practic însă, o astfel de parametrizare locală regulată este dificil de exprimat în general. Pe cazuri particulare, prin artificii de calcul, pot fi găsite totuşi astfel de parametrizări regulate locale pentru curbele plane definite implicit (vezi exemplele de mai sus).*

10.2. Dreaptă tangentă şi dreaptă normală

10.2.1. Curbe parametrizate. Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (x(t), y(t)),$$

este o curbă plană parametrizată regulată şi să considerăm că

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0)),$$

unde $t_0 \in I$, este un punct arbitrar fixat al curbei C. Interpretarea geometrică a derivatei aplicaţiei c în punctul t_0 implică faptul că că vectorul liber

$$\dot{c}(t_0) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{c(t_0 + h) - c(t_0)}{h},$$

este tangent la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

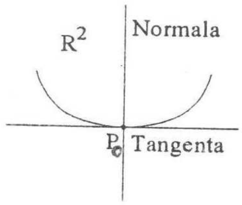
DEFINIŢIA 10.2.1. *Vectorul liber nenul*

$$\dot{c}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

se numeşte ***vectorul tangent (viteză)*** *la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$.*

DEFINIŢIA 10.2.2. *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este direcţionată de vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

DEFINIŢIA 10.2.3. *Dreapta $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este perpendiculară pe vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la curba C în punctul P_0.*



Tangenta şi normala unei curbe plane

Din geometria analitică în plan rezultă imediat următorul rezultat:

TEOREMA 10.2.1. *Ecuaţiile dreptelor tangentă* $T_{P_0}C$ *şi normală* $N_{P_0}C$ *sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

şi

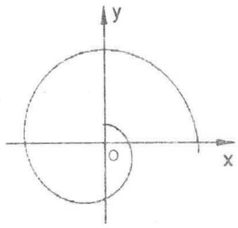
$$N_{P_0}C : (x - x(t_0)) \cdot x'(t_0) + (y - y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0.$$

EXEMPLUL 10.2.1. *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei în punctul*

$$P_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$$

la ***spirala logaritmică*** $\mathcal{S} = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \; c(t) = \left(e^{-t}(\cos t - \sin t), e^{-t}(\cos t + \sin t)\right).$$



Spirala logaritmică $\mathcal{S}$

Este evident că avem

$$x(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t) \text{ şi } y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = -2e^{-t}\cos t \text{ şi } y'(t) = -2e^{-t}\sin t.$$

Calculând toate entităţile anterioare pentru

$$t_0 = \frac{\pi}{4},$$

găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\mathcal{S} : \frac{x}{-e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}} = \frac{y - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{-e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}} \Leftrightarrow T_{P_0}\mathcal{S} : x - y + e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} = 0$$

şi

$$N_{P_0}\mathcal{S} : -e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}x - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\left(y - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow N_{P_0}\mathcal{S} : x + y - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} = 0.$$

10.2.2. Curbe definite implicit. Să considerăm că $C : f(x, y) = 0$, unde

$$grad(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) \neq (0, 0), \ \forall\ P \in C,$$

este o curbă plană definită implicit şi să considerăm că $P_0(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar fixat al curbei C (i. e. $f(x_0, y_0) = 0$). Fie

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (x(t), y(t)),$$

o parametrizare regulată a curbei C în vecinătatea punctului $P_0(x_0, y_0)$. Atunci există $t_0 \in I$ astfel încât

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0)) = P_0(x_0, y_0)$$

şi

$$f(x(t), y(t)) = 0, \ \forall\ t \in I.$$

Derivând ultima egalitate în raport cu t şi calculând totul în punctul t_0, deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x'(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y'(t_0)) = 0 \Leftrightarrow \langle grad(f)(P_0), \dot{c}(t_0)\rangle = 0,$$

adică vectorul gradient $grad(f)(P_0)$ este perpendicular pe vectorul $\dot{c}(t_0)$ care este tangent la curba C în punctul $P_0(x_0, y_0) = c(t_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

DEFINIŢIA 10.2.4. *Vectorul liber nenul*

$$grad(f)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$$

se numeşte ***vectorul normal*** *la curba C în punctul $P_0(x_0, y_0)$.*

DEFINIŢIA 10.2.5. *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi care este perpendiculară pe vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

DEFINIŢIA 10.2.6. *Dreapta $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi care este direcţionată de vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la curba C în punctul P_0.*

Din geometria analitică în plan rezultă imediat următorul rezultat:

TEOREMA 10.2.2. *Ecuaţiile dreptelor tangentă $T_{P_0}C$ şi normală $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$$

şi

$$N_{P_0}C : \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)}.$$

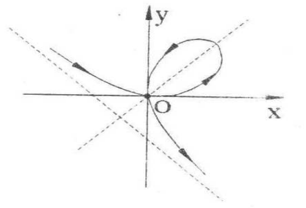
EXEMPLUL 10.2.2. *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei în punctul*

$$P_0\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$$

la ***foliul lui Descartes***

$$\mathcal{F}: x^3+y^3-3axy=0,$$

unde $a>0$ *şi* $x^2+y^2\neq 0$.



Foliul lui Descartes $\mathcal{F}$

Prin derivări parţiale obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3ax,$$

unde

$$f(x,y)=x^3+y^3-3axy.$$

Calculând aceste derivate parţiale în punctul P_0, *obţinem*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=\frac{9a^2}{4} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=\frac{9a^2}{4}.$$

În concluzie, găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\mathcal{F}:\left(x-\frac{3a}{2}\right)\cdot\frac{9a^2}{4}+\left(y-\frac{3a}{2}\right)\cdot\frac{9a^2}{4}=0 \Leftrightarrow T_{P_0}\mathcal{F}: x+y-3a=0$$

şi

$$N_{P_0}\mathcal{F}:\frac{x-\dfrac{3a}{2}}{\dfrac{9a^2}{4}}=\frac{y-\dfrac{3a}{2}}{\dfrac{9a^2}{4}} \Leftrightarrow N_{P_0}\mathcal{F}: x-y=0.$$

10.3. Reperul lui Frénet. Curbura unei curbe plane

Să considerăm că $C=\operatorname{Im}c$, unde

$$c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ c(t)=(x(t),y(t)),$$

este o curbă plană parametrizată regulată.

DEFINIŢIA 10.3.1. *Vectorul liber nenul*

$$T(t)\overset{def}{=}\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\cdot\dot{c}(t)=\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\cdot(x'(t),y'(t))$$

se numeşte ***versorul tangent*** *la curba* $C=\operatorname{Im}c$ *în punctul* $P=c(t)$.

DEFINIŢIA 10.3.2. *Vectorul liber nenul*

$$N(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \mathcal{R}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot (-y'(t), x'(t)),$$

unde

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathcal{R}(x, y) = (-y, x),$$

este o rotaţie în sens trigonometric de unghi $90°$, *se numeşte* ***versorul normal*** *la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

OBSERVAŢIA 10.3.1. *Folosind definiţia produsului scalar în spaţiul* $\mathbb{R}^2$, *se verifică uşor că avem*

$$||T(t)||^2 = ||N(t)||^2 = 1 \ \text{şi}\ \langle T(t), N(t)\rangle = 0,\ \forall\ t \in I,$$

adică reperele

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t);\ T(t), N(t)\},\ \forall\ t \in I,$$

sunt repere ortonormate în planul geometric euclidian E_2.

DEFINIŢIA 10.3.3. *Reperul ortonormat mobil*

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t);\ T(t), N(t)\},$$

unde $t \in I$, *se numeşte* ***reperul lui Frénet*** *asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Să considerăm acum vectorul liber

$$\ddot{c}(t) \stackrel{def}{=} (x''(t), y''(t))$$

numit vectorul *acceleraţie* în punctul $P = c(t)$. În acest context, putem introduce următorul concept geometric:

DEFINIŢIA 10.3.4. *Numărul real*

$$k(t) \stackrel{def}{=} \frac{\langle \ddot{c}(t), \mathcal{R}(\dot{c}(t))\rangle}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***curbura*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Studiind acum variaţia versorilor reperului lui Frénet, putem demonstra următorul rezultat geometric important:

TEOREMA 10.3.1. *Versorii* $T(t)$ *şi* $N(t)$ *ai reperului lui Frénet asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$ *verifică următoarele* ***formule Frénet:***

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(t) \cdot v(t) \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -k(t) \cdot v(t) \cdot T(t), \end{cases}$$

unde $v(t) = ||\dot{c}(t)||$ *reprezintă* ***viteza*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece baza $B_t = \{T(t), N(t)\}$ este ortonormată, rezultă că următoarele descompuneri sunt adevărate:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = \left\langle \dfrac{dN}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t). \end{cases}$$

Derivând acum relaţiile

$$\langle T(t), T(t)\rangle = \langle N(t), N(t)\rangle = 1 \text{ şi } \langle T(t), N(t)\rangle = 0$$

deducem că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, T(t)\right\rangle = \left\langle \frac{dN}{dt}, N(t)\right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle \frac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle + \left\langle \frac{dN}{dt}, T(t)\right\rangle = 0,$$

adică avem adevărate descompunerile

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -\left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot T(t). \end{cases}$$

Deoarece, prin derivare directă, obţinem

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{< \dot{c}(t), \ddot{c}(t) >}{||\dot{c}(t)||^3} \cdot \dot{c}(t) + \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t),$$

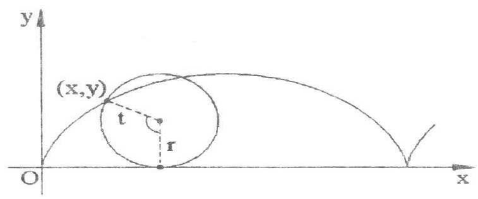
găsim că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle = \frac{\langle \ddot{c}(t), \mathcal{R}(\dot{c}(t))\rangle}{||\dot{c}(t)||^2} = k(t) \cdot v(t),$$

adică ceea ce aveam de demonstrat. □

Exemplul 10.3.1. *Curba descrisă de un punct M aflat pe un cerc de rază $r > 0$ care se rostogoleşte fără alunecare de-a lungul axei Ox se numeşte* ***cicloidă****. Să se calculeze elementele reperului lui Frénet şi curbura într-un punct arbitrar al cicloidei $\mathcal{C} = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R}\backslash\{\ 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)).$$



Cicloida $\mathcal{C}$

Este evident că avem

$$x(t) = r(t - \sin t) \text{ şi } y(t) = r(1 - \cos t).$$

Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = r(1 - \cos t) \text{ şi } y'(t) = r \sin t,$$

adică

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t).$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}(t)|| = r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos t} = 2r \left|\sin \frac{t}{2}\right|,$$

deducem că

$$T(t)=\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\cdot\dot{c}(t)=\frac{1}{\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}\cdot\left(\sin^2\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$$

şi

$$N(t)=\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\cdot\mathcal{R}(\dot{c}(t))=\frac{1}{\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}\cdot\left(-\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},\sin^2\frac{t}{2}\right),$$

unde $t\in\mathbb{R}\backslash\{\ 2l\pi\ |\ l\in\mathbb{Z}\}$.

Derivând încă o dată, găsim

$$x''(t)=r\sin t \text{ şi } y''(t)=r\cos t.$$

Prin urmare, curbura cicloidei este

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{3/2}}=\frac{-1}{4r\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|},\ \forall\ t\in\mathbb{R}\backslash\{\ 2l\pi\ |\ l\in\mathbb{Z}\}.$$

10.4. Schimbări de parametru. Orientarea unei curbe plane

Fie $c:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ o parametrizare regulată, definită prin

$$c(t)=(x(t),y(t)),$$

şi fie curba plană $C=\operatorname{Im}c$.

DEFINIŢIA 10.4.1. *Orice funcţie*

$$\overline{t}:I\subset\mathbb{R}\to J\subset\mathbb{R},\ t\to\overline{t}(t),$$

unde J este un interval real, care este derivabilă, bijectivă şi cu inversa

$$t:J\subset\mathbb{R}\to I\subset\mathbb{R},\ \overline{t}\to t(\overline{t}),$$

derivabilă se numeşte ***schimbare de parametru*** *a curbei $C=\operatorname{Im}c$ iar parametrizarea regulată*

$$\overline{c}:J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \overline{c}(\overline{t})=c(t(\overline{t})),$$

se numeşte ***reparametrizare*** *a curbei $C=\operatorname{Im}c$.*

OBSERVAŢIA 10.4.1. *Dacă $\overline{t}=\overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba plană $C=\operatorname{Im}c$, atunci următoarea egalitate este adevărată*

$$\frac{d\overline{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\overline{t}}=1\Leftrightarrow\frac{dt}{d\overline{t}}=\frac{1}{\dfrac{d\overline{t}}{dt}}.$$

TEOREMA 10.4.1. *Dacă $\overline{t}=\overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba plană $C=\operatorname{Im}c$, atunci următoarele* ***formule de invarianţă*** *sunt adevărate:*

$$\overline{C}=\operatorname{Im}\overline{c}=\operatorname{Im}c=C,$$

$$\overline{T}(\overline{t})=\pm T(t),\ \overline{N}(\overline{t})=\pm N(t),$$

$$\overline{k}(\overline{t})=\pm k(t),\ \overline{v}(\overline{t})=\pm v(t)\cdot\frac{dt}{d\overline{t}}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{T}}{d\overline{t}} = \overline{k}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{N}(\overline{t}) \\ \dfrac{d\overline{N}}{d\overline{t}} = -\overline{k}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{T}(\overline{t}), \end{cases}$$

unde semnul " + " *apare dacă* $\dfrac{dt}{d\overline{t}} > 0$ *iar semnul* " − " *apare dacă* $\dfrac{dt}{d\overline{t}} < 0$.

DEMONSTRAŢIE. Formulele de mai sus se deduc imediat din relaţiile de derivare a funcţiilor compuse, şi anume

$$\dot{\overline{c}}(\overline{t}) = \dot{c}(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}}$$

şi

$$\ddot{\overline{c}}(\overline{t}) = \ddot{c}(t) \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^2 + \dot{c}(t) \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2}.$$

□

OBSERVAŢIA 10.4.2. *Egalităţile din teorema precedentă ne sugerează că curbele plane parametrizate regulate pot fi privite ca curbe plane* ***orientate (cu un sens de parcurs)****. Intuitiv vorbind, putem aprecia că orientarea unei curbe plane parametrizate* $c(t)$ *este dată de orientarea geometrică a vectorului tangent* $\dot{c}(t)$ *ca vector liber legat în punctul* $c(t)$*. În acest context geometric, o schimbare de parametru* $\overline{t} = \overline{t}(t)$ *a curbei plane* $C = \operatorname{Im} c$ ***păstrează orientarea*** *curbei* C *dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} > 0$$

şi ***inversează orientarea*** *curbei* C *dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} < 0.$$

EXEMPLUL 10.4.1. *Fie curba plană parametrizată regulată* $C = \operatorname{Im} c$*, unde*

$$c : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (\sin t, \ln t).$$

Funcţia

$$\overline{t} : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \overline{t}(t) = \ln t,$$

este o schimbare de parametru a curbei $C = \operatorname{Im} c$*, având inversa*

$$t : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ t(\overline{t}) = e^{\overline{t}}.$$

În acest context, reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ *este dată de*

$$\overline{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \overline{c}(\overline{t}) = (\sin e^{\overline{t}}, \overline{t}).$$

Este important de subliniat că avem adevărată egalitatea

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Deoarece

$$\frac{dt}{d\overline{t}} = e^{\overline{t}} > 0,\ \forall\ \overline{t} \in \mathbb{R},$$

rezultă că schimbarea de parametru $\overline{t}(t) = \ln t$ *păstrează orientarea curbei* C *determinată de orientarea geometrică a vectorului tangent*

$$\dot{c}(t) = \left(\cos t, \frac{1}{t}\right).$$

EXEMPLUL 10.4.2. *Fie curba plană parametrizată regulată* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (2t, t^2).$$

Funcţia

$$\bar{t} : [0,1] \to [0,2], \ \bar{t}(t) = 2t,$$

este o schimbare de parametru a curbei $C = \operatorname{Im} c$, *având inversa*

$$t : [0,2] \to [0,1], \ t(\bar{t}) = \frac{\bar{t}}{2}.$$

În acest context, reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ *este dată de*

$$\bar{c} : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \ \bar{c}(\bar{t}) = \left(\bar{t}, \frac{\bar{t}^2}{4}\right).$$

Este important de subliniat că avem adevărată egalitatea

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \bar{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Deoarece

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{2} > 0, \ \forall \ \bar{t} \in [0,2],$$

rezultă că schimbarea de parametru $\bar{t}(t) = 2t$ *păstrează orientarea curbei* C *determinată de orientarea geometrică a vectorului tangent*

$$\dot{c}(t) = (2, 2t).$$

EXEMPLUL 10.4.3. *Să se calculeze curbura într-un punct arbitrar al elipsei*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$. *Deoarece curbura elipsei nu depinde de parametrizarea aleasă (modulo un semn care determină orientarea elipsei* (E)*), subliniem că o parametrizare a elipsei* (E) *este dată de*

$$x(t) = a \cos t \ \text{şi} \ y(t) = b \sin t,$$

unde $t \in [0, 2\pi)$. *Prin derivări succesive, obţinem*

$$\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{cases} \ \text{şi} \ \begin{cases} x''(t) = -a \cos t \\ y''(t) = -b \sin t. \end{cases}$$

Prin urmare, curbura elipsei (E)*, considerată ca orientată în sens trigonometric, este*

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}, \ \forall \ t \in [0, 2\pi).$$

OBSERVAŢIA 10.4.3. *În cazul particular al elipsei* (E) *pentru care*

$$a = b = r > 0,$$

adică în cazul cercului (C) *centrat în originea* $O(0,0)$ *şi de rază* r *de ecuaţie*

$$(C) : x^2 + y^2 = r^2,$$

considerat ca orientat în sens trigonometric, obţinem curbura

$$k(t) = \frac{1}{r} = \text{constant}, \ \forall \ t \in [0, 2\pi).$$

Pe de altă parte, dacă considerăm semicercul superior al cercului (C) *şi parametrizarea sa orientată în sensul acelor de ceasornic, definită prin*

$$x(\tau) = \tau \text{ şi } y(\tau) = \sqrt{r^2 - \tau^2},$$

unde $\tau \in [-r, r]$, *obţinem curbura*

$$k(\tau) = -\frac{1}{r} = constant, \ \forall \ \tau \in [-r, r].$$

10.5. Lungimea unei curbe plane. Parametrizarea canonică

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (x(t), y(t)), \ a < b,$$

este o curbă plană parametrizată regulată.

DEFINIŢIA 10.5.1. ***Lungimea*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *este definită prin formula*

$$L(C) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt > 0.$$

OBSERVAŢIA 10.5.1. *Definiţia de mai sus este consistentă din punct de vedere geometric deoarece dacă împărţim curba plană* $C = \operatorname{Im} c$ *în arce de curbă suficient de mici, atunci putem aproxima lungimea acestor arce de curbă cu lungimea segmentelor de dreaptă pe care le subântind. Evident, lungimea curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *se obţine adunând lungimile acestor segmente de dreaptă şi aplicând sumei un procedeu la limită ca la integrale care ne conduce la formula de mai sus.*

OBSERVAŢIA 10.5.2. *Dacă* $\overline{t} = \overline{t}(t)$ *este o schimbare de parametru pentru curba plană* $C = \operatorname{Im} c$, *atunci*

$$L(\overline{C}) = L(C),$$

adică lungimea unei curbe plane nu depinde nici de parametrizare nici de orientare.

EXEMPLUL 10.5.1. *Să se calculeze lungimea cercului* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (r \cos t, r \sin t), \ r > 0.$$

Vectorul tangent într-un punct arbitrar al cercului $C = \operatorname{Im} c$ *este*

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

iar norma acestui vector (viteza) este

$$v(t) = ||\dot{c}(t)|| = r, \ \forall \ t \in [0, 2\pi].$$

În concluzie, lungimea cercului este

$$L(C) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

TEOREMA 10.5.1. *Dacă* $L > 0$ *este lungimea curbei plane* $C = \operatorname{Im} c$, *atunci funcţia*

$$s : [a, b] \to [0, L], \ s(t) \overset{def}{=} \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma,$$

este o schimbare de parametru pentru curba $C = \operatorname{Im} c$ *având proprietatea că*

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1, \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))).$$

Demonstraţie. Din definiţia integralei definite deducem că funcţia

$$s(t) = \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)|| d\sigma$$

este derivabilă şi, mai mult, avem

$$\frac{ds}{dt} = ||\dot{c}(t)|| \neq 0, \ \forall \ t \in [a, b].$$

Atunci, conform teoremei funcţiei inverse din analiza matematică, rezultă că funcţia

$$s = s(t)$$

este inversabilă iar inversa ei

$$t = t(s)$$

verifică relaţia

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} \neq 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În concluzie, funcţia $s = s(t)$ este o schimbare de parametru, adică aplicaţia

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))),$$

este o reparametrizare a curbei $C = \operatorname{Im} c$. Prin urmare, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Folosind acum regula de derivare a funcţiilor compuse, deducem că

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = \dot{c}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} \Rightarrow ||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = ||\dot{c}(t(s))|| \cdot \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} = 1, \ \forall \ s \in [0, L]$$

□

Definiţia 10.5.2. *Parametrul s din teorema precedentă se numeşte* ***parametrul canonic*** *sau* ***parametrul lungime de arc*** *al curbei $C = \operatorname{Im} c$ iar reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ dată de*

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))),$$

se numeşte ***parametrizarea canonică*** *a curbei plane $C = \operatorname{Im} c$.*

Observaţia 10.5.3. *Parametrizarea canonică a curbei $C = \operatorname{Im} c$ păstrează orientarea curbei C deoarece*

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Observaţia 10.5.4. *Proprietatea fundamentală a unei curbe plane $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$, parametrizată canonic prin*

$$\widetilde{c}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s)), \ \forall \ s \in [0, L],$$

este că

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Din acest motiv, curbele plane parametrizate canonic se mai numesc şi ***curbe de viteză unu****.*

OBSERVAŢIA 10.5.5. *Teorema precedentă ne arată că teoretic orice curbă plană parametrizată regulată poate fi reparametrizată canonic. Practic însă găsirea parametrului canonic s este adesea foarte dificilă, chiar imposibilă, deoarece integrala care defineşte parametrul canonic conduce la funcţii $s(t)$ extrem de complicate, care nu pot fi uşor inversate.*

EXEMPLUL 10.5.2. *Să se reparametrizeze prin lungimea de arc cercul $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (r \cos t, r \sin t),\ r > 0.$$

Prin derivare, obţinem

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t),\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Norma vectorului viteză este

$$||\dot{c}(t)|| = r,\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Atunci, parametrul lungime de arc este

$$s(t) = \int_0^t r d\sigma = rt,\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

iar inversul parametrului canonic este

$$t(s) = \frac{s}{r},\ \forall\ s \in [0, 2\pi r].$$

În concluzie, reparametrizarea canonică a cercului $C = \operatorname{Im} c$ este dată de

$$\widetilde{c} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\right).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C$$

şi

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, 2\pi r].$$

10.6. Interpretări geometrice ale curburii unei curbe plane

Deoarece orice curbă plană parametrizată regulată poate fi reparametrizată prin lungimea de arc, să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^2,\ c(s) = (x(s), y(s)),$$

este o curbă plană parametrizată canonic. Atunci, rezultă că avem

$$v(s) = ||\dot{c}(s)|| = 1 \Leftrightarrow (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1,\ \forall\ s \in [0, L].$$

În acest context, ţinând seama de formulele de invarianţă demonstrate anterior şi alegând o orientare convenabilă a curbei plane $C = \operatorname{Im} c$, expresiile elementelor reperului lui Frénet, expresia curburii, precum şi formulele lui Frénet, se simplifică după cum urmează:

$$T(s) = \dot{c}(s) = (x'(s), y'(s)),\ N(s) = \mathcal{R}(\dot{c}(s)) = (-y'(s), x'(s)),$$
$$k(s) = \langle \ddot{c}(s), \mathcal{R}(\dot{c}(s)) \rangle = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = k(s) \cdot N(s) \\ \dfrac{dN}{ds} = -k(s) \cdot T(s). \end{cases}$$

TEOREMA 10.6.1. *Curbura unei curbe plane parametrizate canonic are expresia*

$$k(s) = \varphi'(s), \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde $\varphi(s)$ *reprezintă unghiul format de tangenta la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $c(s)$ *cu axa* Ox.

DEMONSTRAŢIE. Din relaţia

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \ \forall \ s \in [0, L],$$

rezultă că există o funcţie bijectivă

$$\varphi : [0, L] \to [0, 2\pi]$$

astfel încât pentru orice $s \in [0, L]$ avem

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\varphi(s) \\ y'(s) = \sin\varphi(s), \end{cases}$$

unde $\varphi(s)$ reprezintă unghiul format de vectorul tangent $\dot{c}(s)$ cu vectorul liber $\bar{i}$.

Din aceste relaţii rezultă imediat expreia căutată a curburii, şi anume

$$k(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \varphi'(s), \ \forall \ s \in [0, L].$$

□

COROLARUL 10.6.1. *Orice dreaptă din plan are curbura egală cu zero în fiecare punct al ei. Reciproc, dacă o curbă plană are curbura în fiecare punct ale ei*

$$k(s) = 0,$$

atunci curba plană are imaginea inclusă într-o dreaptă.

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că avem o dreaptă arbitrară din plan, de ecuaţie

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

unde $l^2 + m^2 \neq 0$. Atunci, o parametrizare regulată a dreptei D este dată de

$$x(t) = x_0 + lt \text{ şi } y(t) = y_0 + mt,$$

unde $t \in \mathbb{R}$. Rezultă imediat de aici că

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} = 0, \ \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, să presupunem că C este o curbă plană cu proprietatea că

$$k(s) = \varphi'(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde s este parametrul canonic al curbei plane C. Atunci, deducem imediat că

$$\varphi(s) = \varphi_0 \in \mathbb{R}, \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică avem

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\varphi_0 \\ y'(s) = \sin\varphi_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + s\cos\varphi_0 \\ y(s) = y_0 + s\sin\varphi_0 \end{cases}$$

pentru orice $s \in [0, L]$, unde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Evident, imaginea parametrizării regulate

$$c(s) = (x_0 + s\cos\varphi_0, y_0 + s\sin\varphi_0), \ s \in [0, L],$$

este inclusă în dreapta

$$D : \frac{x - x_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - y_0}{\sin\varphi_0}.$$

□

COROLARUL 10.6.2. *Orice cerc din plan orientat în sens trigonometric şi având raza $r > 0$ are curbura constantă*
$$k = \frac{1}{r}$$
în fiecare punct al său. Reciproc, dacă o curbă plană are curbura în fiecare punct al ei
$$k(s) = k > 0,$$
unde k este o constantă, atunci curba plană are imaginea inclusă într-un cerc de rază
$$r = \frac{1}{k}.$$

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că avem un cerc arbitrar din plan, de ecuaţie
$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
Atunci, o parametrizare regulată în sens trigonometric a cercului C este dată de
$$x(t) = x_0 + r\cos t \text{ şi } y(t) = y_0 + r\sin t,$$
unde $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă imediat de aici că
$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} = \frac{1}{r},\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Reciproc, să presupunem că C este o curbă plană cu proprietatea că
$$k(s) = \varphi'(s) = k > 0,\ \forall\ s \in [0, L],$$
unde s este parametrul canonic al curbei plane C. Atunci, deducem imediat că
$$\varphi(s) = ks + \varphi_0,\ \forall\ s \in [0, L],$$
unde $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, adică avem
$$\begin{cases} x'(s) = \cos(ks + \varphi_0) \\ y'(s) = \sin(ks + \varphi_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + \dfrac{1}{k}\sin(ks + \varphi_0) \\ y(s) = y_0 - \dfrac{1}{k}\cos(ks + \varphi_0) \end{cases}$$
pentru orice $s \in [0, L]$, unde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Evident, imaginea parametrizării regulate
$$c(s) = \left(x_0 + \frac{1}{k}\sin(ks + \varphi_0), y_0 - \frac{1}{k}\cos(ks + \varphi_0)\right),\ s \in [0, L],$$
este inclusă în cercul
$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

□

CAPITOLUL 11

CURBE ÎN SPAŢIU

În acest capitol vom defini riguros *curbele în spaţiu* şi vom studia principalele proprietăţi geometrice ale acestora. Totodată vom scoate în evidenţă nişte mărimi scalare (*curbură* şi *torsiune*) care ne vor da informaţii asupra formei unei curbe în spaţiu. Pe parcursul acestui capitol, prin aplicaţie diferenţiabilă vom înţelege o *aplicaţie netedă*, adică o aplicaţie diferenţiabilă de o infinitate de ori pe un domeniu deschis, convenabil ales, în sensul că acesta este inclus în domeniile de definiţie ale aplicaţiei studiate şi derivatelor acesteia.

11.1. Definiţii şi exemple

DEFINIŢIA 11.1.1. *O aplicaţie diferenţiabilă*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

unde I este un interval real, definită prin

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \forall\ t \in I,$$

unde

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0,\ \forall\ t \in I,$$

se numeşte ***parametrizare regulată****.*

DEFINIŢIA 11.1.2. *Variabila $t \in I$, care defineşte parametrizarea regulată $c(t)$, se numeşte* ***parametru****.*

DEFINIŢIA 11.1.3. *Mulţimea de puncte din spaţiu*

$$\operatorname{Im} c \overset{not}{=} \{P(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\} \subset E_3,$$

care reprezintă imaginea unei parametrizări regulate $c(t)$, se numeşte ***curbă parametrizată în spaţiu****.*

DEFINIŢIA 11.1.4. *O mulţime nevidă C de puncte din spaţiu cu proprietatea că pentru fiecare punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$ există în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate V a punctului M_0 şi există o parametrizare regulată*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

astfel încât

$$C \cap V = \operatorname{Im} c$$

se numeşte ***curbă în spaţiu****.*

OBSERVAŢIA 11.1.1. *Intuitiv vorbind, o mulţime nevidă C de puncte din spaţiu este o curbă în spaţiu dacă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct $M_0 \in C$ curba în spaţiu poate fi identificată cu imaginea unei parametrizări regulate din spaţiu.*

Observaţia 11.1.2. *Este evident că orice curbă parametrizată în spaţiu este o curbă în spaţiu.*

Observaţia 11.1.3. *O curbă în spaţiu poate fi privită ca imaginea mai multor parametrizări regulate distincte.*

Exemplul 11.1.1. *Fie aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

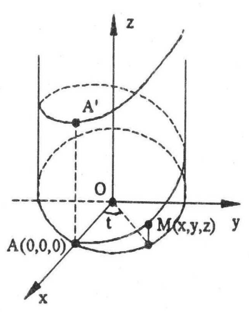
unde $a > 0$ *şi* $b \neq 0$. *Deoarece funcţiile*

$$x(t) = a\cos t,\ \ y(t) = a\sin t \ \text{şi}\ z(t) = bt$$

verifică relaţia

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,\ \ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

rezultă că aplicaţia diferenţiabilă c *este o parametrizare regulată. Rezultă că imaginea parametrizării regulate* c *este o curbă în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$ *a cărei reprezentare grafică este dată în figura de mai jos (**elicea circulară**):*



Elicea circulară C

Exemplul 11.1.2. *Să considerăm mulţimea de puncte din spaţiu*

$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y. \end{cases}$$

O parametrizare regulată a mulţimii de puncte C *este evident dată de*

$$x = y = t \ \text{şi}\ z = \frac{1}{t^2},$$

unde $t \neq 0$. *Prin urmare, considerând parametrizarea regulată*

$$c : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$c(t) = \left(t, t, \frac{1}{t^2}\right),$$

obţinem că avem adevărată relaţia

$$C = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, mulţimea de puncte C este o curbă în spaţiu.

Fie $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu deschis din $\mathbb{R}^3$, o funcţie diferenţiabilă. Reamintim din analiza matematică faptul că pentru orice punct $P(x, y, z) \in D$ vectorii

$$grad(f)(P) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)$$

şi

$$grad(g)(P) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(P), \frac{\partial g}{\partial y}(P), \frac{\partial g}{\partial z}(P)\right)$$

reprezintă *gradienţii* funcţilor f şi g în punctul $P(x, y, z)$.

DEFINIŢIA 11.1.5. *Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ care verifică relaţia*

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(M_0) \neq (0, 0, 0)$$

se numeşte ***punct regulat*** *al funcţiilor f şi g.*

În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 11.1.1. *Mulţimea de puncte din spaţiu $P(x, y, z) \in E_3$ ale căror coordonate verifică relaţiile*

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

unde

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P) \neq (0, 0, 0), \ \forall\ P \in C,$$

este o curbă în spaţiu.

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$ este un punct arbitrar al mulţimii de puncte C (i. e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(M_0) \neq (0, 0, 0)).$$

Deoarece condiţia

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(M_0) \neq (0, 0, 0)$$

este echivalentă cu condiţia

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(M_0) \end{pmatrix} = 2,$$

să presupunem că

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

În condiţiile de mai sus, conform teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică aplicată funcţiei

$$F = (f, g) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

şi punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$, deducem că există o vecinătate I a lui x_0 în $\mathbb{R}$ şi există două funcţii derivabile

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ şi } \psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \psi(x_0) = z_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases}, \ \forall\, x \in I,$$

şi

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall\, x \in I.$$

Prin derivare, din ultimele relaţii găsim sistemul liniar

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \varphi'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \varphi'(x) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0 \end{cases}$$

care ne conduce la soluţiile

$$\varphi'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}, \ \forall\, x \in I,$$

şi

$$\psi'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}, \ \forall\, x \in I.$$

Să considerăm acum aplicaţia diferenţiabilă

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$c(t) = (t, \varphi(t), \psi(t)).$$

Deoarece

$$1 + (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0, \ \forall\, t \in I,$$

deducem că aplicaţia diferenţiabilă $c(t)$ este o parametrizare regulată. Mai mult, luând în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate convenabilă V a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$, obţinem că

$$C \cap V = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, deoarece punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$ a fost ales arbitrar, rezultă că mulţimea de puncte C este o curbă în spaţiu. $\square$

DEFINIŢIA 11.1.6. *O curbă în spaţiu definită ca în teorema precedentă se numeşte* ***curbă în spaţiu definită implicit****.*

EXEMPLUL 11.1.3. *Mulţimea de puncte din spaţiu*

$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu numită ***curba lui Ţiţeica****. Pentru a demonstra că mulţimea de puncte C este o curbă în spaţiu, să notăm că*

$$f(x, y, z) = xyz - 1 \text{ şi } g(x, y, z) = x - y^2.$$

Gradienţii acestor două funcţii sunt

$$grad(f)(P) = (yz, xz, xy) \text{ şi } grad(g)(P) = (1, -2y, 0), \ \forall\ P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

iar produsul lor vectorial este

$$\begin{aligned} [grad(f) \times grad(g)]\,(P) &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ yz & xz & xy \\ 1 & -2y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2xy^2\overline{i} + xy\overline{j} - (2y^2 + x)z\overline{k} \neq \overline{0}, \ \forall\ P(x, y, z) \in C. \end{aligned}$$

Este important de subliniat că o parametrizare regulată a curbei lui Ţiţeica este dată de

$$c : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3,$$

unde

$$c(t) = \left(t^2, t, \frac{1}{t^3}\right).$$

Cu alte cuvinte, avem $C = \operatorname{Im} c$.

OBSERVAŢIA 11.1.4. *Din cele descrise până acum deducem că o* ***curbă în spaţiu*** *poate fi descrisă în două feluri:*

(1) ***parametric*** *(ca imaginea unei parametrizări regulate $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$);*

(2) ***implicit*** *(ca o mulţime de puncte regulate $C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$).*

OBSERVAŢIA 11.1.5. *Din punct de vedere teoretic, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică, orice curbă în spaţiu definită implicit poate fi parametrizată local, într-o vecinătate a fiecărui punct. Practic însă, o astfel de parametrizare locală regulată este dificil de exprimat în general. Pe cazuri particulare, prin artificii de calcul, pot fi găsite totuşi astfel de parametrizări regulate locale pentru curbele în spaţiu definite implicit (vezi exemplul anterior).*

11.2. Dreaptă tangentă şi plan normal

11.2.1. Curbe parametrizate. Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

este o curbă plană parametrizată regulată şi să considerăm că

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)),$$

unde $t_0 \in I$, este un punct arbitrar fixat al curbei C. Interpretarea geometrică a derivatei aplicaţiei c în punctul t_0 implică faptul că că vectorul liber

$$\dot{c}(t_0) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{c(t_0 + h) - c(t_0)}{h},$$

este tangent la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

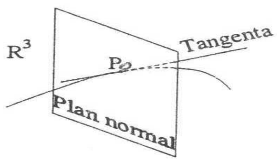
Definiţia 11.2.1. *Vectorul liber nenul*

$$\dot{c}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

se numeşte ***vectorul tangent (viteză)*** *la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$.*

Definiţia 11.2.2. *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este direcţionată de vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

Definiţia 11.2.3. *Planul $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este perpendicular pe vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***planul normal*** *la curba C în punctul P_0.*



Tangenta şi planul normal la o curbă în spaţiu

Din geometria analitică în spaţiu rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 11.2.1. *Ecuaţiile dreptei tangente $T_{P_0}C$ şi a planului normal $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

şi

$$N_{P_0}C : (x - x(t_0)) \cdot x'(t_0) + (y - y(t_0)) \cdot y'(t_0) + (z - z(t_0)) \cdot z'(t_0) = 0.$$

Exemplul 11.2.1. *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul*

$$P_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$$

la ***elicea cilindrică*** *$\mathcal{E} = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Este evident că avem

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t \text{ și } z(t) = t.$$

Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t \text{ și } z'(t) = 1.$$

Calculând toate entităţile anterioare pentru

$$t_0 = \frac{\pi}{4},$$

găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\mathcal{E} : \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{1}$$

şi

$$N_{P_0}\mathcal{E} : -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + z - \frac{\pi}{4} = 0.$$

11.2.2. Curbe definite implicit. Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

unde

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P) \neq (0, 0, 0),\ \forall\ P \in C,$$

este o curbă în spaţiu definită implicit şi să considerăm că $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar fixat al curbei C (i. e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $g(x_0, y_0, z_0) = 0$). Fie

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

o parametrizare regulată a curbei C în vecinătatea punctului $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Atunci există $t_0 \in I$ astfel încât

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = P_0(x_0, y_0, z_0)$$

şi

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \text{ şi } g(x(t), y(t), z(t)) = 0,\ \forall\ t \in I.$$

Derivând ultimele egalităţi în raport cu t şi calculând totul în punctul t_0, deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x'(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y'(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \cdot (z'(t_0)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle grad(f)(P_0), \dot{c}(t_0)\rangle = 0$$

şi

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P_0) \cdot (x'(t_0)) + \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \cdot (y'(t_0)) + \frac{\partial g}{\partial z}(P_0) \cdot (z'(t_0)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle grad(g)(P_0), \dot{c}(t_0)\rangle = 0,$$

adică vectorul nenul

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P_0)$$

este coliniar cu vectorul $\dot{c}(t_0)$ care este tangent la curba C în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

Definiţia 11.2.4. *Vectorul liber nenul*

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P_0) = T_1(P_0)\overline{i} + T_2(P_0)\overline{j} + T_3(P_0)\overline{k},$$

unde

$$T_1(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(P_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(P_0) \end{vmatrix},\ T_2(P_0) = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(P_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(P_0) \end{vmatrix}$$

şi

$$T_3(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(P_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(P_0) \end{vmatrix},$$

se numeşte ***vectorul tangent*** *la curba C în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$.*

Definiţia 11.2.5. *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care este direcţionată de vectorul tangent*

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P_0)$$

se numeşte ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

Definiţia 11.2.6. *Planul $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care este perpendicular pe vectorul tangent*

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P_0)$$

se numeşte ***planul normal*** *la curba C în punctul P_0.*

Din geometria analitică în spaţiu rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 11.2.2. *Ecuaţiile dreptei tangente $T_{P_0}C$ şi a planului normal $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : \frac{x - x_0}{T_1(P_0)} = \frac{y - y_0}{T_2(P_0)} = \frac{z - z_0}{T_3(P_0)}$$

şi

$$N_{P_0}C : (x - x_0) \cdot T_1(P_0) + (y - y_0) \cdot T_2(P_0) + (z - z_0) \cdot T_3(P_0) = 0.$$

Exemplul 11.2.2. *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul $P_0\,(1, 1, 1)$ la curba în spaţiu*

$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y. \end{cases}$$

Avem evident

$$f(x, y, z) = xyz - 1 \text{ şi } g(x, y, z) = x - y.$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$grad(f)(P) = (yz, xz, xy) \text{ şi } grad(g)(P) = (1, -1, 0),\ \forall\ P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculând aceşti gradienţi în punctul P_0, obţinem

$$grad(f)(P_0) = (1, 1, 1) \text{ şi } grad(g)(P_0) = (1, -1, 0),$$

care implică vectorul tangent

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P_0) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$$

În concluzie, ecuaţiile cerute sunt

$$T_{P_0}C : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

şi

$$N_{P_0}C : (x-1)\cdot 1 + (y-1)\cdot 1 + (z-1)\cdot(-2) = 0 \Leftrightarrow N_{P_0}C : x + y - 2z = 0,$$

unde am folosit egalităţile

$$T_1(P_0) = 1,\ T_2(P_0) = 1 \text{ şi } T_3(P_0) = -2.$$

11.3. Triedrul lui Frênet. Curbura şi torsiunea unei curbe în spaţiu

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

este o curbă parametrizată regulată în spaţiu.

Definiţia 11.3.1. *Vectorul liber nenul*

$$T(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t),$$

unde

$$\dot{c}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

se numeşte ***versorul tangent*** *la curba $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$.*

Să considerăm vectorul liber (*acceleraţie*)

$$\ddot{c}(t) \stackrel{def}{=} (x''(t), y''(t), z''(t))$$

şi să presupunem că avem adevărată relaţia

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| \neq 0,\ \forall\, t \in I.$$

În acest context, putem introduce următoarele concepte geometrice:

Definiţia 11.3.2. *Vectorul liber nenul*

$$B(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot [\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)]$$

se numeşte ***versorul binormal*** *la curba $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$.*

Definiţia 11.3.3. *Vectorul liber nenul*

$$N(t) \stackrel{def}{=} B(t) \times T(t)$$

se numeşte ***versorul normal*** *la curba $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$.*

Observaţia 11.3.1. *Folosind proprietăţile dublului produs vectorial în spaţiul $\mathbb{R}^3$, se verifică uşor că avem*

$$N(t) = -\frac{<\dot{c}(t), \ddot{c}(t)>}{||\dot{c}(t)|| \cdot ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) + \frac{||\dot{c}(t)||}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t).$$

OBSERVAŢIA 11.3.2. *Folosind proprietăţile produsului scalar şi ale produsului vectorial în spaţiul* $\mathbb{R}^3$*, se verifică uşor că avem*

$$||T(t)||^2 = ||N(t)||^2 = ||B(t)||^2 = 1, \ \forall\ t \in I,$$

şi

$$\langle T(t), N(t)\rangle = \langle T(t), B(t)\rangle = \langle N(t), B(t)\rangle = 0, \ \forall\ t \in I,$$

adică reperele

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t);\ T(t), N(t), B(t)\}, \ \forall\ t \in I,$$

sunt repere ortonormate în spaţiul geometriei euclidiene E_3.

DEFINIŢIA 11.3.4. *Reperul ortonormat mobil*

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t);\ T(t), N(t), B(t)\},$$

unde $t \in I$, *se numeşte* ***triedrul lui Frénet*** *asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

DEFINIŢIA 11.3.5. *Numărul real strict pozitiv*

$$k(t) \stackrel{def}{=} \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} > 0$$

se numeşte ***curbura*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

DEFINIŢIA 11.3.6. *Numărul real*

$$\tau(t) \stackrel{def}{=} \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} \in \mathbb{R},$$

unde

$$\dddot{c}(t) \stackrel{def}{=} (x'''(t), y'''(t), z'''(t)),$$

se numeşte ***torsiunea*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Studiind acum variaţia versorilor triedrului lui Frénet, putem demonstra următorul rezultat geometric important:

TEOREMA 11.3.1. *Versorii* $T(t)$, $N(t)$ *şi* $B(t)$ *ai triedrului lui Frénet asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$ *verifică următoarele* ***formule Frénet:***

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(t) \cdot v(t) \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -k(t) \cdot v(t) \cdot T(t) + \tau(t) \cdot v(t) \cdot B(t) \\ \dfrac{dB}{dt} = -\tau(t) \cdot v(t) \cdot N(t), \end{cases}$$

unde $v(t) = ||\dot{c}(t)||$ *reprezintă* ***viteza*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece baza $B_t = \{T(t), N(t), B(t)\}$ este ortonormată, rezultă că următoarele descompuneri sunt adevărate:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, T(t)\right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = \left\langle \dfrac{dN}{dt}, T(t)\right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dB}{dt} = \left\langle \dfrac{dB}{dt}, T(t)\right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot B(t). \end{cases}$$

Derivând acum relaţiile

$$\langle T(t), T(t)\rangle = \langle N(t), N(t)\rangle = \langle B(t), B(t)\rangle = 1$$

şi

$$\langle T(t), N(t)\rangle = \langle T(t), B(t)\rangle = \langle N(t), B(t)\rangle = 0,$$

deducem că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, T(t)\right\rangle = \left\langle \frac{dN}{dt}, N(t)\right\rangle = \left\langle \frac{dB}{dt}, B(t)\right\rangle = 0$$

şi

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, T(t)\right\rangle = 0 \\ \left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, T(t)\right\rangle = 0 \\ \left\langle \dfrac{dN}{dt}, B(t)\right\rangle + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle = 0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, avem adevărate descompunerile

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -\left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot T(t) - \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dB}{dt} = -\left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t). \end{cases}$$

Deoarece, prin derivare directă, obţinem

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{< \dot{c}(t), \ddot{c}(t) >}{||\dot{c}(t)||^3} \cdot \dot{c}(t) + \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t),$$

găsim, prin calcul, că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle \frac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^2} = k(t) \cdot v(t).$$

În acelaşi timp, prin derivare directă şi folosind formulele

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{u}(t) \times \overline{v}(t)\right] = \frac{d\overline{u}}{dt} \times \overline{v}(t) + \overline{u}(t) \times \frac{d\overline{v}}{dt}, \ \forall\ \overline{u}(t),\ \overline{v}(t) \in V_3,$$

şi

$$\left\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d}\right\rangle = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c}\rangle & \langle \overline{a}, \overline{d}\rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{c}\rangle & \langle \overline{b}, \overline{d}\rangle \end{vmatrix}, \ \forall\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ \overline{d} \in V_3,$$

deducem, prin calcul, că avem

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} \quad = \quad & -\frac{||\dot{c}(t)||^2 \cdot \langle \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)\rangle - \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle \cdot \langle \dot{c}(t), \dddot{c}(t)\rangle}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^3} \cdot \left[\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\right] + \\ & + \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \left[\dot{c}(t) \times \dddot{c}(t)\right]. \end{aligned}$$

Deoarece

$$N(t) = -\frac{< \dot{c}(t), \ddot{c}(t) >}{||\dot{c}(t)|| \cdot ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) + \frac{||\dot{c}(t)||}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t)$$

rezultă imediat că

$$\left\langle \frac{dB}{dt}, N(t) \right\rangle = -\frac{||\dot{c}(t)||}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} \cdot (\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = -\tau(t) \cdot v(t).$$

□

EXEMPLUL 11.3.1. *Să se calculeze elementele triedrului lui Frénet, curbura şi torsiunea într-un punct arbitrar al curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2} \right).$$

Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, t),\ \ddot{c}(t) = (-\cos t, -\sin t, 1) \text{ şi } \dddot{c}(t) = (\sin t, -\cos t, 0).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\ddot{c}(t)$ este

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin t & \cos t & t \\ -\cos t & -\sin t & 1 \end{vmatrix} \equiv (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, 1)$$

iar produsul mixt între vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ este

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & t \\ -\cos t & -\sin t & 1 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = t.$$

Normele vectorilor $\dot{c}(t)$ şi $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ sunt

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{t^2+1} \text{ şi } ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = \sqrt{t^2+2}.$$

Prin urmare, elementele triedrului lui Frénet sunt

$$T(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot (-\sin t, \cos t, t),$$

$$B(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot [\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)] = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \cdot (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, 1),$$

$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \times T(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \left(t \sin t - (t^2+1) \cos t, -t \cos t - (t^2+1) \sin t, 1 \right) \end{aligned}$$

iar curbura şi torsiunea curbei $C = \operatorname{Im} c$ au expresiile

$$k(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{\sqrt{t^2+2}}{(t^2+1) \cdot \sqrt{t^2+1}} \text{ şi } \tau(t) = \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} = \frac{t}{t^2+2}.$$

11.4. Schimbări de parametru. Orientarea unei curbe în spaţiu

Fie $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ o parametrizare regulată, definită prin

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

şi fie curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$.

DEFINIŢIA 11.4.1. *Orice funcţie*

$$\overline{t} : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R},\ t \to \overline{t}(t),$$

unde J este un interval real, care este derivabilă, bijectivă şi cu inversa

$$t : J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R},\ \overline{t} \to t(\overline{t}),$$

derivabilă se numeşte ***schimbare de parametru*** *a curbei $C = \operatorname{Im} c$ iar parametrizarea regulată*

$$\overline{c} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \overline{c}(\overline{t}) = c(t(\overline{t})),$$

se numeşte ***reparametrizare*** *a curbei $C = \operatorname{Im} c$.*

OBSERVAŢIA 11.4.1. *Dacă $\overline{t} = \overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci următoarea egalitate este adevărată*

$$\frac{d\overline{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\overline{t}} = 1 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{1}{\dfrac{d\overline{t}}{dt}}.$$

TEOREMA 11.4.1. *Dacă curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ verifică relaţia*

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| \neq 0,\ \forall\ t \in I,$$

şi dacă $\overline{t} = \overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci următoarele ***formule de invarianţă*** *sunt adevărate:*

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C,$$

$$\overline{T}(\overline{t}) = \pm T(t),\ \overline{N}(\overline{t}) = N(t),\ \overline{B}(\overline{t}) = \pm B(t),$$

$$\overline{k}(\overline{t}) = k(t),\ \overline{\tau}(\overline{t}) = \tau(t),\ \overline{v}(\overline{t}) = \pm v(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{T}}{d\overline{t}} = \overline{k}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{N}(\overline{t}) \\ \dfrac{d\overline{N}}{d\overline{t}} = -\overline{k}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{T}(\overline{t}) + \overline{\tau}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{B}(\overline{t}) \\ \dfrac{d\overline{B}}{d\overline{t}} = -\overline{\tau}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{N}(\overline{t}), \end{cases}$$

unde semnul "$+$" apare dacă $\dfrac{dt}{d\overline{t}} > 0$ iar semnul "$-$" apare dacă $\dfrac{dt}{d\overline{t}} < 0$.

DEMONSTRAŢIE. Formulele de mai sus se deduc imediat din relaţiile de derivare a funcţiilor compuse, şi anume

$$\dot{\overline{c}}(\overline{t}) = \dot{c}(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}},$$

$$\ddot{\overline{c}}(\overline{t}) = \ddot{c}(t) \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^2 + \dot{c}(t) \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2}.$$

şi

$$\dddot{\overline{c}}(\overline{t}) = \dddot{c}(t) \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^3 + 3\ddot{c}(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}} \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2} + \dot{c}(t) \cdot \frac{d^3t}{d\overline{t}^3}.$$

□

OBSERVAŢIA 11.4.2. *Egalităţile din teorema precedentă ne sugerează că curbele în spaţiu pot fi privite ca curbe* ***orientate (cu un sens de parcurs)****. Intuitiv vorbind, putem aprecia că orientarea unei curbe în spaţiu $c(t)$ este dată de orientarea geometrică a vectorului tangent $\dot{c}(t)$ ca vector liber legat în punctul $c(t)$. În acest context geometric, o schimbare de parametru $\overline{t} = \overline{t}(t)$ a curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$* ***păstrează orientarea*** *curbei C dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} > 0$$

şi ***inversează orientarea*** *curbei C dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} < 0.$$

EXEMPLUL 11.4.1. *Fie elicea circulară $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ c(t) = (2\cos t, 2\sin t, t).$$

Funcţia

$$\overline{t} : \mathbb{R} \to (-\infty, 0), \ \overline{t}(t) = -e^t,$$

este o schimbare de parametru a curbei $C = \operatorname{Im} c$, având inversa

$$t : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \ t(\overline{t}) = \ln(-\overline{t}).$$

În acest context, reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ este dată de

$$\overline{c} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}^3, \ \overline{c}(\overline{t}) = \big(2\cos(\ln(-\overline{t})), 2\sin(\ln(-\overline{t})), \ln(-\overline{t})\big).$$

Este important de subliniat că avem adevărată egalitatea

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Deoarece

$$\frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{1}{\overline{t}} < 0, \ \forall \ \overline{t} \in (-\infty, 0),$$

rezultă că schimbarea de parametru $\overline{t}(t) = -e^t$ inversează orientarea curbei C determinată de orientarea geometrică a vectorului tangent

$$\dot{c}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1).$$

EXEMPLUL 11.4.2. *Să se calculeze curbura şi torsiunea într-un punct arbitrar al curbei lui Ţiţeica*

$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y^2. \end{cases}$$

Deoarece curbura şi torsiunea unei curbe în spaţiu nu depind de parametrizarea regulată aleasă, subliniem că o parametrizare regulată a curbei lui Ţiţeica este dată de

$$c : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3,$$

unde

$$c(t) = \left(t^2, t, t^{-3}\right),$$

adică avem

$$C = \operatorname{Im} c.$$

Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}(t) = (2t, 1, -3t^{-4}), \ \ddot{c}(t) = (2, 0, 12t^{-5}) \ \text{şi} \ \dddot{c}(t) = (0, 0, -60t^{-6}).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\ddot{c}(t)$ este

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t & 1 & -3t^{-4} \\ 2 & 0 & 12t^{-5} \end{vmatrix} \equiv (12t^{-5}, -30t^{-4}, -2)$$

iar produsul mixt între vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ este

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & -3t^{-4} \\ 2 & 0 & 12t^{-5} \\ 0 & 0 & -60t^{-6} \end{vmatrix} = 120t^{-6}.$$

Normele vectorilor $\dot{c}(t)$ şi $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ sunt

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{9t^{-8} + 1 + 4t^2} \text{ şi } ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = \sqrt{144t^{-10} + 900t^{-8} + 4}.$$

Prin urmare, curbura şi torsiunea curbei lui Ţiţeica $C = \operatorname{Im} c$ sunt

$$k(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{\sqrt{144t^{-10} + 900t^{-8} + 4}}{(9t^{-8} + 1 + 4t^2) \cdot \sqrt{9t^{-8} + 1 + 4t^2}}$$

şi

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} = \frac{120t^{-6}}{144t^{-10} + 900t^{-8} + 4}.$$

11.5. Lungimea unei curbe în spaţiu. Parametrizarea canonică

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ c(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ a < b,$$

este o curbă parametrizată regulată în spaţiu.

DEFINIŢIA 11.5.1. *Lungimea* ***Lungimea*** *curbei $C = \operatorname{Im} c$ este definită prin formula*

$$L(C) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt > 0.$$

OBSERVAŢIA 11.5.1. *Definiţia de mai sus este consistentă din punct de vedere geometric deoarece dacă împărţim curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ în arce de curbă suficient de mici, atunci putem aproxima lungimea acestor arce de curbă cu lungimea segmentelor de dreaptă pe care le subântind. Evident, lungimea curbei $C = \operatorname{Im} c$ se obţine adunând lungimile acestor segmente de dreaptă şi aplicând sumei un procedeu la limită ca la integrale care ne conduce la formula de mai sus.*

OBSERVAŢIA 11.5.2. *Dacă $\bar{t} = \bar{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci*

$$L(\overline{C}) = L(C),$$

adică lungimea unei curbe în spaţiu nu depinde nici de parametrizare nici de orientare.

EXEMPLUL 11.5.1. *Să se calculeze lungimea curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ c(t) = \left(t \cos t, t \sin t, \frac{t^2}{2}\right).$$

Vectorul tangent într-un punct arbitrar al curbei $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\dot{c}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, t)$$

iar norma acestui vector (viteza) este

$$v(t) = ||\dot{c}(t)|| = \sqrt{2t^2+1},\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

În concluzie, lungimea curbei $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2t^2+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(t + \sqrt{t^2+\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{t\sqrt{2t^2+1}}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln 2 + \frac{2\pi\sqrt{4\pi^2+1}}{2}. \end{aligned}$$

TEOREMA 11.5.1. *Dacă $L > 0$ este lungimea curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci funcţia*

$$s : [a, b] \to [0, L],\ s(t) \overset{def}{=} \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma,$$

este o schimbare de parametru pentru curba $C = \operatorname{Im} c$ având proprietatea că

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, L],$$

unde

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))).$$

DEMONSTRAŢIE. Din definiţia integralei definite deducem că funcţia

$$s(t) = \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma$$

este derivabilă şi, mai mult, avem

$$\frac{ds}{dt} = ||\dot{c}(t)|| \neq 0,\ \forall\ t \in [a, b].$$

Atunci, conform teoremei funcţiei inverse din analiza matematică, rezultă că funcţia

$$s = s(t)$$

este inversabilă iar inversa ei

$$t = t(s)$$

verifică relaţia

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} \neq 0,\ \forall\ s \in [0, L].$$

În concluzie, funcţia $s = s(t)$ este o schimbare de parametru, adică aplicaţia

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))),$$

este o reparametrizare a curbei $C = \operatorname{Im} c$. Prin urmare, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Folosind acum regula de derivare a funcţiilor compuse, deducem că

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = \dot{c}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} \Rightarrow ||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = ||\dot{c}(t(s))|| \cdot \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} = 1,\ \forall\ s \in [0, L]$$

□

DEFINIŢIA 11.5.2. *Parametrul s din teorema precedentă se numeşte* ***parametrul canonic*** *sau* ***parametrul lungime de arc*** *al curbei $C = \operatorname{Im} c$ iar reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ dată de*

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))),$$

se numeşte ***parametrizarea canonică*** *a curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$.*

OBSERVAŢIA 11.5.3. *Parametrizarea canonică a curbei $C = \operatorname{Im} c$ păstrează orientarea curbei C deoarece*

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

OBSERVAŢIA 11.5.4. *Condiţia suplimentară*

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| \neq 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

care determină existenţa elementelor $B(t)$, $N(t)$ şi $\tau(t)$, este echivalentă cu condiţia

$$||\ddot{\widetilde{c}}(s)|| > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În consecinţă, condiţia

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

este echivalentă cu condiţia

$$||\ddot{\widetilde{c}}(s)|| = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Această ultimă condiţie este echivalentă cu condiţia

$$\ddot{\widetilde{c}}(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

care implică

$$\widetilde{c}(s) = (ls + x_0, ms + y_0, ns + z_0), \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde $l, m, n, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$, adică curba $C = \operatorname{Im} c$ este un segment din dreapta

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

OBSERVAŢIA 11.5.5. *Proprietatea fundamentală a unei curbe în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$, parametrizată canonic prin*

$$\widetilde{c}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s), \widetilde{z}(s)), \ \forall \ s \in [0, L],$$

este că

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Din acest motiv, curbele în spaţiu parametrizate canonic se mai numesc şi ***curbe de viteză unu.***

OBSERVAŢIA 11.5.6. *Teorema precedentă ne arată că teoretic orice curbă parametrizată regulată în spaţiu poate fi reparametrizată canonic. Practic însă găsirea parametrului canonic s este adesea foarte dificilă, chiar imposibilă, deoarece integrala care defineşte parametrul canonic conduce la funcţii de $s(t)$ extrem de complicate, funcţii care nu pot fi uşor inversate.*

EXEMPLUL 11.5.2. *Să se reparametrizeze prin lungimea de arc elicea circulară*

$$C = \operatorname{Im} c,$$

unde

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ a > 0,\ b \neq 0.$$

Prin derivare, obţinem

$$\dot{c}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Norma vectorului viteză este

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Atunci, parametrul lungime de arc este

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\sigma = t \cdot \sqrt{a^2 + b^2},\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

iar inversul parametrului canonic este

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \forall\ s \in [0, 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2}].$$

În concluzie, reparametrizarea canonică a elicei circulare $C = \operatorname{Im} c$ *este dată de*

$$\widetilde{c} : [0, 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2}] \to \mathbb{R}^3,$$

$$\widetilde{c}(s) = c(t(s)) = \left(a \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ a \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot s\right).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C$$

şi

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2}].$$

11.6. Interpretări geometrice ale curburii şi torsiunii

Deoarece orice curbă parametrizată regulată în spaţiu poate fi reparametrizată prin lungimea de arc, să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3,\ c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, diferită de un segment de dreaptă. Atunci, rezultă că avem

$$v(s) = ||\dot{c}(s)|| = 1 \Leftrightarrow (x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1,\ \forall\ s \in [0, L],$$

şi

$$||\ddot{c}(s)|| > 0,\ \forall\ s \in [0, L].$$

În acest context, ţinând seama de formulele de invarianţă demonstrate anterior şi alegând o orientare convenabilă a curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, expresiile elementelor triedrului lui Frénet, expresia curburii, expresia torsiunii, precum şi formulele lui Frénet, se simplifică după cum urmează:

$$T(s) = \dot{c}(s),\ N(s) = \frac{1}{||\ddot{c}(s)||} \cdot \ddot{c}(s),\ B(s) = T(s) \times N(s),$$

$$k(s) = ||\ddot{c}(s)||,\ \tau(s) = \frac{(\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dddot{c}(s))}{||\ddot{c}(s)||^2}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = k(s) \cdot N(s) \\ \dfrac{dN}{ds} = -k(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s) \\ \dfrac{dB}{ds} = -\tau(s) \cdot N(s). \end{cases}$$

TEOREMA 11.6.1. *O curbă în spaţiu are imaginea inclusă într-un plan dacă şi numai dacă are torsiunea nulă în fiecare punct al ei.*

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde $c : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, este o curbă în spaţiu, nu neapărat parametrizată canonic, şi să presupunem că ea este inclusă într-un plan care trece prin punctul $C_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care are un vector normal constant $\overline{n} \neq \overline{0}$. Atunci, avem adevărată relaţia

$$\left\langle c(t) - \overline{C}_0, \overline{n} \right\rangle = 0, \ \forall\ t \in [a,b],$$

unde $\overline{C}_0$ este vectorul de poziţie al punctului $C_0(x_0, y_0, z_0)$. Prin derivare deducem că

$$\langle \dot{c}(t), \overline{n} \rangle = \langle \ddot{c}(t), \overline{n} \rangle = \langle \dddot{c}(t), \overline{n} \rangle = 0, \ \forall\ t \in [a,b],$$

adică vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ sunt coplanari. În concluzie, obţinem

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = 0, \ \forall\ t \in [a,b],$$

adică

$$\tau(t) = 0, \ \forall\ t \in [a,b].$$

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, care verifică relaţia

$$\tau(s) = 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Atunci, din formulele lui Frénet deducem imediat că

$$\frac{dB}{ds} = 0, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică există un vector constant nenul $\overline{n} \in V_3$ astfel încât

$$B(s) = \overline{n}, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Fie funcţia derivabilă $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(s) = \langle c(s) - c(0), \overline{n} \rangle .$$

Prin derivare deducem că

$$f'(s) = \langle T(s), \overline{n} \rangle = 0, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică

$$f(s) = f(0) = 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\langle c(s) - c(0), \overline{n} \rangle = 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

În concluzie, dacă $c(0) = (x_0, y_0, z_0)$ şi $\overline{n} = (A, B, C)$, atunci obţinem

$$A \cdot [x(s) - x_0] + B \cdot [y(s) - y_0] + C \cdot [z(s) - z_0] = 0, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică curba $C = \operatorname{Im} c$ este inclusă într-un plan care trece prin punctul $C_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care are vectorul normal $\overline{n} \neq \overline{0}$. □

TEOREMA 11.6.2. *O curbă în spaţiu are imaginea inclusă într-un cerc de rază $r > 0$ dacă şi numai dacă are torsiunea nulă şi curbura constantă $k(s) = 1/r$ în fiecare punct al ei.*

DEMONSTRAŢIE. " $\Leftarrow$ " Să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, care verifică relaţiile

$$\tau(s) = 0, \ \forall\ s \in [0, L],$$

şi

$$k(s) = \frac{1}{r}, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Atunci, din teorema anterioară rezultă că curba C are imaginea inclusă într-un plan. Să considerăm curba

$$\widetilde{c}(s) = c(s) + r \cdot N(s), \ \forall\ s \in [0, L].$$

Prin derivare şi utilizând formulele lui Frénet, găsim

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = \dot{c}(s) + r \cdot \frac{dN}{ds} = T(s) + r \cdot \left(-\frac{1}{r} \cdot T(s)\right) = \overline{0}, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică există un vector constant $\overline{C}_0 \in V_3$ astfel încât

$$\widetilde{c}(s) = c(s) + r \cdot N(s) = \overline{C}_0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

În concluzie, avem

$$\left|\left|c(s) - \overline{C}_0\right|\right|^2 = ||-rN(s)||^2 = r^2, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică curba $C = \operatorname{Im} c$ este inclusă în cercul centrat în punctul C_0 şi de rază $r > 0$, unde vectorul de poziţie al punctului C_0 este vectorul $\overline{C}_0$.

" $\Rightarrow$ " Să considerăm că curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde $c(s)$ este parametrizarea canonică, este inclusă într-un cerc centrat în punctul C_0 şi de rază $r > 0$. Atunci, pe de o parte, deoarece cercul este o curbă plană, deducem că

$$\tau(s) = 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Pe de altă parte, ţinând cont de proprietăţile geometrice ale cercului pe care fixăm o orientare convenabilă, deducem că

$$N(s) = \frac{1}{r}\left[\overline{C}_0 - c(s)\right], \ \forall\ s \in [0, L],$$

unde vectorul $\overline{C}_0$ este vectorul de poziţie al punctului C_0. Utilizând formulele lui Frénet, găsim

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{1}{r} \cdot T(s) = -k(s) \cdot T(s), \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică

$$k(s) = \frac{1}{r}, \ \forall\ s \in [0, L].$$

□

TEOREMA 11.6.3. *O curbă în spaţiu are imaginea inclusă într-o elice circulară dacă şi numai dacă are torsiunea constantă nenulă* $\tau(s) = \tau \neq 0$ *şi curbura constantă* $k(s) = k > 0$ *în fiecare punct al ei.*

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Să considerăm elicea circulară $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \; a > 0, \; b \neq 0.$$

Prin derivări succesive obţinem

$\dot{c}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b), \; \ddot{c}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$ şi $\dddot{c}(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$.

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\ddot{c}(t)$ este

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \equiv (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

iar produsul mixt între vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ este

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Normele vectorilor $\dot{c}(t)$ şi $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ sunt

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ şi } ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Prin urmare, curbura şi torsiunea elicei circulare $C = \operatorname{Im} c$ sunt

$$k(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0, \; \forall \; t \in \mathbb{R},$$

şi

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \neq 0, \; \forall \; t \in \mathbb{R}, .$$

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \; s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, care verifică relaţiile

$$\tau(s) = \tau \neq 0, \; \forall \; s \in [0, L],$$

şi

$$k(s) = k > 0, \; \forall \; s \in [0, L].$$

Fie $\theta \in (0, \pi)$ astfel încât

$$\cot\theta = \frac{\tau}{k}$$

şi fie vectorul

$$U(s) = T(s) \cdot \cos\theta + B(s) \cdot \sin\theta, \; \forall \; s \in [0, L].$$

Prin derivare şi utilizând formulele lui Frénet, deducem că

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dT}{ds} \cdot \cos\theta + \frac{dB}{ds} \cdot \sin\theta = (k\cos\theta - \tau\sin\theta) \cdot N(s) = \overline{0}, \; \forall \; s \in [0, L],$$

adică există un vector constant nenul $\overline{U} \in V_3$ astfel încât

$$U(s) = \overline{U}, \; \forall \; s \in [0, L].$$

Să considerăm acum funcţia derivabilă $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(s) = \left\langle c(s) - c(0), \overline{U} \right\rangle .$$

Prin derivare deducem că

$$f'(s) = \langle T(s), \overline{U} \rangle = \cos\theta, \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică, prin integrare, avem

$$f(s) = s \cdot \cos\theta + s_0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde $s_0 \in \mathbb{R}$. Deoarece avem $f(0) = 0$, rezultă că $s_0 = 0$, adică

$$f(s) = s \cdot \cos\theta, \ \forall \ s \in [0, L],$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\langle c(s) - c(0), \overline{U} \rangle = s \cdot \cos\theta, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Ţinând cont de faptul că

$$||\overline{U}||^2 = \langle \overline{U}, \overline{U} \rangle = 1,$$

relaţia de mai sus este echivalentă cu relaţia

$$\langle c(s) - c(0) - s \cdot \cos\theta \cdot \overline{U}, \overline{U} \rangle = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Aceasta înseamnă că curba în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$, unde

$$\widetilde{c}(s) = c(s) - c(0) - s \cdot \cos\theta \cdot \overline{U}, \ \forall \ s \in [0, L],$$

este situată în planul care trece prin originea $O(0, 0, 0)$ şi are direcţia normală dată de versorul constant $\overline{U}$, adică avem

$$\widetilde{\tau}(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În acelaşi timp, prin derivări succesive şi folosind formulele lui Frénet, găsim

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = T(s) - \cos\theta \cdot \overline{U} \text{ şi } \ddot{\widetilde{c}}(s) = k \cdot N(s).$$

Produsul vectorial al vectorilor $\dot{\widetilde{c}}(s)$ şi $\ddot{\widetilde{c}}(s)$ este

$$\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s) = \left[T(s) - \cos\theta \cdot \overline{U}\right] \times [k \cdot N(s)] = k \cdot \sin\theta \cdot \overline{U}$$

iar normele vectorilor $\dot{\widetilde{c}}(s)$ şi $\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s)$ sunt

$$\left|\left|\dot{\widetilde{c}}(s)\right|\right| = \sin\theta \text{ şi } \left|\left|\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s)\right|\right| = k \cdot \sin\theta.$$

Prin urmare, curbura curbei în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$ este constantă

$$\widetilde{k}(s) = \frac{\left|\left|\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s)\right|\right|}{\left|\left|\dot{\widetilde{c}}(s)\right|\right|^3} = \frac{k}{\sin^2\theta} > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În concluzie, curba în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$ este inclusă într-un cerc centrat într-un punct arbitrar C_0 şi de rază

$$r = \frac{\sin^2\theta}{k},$$

cerc situat în planul care trece prin originea $O(0, 0, 0)$ şi are direcţia normală dată de versorul constant $\overline{U}$.

În final, pentru simplificare, putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei (efectuăm eventual o translaţie şi o rotaţie în spaţiu), că

$$C_0 = c(0) = (0, 0, 0) \text{ şi } \overline{U} = \overline{k}.$$

În acest context geometric, cercul de rază

$$r = \frac{\sin^2\theta}{k},$$

situat în planul xOy, având centrul în originea $O(0,0,0)$ şi având o parametrizare de viteză constantă

$$\widetilde{v}(s) = \left|\left|\dot{\widetilde{c}}(s)\right|\right| = \sin\theta,$$

este definit de parametrizarea regulată

$$\widetilde{c}(s) = \left(\frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ \frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ 0\right),\ \forall\ s \in [0, L].$$

Ţinând cont de faptul că

$$\widetilde{c}(s) = c(s) - s \cdot \cos\theta \cdot \overline{k},\ \forall\ s \in [0, L],$$

deducem că

$$c(s) = \left(\frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ \frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ s \cdot \cos\theta\right),\ \forall\ s \in [0, L].$$

Deoarece

$$\cos\theta = \frac{\tau}{\sqrt{k^2+\tau^2}} \text{ şi } \sin\theta = \frac{k}{\sqrt{k^2+\tau^2}},$$

obţinem

$$c(s) = \left(\frac{k}{k^2+\tau^2} \cos\left(s \cdot \sqrt{k^2+\tau^2}\right),\ \frac{k}{k^2+\tau^2} \sin\left(s \cdot \sqrt{k^2+\tau^2}\right),\ \frac{\tau}{\sqrt{k^2+\tau^2}} \cdot s\right).$$

Cu alte cuvinte, notând

$$a = \frac{k}{k^2+\tau^2} > 0 \text{ şi } b = \frac{\tau}{k^2+\tau^2} \neq 0,$$

rezultă că curba $C = \operatorname{Im} c$ este inclusă în elicea circulară parametrizată canonic, definită prin

$$c(s) = \left(a \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot s\right),\ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

□

CAPITOLUL 12

SUPRAFEŢE

În acest capitol vom defini riguros *suprafeţele* în spaţiul punctual euclidian E_3 şi vom studia principalele proprietăţi geometrice ale acestora. Totodată vom scoate în evidenţă nişte mărimi scalare (*curbură totală*, *curbură medie* şi *curburi principale*) care ne vor da informaţii asupra formei unei suprafeţe. Pe parcursul acestui capitol, prin aplicaţie diferenţiabilă vom înţelege o *aplicaţie netedă*, adică o aplicaţie diferenţiabilă de o infinitate de ori pe un domeniu deschis, convenabil ales, în sensul că acesta este inclus în domeniile de definiţie ale aplicaţiei studiate şi derivatelor acesteia.

12.1. Definiţii şi exemple

DEFINIŢIA 12.1.1. *O aplicaţie injectivă şi diferenţiabilă*

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

unde D este un domeniu deschis, definită prin

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ \forall\ (u,v) \in D,$$

unde

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall\ (u,v) \in D,$$

se numeşte ***hartă (de coordonate)****.*

OBSERVAŢIA 12.1.1. *Condiţia de regularitate*

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall\ (u,v) \in D,$$

este echivalentă cu condiţia

$$r_u \times r_v \neq \overline{0},\ \forall\ (u,v) \in D,$$

unde

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ şi } r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

DEFINIŢIA 12.1.2. *O hartă*

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

cu proprietatea că inversa ei pe imagine

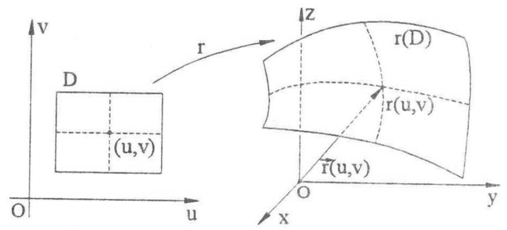
$$r^{-1} : r(D) \subseteq \mathbb{R}^3 \to D \subseteq \mathbb{R}^2$$

este diferenţiabilă se numeşte ***hartă proprie****.*

DEFINIŢIA 12.1.3. *Mulţimea de puncte din spaţiu*

$$\operatorname{Im} r \overset{not}{=} r(D) \overset{not}{=} \{P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v) \in D\} \subseteq E_3,$$

*care reprezintă imaginea hărţii proprii $r(u,v)$, se numeşte **suprafaţă parametrizată simplă**.*



Suprafaţa parametrizată simplă $\Sigma = \operatorname{Im} r = r(D)$

DEFINIŢIA 12.1.4. *O mulţime nevidă Σ de puncte din spaţiu cu proprietatea că pentru fiecare punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ există în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate V a punctului M_0 şi există o hartă proprie*

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

astfel încât

$$\Sigma \cap V = \operatorname{Im} r$$

*se numeşte **suprafaţă**.*

OBSERVAŢIA 12.1.2. *Intuitiv vorbind, o mulţime nevidă Σ de puncte din spaţiu este o suprafaţă dacă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct $M_0 \in \Sigma$ suprafaţa poate fi identificată cu o porţiune dintr-un plan.*

OBSERVAŢIA 12.1.3. *Este evident că orice suprafaţă parametrizată simplă este o suprafaţă.*

EXEMPLUL 12.1.1. *Fie aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u,v) = (u, v, uv).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, v) \text{ şi } r_v = (0, 1, u).$$

Prin urmare, avem condiţia de regularitate

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = -v\bar{i} - u\bar{j} + \bar{k} \neq \bar{0}, \ \forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Deoarece inversa pe imagine a aplicaţiei r, definită prin

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ r^{-1}(x,y,z) = (x,y),$$

unde $z = xy$, este diferenţiabilă, rezultă că aplicaţia diferenţiabilă r este o hartă proprie.

Imaginea hărţii proprii r este mulţimea de puncte

$$\operatorname{Im} r = r(D) = \{P(x, y, z) \mid xy - z = 0\}$$

şi deci $\operatorname{Im} r = r(D)$ *este o suprafaţă parametrizată simplă. Cu alte cuvinte, cuadrica definită de ecuaţia*

$$\Sigma : xy - z = 0$$

este o suprafaţă. Prin reducere la forma canonică deducem că cuadrica Σ *este un paraboloid hiperbolic.*

EXEMPLUL 12.1.2. *Fie aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă*

$$r : D = (-\pi, \pi) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos u, 2\cos 2u, 0) \text{ şi } r_v = (0, 0, 1).$$

Prin urmare, avem condiţia de regularitate

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos u & 2\cos 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos 2u\overline{i} - \cos u\overline{j} \neq \overline{0},\ \forall\ (u, v) \in D.$$

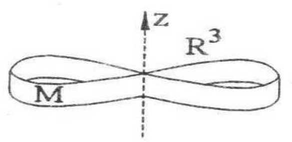
Deoarece inversa pe imagine a aplicaţiei r este definită prin

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

$$r^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (-\pi - \arcsin x, z) & \text{ptr. } x < 0 \text{ şi } y > 0 \text{ şi } 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0 \\ (0, z) & \text{ptr. } x = y = 0 \\ (\arcsin x, z) & \text{ptr. } x \neq 0 \text{ şi } y/x \geq 0 \text{ şi } 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0 \\ (\pi - \arcsin x, z) & \text{ptr. } x > 0 \text{ şi } y < 0 \text{ şi } 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

unde $z \in (0, 1)$, *deducem că aplicaţia* r^{-1} *nu este diferenţiabilă în punctele* $(0, 0, z)$.

În concluzie, mulţimea de puncte din spaţiu $M = \operatorname{Im} r = r(D)$ *nu este o suprafaţă parametrizată simplă.*



Mulţimea de puncte $M = \operatorname{Im} r = r(D)$

Mai mult, deoarece în vecinătatea oricărui punct de pe axa Oz *mulţimea de puncte* $M = \operatorname{Im} r = r(D)$ *nu poate fi privită ca imaginea unei hărţi proprii locale, ea semănând într-o asemenea vecinătate cu intersecţia a două plane, rezultă că, de fapt, mulţimea de puncte* $M = \operatorname{Im} r = r(D)$ *nu este o suprafaţă.*

EXEMPLUL 12.1.3. *Să considerăm sfera centrată în originea* $O(0, 0, 0)$ *şi de rază* $r = 1$ *având ecuaţia*

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Fie aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

unde

$$D = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 < 1\},$$

definită prin

$$r(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) \text{ şi } r_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right).$$

Prin urmare, avem condiţia de regularitate

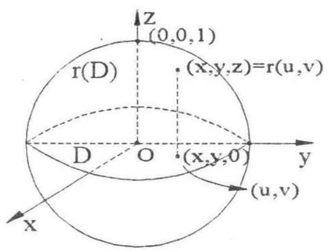
$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\bar{i} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\bar{j} + \bar{k} \neq \bar{0}, \ \forall \ (u,v) \in D. \end{aligned}$$

Deoarece inversa pe imagine a aplicaţiei r, definită prin

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ r^{-1}(x,y,z) = (x,y),$$

unde $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ şi $z > 0$, este diferenţiabilă, rezultă că aplicaţia diferenţiabilă r este o hartă proprie.

Imaginea $\operatorname{Im} r = r(D)$ *a hărţii proprii r este emisfera nordică a sferei Σ fără cercul ecuatorial.*



Parametrizarea emisferei nordice $\operatorname{Im} r = r(D)$

Prin analogie, din simetriile sferei, deducem că orice punct al sferei poate fi privit ca aparţinând unei emisfere parametrizate ca mai sus. În concluzie, sfera Σ este o suprafaţă.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu deschis din $\mathbb{R}^3$, o funcţie diferenţiabilă. Reamintim din analiza matematică faptul că pentru orice punct $P(x,y,z) \in D$ vectorul

$$grad(f)(P) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)$$

se numeşte *gradientul* funcţiei f în punctul $P(x,y,z)$.

DEFINIŢIA 12.1.5. *Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ care verifică relaţia*

$$grad(f)(M_0) \neq (0,0,0)$$

se numeşte ***punct regulat*** *al funcţiei f.*

În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

TEOREMA 12.1.1. *Mulţimea de puncte din spaţiu $P(x, y, z) \in E_3$ ale căror coordonate verifică relaţia*

$$\Sigma : f(x, y, z) = 0,$$

unde

$$grad(f)(P) \neq (0,0,0), \ \forall \ P \in \Sigma,$$

este o suprafaţă.

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ este un punct arbitrar al mulţimii de puncte Σ (i. e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $grad(f)(M_0) \neq (0,0,0)$). Deoarece condiţia

$$grad(f)(M_0) \neq (0,0,0)$$

este echivalentă cu condiţia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)^2 \neq 0,$$

să presupunem că

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \neq 0.$$

În condiţiile de mai sus, conform teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică aplicată funcţiei f şi punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$, deducem că există o vecinătate D a lui (x_0, y_0) în $\mathbb{R}^2$ şi există o funcţie diferenţiabilă

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0, \ f(u, v, \varphi(u, v)) = 0 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \varphi(u, v)) \neq 0, \ \forall \ (u, v) \in D.$$

Să considerăm acum aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)),$$

a cărei inversă pe imagine

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to D, \ r^{-1}(x, y, z) = (x, y),$$

unde $z = \varphi(x, y)$, este diferenţiabilă. Deoarece avem

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \ \forall \ (u, v) \in D,$$

deducem că aplicaţia diferenţiabilă r este o hartă proprie. Mai mult, luând în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate convenabilă V a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, obţinem că

$$\Sigma \cap V = \operatorname{Im} r.$$

În concluzie, deoarece punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ a fost ales arbitrar, rezultă că mulţimea de puncte Σ este o suprafaţă. $\square$

Definiţia 12.1.6. *O suprafaţă definită ca în teorema precedentă se numeşte* ***suprafaţă definită implicit****.*

Corolarul 12.1.1. *Orice cuadrică cu proprietatea că nu conţine nici un centru de simetrie (i. e.* ***elipsoidul****, în particular* ***sfera****,* ***hiperboloidul cu o pânză*** *sau* ***două****,* ***paraboloidul eliptic sau hiperbolic****,* ***conul fără vârf****,* ***cilindrul eliptic****, în particular* ***circular****,* ***cilindrul hiperbolic*** *sau* ***parabolic****,* ***reuniunea de plane paralele*** *şi* ***mulţimea vidă****) este o suprafaţă.*

Demonstraţie. Fie Σ o cuadrică arbitrară care nu conţine nici un centru de simetrie şi care este definită implicit de ecuaţia

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} g(x, y, z) \quad = \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}. \end{aligned}$$

Vom demonstra prin reducere la absurd că

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(P)\right)^2 \neq 0, \ \forall \ P(x, y, z) \in \Sigma.$$

Să presupunem prin absurd că există un punct din spaţiu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aparţinând cuadricei Σ care verifică relaţia

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(M_0)\right)^2 = 0.$$

Atunci, deducem imediat că

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(M_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z}(M_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0, \end{cases}$$

adică punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un centru de simetrie al cuadricei Σ. Acest lucru se află în contradicţie cu ipoteza că cuadrica Σ nu conţine nici un centru de simetrie.

În concluzie, cuadrica Σ este o suprafaţă. $\square$

Exemplul 12.1.4. *Sfera de ecuaţie carteziană implicită*

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0,$$

unde $R > 0$, este o suprafaţă. O hartă în sfera (S) este determinată de aplicaţia diferenţiabilă

$$r : D = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (x_0 + R\cos u \sin v, y_0 + R\sin u \sin v, z_0 + R\cos v),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (S)$. *Deoarece inversa pe imagine a hărţii* r *este definită prin*

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

$$r^{-1}(x,y,z) = \begin{cases} \left(\arccos \dfrac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \arccos \dfrac{z-z_0}{R}\right), & y \geq y_0 \\ \left(2\pi - \arccos \dfrac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \arccos \dfrac{z-z_0}{R}\right), & y < y_0, \end{cases}$$

unde $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0$, *deducem că aplicaţia* r^{-1} *nu este diferenţiabilă în punctele* $(x,0,z)$, *unde* $(x-x_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0$. *Prin urmare, harta* r *nu este o hartă proprie. Evident, restricţia hărţii* r *la unul din domeniile* $D_1=(0,\pi)\times(0,\pi)$ *sau* $D_2=(\pi,2\pi)\times(0,\pi)$ *devine o hartă proprie.*

Exemplul 12.1.5. *Elipsoidul de ecuaţie carteziană implicită*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

unde $a,b,c>0$, *este o suprafaţă. O hartă în elipsoidul* (E) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D=(0,2\pi)\times(0,\pi)\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u,v)=(a\cos u\sin v, b\sin u\sin v, c\cos v),$$

deoarece $\operatorname{Im} r\subset(E)$.

Exemplul 12.1.6. *Hiperboloidul cu o pânză de ecuaţie carteziană implicită*

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

unde $a,b,c>0$, *este o suprafaţă. O hartă în hiperboloidul cu o pânză* (H_1) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D=\mathbb{R}\times(0,2\pi)\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u,v)=(a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, c\sinh u),$$

deoarece $\operatorname{Im} r\subset(H_1)$.

Exemplul 12.1.7. *Hiperboloidul cu două pânze de ecuaţie carteziană implicită*

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$

unde $a,b,c>0$, *este o suprafaţă. Nişte hărţi în hiperboloidul cu două pânze* (H_2) *sunt determinate de aplicaţiile diferenţiabile*

$$r_{1,2} : D=\mathbb{R}\times(0,2\pi)\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

definite prin

$$r_{1,2}(u,v)=(a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, \pm c\cosh u),$$

deoarece $\operatorname{Im} r_1\cup\operatorname{Im} r_2\subset(H_2)$.

EXEMPLUL 12.1.8. *Paraboloidul eliptic de ecuaţie carteziană implicită*

$$(P_e) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

unde $a, b > 0$*, este o suprafaţă. O hartă în paraboloidul eliptic* (P_e) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (P_e)$.

EXEMPLUL 12.1.9. *Paraboloidul hiperbolic de ecuaţie carteziană implicită*

$$(P_h^+) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

unde $a, b > 0$ *şi* $z \geq 0$*, este o suprafaţă. O hartă în paraboloidului hiperbolic* (P_h^+) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (P_h^+)$.

EXEMPLUL 12.1.10. *Conul de ecuaţie carteziană implicită*

$$(C') : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

unde $a, b, c > 0$ *şi* $z > 0$*, este o suprafaţă. O hartă în conul* (C') *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (au \sin v, bu \cos v, cu),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (C')$.

OBSERVAŢIA 12.1.4. *Din cele descrise până acum deducem că o* ***suprafaţă*** *poate fi descrisă în două feluri:*

(1) ***parametric*** *(ca imaginea unei hărţi proprii* $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*);*

(2) ***implicit*** *(ca o mulţime de puncte regulate* $\Sigma : f(x, y, z) = 0$*).*

OBSERVAŢIA 12.1.5. *Din punct de vedere teoretic, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică, orice suprafaţă definită implicit poate fi* ***parametrizată local propriu****, într-o vecinătate a fiecărui punct. Practic însă, o astfel de parametrizare locală proprie este dificil de exprimat în general. Pe cazuri particulare, prin artificii de calcul, pot fi găsite totuşi astfel de parametrizări locale proprii pentru suprafeţele definite implicit (vezi exemplele de mai sus). Este important de subliniat că hărţile locale prezentate în exemplele anterioare nu sunt în mod necesar nişte hărţi proprii. Impunând însă anumite restricţii geometrice convenabile asupra imaginilor lor* $\Sigma' = r(D)$*, care se reduc la nişte restricţii ale domeniului* D *(vezi cazul sferei), ele devin nişte* ***hărţi proprii locale****.*

12.2. Plan tangent şi dreaptă normală

12.2.1. Suprafeţe parametrizate. Să considerăm că $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

este o suprafaţă parametrizată simplă şi să considerăm că

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}^2,\ c(t) = (u(t), v(t)),$$

este o curbă plană parametrizată.

DEFINIŢIA 12.2.1. *Curba în spaţiu*

$$\widetilde{c} : I \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = (r \circ c)(t) = r(u(t), v(t)),$$

se numeşte ***ridicata curbei*** c ***pe suprafaţa*** Σ *sau, pe scurt,* ***curbă pe*** Σ.

OBSERVAŢIA 12.2.1. *Orice curbă pe* Σ

$$\widetilde{c} : I \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

este ridicata unei unice curbe plane

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}^2,\ c(t) = (u(t), v(t)).$$

Această curbă plană este definită de relaţia

$$c = \left(r|_{\operatorname{Im} \widetilde{c}}\right)^{-1} \circ \widetilde{c}.$$

Să considerăm acum că

$$P_0 = r(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

este un punct arbitrar pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

DEFINIŢIA 12.2.2. *Un vector liber* $w \in V_3$ *se numeşte* ***vector tangent în punctul*** $P_0 = r(u_0, v_0)$ ***la suprafaţa*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *dacă există o curbă pe* Σ *definită prin*

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t)),$$

unde $\varepsilon > 0$, *astfel încât*

$$\widetilde{c}(0) = r(u_0, v_0) = P_0 \text{ şi } \dot{\widetilde{c}}(0) = w.$$

TEOREMA 12.2.1. *Un vector liber* $w \in V_3$ *este vector tangent în punctul* $P_0 = r(u_0, v_0)$ *la suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *dacă şi numai dacă el poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectorii liberi nenuli necoliniari*

$$r_u(P_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right)$$

şi

$$r_v(P_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right).$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $w \in V_3$ un vector tangent în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ şi fie o curbă pe Σ definită prin

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t)),$$

unde $\varepsilon > 0$, astfel încât

$$\widetilde{c}(0) = r(u_0, v_0) = P_0 \text{ şi } \dot{\widetilde{c}}(0) = w.$$

Atunci, conform regulii de derivare a funcţiilor compuse aplicată curbei $\widetilde{c}(t)$ şi punctului $t = 0$, obţinem

$$w = \dot{\widetilde{c}}(0) = u'(0) \cdot r_u(P_0) + v'(0) \cdot r_v(P_0).$$

Reciproc, să presupunem că avem un vector liber $w \in V_3$ de forma

$$w = c_1 \cdot r_u(P_0) + c_2 \cdot r_v(P_0),$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, şi să luăm curba pe Σ definită prin

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = r(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2),$$

unde $\varepsilon > 0$ este ales astfel încât

$$(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2) \in D,\ \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Este evident că avem

$$\widetilde{c}(0) = r(u_0, v_0) = P_0 \text{ şi } \dot{\widetilde{c}}(0) = c_1 \cdot r_u(P_0) + c_2 \cdot r_v(P_0) = w,$$

adică vectorul liber de forma

$$w = c_1 \cdot r_u(P_0) + c_2 \cdot r_v(P_0)$$

este un vector tangent în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$. □

Definiţia 12.2.3. *Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ se numeşte **planul tangent în punctul P_0 la suprafaţa** $\Sigma = \operatorname{Im} r$ şi este notat cu $T_{P_0}\Sigma$.*

Din teorema precedentă deducem că, din punct de vedere geometric, planul tangent $T_{P_0}\Sigma$ poate fi privit ca planul determinat de punctul

$$P_0 = r(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

şi vectorii liberi nenuli necoliniari $r_u(P_0)$ şi $r_v(P_0)$. În consecinţă, avem urmatorul rezultat:

Corolarul 12.2.1. *Ecuaţia planului tangent $T_{P_0}\Sigma$ în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este dată de*

$$T_{P_0}\Sigma : \begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Definiţia 12.2.4. *Dreapta $N_{P_0}\Sigma$ care trece prin punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ şi care este perpendiculară pe planul tangent $T_{P_0}\Sigma$ se numeşte **dreapta normală** la suprafaţa Σ în punctul P_0.*

Deoarece direcţia dreptei normale $N_{P_0}\Sigma$ este dată de vectorul liber

$$\begin{aligned} r_u(P_0) \times r_v(P_0) &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = \\ &= N_1(u_0, v_0)\overline{i} + N_2(u_0, v_0)\overline{j} + N_3(u_0, v_0)\overline{k}, \end{aligned}$$

unde

$$N_1(u_0,v_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix},$$

$$N_2(u_0,v_0)=-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

şi

$$N_3(u_0,v_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix},$$

găsim imediat următorul rezultat:

COROLARUL 12.2.2. *Ecuaţiile dreptei normale $N_{P_0}\Sigma$ în punctul $P_0=r(u_0,v_0)$ la suprafaţa $\Sigma=\operatorname{Im} r$ sunt descrise de*

$$N_{P_0}\Sigma:\frac{x-x(u_0,v_0)}{N_1(u_0,v_0)}=\frac{y-y(u_0,v_0)}{N_2(u_0,v_0)}=\frac{z-z(u_0,v_0)}{N_3(u_0,v_0)}.$$

EXEMPLUL 12.2.1. *Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi a dreptei normale în punctul*

$$P_0\left(u_0=\frac{\pi}{4},v_0=\frac{\pi}{4}\right)$$

la sfera $\Sigma=\operatorname{Im} r$, unde aplicaţia

$$r:(0,\pi)\times(0,\pi)\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

este definită prin

$$r(u,v)=(\cos u\sin v,\sin u\sin v,\cos v).$$

Este evident că avem

$$P_0=r(u_0,v_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Prin derivări parţiale, obţinem

$$r_u=(-\sin u\sin v,\cos u\sin v,0)\ \text{şi}\ r_v=(\cos u\cos v,\sin u\cos v,-\sin v).$$

Calculând entităţile anterioare în punctul P_0, găsim

$$r_u(P_0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\ \text{şi}\ r_v(P_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Produsul vectorial al vectorilor $r_u(P_0)$ şi $r_v(P_0)$ este

$$r_u(P_0)\times r_v(P_0)=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\overline{i}-\frac{\sqrt{2}}{4}\overline{j}-\frac{1}{2}\overline{k}.$$

În concluzie, ecuaţiile căutate sunt:

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x-\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{y-\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{1}{2}}$$

şi

$$T_{P_0}\Sigma : \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

12.2.2. Suprafeţe definite implicit. Să considerăm că $\Sigma : f(x,y,z) = 0$, unde

$$grad(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) \neq (0,0,0),\ \forall\ P\in\Sigma,$$

este o suprafaţă definită implicit şi să considerăm că $P_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct arbitrar fixat al suprafeţei Σ (i. e. $f(x_0,y_0,z_0)=0$). Fie

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbb{R}\to\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = (x(t),y(t),z(t)),$$

o curbă arbitrară pe Σ cu proprietatea că

$$\widetilde{c}(0) = (x(0),y(0),z(0)) = P_0(x_0,y_0,z_0).$$

Deoarece curba $\widetilde{c}$ este o curbă pe Σ, rezultă că avem

$$f(x(t),y(t),z(t)) = 0,\ \forall\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

Derivând ultima egalitate în raport cu t şi calculând totul în punctul $t=0$, deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot(x'(0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot(y'(0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cdot(z'(0)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\langle grad(f)(P_0), \dot{\widetilde{c}}(0)\right\rangle = 0,$$

adică vectorul gradient $grad(f)(P_0)$ este perpendicular pe vectorul $\dot{\widetilde{c}}(0)$ care este tangent la suprafaţa Σ în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0) = \widetilde{c}(0)$. Deoarece curba $\widetilde{c}$ este o curbă arbitrară pe Σ, rezultă că vectorul gradient $grad(f)(P_0)$ este perpendicular pe planul tangent $T_{P_0}\Sigma$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

DEFINIŢIA 12.2.5. *Vectorul liber nenul*

$$grad(f)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\right)$$

se numeşte ***vectorul normal*** *la suprafaţa Σ în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$.*

DEFINIŢIA 12.2.6. *Dreapta $N_{P_0}\Sigma$ care trece prin punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ şi care este direcţionată de vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la suprafaţa Σ în punctul P_0.*

DEFINIŢIA 12.2.7. *Planul $T_{P_0}\Sigma$ care trece prin punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ şi care este perpendicular pe vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***planul tangent*** *la suprafaţa Σ în punctul P_0.*

Din geometria analitică în spaţiu rezultă imediat următorul rezultat:

TEOREMA 12.2.2. *Ecuaţiile planului tangent $T_{P_0}\Sigma$ şi a dreptei normale $N_{P_0}\Sigma$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}\Sigma : (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + (z - z_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$$

şi

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)}.$$

EXEMPLUL 12.2.2. *Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi a dreptei normale în punctul $P_0\,(1,1,1)$ la* ***suprafaţa lui Ţiţeica***

$$\Sigma : xyz - 1 = 0.$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \ \frac{\partial f}{\partial y} = xz \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

unde

$$f(x, y, z) = xyz - 1.$$

Calculând aceste derivate parţiale în punctul P_0, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 1 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 1.$$

În concluzie, găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\Sigma : (x - 1) \cdot 1 + (y - 1) \cdot 1 + (z - 1) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow T_{P_0}\Sigma : x + y + z - 3 = 0$$

şi

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1} \Leftrightarrow N_{P_0}\Sigma : x = y = z.$$

12.3. Formele fundamentale ale unei suprafeţe

Vom introduce în continuare două concepte geometrice fundamentale în studiul local sau global al formei unei suprafeţe. Pentru aceasta să considerăm că $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

este o suprafaţă parametrizată simplă. În acest context, reamintim că vectorii liberi nenuli necoliniari

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ şi } r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

formează o bază (neortonormată!) în planul tangent $T_P\Sigma$, unde $P = r(u, v)$, plan tangent privit ca subspaţiu vectorial în spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$.

DEFINIŢIA 12.3.1. *Funcţia matriceală $g : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$P = r(u, v) \in \Sigma \to g_P \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

unde

$$E = < r_u, r_u >, \ F = < r_u, r_v > \text{ şi } G = < r_v, r_v >,$$

se numeşte ***prima formă fundamentală*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

OBSERVAŢIA 12.3.1. *Deoarece avem adevărată relaţia*

$$0 < ||r_u \times r_v||^2 = ||r_u||^2||r_v||^2 - < r_u, r_v >^2 = EG - F^2 = \det g,$$

deducem că prima formă fundamentală a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *este inversabilă. Subliniem faptul că, în acest context, noţiunea de inversă nu se referă la inversa funcţiei matriceale* g *ci la faptul că matricile* g_P *admit o inversă* g_P^{-1} *pentru orice punct* P *al suprafeţei* Σ. *Astfel, inversa primei forme fundamentale a suprafeţei* Σ *este definită de funcţia matriceală*

$$g^{-1} : \Sigma \to M_2(\mathbb{R}),\ g_P^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

EXEMPLUL 12.3.1. *Să se calculeze prima formă fundamentală* g *a suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *precum şi inversa acesteia* g^{-1}, *unde*

$$r : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + v).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos v, \sin v, 1) \text{ şi } r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E =< r_u, r_u >= 2,\ F =< r_u, r_v >= 1 \text{ şi } G =< r_v, r_v >= u^2 + 1,$$

adică prima formă fundamentală a suprafeţei Σ *este*

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & u^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 2u^2 + 1 > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a suprafeţei Σ *este*

$$g^{-1} = \frac{1}{2u^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} u^2 + 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

DEFINIŢIA 12.3.2. *Funcţia vectorială* $U : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ *definită prin*

$$P = r(u, v) \in \Sigma \to U_P \overset{def}{=} \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v]$$

se numeşte ***versorul normal*** *la suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

OBSERVAŢIA 12.3.2. *Din definiţia produsului vectorial a doi vectori liberi rezultă evident că versorul* U_P *este perpendicular pe planul tangent* $T_P\Sigma$, *unde* $P = r(u, v)$. *Prin urmare, sistemul de vectori*

$$B_P = \{r_u, r_v, U_P\}$$

formează o bază mobilă (neortonormată!) în spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$.

Pentru a introduce cel de-al doilea concept geometric care ne interesează, vom folosi notaţiile:

$$r_{uu} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right),\ r_{uv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right)$$

şi

$$r_{vv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

DEFINIŢIA 12.3.3. *Funcţia matricească $b : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$P = r(u,v) \in \Sigma \to b_P \overset{def}{=} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix},$$

unde

$$l =< r_{uu}, U >, \ m =< r_{uv}, U > \text{ şi } n =< r_{vv}, U >,$$

se numeşte ***a doua formă fundamentală*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

EXEMPLUL 12.3.2. *Să se calculeze a doua formă fundamentală a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde*

$$r : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ r(u,v) = (u \cos v, u \sin v, u + v).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos v, \sin v, 1) \text{ şi } r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0,0,0), \ r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \text{ şi } r_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} \equiv (\sin v - u \cos v, -\cos v - u \sin v, u)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{2u^2 + 1}.$$

Prin urmare, versorul normal al suprafeţei Σ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{2u^2+1}} \cdot (\sin v - u \cos v, -\cos v - u \sin v, u).$$

În concluzie, coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l =< r_{uu}, U >= 0, \ m =< r_{uv}, U >= -\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}}$$

şi

$$n =< r_{vv}, U >= \frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}},$$

adică a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ este

$$b = \frac{1}{\sqrt{2u^2+1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & u^2 \end{pmatrix}.$$

12.4. Aplicaţia Weingarten. Curburile unei suprafeţe

În această secţiune vom introduce nişte concepte matematice (*aplicaţia Weingarten*, *curbura totală*, *curbura medie* şi *curburile principale*) care permit efectiv descrierea locală sau globală a formei suprafeţei parametrizate $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

DEFINIŢIA 12.4.1. *Funcţia matricească $L : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$P = r(u,v) \in \Sigma \to L_P \overset{def}{=} (g^{-1} \cdot b)_P = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} lG - mF & mG - nF \\ mE - lF & nE - mF \end{pmatrix}$$

se numeşte ***aplicaţia Weingarten*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Observaţia 12.4.1. *Termenul de "aplicaţie" utilizat în definiţia anterioară este folosit deoarece matricea L_P poate fi privită ca matricea în baza $\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$ a unui endomorfism $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ numit tot* ***aplicaţia Weingarten****. Cu alte cuvinte, din definiţia matricii unui endomorfism într-o anumită bază rezultă că aplicaţia Weingarten L_P este definită pe baza $\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$ după cum urmează:*

$$L_P(r_u) = \frac{1}{EG - F^2} \cdot [(lG - mF) \cdot r_u + (mE - lF) \cdot r_v]$$

şi

$$L_P(r_v) = \frac{1}{EG - F^2} \cdot [(mG - nF) \cdot r_u + (nE - mF) \cdot r_v].$$

Prin urmare, dacă $w = c_1 \cdot r_u + c_2 \cdot r_v$, unde $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, este un vector oarecare din planul tangent $T_P\Sigma$, atunci din liniaritatea aplicaţiei Weingarten L_P deducem că avem

$$L_P(w) = c_1 \cdot L_P(r_u) + c_2 \cdot L_P(r_v).$$

Teorema 12.4.1. *Dacă $U = \dfrac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v]$ este versorul normal la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, atunci următoarele formule sunt adevărate:*

$$L(r_u) = -\frac{\partial U}{\partial u} \text{ şi } L(r_v) = -\frac{\partial U}{\partial v}.$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar prima egalitate cerută în teoremă deoarece cea de-a doua se demonstrează în mod absolut analog.

Derivând parţial în raport cu u egalitatea $< U, U >= 1$, deducem că

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, U \right\rangle = 0,$$

adică vectorul $\partial U/\partial u$ este tangent în punctul $P = r(u, v)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$. Atunci, există α, $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \alpha \cdot r_u + \beta \cdot r_v.$$

Efectuând în această egalitate produsul scalar, pe rând, cu r_u şi r_v, găsim sistemul Cramer

$$\begin{cases} \alpha \cdot E + \beta \cdot F = \left\langle \dfrac{\partial U}{\partial u}, r_u \right\rangle \\ \alpha \cdot F + \beta \cdot G = \left\langle \dfrac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle. \end{cases}$$

Pe de altă parte, derivând parţial în raport cu u egalităţile

$$< U, r_u >=< U, r_v >= 0,$$

deducem că

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_u \right\rangle = - < U, r_{uu} >= -l \text{ şi } \left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle = - < U, r_{uv} >= -m,$$

adică sistemul Cramer anterior devine

$$\begin{cases} \alpha \cdot E + \beta \cdot F = -l \\ \alpha \cdot F + \beta \cdot G = -m. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem Cramer este

$$\alpha = -\frac{lG - mF}{EG - F^2} \text{ şi } \beta = -\frac{mE - lF}{EG - F^2},$$

adică

$$\frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{lG - mF}{EG - F^2} \cdot r_u - \frac{mE - lF}{EG - F^2} \cdot r_v = -L(r_u).$$

□

OBSERVAŢIA 12.4.2. *Teorema precedentă ne arată că aplicaţia Weingarten L_P conţine toate informaţiile legate de variaţia locală pe suprafaţa Σ a versorului normal U_P. Deoarece versorul normal U_P este perpendicular pe planul tangent $T_P\Sigma$ rezultă că aplicaţia Weingarten L_P conţine toate informaţiile legate de variaţia locală pe suprafaţa Σ a planului tangent $T_P\Sigma$. Prin urmare, deoarece într-o vecinătate suficient de mică a punctului $P \in \Sigma$ putem aproxima suprafaţa Σ cu planul tangent $T_P\Sigma$, deducem că aplicaţia Weingarten L_P conţine toate informaţiile legate de forma suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P.*

EXEMPLUL 12.4.1. *Să se calculeze aplicaţia Weingarten a* ***suprafeţei lui Ţiţeica*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \backslash \{(u,v) \mid u \cdot v = 0\} \to \mathbb{R}^3, \; r(u,v) = (u, v, u^{-1}v^{-1}).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, -u^{-2}v^{-1}) \text{ şi } r_v = (0, 1, -u^{-1}v^{-2}).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0, 0, 2u^{-3}v^{-1}), \; r_{uv} = (0, 0, u^{-2}v^{-2}) \text{ şi } r_{vv} = (0, 0, 2u^{-1}v^{-3}).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E =< r_u, r_u >= 1 + u^{-4}v^{-2}, \; F =< r_u, r_v >= u^{-3}v^{-3}$$

şi

$$G =< r_v, r_v >= 1 + u^{-2}v^{-4},$$

adică prima formă fundamentală a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$g = \begin{pmatrix} 1 + u^{-4}v^{-2} & u^{-3}v^{-3} \\ u^{-3}v^{-3} & 1 + u^{-2}v^{-4} \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2} > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$g^{-1} = \frac{1}{1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + u^{-2}v^{-4} & -u^{-3}v^{-3} \\ -u^{-3}v^{-3} & 1 + u^{-4}v^{-2} \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -u^{-2}v^{-1} \\ 0 & 1 & -u^{-1}v^{-2} \end{vmatrix} \equiv (u^{-2}v^{-1}, u^{-1}v^{-2}, 1)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2}}.$$

Prin urmare, versorul normal al suprafeţei lui Ţiţeica este

$$U=\frac{1}{||r_u\times r_v||}\cdot[r_u\times r_v]=\frac{1}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}}\cdot(u^{-2}v^{-1},u^{-1}v^{-2},1).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l=<r_{uu},U>=\frac{2u^{-3}v^{-1}}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}},$$

$$m=<r_{uv},U>=\frac{u^{-2}v^{-2}}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}}$$

şi

$$n=<r_{vv},U>=\frac{2u^{-1}v^{-3}}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}},$$

adică a doua formă fundamentală a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$b=\frac{1}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}}\cdot\begin{pmatrix}2u^{-3}v^{-1} & u^{-2}v^{-2}\\ u^{-2}v^{-2} & 2u^{-1}v^{-3}\end{pmatrix}.$$

În concluzie, aplicaţia Weingarten a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$L=g^{-1}b=\frac{1}{[\det g]^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix}2u^{-3}v^{-1}+u^{-5}v^{-5} & u^{-2}v^{-2}-u^{-4}v^{-6}\\ u^{-2}v^{-2}-u^{-6}v^{-4} & 2u^{-1}v^{-3}+u^{-5}v^{-5}\end{pmatrix}.$$

DEFINIŢIA 12.4.2. *Funcţia scalară $K:\Sigma\to\mathbb{R}$ definită prin*

$$P=r(u,v)\in\Sigma\to K(P)\overset{def}{=}[\det L](P)=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}$$

*se numeşte **curbura totală** sau **curbura Gauss** a suprafeţei $\Sigma=\operatorname{Im}r$.*

OBSERVAŢIA 12.4.3. *Deoarece avem*

$$\det(A\cdot B)=(\det A)\cdot(\det B),$$

rezultă că

$$K=\det L=\det(g^{-1}\cdot b)=\frac{\det b}{\det g}.$$

DEFINIŢIA 12.4.3. *Dacă*

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$

este o matrice arbitrară, atunci numărul real

$$Trace(A)=a+d$$

*se numeşte **urma** matricii A.*

DEFINIŢIA 12.4.4. *Funcţia scalară $H:\Sigma\to\mathbb{R}$ definită prin*

$$P=r(u,v)\in\Sigma\to H(P)\overset{def}{=}\frac{1}{2}\cdot[Trace(L)](P)=\frac{1}{2}\cdot\frac{lG-2mF+nE}{EG-F^2}$$

*se numeşte **curbura medie** a suprafeţei $\Sigma=\operatorname{Im}r$.*

TEOREMA 12.4.2. *Următoarea inegalitate este întotdeauna adevărată:*

$$\left[H^2-K\right](P)\geq 0,\ \forall\ P\in\Sigma.$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru a demonstra inegalitatea din teoremă, vom demonstra întâi că pentru orice punct $P = r(u, v) \in \Sigma$ fixat, aplicaţia Weingarten

$$L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$$

este un endomorfism simetric, adică

$$\langle L_P(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, L_P(w_2)\rangle\,,\ \forall\ w_1, w_2 \in T_P\Sigma.$$

Fie doi vectori tangenţi arbitrari

$$w_1 = a \cdot r_u + b \cdot r_v \text{ şi } w_2 = \alpha \cdot r_u + \beta \cdot r_v,$$

unde $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci, folosind liniaritatea aplicaţiei Weingarten şi a produsului scalar, deducem că

$$\langle L_P(w_1), w_2\rangle = a\alpha\,\langle L_P(r_u), r_u\rangle + b\beta\,\langle L_P(r_v), r_v\rangle + a\beta\,\langle L_P(r_u), r_v\rangle + b\alpha\,\langle L_P(r_v), r_u\rangle$$

şi

$$\langle w_1, L_P(w_2)\rangle = a\alpha\,\langle r_u, L_P(r_u)\rangle + b\beta\,\langle r_v, L_P(r_v)\rangle + a\beta\,\langle r_u, L_P(r_v)\rangle + b\alpha\,\langle r_v, L_P(r_u)\rangle\,.$$

Simetria produsului scalar ne conduce la relaţia

$$\begin{aligned}\langle L_P(w_1), w_2\rangle - \langle w_1, L_P(w_2)\rangle &= a\beta\,[\langle L_P(r_u), r_v\rangle - \langle r_u, L_P(r_v)\rangle] + \\ &\quad + b\alpha\,[\langle L_P(r_v), r_u\rangle - \langle r_v, L_P(r_u)\rangle]\,.\end{aligned}$$

În consecinţă, pentru a demonstra că aplicaţia Weingarten L_P este un endomorfism simetric, este suficient să demonstrăm că

$$\langle L_P(r_u), r_v\rangle = \langle r_u, L_P(r_v)\rangle \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle = \left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial v} \right\rangle,$$

unde U este versorul normal la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$. Derivând parţial în raport cu u egalitatea $\langle U, r_v\rangle = 0$ şi în raport cu v egalitatea $\langle U, r_u\rangle = 0$, deducem că

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle = -\,\langle U, r_{vu}\rangle = -m$$

şi

$$\left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial v} \right\rangle = -\,\langle r_{uv}, U\rangle = -m,$$

unde am ţinut cont de teorema lui Schwartz, şi anume $r_{uv} = r_{vu}$.

În consecinţă, aplicaţia Weingarten L_P este un endomorfism simetric pentru orice punct $P \in \Sigma$.

Deoarece orice endomorfism simetric este diagonalizabil, rezultă că aplicaţia Weingarten L_P este diagonalizabilă pentru orice punct $P \in \Sigma$. Prin urmare, matricea L_P are două valori proprii reale, care sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\det\left[L_P - \lambda \cdot I_2\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2H(P) \cdot \lambda + K(P) = 0,$$

unde I_2 este matricea unitate. În concluzie, discriminantul acestei ecuaţii de grad doi este pozitiv, adică avem

$$[H(P)]^2 - K(P) \geq 0,\ \forall\ P \in \Sigma.$$

□

OBSERVAŢIA 12.4.4. *Deşi endomorfismul* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$, *unde* $P = r(u,v) \in \Sigma$ *este un endomorfism simetric, matricea* $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$ *nu este neapărat o matrice simetrică. Acest fapt apare din cauză că matricea* $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$ *este matricea în baza* ***neortonormată*** $\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$ *a endomorfismului* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$.

DEFINIŢIA 12.4.5. *Funcţiile scalare* $k_{1,2} : \Sigma \to \mathbb{R}$ *definite prin*

$$P = r(u,v) \in \Sigma \to k_{1,2}(P) \stackrel{def}{=} \left[H \pm \sqrt{H^2 - K}\right](P)$$

se numesc ***curburile principale*** *ale suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

OBSERVAŢIA 12.4.5. *Din definiţiile curburilor principale rezultă imediat că următoarele egalităţi sunt adevărate:*

$$K(P) = [k_1 \cdot k_2](P), \ \forall\ P \in \Sigma,$$

şi

$$H(P) = \left[\frac{k_1 + k_2}{2}\right](P), \ \forall\ P \in \Sigma.$$

OBSERVAŢIA 12.4.6. *Este evident că curburile principale* $k_1(P)$ *şi* $k_2(P)$ *sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice*

$$k^2 - 2H(P)k + K(P) = 0 \Leftrightarrow \det[L_P - k \cdot I_2] = 0.$$

Cu alte cuvinte, curburile principale $k_1(P)$ *şi* $k_2(P)$ *sunt valorile proprii ale aplicaţiei Weingarten* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ *a cărei matrice în baza* ***neortonormată***

$$\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$$

este matricea (nu neapărat simetrică!) $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$.

EXEMPLUL 12.4.2. *Să se calculeze curbura totală, curbura medie şi curburile principale ale paraboloidului hiperbolic* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u,v) = (u, v, uv).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, v) \text{ şi } r_v = (0, 1, u).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0,0,0), \ r_{uv} = (0,0,1) \text{ şi } r_{vv} = (0,0,0).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E =< r_u, r_u >= 1 + v^2, \ F =< r_u, r_v >= uv \text{ şi } G =< r_v, r_v >= 1 + u^2,$$

adică prima formă fundamentală a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$g = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 1 + u^2 + v^2 > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$g^{-1} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 + u^2 & -uv \\ -uv & 1 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} \equiv (-v, -u, 1)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}.$$

Prin urmare, versorul normal al paraboloidului hiperbolic Σ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \cdot (-v, -u, 1).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = < r_{uu}, U >= 0, \ m = < r_{uv}, U >= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \text{ şi } n = < r_{vv}, U >= 0,$$

adică a doua formă fundamentală a paraboloidului hiperbolic Σ este

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia Weingarten a paraboloidului hiperbolic Σ este

$$L = g^{-1}b = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} -uv & 1 + u^2 \\ 1 + v^2 & -uv \end{pmatrix}.$$

Curbura totală (Gauss) a paraboloidului hiperbolic Σ este

$$K = \det L = -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Curbura medie a paraboloidului hiperbolic Σ este

$$H = \frac{1}{2} \cdot Trace(L) = -\frac{uv}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

În concluzie, curburile principale ale paraboloidului hiperbolic Σ sunt

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} = \frac{-uv \pm \sqrt{(1 + u^2)(1 + v^2)}}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

DEFINIŢIA 12.4.6. *Orice versor $w \in T_P\Sigma$ cu proprietatea*

$$L_P(w) = k_1(P) \cdot w \text{ sau } L_P(w) = k_2(P) \cdot w$$

*se numeşte **versor principal** al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ în punctul $P \in \Sigma$. Direcţia unui versor principal se numeşte **direcţie principală** a suprafeţei Σ în punctul P.*

OBSERVAŢIA 12.4.7. *Deoarece aplicaţia Weingarten $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ este diagonalizabilă, rezultă că există o bază **ortonormată** (formată din versori proprii ortogonali)*

$$\{e_1, e_2\} \subset T_P\Sigma$$

astfel încât

$$L_P(e_1) = k_1(P) \cdot e_1 \text{ şi } L_P(e_2) = k_2(P) \cdot e_2.$$

Cu alte cuvinte, în orice punct $P \in \Sigma$ există cel puţin două direcţii principale distincte, care sunt perpendiculare. Dacă $k_1(P) \neq k_2(P)$, atunci există două şi numai două direcţii principale distincte, care sunt perpendiculare.

OBSERVAŢIA 12.4.8. *Sistemul de vectori*

$$\widetilde{B}_P = \{e_1, e_2, U_P\}$$

formează o bază mobilă (ortonormată!) în spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, <,>)$.

DEFINIŢIA 12.4.7. *Un punct* $P \in \Sigma$ *cu proprietatea*

$$k_1(P) = k_2(P) = k \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***punct ombilical*** *al suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

OBSERVAŢIA 12.4.9. *Un punct* $P \in \Sigma$ *este punct ombilical al suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *dacă şi numai dacă*

$$\left[H^2 - K\right](P) = 0.$$

TEOREMA 12.4.3. *Un punct* $P \in \Sigma$ *este punct ombilical al suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *dacă şi numai dacă*

$$L_P(w) = k \cdot w, \ \forall\ w \in T_P\Sigma.$$

DEMONSTRAŢIE. " $\Leftarrow$ " Să presupunem că

$$L_P(w) = k \cdot w, \ \forall\ w \in T_P\Sigma.$$

Atunci, matricea aplicaţiei Weingarten în baza neortonormată

$$\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$$

este evident $L_P = k \cdot I_2$. Valorile proprii ale acestei matrici sunt evident

$$k_1(P) = k_2(P) = k.$$

" $\Rightarrow$ " Să presupunem că $P \in \Sigma$ este punct ombilical al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$, adică

$$k_1(P) = k_2(P) = k.$$

Deoarece aplicaţia Weingarten $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ este diagonalizabilă iar curburile principale $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt valorile proprii ale aplicaţiei Weingarten, rezultă că există o bază ortonormată

$$\{e_1, e_2\} \subset T_P\Sigma$$

astfel încât

$$L_P(e_1) = k \cdot e_1 \text{ şi } L_P(e_2) = k \cdot e_2,$$

Să considerăm acum că $w \in T_P\Sigma$ un vector tangent arbitrar. Atunci, există unici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$w = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2.$$

Prin urmare, avem

$$L_P(w) = \alpha \cdot L_P(e_1) + \beta \cdot L_P(e_2) = \alpha \cdot k \cdot e_1 + \beta \cdot k \cdot e_2 = k \cdot w.$$

□

OBSERVAŢIA 12.4.10. *Dacă* $P \in \Sigma$ *este un punct ombilical al suprafeţei* Σ, *atunci orice versor* $w \in T_P\Sigma$ *este un versor principal al suprafeţei* Σ *în punctul* P. *Prin urmare, orice direcţie este o direcţie principală a suprafeţei* Σ *în punctul ombilical* P.

COROLARUL 12.4.1. *Un punct* $P \in \Sigma$ *este punct ombilical al suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *dacă şi numai dacă*

$$L_P = k \cdot I_2 \Leftrightarrow b_P = k \cdot g_P.$$

DEMONSTRAŢIE. Corolarul este o consecinţă imediată a teoremei precedente şi a faptului că $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$. □

EXEMPLUL 12.4.3. *Să considerăm sfera centrate în originea* $O(0,0,0)$ *şi de rază* $R > 0$, *definită prin* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v).$$

Să se arate că toate punctele sferei Σ *sunt puncte ombilicale.*

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (-R \sin u \sin v, R \cos u \sin v, 0) \text{ şi } r_v = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, -R \sin v).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, 0),\ r_{uv} = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0)$$

şi

$$r_{vv} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, -R \cos v).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E =< r_u, r_u >= R^2 \sin^2 v,\ F =< r_u, r_v >= 0 \text{ şi } G =< r_v, r_v >= R^2,$$

adică prima formă fundamentală a sferei Σ *este*

$$g = R^2 \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u *şi* r_v *este*

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \sin v & 0 \\ R \cos u \cos v & R \sin u \cos v & -R \sin v \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv -R^2 \sin v \,(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \end{aligned}$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = R^2 \sin v.$$

Prin urmare, versorul normal al sferei Σ *este*

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = -\left(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v\right).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l =< r_{uu}, U >= R \sin^2 v,\ m =< r_{uv}, U >= 0 \text{ şi } n =< r_{vv}, U >= R,$$

adică a doua formă fundamentală a sferei Σ *este*

$$b = R \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \cdot g.$$

Aplicaţia Weingarten a sferei Σ *este*

$$L = g^{-1} b = g^{-1} \cdot \frac{1}{R} \cdot g = \frac{1}{R} \cdot I_2 = \frac{1}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Curbura totală (Gauss) a sferei Σ *este*

$$K = \det L = \frac{1}{R^2}.$$

Curbura medie a sferei Σ *este*

$$H = \frac{1}{2} \cdot Trace(L) = \frac{1}{R}.$$

Curburile principale ale sferei Σ *sunt*

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}.$$

În concluzie, toate punctele sferei Σ *sunt puncte ombilicale.*

OBSERVAŢIA 12.4.11. *Se poate demonstra că într-un punct ombilical* P *al unei suprafeţe* Σ *suprafaţa* Σ *se încovoaie la fel de tare şi în acelaşi sens pe toate direcţiile. Astfel, prin faptul că toate punctele unei sfere sunt puncte ombilicale se explică "rotunjimea" sferelor.*

DEFINIŢIA 12.4.8. *O suprafaţă* Σ *pentru care* $H \equiv 0$ *se numeşte* ***suprafaţă minimală****.*

OBSERVAŢIA 12.4.12. *Din punct de vedere geometric, se poate demonstra că dintre toate suprafeţele care trec printr-o curbă închisă, suprafaţa de arie minimă este o suprafaţă minimală. Demonstraţia acestei afirmaţii depăşeşte însă cadrul şi scopul acestei cărţi.*

EXEMPLUL 12.4.4. *Să se arate că* ***elicoidul drept*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

este o suprafaţă minimală.

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0) \text{ şi } r_v = (-u\sin v, u\cos v, 1).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0,0,0), \ r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \text{ şi } r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E =< r_u, r_u >= 1, \ F =< r_u, r_v >= 0 \text{ şi } G =< r_v, r_v >= 1 + u^2,$$

adică prima formă fundamentală a elicoidului drept Σ *este*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 1 + u^2 > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a elicoidului drept Σ *este*

$$g^{-1} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u *şi* r_v *este*

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} \equiv (\sin v, -\cos v, u)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1+u^2}.$$

Prin urmare, versorul normal al elicoidului drept Σ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot (\sin v, -\cos v, u).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l =< r_{uu}, U >= 0,\ m =< r_{uv}, U >= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ \text{şi}\ n =< r_{vv}, U >= 0,$$

adică a doua formă fundamentală a elicoidului drept Σ este

$$b = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia Weingarten a elicoidului drept Σ este

$$L = g^{-1}b = -\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+u^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Curbura medie a elicoidului drept Σ este

$$H = \frac{1}{2} \cdot Trace(L) \equiv 0.$$

În concluzie, elicoidul drept Σ este o suprafaţă minimală.

12.5. Interpretarea geometrică a curburilor unei suprafeţe

Să considerăm că $\Sigma \subset E_3$ este o suprafaţă şi că $P \in \Sigma$ este un punct arbitrar fixat al suprafeţei.

TEOREMA 12.5.1. *Într-o vecinătate suficient de mică a punctului $P \in \Sigma$ suprafaţa Σ are aproximativ aceeaşi formă cu forma cuadricei*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2} \cdot \left[k_1(P) \cdot x^2 + k_2(P) \cdot y^2\right]$$

într-o vecinătate suficient de mică a originii $O(0,0,0) \in \Sigma'$, unde $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt curburile principale ale suprafeţei Σ în punctul P.

DEMONSTRAŢIE. Efectuând eventual o translaţie şi o rotaţie în spaţiu, putem presupune fără a restrânge generalitatea că:

(1) $P = O(0,0,0)$;
(2) $U_P = (0,0,1) \equiv \overline{k} \subset Oz$ este versorul normal în P la suprafaţa Σ.
(3) $e_1 = (1,0,0) \equiv \overline{i} \subset Ox$ şi $e_2 = (0,1,0) \equiv \overline{j} \subset Oy$ sunt doi versori proprii ortogonali ai suprafeţei Σ în punctul P.

Mai mult, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite, putem presupune că, într-o vecinătate suficient de mică a punctului $P \in \Sigma$, suprafaţa Σ este parametrizată sub forma

$$\Sigma = \operatorname{Im} r,\ r(u,v) = (u, v, \varphi(u,v)),$$

unde

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

este o funcţie diferenţiabilă.

Este evident că din (1) rezultă $\varphi(0,0) = 0$.

Prin derivări parţiale, obţinem

$$r_u(P) = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0)\right)\ \text{şi}\ r_v(P) = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0)\right).$$

Produsul vectorial al vectorilor $r_u(P)$ şi $r_v(P)$ este

$$r_u(P) \times r_v(P) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) \end{vmatrix} \equiv \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0), -\frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0), 1 \right).$$

Deoarece produsul vectorial $r_u(P) \times r_v(P)$ este coliniar cu versorul normal U_P, din presupunerea (2) deducem că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) = 0.$$

Aceste relaţii, împreună cu presupunerea (3), implică

$$r_u(P) = (1,0,0) = e_1 \text{ şi } r_v(P) = (0,1,0) = e_2,$$

adică $r_u(P)$ şi $r_v(P)$ sunt doi versori proprii ortogonali ai suprafeţei Σ în punctul P. Prin urmare, avem

$$L_P(r_u(P)) = k_1(P) \cdot r_u(P) \text{ şi } L_P(r_v(P)) = k_2(P) \cdot r_v(P),$$

unde L_P este aplicaţia Weingarten a suprafeţei Σ în punctul P iar $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt curburile principale ale suprafeţei Σ în punctul P.

Pe de altă parte, în acest context geometric, prima formă fundamentală a suprafeţei Σ în punctul P este

$$g_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce implică $L_P = b_P$, unde b_P este a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ în punctul P. Totodată, prin derivări parţiale succesive, avem

$$r_{uu}(P) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0)\right), \ r_{uv}(P) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0)\right)$$

şi

$$r_{vv}(P) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0)\right),$$

adică găsim

$$L_P = b_P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Folosind acum definiţia aplicaţiei Weingarten, deducem că

$$\begin{cases} L_P(r_u(P)) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0) \cdot r_u(P) + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) \cdot r_v(P) = k_1(P) \cdot r_u(P) \\ L_P(r_v(P)) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) \cdot r_u(P) + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0) \cdot r_v(P) = k_2(P) \cdot r_v(P), \end{cases}$$

ceea ce implică

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0) = k_1(P), \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0) = k_2(P) \text{ şi } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) = 0.$$

Deci, în contextul geometric prezentat mai sus, am dedus că funcţia $\varphi(u,v)$ are proprietăţile

$$\varphi(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) = 0$$

şi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0) = k_1(P), \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0) = k_2(P).$$

Atunci, conform formulei lui Taylor aplicată funcţiei $\varphi(u,v)$ şi punctului $(0,0)$, deducem că, pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(0,0)$, putem aproxima funcţia $\varphi(u,v)$ cu funcţia polinomială de grad doi

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \varphi(0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0)\cdot u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0)\cdot v + \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0)\cdot u^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0)\cdot u\cdot v + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0)\cdot v^2\right], \end{aligned}$$

adică, pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(0,0)$, putem aproxima funcţia $\varphi(u,v)$ cu funcţia polinomială de grad doi

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1(P)\cdot u^2 + k_2(P)\cdot v^2\right].$$

În concluzie, rezultă ceea ce aveam de demonstrat. □

DEFINIŢIA 12.5.1. *Cuadrica*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1(P)\cdot x^2 + k_2(P)\cdot y^2\right]$$

*unde $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt curburile principale ale suprafeţei Σ în punctul $P \in \Sigma$, se numeşte **aproximarea pătratică** a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P.*

Interpretarea geometrică a semnului curburii totale (Gauss) $K(P) = k_1(P)\cdot k_2(P)$

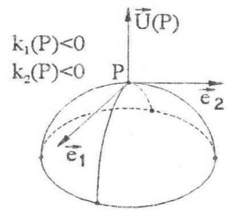
(1) Să presupunem că în punctul $P \in \Sigma$ avem

$$K(P) = k_1(P)\cdot k_2(P) > 0.$$

Atunci, rezultă că $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au acelaşi semn, adică aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este **paraboloidul eliptic**

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1(P)\cdot x^2 + k_2(P)\cdot y^2\right].$$

De aceea, local, punctul P apare pe suprafaţa Σ ca un **vârf**.



Paraboloidul eliptic Σ'

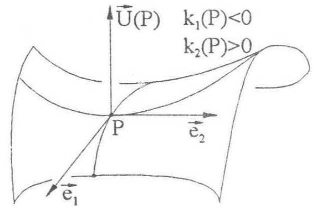
(2) Să presupunem că în punctul $P \in \Sigma$ avem

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P) < 0.$$

Atunci, rezultă că $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au semne contrare, adică aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este **paraboloidul hiperbolic**

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2} \cdot \left[k_1(P) \cdot x^2 + k_2(P) \cdot y^2\right].$$

De aceea, în vecinătatea punctului P suprafaţa Σ arată ca o **şa**.



Paraboloidul hiperbolic Σ'

(3) Să presupunem că în punctul $P \in \Sigma$ avem

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P) = 0$$

şi să considerăm următoarele două cazuri:

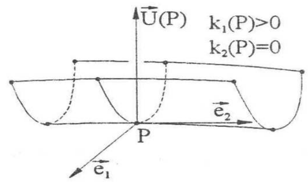
(a) numai una dintre curburile principale este zero, de exemplu

$$k_1(P) \neq 0 \text{ şi } k_2(P) = 0.$$

Atunci, aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este **cilindrul parabolic**

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2} \cdot k_1(P) \cdot x^2.$$

De aceea, în vecinătatea punctului P suprafaţa Σ arată ca o **albie**.



Cilindrul parabolic Σ'

(b) ambele curburi principale sunt zero, adică

$$k_1(P) = k_2(P) = 0.$$

Atunci, aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este **planul**

$$\Sigma' : z = 0,$$

ceea ce ne conduce la concluzia că nu putem obţine nici o informaţie despre forma suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P. Un asemenea punct se numeşte **punct planar** al suprafeţei Σ.

OBSERVAŢIA 12.5.1. *Un punct $P \in \Sigma$ este un punct planar al suprafeţei Σ dacă şi numai dacă*

$$b_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLUL 12.5.1. *Să se arate că punctul $O(0,0,0)$ este singurul punct planar al suprafeţei*

$$\Sigma : z = x^3 - 3xy^2.$$

Este evident că avem $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2),$$

şi $r(0,0) = O(0,0,0)$.

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, 3u^2 - 3v^2) \ \text{şi} \ r_v = (0, 1, -6uv).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0,0,6u), \ r_{uv} = (0,0,-6v) \ \text{şi} \ r_{vv} = (0,0,-6u).$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 3(u^2 - v^2) \\ 0 & 1 & -6uv \end{vmatrix} \equiv (-3(u^2 - v^2), 6uv, 1)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}.$$

Prin urmare, versorul normal al suprafeţei Σ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}} \cdot (-3(u^2 - v^2), 6uv, 1).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = < r_{uu}, U >= \frac{6u}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}},$$

$$m = < r_{uv}, U >= -\frac{6v}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}}$$

şi

$$n = < r_{vv}, U >= -\frac{6u}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}},$$

adică a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ este

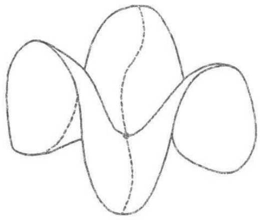
$$b = \frac{6}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} u & -v \\ -v & -u \end{pmatrix}.$$

În concluzie, singurul punct planar al suprafeţei Σ este punctul $O(0,0,0)$.

OBSERVAŢIA 12.5.2. *Punctul planar $O(0,0,0)$ al suprafeţei*

$$\Sigma : z = x^3 - 3xy^2$$

este ***punctul de întâlnire a trei văi separate de trei dealuri.***



Punctul de întâlnire a trei văi separate de trei dealuri

EXEMPLUL 12.5.2. *Suprafaţa obţinută prin rotirea în jurul axei Oz a unui cerc situat în planul xOz, de rază $r > 0$ şi centrat în punctul $C_0(R,0,0)$, unde $R > r$, se numeşte* ***tor****. Torul este suprafaţa parametrizată $\mathcal{T} = \operatorname{Im} r$, unde aplicaţia*

$$r : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$$

este definită prin

$$r(u,v) = ((R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, r\sin u).$$

Vom studia în continuare care sunt punctele planare ale torului $\mathcal{T}$. Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (-r\sin u \sin v, -r\sin u\cos v, r\cos u)$$

şi

$$r_v = ((R + r\cos u)\cos v, -(R + r\cos u)\sin v, 0).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (-r\cos u\sin v, -r\cos u\cos v, -r\sin u),$$

$$r_{uv} = (-r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, 0)$$

şi

$$r_{vv} = (-(R + r\cos u)\sin v, -(R + r\cos u)\cos v, 0).$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -r\sin u\sin v & -r\sin u\cos v & r\cos u \\ (R + r\cos u)\cos v & -(R + r\cos u)\sin v & 0 \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv [r(R + r\cos u)] \cdot (\cos u\sin v, \cos u\cos v, \sin u) \end{aligned}$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = r(R + r\cos u).$$

Prin urmare, versorul normal al torului $\mathcal{T}$ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = (\cos u\sin v, \cos u\cos v, \sin u).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l =< r_{uu}, U >= -r, \ m =< r_{uv}, U >= 0$$

şi

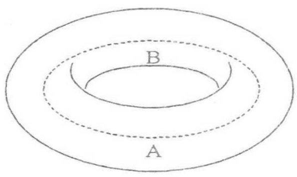
$$n =< r_{vv}, U >= -(R + r \cos u) \cos u,$$

adică a doua formă fundamentală a torului $\mathcal{T}$ este

$$b = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -(R + r \cos u) \cos u \end{pmatrix}.$$

În concluzie, torul $\mathcal{T}$ nu are nici un punct planar.

OBSERVAŢIA 12.5.3. *Intuitiv vorbind asupra torului $\mathcal{T}$, putem spune că în punctele din regiunea A avem $K > 0$ deoarece, local, aceste puncte sunt nişte vârfuri. În punctele din regiunea B avem $K < 0$ deoarece în vecinătatea oricărui punct din această regiune torul $\mathcal{T}$ seamănă cu o şa. Pe cele două cercuri reprezentate punctat (cercurile de rază R situate în planele $z = \pm r$) avem $K = 0$ deoarece de-a lungul acestor cercuri torul $\mathcal{T}$ seamănă local cu o albie.*



Torul $\mathcal{T}$

Bibliografie

[1] **Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu:** *Curs de algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială şi ecuaţii diferenţiale*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, Vol. I, 1992, Vol. II, 1993.

[2] **Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache:** *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială. Ecuaţii diferenţiale* (*Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[3] **Gh. Atanasiu, E. Stoica:** *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[4] **Gh. Atanasiu, M. Târnoveanu, M. Purcaru, A. Manea:** *Algebră liniară şi geometrie analitică (Culegere de probleme)*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 2002.

[5] **V. Balan:** *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Universitatea "Politehnica" din Bucureşti, 1998.

[6] **S. Ianuş:** *Curs de geometrie diferenţială*, Universitatea Bucureşti, 1981.

[7] **R. Miron:** *Introducere în geometria diferenţială*, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, 1971.

[8] **R. Miron:** *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[9] **L. Nicolescu:** *Curs de geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1990.

[10] **L. Nicolescu:** *Geometrie diferenţială (Culegere de probleme)*, Universitatea Bucureşti, 1982.

[11] **V. Obădeanu:** *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[12] **V. Oproiu:** *Geometrie*, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, 1980.

[13] **Gh. Pitiş:** *Curs de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1990.

[14] **C. Radu:** *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura All, Bucureşti, 1996.

[15] **C. Radu, L. Drăguşin, C. Drăguşin:** *Algebră liniară. Analiză matematică. Geometrie analitică şi diferenţială (Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2000.

[16] **N. Soare:** *Curs de geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1996.

[17] **K. Teleman:** *Geometrie diferenţială locală şi globală*, Editura Tehnică, 1974.

[18] **A. Turtoi:** *Geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1985.

[19] **C. Udrişte:** *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 2000.

[20] **C. Udrişte:** *Geometrie diferenţială. Ecuaţii diferenţiale*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1997.

[21] **C. Udrişte, V. Balan:** *Analytic and differential geometry*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1999.

[22] **Gh. Vrănceanu:** *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[23] **Gh. Vrănceanu, G. Mărgulescu:** *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.