***49.** Demuestre que la función $f(x)$ del Ejemplo 9 es también constante en el intervalo $(-\infty, -1)$. Calcule el valor de la constante. *Sugerencia*: Calcule $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

***50.** Calcule la derivada de $f(x) = x - \tan^{-1}(\tan x)$. ¿Qué implica su respuesta sobre $f(x)$? Calcule $f(0)$ y $f(\pi)$. ¿Hay aquí una contradicción?

***51.** Calcule la derivada de $f(x) = x - \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ para $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ y dibuje la gráfica de f en ese intervalo.

En los Ejercicios 52-55, resuelva los problemas de valor inicial.

◈52. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

◈53. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{9+x^2} \\ y(3) = 2 \end{cases}$

◈54. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(1/2) = 1 \end{cases}$

◈55. $\begin{cases} y' = \dfrac{4}{\sqrt{25-x^2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3.6 Funciones hiperbólicas

Cualquier función definida en la recta real se puede expresar (de forma única) como la suma de una función par y una función impar (*véase* el Ejercicio 35 de la Sección P.5). Las **funciones hiperbólicas** $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ son, respectivamente, las funciones par e impar cuya suma es la función exponencial e^x.

DEFINICIÓN 15 Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico

Para cualquier número real x el **coseno hiperbólico**, $\cosh x$, y **seno hiperbólico**, $\operatorname{senh} x$, se definen como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Recuérdese que el coseno y el seno se denominan *funciones circulares* debido a que, para todo t, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está en la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. De forma similar, cosh y senh se denominan *funciones hiperbólicas* porque el punto $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está en la hipérbola rectangular cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$,

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \qquad \text{para todo } t \text{ real}$$

Para ver esto, obsérvese que

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\,(e^{2t} + 2 + e^{-2t} - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})) \\ &= \frac{1}{4}\,(2 + 2) = 1 \end{aligned}$$

En este caso t no se puede interpretar como longitud de un arco ni como un ángulo, como hacíamos en el caso circular; sin embargo, el *área* del *sector hiperbólico* que está limitado por $y = 0$, la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta que va del origen a $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ es de $t/2$ unidades cuadradas (*véase* el Ejercicio 21 de la Sección 8.4), lo mismo que el área del sector circular limitado por $y = 0$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta que va del origen a $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ (*véase* la Figura 3.26).

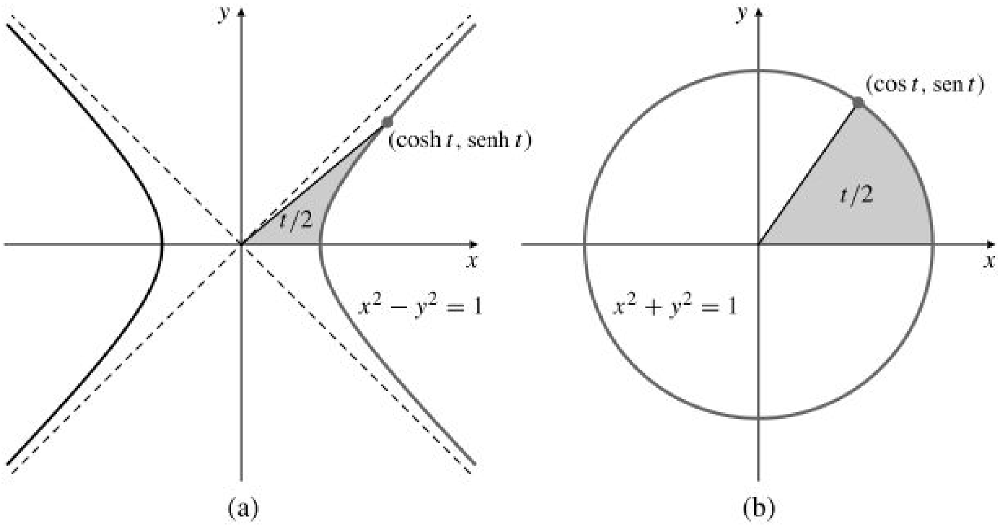

Figura 3.26 Las dos áreas sombreadas miden $t/2$ unidades cuadradas.

Obsérvese que, de forma similar a los correspondientes valores de cos x y sen x, tenemos que

$$\cosh 0 = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} 0 = 0$$

y que cosh x, como cos x, es una función par y senh x, como sen x, es una función impar:

$$\cosh(-x) = \cosh x, \qquad \operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$$

Las gráficas de cosh y senh se muestran en la Figura 3.27. La gráfica de $y = \cosh x$ se denomina **catenaria**. Una cadena que cuelga por sus extremos tomará la forma de una catenaria.

Muchas otras propiedades de las funciones hiperbólicas se parecen a las de sus correspondientes funciones circulares, algunas veces con los signos cambiados.

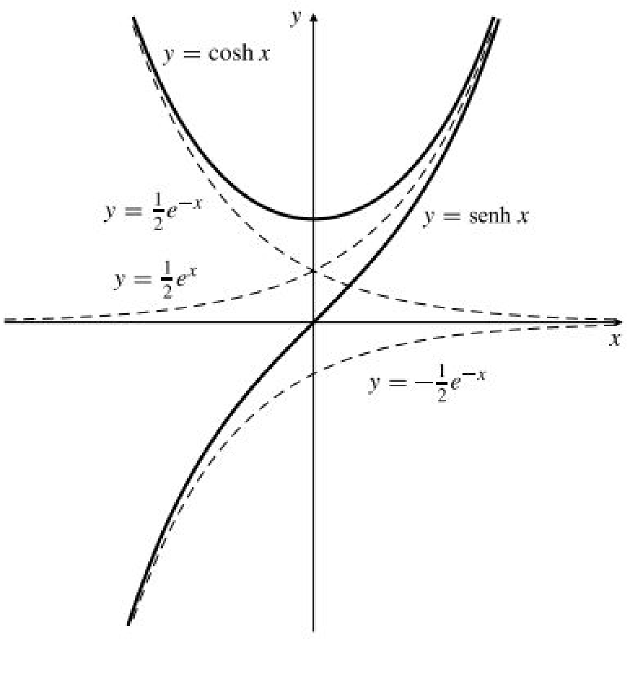

Figura 3.27 Gráficas de cosh y senh y algunas funciones exponenciales con respecto a las que son asintóticas.

Ejemplo 1 Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

Solución Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \cosh x$$

Las siguientes fórmulas de adición y del ángulo doble se pueden comprobar algebraicamente utilizando la definición de cosh y senh, junto con las leyes de los exponentes:

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1$$
$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh} x \cosh x.$$

Por analogía con las funciones trigonométricas, se pueden definir otras cuatro funciones hiperbólicas en función de cosh y senh.

DEFINICIÓN 16 **Otras funciones hiperbólicas**

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Multiplicando el numerador y un denominador de la fracción que define $\tanh x$ por e^{-x} y e^x, respectivamente, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

de forma que la gráfica de $y = \tanh x$ tiene dos asíntotas horizontales. La gráfica de $\tanh x$ (Figura 3.28) recuerda en su forma a las de $x/\sqrt{1 + x^2}$ y $(2/\pi)\tan^{-1} x$, pero, por supuesto, no son idénticas.

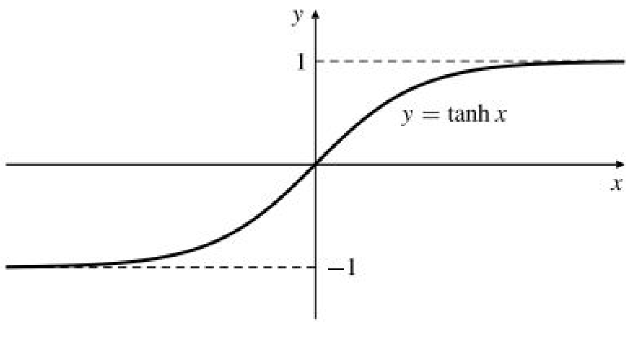

Figura 3.28 Gráfica de $\tanh x$.

Las derivadas de las restantes funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

se calculan rápidamente a partir de las de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ utilizando las Reglas de la Inversa y del Cociente. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)(\cosh x) - (\operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

Observación La distinción entre funciones trigonométricas e hiperbólicas desaparece en buena parte si se utilizan como variables números complejos en vez de números reales. Si i es la unidad imaginaria (de forma que $i^2 = -1$), entonces

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

(*Véase* el Apéndice I). Por tanto,

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \qquad \cos(ix) = \cosh(-x) = \cosh x,$$

$$\operatorname{senh}(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}(ix) = \frac{1}{i}\operatorname{senh}(-x) = i \operatorname{senh} x$$

Funciones hiperbólicas inversas

Las funciones senh y tanh son crecientes y, por tanto, uno a uno e invertibles en toda la recta real. Sus inversas se denominan senh^{-1} y $\tanh^{-1}$, respectivamente:

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \iff x = \operatorname{senh} y$$

$$y = \tanh^{-1} x \iff x = \tanh y$$

Como las funciones hiperbólicas se definen mediante exponenciales, cabe esperar que sus inversas se puedan expresar mediante logaritmos.

Ejemplo 2 Exprese $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$ mediante logaritmos.

Solución Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}$. Entonces,

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{(e^y)^2 - 1}{2e^y}$$

Para obtener la segunda fracción, hemos multiplicado el numerador y el denominador de la primera fracción por e^y. Por tanto,

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

Ésta es una ecuación de segundo grado en e^y, que se puede resolver mediante la correspondiente fórmula:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Nótese que $\sqrt{x^2 + 1} > x$. Como e^y no puede ser negativa, hay que emplear el signo positivo:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por tanto, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, y tenemos que

$$\boxed{\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

Hagamos ahora $y = \tanh^{-1} x$. Entonces,

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \qquad (-1 < x < 1)$$

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

Así,

$$\boxed{\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \qquad (-1 < x < 1)}$$

Como cosh no es uno a uno, hay que restringir su dominio antes de definir su función inversa. Definamos el valor principal de cosh como

$$\operatorname{Cosh} x = \cosh x \qquad (x \geqslant 0)$$

La función inversa, $\cosh^{-1}$, se define entonces así:

$$\boxed{\begin{aligned} y = \cosh^{-1} x \quad &\Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Cosh} y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \cosh y \qquad (y \geqslant 0) \end{aligned}}$$

Tal como hicimos con senh^{-1}, se puede obtener la fórmula

$$\boxed{\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad (x \geqslant 1)}$$

Ejercicios 3.6

1. Verifique las fórmulas de las derivadas de sech x, csch x y coth x dadas en esta sección.

2. Verifique las fórmulas de suma

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

Para ello exprese los miembros derechos de cada igualdad en función de exponenciales. Obtenga fórmulas similares para $\cosh(x-y)$ y $\operatorname{senh}(x-y)$.

3. Obtenga fórmulas de suma para $\tanh(x+y)$ y $\tanh(x-y)$ a partir de las de senh y cosh.

4. Dibuje las gráficas de $y = \coth x$, $y = \operatorname{sech} x$ y $y = \operatorname{csch} x$, indicando sus asíntotas.

5. Calcule las derivadas de $\operatorname{senh}^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$. Seguidamente exprese las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \int \frac{dx}{1-x^2}$$

mediante funciones hiperbólicas inversas.

6. Calcule las derivadas de las funciones $\operatorname{senh}^{-1}(x/a)$, $\cosh^{-1}(x/a)$ y $\tanh^{-1}(x/a)$ (con $a > 0$), y utilice los resultados para obtener fórmulas de ciertas integrales indefinidas.

7. Simplifique las siguientes expresiones: (a) $\operatorname{senh} \ln x$, (b) $\cosh \ln x$, (c) $\tanh \ln x$, (d) $\dfrac{\cosh \ln x + \operatorname{senh} \ln x}{\cosh \ln x - \operatorname{senh} \ln x}$

8. Sea $\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1}(1/x)$. Calcule el dominio, rango y derivada de $\operatorname{csch}^{-1} x$ y dibuje aproximadamente su gráfica. Exprese $\operatorname{csch}^{-1} x$ mediante logaritmos.

9. Repita el Ejercicio 8 para $\coth^{-1} x$.

***10.** Defina Sech x como una versión de sech x restringida adecuadamente y repita el Ejercicio 8 para la función $\operatorname{Sech}^{-1} x$.

◈11. Demuestre que las funciones $f_{A,B}(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ y $g_{C,D}(x) = C\cosh kx + D\operatorname{senh} kx$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial $y'' - k^2y = 0$ (ambas son soluciones generales). Exprese $f_{A,B}$ en función de $g_{C,D}$ y exprese $g_{C,D}$ en función de $f_{A,B}$.

◈12. Demuestre que $h_{L,M}(x) = L\cosh k(x-a) + M\operatorname{senh} k(x-a)$ es también una solución de la ecuación diferencial del ejercicio anterior. Exprese $h_{L,M}$ por medio de la función anterior $f_{A,B}$.

◈13. Resuelva el problema de valor inicial $y'' - k^2y = 0$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = v_0$. Exprese la solución mediante la función $h_{L,M}$ del Ejercicio 12.

3.7 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de la forma

$$ay'' = by' + cy = 0 \qquad (*)$$

siendo a, b y c constantes y $a \neq 0$ se denomina ecuación diferencial **homogénea, lineal, de segundo orden** con coeficientes constantes. La denominación *segundo orden* se refiere a la presencia de una segunda derivada. Los términos *lineal* y *homogénea* se refieren al hecho de que si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación, entonces también lo es $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ para cualquier valor de las constantes A y B:

$$\text{Si } ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0 \text{ y } ay_2''(t) + by_2'(t) = cy_2(t) = 0$$

$$\text{y si } y(t) = Ay_1(t) + By_2(t), \text{ entonces } ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

La Sección 17.1 contiene más detalles sobre esta terminología. En esta sección supondremos que la variable independiente en nuestras funciones es t en vez de x, por lo que la prima (′) indica la derivada d/dt. Esto es porque en la mayoría de las aplicaciones de estas ecuaciones la variable independiente es el tiempo.

Las ecuaciones del tipo (*) aparecen en muchas aplicaciones de las matemáticas. En particular se pueden usar para modelar vibraciones mecánicas tales como el movimiento de una masa suspendida de un muelle elástico o la corriente en ciertos circuitos eléctricos. En la mayor parte de sus aplicaciones las tres constantes a, b y c son positivas, aunque algunas veces puede ser $b = 0$.

Procedimiento para resolver $ay'' + by' + cy = 0$

En la Sección 3.4 observamos que la ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes $y' = ky$ tenía como solución $y = Ce^{kt}$. Intentemos encontrar una solución de la ecuación (*) de la forma $y = e^{rt}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (*), se obtiene

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Como e^{rt} nunca es cero, $y = e^{rt}$ será una solución de la ecuación diferencial (*) si y sólo si r satisface la **ecuación auxiliar** de segundo grado

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (**)$$

cuyas raíces se obtienen mediante la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

donde $D = b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación auxiliar (**).

Hay que considerar tres casos, en función de que el discriminante D sea positivo, cero o negativo.

CASO I Supongamos que $D = b^2 - 4ac > 0$. Entonces la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales diferentes, r_1 y r_2, dadas por

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Algunas veces estas raíces se pueden obtener fácilmente factorizando el miembro izquierdo de la ecuación auxiliar. En este caso tanto $y = y_1(t) = e^{r_1 t}$ como $y = y_2(t) = e^{r_2 t}$ son soluciones de la ecuación diferencial (*), y ninguna es múltiplo de la otra. Como indicamos anteriormente, la función

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

es también una solución para cualquier valor de las constantes A y B. Como la ecuación diferencial es de segundo orden y esta solución contiene dos constantes arbitrarias, podemos sospechar que es la **solución general**, es decir, que toda solución de la ecuación diferencial se puede escribir de esta forma. El Ejercicio 18 al final de esta sección indica una forma de demostrar esto.

CASO II Supongamos que $D = b^2 - 4ac = 0$. Entonces la ecuación auxiliar tiene dos raíces iguales $r_1 = r_2 = -b/(2a) = r$. Ciertamente $y = e^{rt}$ es una solución de (*). Se puede obtener la solución general haciendo $y = e^{rt}u(t)$ y calculando:

$$y' = e^{rt}(u'(t) + ru(t))$$
$$y'' = e^{rt}(u''(t) + 2ru'(t) + r^2u(t))$$

Incluyendo estas expresiones en (*), se obtiene

$$e^{rt}(au''(t) + (2ar + b)u'(t) + (ar^2 + br + c)u(t)) = 0$$

Como $e^{rt} \neq 0$, $2ar + b = 0$ y r cumple (**), esta ecuación se reduce a $u''(t) = 0$, cuya solución general es $u(t) = A + Bt$ para constantes arbitrarias A y B. Por tanto, la solución general de (*) en este caso es

$$\boxed{y = Ae^{rt} + Bte^{rt}}$$

CASO III Supongamos que $D = b^2 - 4ac < 0$. Entonces la ecuación auxiliar (**) tiene raíces complejas conjugadas que se expresan como

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = k \pm i\omega$$

siendo $k = -b/(2a)$, $\omega = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$ e i la unidad imaginaria ($i^2 = -1$, *véase* el Apéndice I). Como en el Caso I, las funciones $y_1^*(t) = e^{(k+i\omega)t}$ y $y_2^*(t) = e^{(k-i\omega)t}$ son dos soluciones independientes de (*), pero no toman valores reales. Sin embargo, como

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

como se indica en la sección anterior y en el Apéndice II, se pueden encontrar dos funciones con valores reales que son soluciones de (*) combinando adecuadamente y_1^* y y_2^*:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\, y_1^*(t) + \frac{1}{2}\, y_2^*(t) = e^{kt}\cos(\omega t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2i}\, y_1^*(t) - \frac{1}{2i}\, y_2^*(t) = e^{kt}\operatorname{sen}(\omega t)$$

Por tanto, la solución general de (*) en este caso es

$$\boxed{y = Ae^{kt}\cos(\omega t) + Be^{kt}\operatorname{sen}(\omega t)}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para resolver (*) en cada uno de los tres casos.

Ejemplo 1 Obtenga la solución general de $y'' + y' - 2y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + r - 2 = 0$ o $(r+2)(r-1) = 0$. Las raíces auxiliares son $r_1 = -2$ y $r_2 = 1$, que son reales y distintas. De acuerdo con el Caso I, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = Ae^{-2t} + Be^{t}$$

■

Ejemplo 2 Obtenga la solución general de $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + 6r + 9 = 0$ o $(r+3)^2 = 0$, que tiene dos raíces iguales $r = -3$. De acuerdo con el Caso II, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}$$

■

Ejemplo 3 Obtenga la solución general de $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 13 = 0$, cuyas soluciones son

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$$

Por tanto, $k = -2$ y $\omega = 3$. De acuerdo con el Caso III, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = Ae^{-2t}\cos(3t) + Be^{-2t}\operatorname{sen}(3t)$$

■

Los problemas de valor inicial relacionados con $ay'' + by' + cy = 0$ especifican valores de y e y' en un punto inicial. Estos valores se pueden usar para determinar los valores de las constantes A y B de la solución general, para que el problema de valor inicial tenga una solución única.

Ejemplo 4 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + 2r + 2 = 0$, cuyas raíces son

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Por tanto, se aplica el Caso III, $k = -1$ y $\omega = 1$. La ecuación diferencial tiene como solución general

$$y = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t$$

Además,

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t}(-A\cos t - B\operatorname{sen} t - A\operatorname{sen} t + B\cos t) \\ &= (B - A)e^{-t}\cos t - (A + B)e^{-t}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = -3$, se obtiene $A = 2$ y $B - A = -3$. Por tanto, $B = -1$ y el problema de valor inicial tiene como solución

$$y = 2e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t$$

■

Movimiento armónico simple

Muchos fenómenos naturales muestran un comportamiento periódico. El movimiento de un reloj de péndulo, la vibración de una cuerda de guitarra o de la membrana de un tambor, la altura de una persona que monta en una noria, el movimiento de un objeto encima de las olas, y la tensión producida por un generador de corriente alterna son sólo unos pocos ejemplos en los que las magnitudes dependen del tiempo de una forma periódica. Como son periódicas, las funciones circulares como el seno y el coseno proporcionan un modelo útil de estos comportamientos.

Ocurre a menudo que una cantidad que se desplaza desde un valor de equilibrio experimenta una fuerza de recuperación que tiende a moverla en la dirección de dicho equilibrio. Además del ejemplo obvio del movimiento elástico en física, podemos imaginar que ese modelo se puede aplicar, por ejemplo, a una población biológica en equilibrio con su suministro de alimentos o al precio de un artículo en una economía elástica en que un incremento del precio causa una disminución de la demanda y, por tanto, un descenso del precio. En los modelos más simples, la fuerza de recuperación es proporcional a la cantidad de desplazamiento desde el equilibrio. Esta fuerza hace que la magnitud oscile de forma sinusoidal. Decimos entonces que la magnitud ejecuta un *movimiento armónico simple*.

Como ejemplo concreto, supongamos una masa m suspendida en equilibrio de un muelle, de forma que la tensión hacia arriba del muelle está compensada por la fuerza gravitatoria que actúa sobre la masa. Si la masa se desplaza verticalmente una distancia y desde su posición de equilibrio, la tensión del muelle cambia y la fuerza extra que realiza el muelle se dirige a llevar la masa a su posición de equilibrio (*véase* la Figura 3.29). Esta fuerza es proporcional al desplazamiento (Ley de Hooke). Su valor es $-ky$, siendo k una constante positiva denominada **constante de elasticidad**. Despreciando el peso del muelle, esta fuerza aplica a la masa m una aceleración d^2y/dt^2 que cumple $m(d^2y/dt^2) = -ky$, debido a la Segunda Ley de Newton (masa × aceleración = fuerza). Dividiendo esta ecuación por m se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \qquad \text{siendo } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

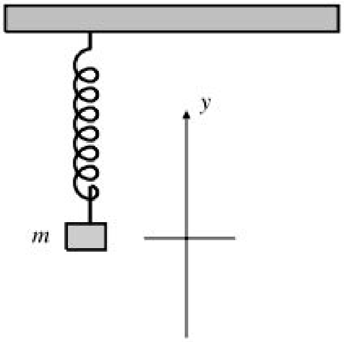

Figura 3.29

La ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

se denomina **ecuación del movimiento armónico simple**. Su ecuación auxiliar, $r^2 + \omega^2 = 0$, tiene raíces complejas $r = \pm i\omega$, por lo que su solución general es

$$y = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

siendo A y B constantes arbitrarias.

Para algunos valores de las constantes R y t_0, la función

$$y = R\cos(\omega(t - t_0))$$

es también una solución general de la ecuación diferencial del movimiento armónico simple. Si se desarrolla esta fórmula utilizando la fórmula de suma del coseno, se obtiene

$$\begin{aligned} y &= R\cos\omega t_0 \cos\omega t + R\,\mathrm{sen}\,\omega t_0\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ &= A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= R\cos(\omega t_0), \qquad & B &= R\,\mathrm{sen}\,(\omega t_0) \\ R^2 &= A^2 + B^2, \qquad & \tan(\omega t_0) &= B/A \end{aligned}$$

Las constantes A y B se relacionan con la posición y_0 y la velocidad v_0 de la masa m en el instante $t = 0$:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = A\cos 0 + B\,\mathrm{sen}\,0 = A \\ v_0 &= y'(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,0 + B\omega\cos 0 = B\omega \end{aligned}$$

La constante $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ se denomina **amplitud** del movimiento. Como $\cos x$ oscila entre -1 y 1, el desplazamiento y varía entre $-R$ y R. Nótese en la Figura 3.30 que la gráfica del desplazamiento en función del tiempo es la curva $y = R\cos\omega t$ desplazada t_0 unidades a la derecha. El número t_0 se denomina **desplazamiento temporal**. La cantidad relacionada ωt_0 se denomina **desplazamiento de fase**. El **periodo** de esta curva es $T = 2\pi/\omega$; es el intervalo entre dos

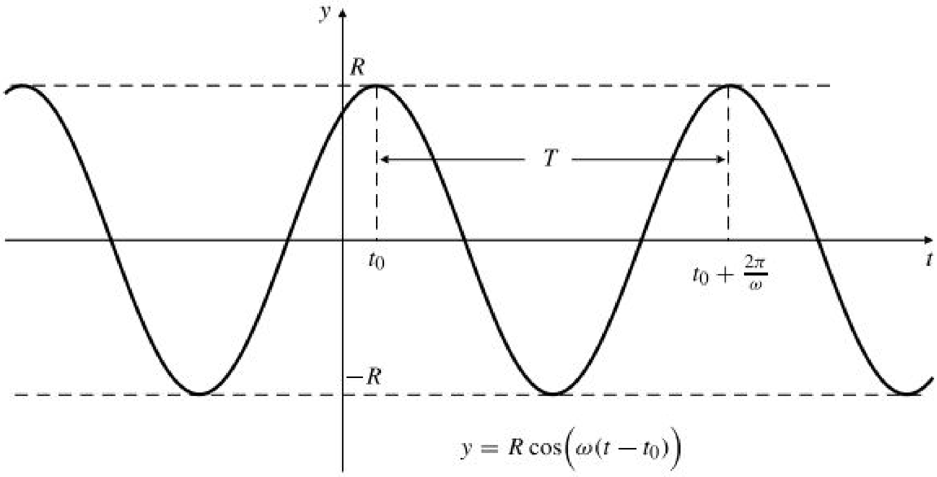

Figura 3.30 Movimiento armónico simple.

instantes consecutivos donde la masa está a la misma altura y moviéndose en la misma dirección. El inverso del periodo $1/T$ se denomina **frecuencia** del movimiento. Generalmente se mide en hercios (Hz), es decir, ciclos por segundo. La cantidad $\omega = 2\pi/T$ se denomina **frecuencia circular**. Se mide en radianes por segundo ya que 1 ciclo = 1 revolución = 2π radianes.

Ejemplo 5 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = -6 \\ y'(0) = 32 \end{cases}$$

Calcule la amplitud, frecuencia y periodo de la solución.

Solución En este caso $\omega^2 = 16$, por lo que $\omega = 4$. La solución es de la forma

$$y = A\cos(4t) + B\operatorname{sen}(4t)$$

Como $y(0) = -6$, tenemos que $A = -6$. Además, $y'(t) = -4A\operatorname{sen}(4t) + 4B\cos(4t)$. Como $y'(0) = 32$, tenemos que $4B = 32$ o $B = 8$. Así, la solución es

$$y = -6\cos(4t) + 8\operatorname{sen}(4t)$$

La amplitud es $\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$, la frecuencia es $\omega/(2\pi) \approx 0.637$ Hz y el periodo es $2\pi/\omega \approx 1.57$ s. ■

Ejemplo 6 **(Problema de la masa y el muelle)** Suponga que una masa de 100 g está suspendida de un muelle y que se requiere una fuerza de 3×10^4 dinas (3×10^4 g-cm/s^2) para producir un desplazamiento de 1/3 cm desde el equilibrio. En el instante $t = 0$ la masa se desplaza 2 cm por debajo de la posición de equilibrio y comienza a desplazarse hacia arriba con una velocidad de 60 cm/s. Obtenga la función que modela su desplazamiento posterior en cualquier instante $t > 0$. Calcule la frecuencia, el periodo, la amplitud y el desplazamiento temporal del movimiento. Exprese la posición de la masa en el instante t en función de la amplitud y el desplazamiento temporal.

Solución La constante de elasticidad k se obtiene aplicando la Ley de Hooke, $F = -ky$. En este caso, $F = -3 \times 10^4$ g-cm/s^2 es la fuerza del muelle sobre la masa desplazada 1/3 cm:

$$-3 \times 10^4 = -\frac{1}{3}k$$

por tanto, $k = 9 \times 10^4$ g/s^2. Entonces, la frecuencia circular es $\omega = \sqrt{k/m} = 30$ rad/s, la frecuencia es $\omega/2\pi = 15/\pi \approx 4.77$ Hz y el periodo es $2\pi/\omega \approx 0.209$ s.

Como el desplazamiento en el instante $t = 0$ es $y_0 = -2$ y la velocidad en ese instante es $v_0 = 60$, la ecuación del desplazamiento posterior es $y = A\cos(30t) + B\,\mathrm{sen}(30t)$, con $A = y_0 = -2$ y $B = v_0/\omega = = 60/30 = 2$. Así,

$$y = -2\cos(30t) + 2\,\mathrm{sen}(30t), \qquad (y \text{ en cm, } t \text{ en segundos})$$

La amplitud del movimiento es $R = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ cm. El desplazamiento temporal debe cumplir

$$-2 = A = R\cos(\omega t_0) = 2\sqrt{2}\cos(30t_0)$$
$$2 = B = R\,\mathrm{sen}(\omega t_0) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(30t_0)$$

por lo que $\mathrm{sen}(30t_0) = 1/\sqrt{2} = -\cos(30t_0)$. Entonces el desplazamiento de fase es $30t_0 = 3\pi/4$ radianes, y el desplazamiento temporal es $t_0 = \pi/40 \approx 0.0785$ s. La posición de la masa para $t > 0$ se puede expresar también como

$$y = 2\sqrt{2}\cos\left[30\left(t - \frac{\pi}{40}\right)\right]$$

Movimiento armónico amortiguado

Si a y c son positivas y $b = 0$, entonces la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0$$

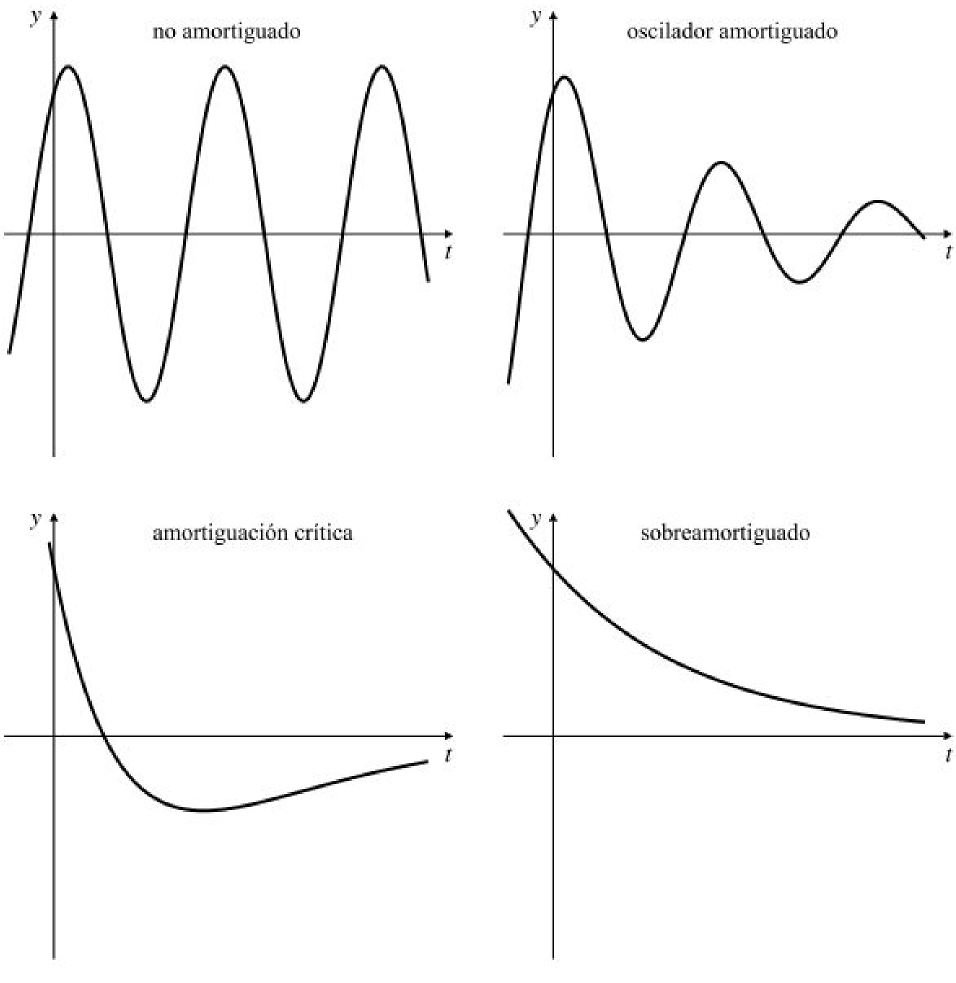

Figura 3.31 Oscilador no amortiguado ($b = 0$). Oscilador amortiguado ($b > 0$, $b^2 < 4ac$). Caso de amortiguamiento crítico ($b > 0$, $b^2 = 4ac$). Caso sobreamortiguado ($b > 0$, $b^2 > 4ac$).

corresponde a la ecuación diferencial del movimiento armónico simple y tiene soluciones oscilatorias de amplitud fija, como se ha visto anteriormente. Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, entonces las raíces de la ecuación auxiliar son o bien números negativos, o bien, si $b^2 < 4ac$, números complejos $k \pm i\omega$ con partes reales negativas $k = -b/(2a)$ (Caso III). En este último caso las soluciones todavía son oscilatorias, pero la amplitud disminuye exponencialmente cuando $t \to \infty$ debido al factor $e^{kt} = e^{-(b/2a)t}$ (*véase* el Ejercicio 17 posterior). Un sistema cuyo comportamiento se puede modelar mediante una ecuación de este tipo se dice que presenta un **movimiento armónico amortiguado**. Si $b^2 = 4ac$ (Caso II), se dice que el sistema tiene **amortiguación crítica**, y si $b^2 > 4ac$ (Caso I), se dice que está **sobreamortiguado**. En estos casos el comportamiento ya no es oscilatorio (*véase* la Figura 3.31, imaginando que la masa suspendida del muelle está dentro de un bidón de aceite).

Ejercicios 3.7

En los Ejercicios 1-12, calcule las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

1. $y'' + 7y' + 10y = 0$

2. $y'' - 2y' - 3y = 0$

3. $y'' + 2y' = 0$

4. $4y'' - 4y' - 3y = 0$

5. $y'' + 8y' + 16y = 0$

6. $y'' - 2y' + y = 0$

7. $y'' - 6y' + 10y = 0$

8. $9y'' + 6y' + y = 0$

9. $y'' + 2y' + 5y = 0$

10. $y'' - 4y' + 5y = 0$

11. $y'' + 2y' + 3y = 0$

12. $y'' + y' + y = 0$

En los Ejercicios 13-15, resuelva los problemas de valor inicial dados.

13. $\begin{cases} 2y'' + 5y' - 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

***16.** Demuestre que si $\varepsilon \neq 0$, la función $y_\varepsilon(t) = \dfrac{e^{(1+\varepsilon)t} - e^t}{\varepsilon}$ cumple la ecuación $y'' - (2+\varepsilon)y' + (1+\varepsilon)y = 0$. Calcule $y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t)$ y verifique que, tal como se esperaba, es una solución de $y'' - 2y' + y = 0$.

***17.** Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, demuestre que todas las soluciones de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ cumplen $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

***18.** Demuestre que la solución dada en la presentación del Caso I, concretamente $y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, es la solución general para este caso. Proceda como sigue: primero, haga $y = e^{r_1 t}u$; demuestre que u cumple la ecuación

$$u'' - (r_2 - r_1)u' = 0$$

Haga después $v = u'$, con lo que v debe cumplir $v' = (r_2 - r_1)v$. La solución general de esta ecuación es $v = Ce^{(r_2 - r_1)t}$, como se demuestra en la presentación de la ecuación $y' = ky$ en la Sección 3.4. Calcule u e y.

Movimiento armónico simple

Los Ejercicios 19-22 se refieren todos a la ecuación diferencial del movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \qquad (\omega \neq 0) \qquad (\dagger)$$

En conjunto permiten demostrar que $y = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$ es una *solución general* de esta ecuación, es decir, toda solución tiene esta forma para algunos valores de las constantes A y B.

***19.** Demuestre que $y = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$ es una solución de (†).

***20.** Si $f(t)$ es una solución de (†), demuestre que $\omega^2(f(t))^2 + (f'(t))^2$ es constante.

***21.** Si $g(t)$ es una solución de (†) que cumple $g(0) = g'(0) = 0$, demuestre que $g(t) = 0$ para todo t.

***22.** Suponga que $f(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (†). Demuestre que $f(t) = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$, siendo $A = f(0)$ y $B\omega = f'(0)$.
(*Sugerencia*: Sea $g(t) = f(t) - A\cos\omega t - B\operatorname{sen}\omega t$).

***23.** Si $b^2 - 4ac < 0$, demuestre que el cambio $y = e^{kt}u(t)$, con $k = -b/(2a)$, transforma $ay'' + by'' + cy = 0$ en la ecuación $u'' + \omega^2 u = 0$, siendo $\omega^2 = (4ac - b^2)/(4a^2)$.
Junto con el resultado del Ejercicio 22, esto confirma el procedimiento para el Caso III, en el caso de que no nos gustara del todo el argumento basado en números complejos que se ha dado en el texto.

En los Ejercicios 24-25, resuelva los problemas de valor inicial dados. Determine en cada problema la frecuencia circular, la frecuencia, el periodo y la amplitud de la solución.

24. $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} y'' + 100y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

***26.** Demuestre que $y = \alpha\cos(\omega(t-c)) + \beta\,\mathrm{sen}(\omega(t-c))$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + \omega^2 y = 0$ y que cumple $y(c) = \alpha$ y $y'(c) = \beta\omega$. Exprese la solución en la forma $y = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$ para ciertos valores de las constantes A y B que dependen de α, β, c y ω.

27. Resuelva $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(2) = 3 \\ y'(2) = -4 \end{cases}$

28. Resuelva $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(a) = A \\ y'(a) = B \end{cases}$

29. ¿Qué masa habría de suspenderse del muelle del Ejemplo 6 para obtener un sistema cuya frecuencia natural de oscilación sea de 10 Hz? Calcule el desplazamiento de esa masa desde su posición de equilibrio t segundos después de desplazarla 1 cm hacia abajo desde su posición de equilibrio y soltarla hacia arriba con velocidad inicial de 2 cm/s. ¿Cuál es la amplitud de este movimiento?

30. Una masa de 400 g suspendida de un muelle oscila con una frecuencia de 24 Hz. ¿Cuál será la frecuencia si la masa de 400 g se sustituye con una masa de 900 g? ¿Y con una masa de 100 g?

***31.** Demuestre que si t_0, A y B son constantes, $k = -b/(2a)$ y $\omega = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$, entonces

$$y = e^{kt}[A\cos(\omega(t - t_0)) + B\,\mathrm{sen}(\omega(t - t_0))]$$

es una alternativa a la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ para el Caso III ($b^2 - 4ac < 0$). Esta forma de la solución general es útil para resolver problemas de valor inicial donde se especifican $y(t_0)$ y $y'(t_0)$.

***32.** Demuestre que si t_0, A y B son constantes, $k = -b/(2a)$ y $\omega = \sqrt{b^2 - 4ac}/(2a)$, entonces

$$y = e^{kt}[A\cosh(\omega(t - t_0)) + B\,\mathrm{senh}(\omega(t - t_0))]$$

es una alternativa a la solución general para $ay'' + by' + cy = 0$ para el Caso I ($b^2 - 4ac > 0$). Esta forma de la solución general es útil para resolver problemas de valor inicial donde se especifican $y(t_0)$ y $y'(t_0)$.

Utilice las formas de solución proporcionadas en los dos ejercicios anteriores para resolver los problemas de valor inicial de los Ejercicios 33-34.

33. $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(3) = 2 \\ y'(3) = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases}$

35. Utilizando el cambio de la variable dependiente $u(x) = c - k^2 y(x)$, resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = c - k^2 y(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

***36.** Una masa está unida a un muelle horizontal de forma que se puede deslizar por encima de una mesa. Mediante una selección adecuada de las unidades, la posición $x(t)$ de la masa en el instante t está gobernada por la ecuación diferencial

$$x'' = -x + F$$

donde el término $-x$ es debido a la elasticidad del muelle y F es debido al rozamiento de la masa con la mesa. Cuando la masa se mueve, la fuerza de rozamiento debe ser de módulo constante y dirigida en dirección opuesta a la velocidad de la masa. Cuando la masa se para, la fuerza de rozamiento debe ser constante y de dirección opuesta a la fuerza del muelle a menos que la fuerza del muelle sea de menor magnitud, en cuyo caso la fuerza de rozamiento sólo cancela la fuerza del muelle y la masa permanecería en reposo. En este problema, suponga que el módulo de la fuerza de rozamiento es $1/5$. De acuerdo con lo anterior,

$$F = \begin{cases} -\dfrac{1}{5} & \text{si } x' > 0 \text{ o si } x' = 0 \text{ y } x < -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \text{si } x' < 0 \text{ o si } x' = 0 \text{ y } x > \dfrac{1}{5} \\ x & \text{si } x' = 0 \text{ y } |x| \leqslant \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Calcule la posición $x(t)$ de la masa en todos los instantes $t > 0$ si $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **Enuncie las leyes de los exponentes.**
- **Enuncie las leyes de los logaritmos.**
- **¿Cuál es el significado del número e?**
- **¿Qué significan las siguientes afirmaciones y frases?**
  - ◇ f es uno a uno. ◇ f es invertible.
  - ◇ La función f^{-1} es la inversa de la función f.
  - ◇ $a^b = c$ ◇ $\log_a b = c$
  - ◇ Logaritmo natural de x.
  - ◇ Diferenciación logarítmica.
  - ◇ Semivida de una cantidad que varía.
  - ◇ La magnitud y presenta crecimiento exponencial.
  - ◇ La magnitud y presenta crecimiento logístico.
  - ◇ $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. ◇ $y = \tan^{-1} x$.
  - ◇ La magnitud y presenta movimiento armónico simple.
  - ◇ La magnitud y presenta movimiento armónico amortiguado.
- **Defina las funciones senh x, cosh x y tanh x.**
- **¿Qué clase de funciones satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes?**

Ejercicios de repaso

1. Si $f(x) = 3x + x^3$, demuestre que f tiene inversa y calcule la pendiente de $y = f^{-1}(x)$ en $x = 0$.

2. Sea $f(x) = \sec^2 x \tan x$. Demuestre que f es creciente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y, a partir de eso, que es uno a uno e invertible en dicho intervalo. ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? Calcule $(f^{-1})'(2)$. *Sugerencia*: $f(\pi/4) = 2$.

Los Ejercicios 3-5 se refieren a la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

3. Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

4. ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente?

5. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de $f(x)$?

6. Calcule los puntos de la gráfica de $y = e^{-x}\operatorname{sen} x$, $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, donde dicha gráfica tiene tangente horizontal.

7. Suponga que una función $f(x)$ cumple $f'(x) = x\,f(x)$ para todo número real x, y $f(2) = 3$. Calcule la derivada de $f(x)/e^{x^2/2}$ y utilice el resultado como ayuda para obtener explícitamente $f(x)$.

8. Se enrolla un trozo de arcilla de modelar en forma de cilindro circular. Si la longitud del cilindro crece con una velocidad proporcional a sí misma, demuestre que el radio decrece con una velocidad proporcional a sí mismo.

9. (a) ¿Qué tasa de interés nominal, computada de forma continua, hará que una inversión se doble en cinco años?

(b) ¿En cuántos días se incrementará el tiempo de doblaje del apartado (a) si la tasa de interés nominal disminuye un 0.5%?

10. (Un cálculo pobre del logaritmo natural)

(a) Demuestre que si $a > 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

A partir de aquí demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$$

(b) La mayoría de las calculadoras, incluso las no científicas, tienen una tecla para calcular la raíz cuadrada. Si n es una potencia de dos, es decir $n = 2^k$, entonces $a^{1/n}$ se puede calcular introduciendo a y pulsando k veces la tecla de la raíz cuadrada:

$$a^{1/2^k} = \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a}}} \quad (k \text{ raíces cuadradas})$$

Después se puede restar 1 y multiplicar por n para obtener una aproximación de ln a. Utilice $n = 2^{10} = 1024$ y $n = 2^{11} = 2048$ para obtener aproximaciones del $\ln 2$. Basándose en la exactitud de las dos aproximaciones, obtenga un valor para ln 2 con tantos decimales como le parezca adecuado.

11. Una función no constante f cumple

$$\frac{d}{dx}(f(x))^2 = (f'(x))^2$$

para todo x. Si $f(0) = 1$, calcule $f(x)$.

12. Si $f(x) = (\ln x)/x$, demuestre que $f'(x) > 0$ para $0 < x < e$ y $f'(x) < 0$ para $x > e$, de forma que $f(x)$ tenga un valor máximo en $x = e$. Utilice esto para demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

13. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el origen y es tangente a la curva $y = x^x$.

14. (a) Obtenga $x \neq 2$ tal que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

(b) Obtenga $b > 1$ de forma que *no exista* $x \neq b$ tal que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln b}{b}$.

15. La cuenta de inversión A tiene interés simple con una cierta tasa. La cuenta de inversión B tiene la misma tasa nominal, pero se computa de forma instantánea. Si se invierten 1000 € en cada cuenta, B produce tras un año 10 € más de interés que A. Calcule la tasa de interés nominal que tienen ambas cuentas.

16. Exprese las funciones $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ en función de $\tan^{-1}$.

17. Exprese las funciones $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ en función de sen^{-1}.

18. **(Un problema de calentamiento)** Una botella de leche a 5 °C se saca de una nevera y se lleva una habitación que se mantiene a 20 °C. Después de 12 minutos la temperatura de la leche es de 12 °C. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la leche se caliente hasta 18 °C?

19. **(Un problema de enfriamiento)** Una olla con agua caliente a 96 °C se lleva a una sala con aire acondicionado. El agua se enfría hasta 60 °C tras diez minutos y hasta 40 °C en los diez minutos siguientes. ¿Cuál es la temperatura de la habitación?

20. Demuestre que $e^x > 1 + x$ si $x \neq 0$.

21. Utilice inducción matemática para demostrar que

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

con $x > 0$ y n cualquier entero positivo.

Problemas avanzados

***1.** (a) Demuestre que la función $f(x) = x^x$ es estrictamente creciente en el intervalo $[e^{-1}, \infty)$.

(b) Si g es la función inversa de la función f del apartado (a), demuestre que

$$\lim_{y \to \infty} \frac{g(y) \ln(\ln y)}{\ln y} = 1$$

Sugerencia: Empiece con la ecuación $y = x^x$ y tome dos veces logaritmos en los dos miembros.

Dos modelos para incorporar la resistencia del aire en el análisis del movimiento de un cuerpo que cae

2. **(Resistencia del aire proporcional a la velocidad)** Un objeto cae por la acción de la gravedad cerca de la superficie de la tierra, y el aire opone a su movimiento una resistencia proporcional a su velocidad. Por tanto, su velocidad v responde a la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv \qquad (*)$$

siendo k una constante positiva que depende de factores como la forma y densidad del objeto y la densidad del aire.

(a) Calcule la velocidad del objeto en función del tiempo t, suponiendo que su velocidad en v_0 era $t = 0$.

(b) Calcule la velocidad límite $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Observe que esto se puede hacer bien directamente a partir de (*) o a partir de la solución obtenida en el apartado (a).

(c) Si el objeto estaba a una altura y_0 en el instante $t = 0$, calcule su altura $y(t)$ en cualquier instante durante su caída.

***3.** **(Resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad)** En ciertas condiciones, un modelo mejor del efecto de la resistencia del aire sobre un objeto móvil es aquel en el que la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad. Dado un objeto que cae bajo aceleración gravitatoria constante g, la ecuación del movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv|v|$$

con $k > 0$. Nótese que se utiliza $v|v|$ en vez de v^2 para asegurarse de que la resistencia actúa siempre en dirección opuesta a la velocidad. Dado un objeto que cae desde el reposo en el instante $t = 0$, tenemos que $v(0) = 0$ y $v(t) < 0$ para $t > 0$, de forma que la ecuación del movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = -g + kv^2$$

No estamos (todavía) en condiciones de resolver esta ecuación. Sin embargo, podemos verificar su solución.

(a) Verifique que la velocidad para $t \geqslant 0$ está dada por

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{1 - e^{2t\sqrt{gk}}}{1 + e^{2t\sqrt{gk}}}$$

(b) ¿Cuál es la velocidad límite $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

(c) Verifique también que si el objeto que cae estaba a una altura de y_0 en el instante $t = 0$, entonces su altura en instantes posteriores durante su caída se puede expresar como

$$y(t) = y_0 + \sqrt{\frac{g}{k}}\, t - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1 + e^{2t\sqrt{gk}}}{2}\right)$$

4. (Modelo de difusión de una nueva tecnología) Cuando se introduce una nueva tecnología superior, el porcentaje p de clientes potenciales que la adoptan se puede modelar mediante un incremento logístico con el tiempo. Sin embargo, se están introduciendo constantemente tecnologías más nuevas, por lo que la adopción de una en particular decaerá exponencialmente con el tiempo. El modelo que sigue muestra ese comportamiento:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{e^{-bt}M}\right)$$

Esta ecuación diferencial sugiere que el crecimiento en p es logístico pero que el comportamiento asintótico no es una constante, sino $e^{-bt}M$, que decrece exponencialmente con el tiempo.

(a) Demuestre que el cambio de variable $p = e^{-bt}y(t)$ transforma la ecuación anterior en una ecuación logística estándar, y obtenga una fórmula explícita de $p(t)$ suponiendo que $p(0) = p_0$. Será necesario suponer que $M < 100k/(b + k)$ para asegurar que $p(t) < 100$.

(b) Si $k = 10$, $b = 1$, $M = 90$ y $p_0 = 1$, ¿cuánto puede aumentar $p(t)$ antes de que empiece a decrecer?

CAPÍTULO 4

Aplicaciones de las derivadas

En otoño de 1972 el Presidente Nixon anunció que la velocidad de incremento de la inflación estaba disminuyendo. Era la primera vez que un presidente en el cargo utilizaba la tercera derivada como ayuda en la causa de su reelección.

Hugo Rossi
Mathematics is an Edifice, not a Toolbox
Notices of the AMS, v. 43, Oct. 1996

Introducción El cálculo diferencial se puede utilizar para analizar muchos tipos de problemas y situaciones que surgen en disciplinas aplicadas. El cálculo ha hecho y continuará haciendo contribuciones significativas en todos los campos del esfuerzo humano, utilizando medidas cuantitativas para alcanzar sus objetivos. Desde la economía hasta la física y desde la biología a la sociología, se pueden encontrar problemas cuyas soluciones se pueden plantear utilizando los procedimientos del cálculo.

En este capítulo vamos a examinar varias clases de problemas en los que se pueden aplicar las técnicas que hemos aprendido. Estos problemas surgen dentro y fuera de las matemáticas. Consideraremos los siguientes tipos de problemas:

1. Problemas de tasas relacionadas, donde se analizan las velocidades de cambio de magnitudes relacionadas.
2. Problemas de gráficos, donde se utilizan las derivadas para ilustrar el comportamiento de funciones.
3. Problemas de optimización, donde una determinada cantidad se maximiza o se minimiza.
4. Métodos de obtención de raíces, para obtener soluciones numéricas de ecuaciones.
5. Problemas de aproximación, donde se utilizan polinomios para aproximar funciones complicadas.
6. Cálculo de límites.

No hay que asumir que la mayoría de los problemas que se presentan aquí son problemas del «mundo real». Esos problemas son en general demasiado complejos para ser tratados en un curso de cálculo general. Sin embargo, los problemas que consideraremos, aunque en algún caso son artificiales, demuestran cómo se puede aplicar el cálculo en situaciones concretas.

4.1 Tasas relacionadas

Cuando dos o más magnitudes que cambian con el tiempo están relacionadas por una función, esta función se puede diferenciar con respecto al tiempo para producir una ecuación que relaciona las velocidades de cambio de dichas magnitudes. Una de esas velocidades se puede entonces determinar cuando las otras, y los valores de las magnitudes, son conocidos. Consideraremos a continuación un par de ejemplos antes de formular una lista de procedimientos para tratar estos problemas.

Ejemplo 1 Una aeronave vuela horizontalmente con una velocidad de 600 km/h. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre la aeronave y una baliza de radio un minuto después de que la aeronave pasa 5 km directamente por encima de la estación?

Solución Resulta de utilidad hacer un diagrama: *véase* la Figura 4.1. Sea C el punto de la trayectoria de la aeronave que está directamente por encima de la baliza B. Sea A la posición de la aeronave t min después de pasar por C, y sean x y s las distancias CA y BA, respectivamente. Observando el triángulo rectángulo BCA tenemos que

$$s^2 = x^2 + 5^2$$

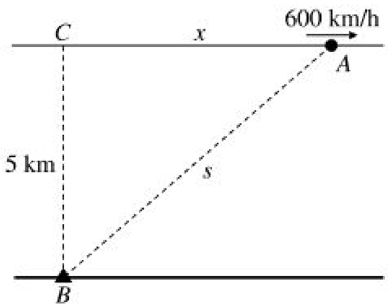

Figura 4.1

Diferenciando implícitamente esta función con respecto a t se obtiene

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Sabemos que $dx/dt = 600$ km/h $= 10$ km/min. Por tanto, $x = 10$ km en el instante $t = 1$ min. En ese instante $s = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ km y crece con una velocidad

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} = \frac{10}{5\sqrt{5}}(600) = \frac{1200}{\sqrt{5}} \approx 536{,}7 \text{ km/h}$$

Un minuto después de que la aeronave pase por encima de la baliza, su distancia a dicha baliza crece con una velocidad aproximada de 537 km/h.

Ejemplo 2 ¿Con qué velocidad cambia el área de un rectángulo si uno de sus lados tiene una longitud de 10 cm y dicha longitud crece con una velocidad de 2 cm/s, y el otro lado mide 8 cm y su longitud decrece con una velocidad de 3 cm/s?

Solución Sean x cm e y cm las longitudes de los lados del rectángulo en el instante t, respectivamente. Por tanto, el área en el instante t es $A = xy$ cm^2 (*véase* la Figura 4.2). Deseamos conocer el valor de dA/dt cuando $x = 10$ y $y = 8$, dado que $dx/dt = 2$ y $dy/dt = -3$ (nótese el signo negativo para indicar que y es decreciente). Como todas las cantidades de la ecuación $A = xy$ son funciones del tiempo, se puede diferenciar implícitamente dicha ecuación con respecto al tiempo y obtener

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{x=10\\y=8}} = \left.\left(\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}\right)\right|_{\substack{x=10\\y=8}} = 2(8) + 10(-3) = -14$$

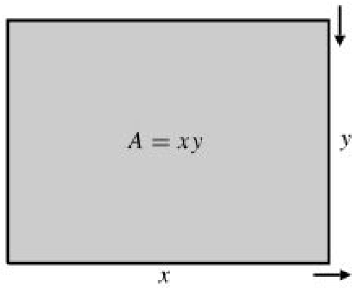

Figura 4.2 Rectángulo cuyos lados cambian.

En el instante en cuestión, el área del rectángulo decrece con una velocidad de 14 cm^2/s.

Procedimiento para problemas de tasas relacionadas

A la vista de los ejemplos anteriores podemos formular algunos procedimientos generales para resolver problemas de tasas relacionadas.

Cómo resolver problemas de tasas relacionadas

1. Lea el problema cuidadosamente. Intente comprender las relaciones entre las variables ¿Qué se da? ¿Qué hay que obtener?
2. Si es necesario, haga un dibujo.
3. Defina los símbolos que desee utilizar que no estén definidos en el planteamiento del problema. Exprese las magnitudes dadas, las requeridas y sus velocidades de cambio por medio de dichos símbolos.
4. A partir de una lectura cuidadosa del problema o de la observación del dibujo, identifique una o más ecuaciones que relacionen las variables que representan las magnitudes (serán necesarias tantas ecuaciones como magnitudes o velocidades de cambio haya que obtener en el problema).
5. Diferencie implícitamente las ecuaciones con respecto al tiempo, considerando todas las variables de las magnitudes como funciones del tiempo. Antes de realizar la diferenciación se podrán realizar cambios algebraicos en las ecuaciones (por ejemplo, se pueden despejar las magnitudes cuyas velocidades de cambio hay que obtener), pero, en general, es más fácil diferenciar las ecuaciones en su forma original y despejar posteriormente.
6. Sustituya los valores dados de las magnitudes y de sus velocidades de cambio, y después despeje las magnitudes desconocidas y sus velocidades de cambio en las ecuaciones resultantes.
7. Obtenga las conclusiones en respuesta a las preguntas planteadas. ¿Es la respuesta razonable? Si no, vuelva atrás y compruebe su solución para ver qué es lo que no es correcto.

Ejemplo 3 Un faro L está situado en una pequeña isla a 2 km del punto más cercano A de una costa recta. Si la lámpara del faro gira con una velocidad de 3 revoluciones por minuto, ¿con qué rapidez se mueve el punto de luz P sobre la orilla cuando está a 4 km de A?

Solución Obsérvese la Figura 4.3. Sea x la distancia AP, y sea θ el ángulo PLA. Entonces $x = 2\tan\theta$ y

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

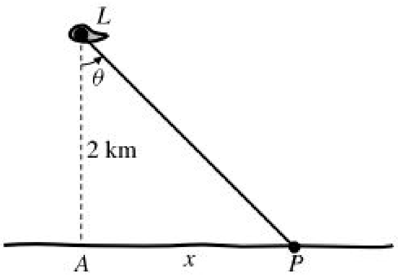

Figura 4.3

Ahora

$$\frac{d\theta}{dt} = 3 \text{ rev/min} \times 2\pi \text{ radianes/rev} = 6\pi \text{ radianes/min}$$

Cuando $x = 4$, tenemos que $\tan\theta = 2$ y $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 5$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \times 5 \times 6\pi = 60\pi \approx 188.5$$

El punto de luz se mueve por la línea de costa con una velocidad de aproximadamente 189 km/min cuando está a 4 km de A.

Nótese que ha sido esencial convertir la velocidad de cambio de θ de revoluciones por minuto a radianes por minuto. Si θ no se midiera en radianes no podríamos decir que $(d/d\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

Ejemplo 4 Un tanque de agua agujereado tiene la forma de un cono circular recto invertido con una profundidad de 5 m y un radio en la parte superior de 2 m. Cuando la profundidad del agua del tanque es de 4 m, el agua está saliendo con una velocidad de 1/12 m^3/min. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el nivel de agua del tanque en ese instante?

Solución Sean r y h el radio en la superficie y la profundidad del agua en el tanque en el instante t (ambos se miden en metros). Por tanto, el volumen V (en m^3) de agua en el tanque en el instante t es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Utilizando semejanza de triángulos (*véase* la Figura 4.4), se puede obtener una relación entre r y h:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5}, \qquad \text{por tanto,} \quad r = \frac{2h}{5} \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4\pi}{75}h^3$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25}h^2\frac{dh}{dt}$$

Como $dV/dt = -1/12$ cuando $h = 4$, tenemos que

$$\frac{-1}{12} = \frac{4\pi}{25}(4^2)\frac{dh}{dt}, \qquad \text{por tanto,} \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{25}{768\pi}$$

Cuando la profundidad del agua en el tanque es de 4 m, su nivel desciende con una velocidad de $25/(768\pi)$ m/min, o aproximadamente 1.036 cm/min.

Ejemplo 5 En un cierto instante una aeronave que vuela hacia el este a 400 km/h pasa directamente por encima de un coche que viaja hacia el sudoeste a 100 km/h en una carretera recta y sin pendientes. Si la aeronave vuela a una altura de 1 km, ¿con qué velocidad aumenta la distancia entre la aeronave y el coche 36 segundos después de que la aeronave pase directamente por encima del coche?

Solución En este ejemplo es esencial un buen diagrama. *Véase* la Figura 4.5. Sea t el tiempo medido en horas desde el instante en que la aeronave estaba en la posición A directamente encima del coche en la posición C. Sean X e Y las posiciones de la aeronave y el coche, respectivamente, en el instante t. Sea x la distancia AX, y la distancia CY y s la distancia XY, todas ellas medidas en kilómetros. Sea Z el punto 1 km por encima de Y. Como el ángulo $XAZ = 45°$, el Teorema de Pitágoras y el Teorema del Coseno permiten obtener

$$\begin{aligned} s^2 &= 1 + (ZX)^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2xy\cos 45° \\ &= 1 + x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2s\frac{ds}{dt} &= 2s\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - \sqrt{2}\frac{dx}{dt}y - \sqrt{2x}\frac{dy}{dt} \\ &= 400(2x - \sqrt{2}y) + 100(2y - \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

ya que $dx/dt = 400$ y $dy/dt = 100$. Cuando $t = 1/100$ (es decir, 36 segundos después de $t = 0$), tenemos que $x = 4$ y $y = 1$. Entonces,

$$s^2 = 1 + 16 + 1 - 4\sqrt{2} = 18 - 4\sqrt{2}$$

$$s \approx 3.5133$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2s}(400(8 - \sqrt{2}) + 100(2 - 4\sqrt{2})) \approx 322.86$$

La aeronave y el coche se están separando con una velocidad de aproximadamente 323 km/h después de 36 segundos.

Nótese que ha sido necesario convertir los 36 segundos a horas. En general todas las medidas deben estar en unidades compatibles.

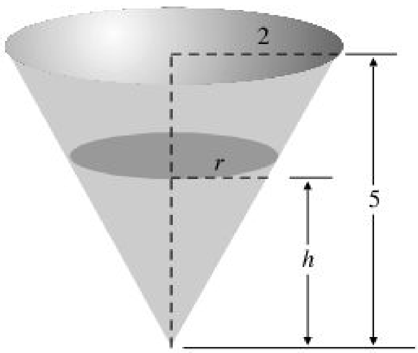

Figura 4.4 El tanque cónico del Ejemplo 4.

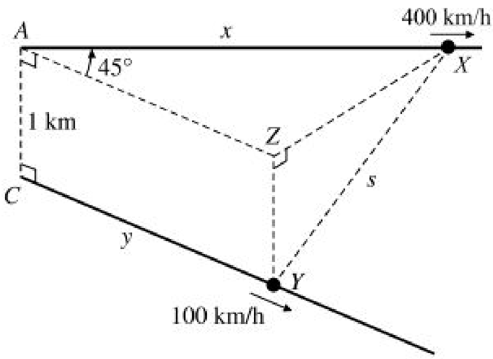

Figura 4.5 Trayectorias de la aeronave y del coche en el Ejemplo 5.

Ejercicios 4.1

1. Calcule la velocidad de cambio del área de un cuadrado cuyo lado mide 8 cm, si la longitud del lado se incrementa con una velocidad de 2 cm/min.

2. El área de un cuadrado decrece con una velocidad de 2 pies^2/s. ¿Con qué velocidad cambia la longitud del lado cuando dicho lado mide 8 pies?

3. Un guijarro que se lanza a un estanque forma una onda circular que se expande hacia fuera desde el punto del impacto. ¿Con qué velocidad crece el área encerrada por la onda cuando su radio es de 20 cm y crece con una velocidad de 4 cm/s?

4. El área de un círculo disminuye con una velocidad de 2 cm^2/min. ¿Con qué velocidad cambia el radio del círculo cuando su área es de 100 cm^2?

5. El área de un círculo crece con una velocidad de 1/3 km^2/h. Exprese la velocidad de cambio del radio del círculo en función de (a) el radio r y (b) el área A del círculo.

6. En un cierto instante la longitud de un rectángulo es de 16 m y su anchura es de 12 m. La anchura crece con una velocidad de 3 m/s. ¿Con qué velocidad cambia la longitud si el área del rectángulo no cambia?

7. Se introduce aire en un globo esférico. El volumen del globo crece con una velocidad de 20 cm^3/s cuando el radio mide 30 cm. ¿Con qué velocidad crece el radio en ese instante? (El volumen de un globo esférico de radio r unidades es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúbicas).

8. Cuando el diámetro de una bola de hielo es de 6 cm, disminuye con una velocidad de 0.5 cm/h debido a la fusión del hielo. ¿Con qué velocidad disminuye el volumen de la bola de hielo en ese instante?

9. ¿Con qué velocidad cambia el área de la superficie de un cubo cuando su volumen es de 64 cm^3 y crece con una velocidad de 2 cm^3/s?

10. El volumen de un cilindro circular recto es de 60 cm^3 y crece con una velocidad de 2 cm^3/min en el instante en el que el radio es de 5 cm y crece con una velocidad de 1 cm/min. ¿Con qué velocidad cambia con el tiempo a la altura del cilindro?

11. ¿Con qué velocidad cambia el volumen de una caja rectangular cuando su longitud es de 6 cm, su anchura de 5 cm y su profundidad de 4 cm, si la longitud y la profundidad crecen con una velocidad de 1 cm/s y la anchura decrece con una velocidad de 2 cm/s?

12. El área de un rectángulo crece con una velocidad de 5 m^2/s cuando su longitud crece con una velocidad de 10 m/s. Si la longitud es de 20 m y la anchura de 16 m, ¿con qué velocidad cambia la anchura?

13. Un punto se mueve por la curva $y = x^2$. ¿Con qué velocidad cambia y cuando $x = -2$ y x decrece con una velocidad de 3?

14. Un punto se mueve a la derecha por la parte del primer cuadrante de la curva $x^2y^3 = 72$. Cuando las coordenadas del punto son (3, 2), su velocidad horizontal es de 2 unidades/s. ¿Cuál es su velocidad vertical?

15. El punto P se mueve de forma que en el instante t está en la intersección de las curvas $xy = t$ y $y = tx^2$. ¿Con qué velocidad cambia la distancia de P al origen en el instante $t = 2$?

16. **(Radares de velocidad)** Un policía está cerca de una autopista utilizando una pistola radar para multar a los coches que circulan con exceso de velocidad (*véase* la Figura 4.6). Apunta la pistola hacia un coche que pasa por su posición y, cuando la pistola está apuntando con un ángulo de 45° a la dirección de la autopista, mide que la distancia entre el coche y la pistola crece con una velocidad de 100 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve el coche?

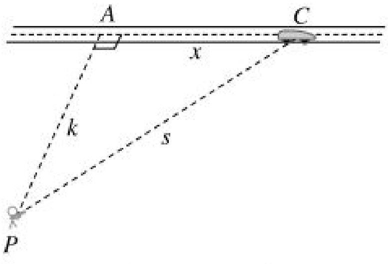

Figura 4.6

17. Si la pistola radar del Ejercicio 16 apunta a un coche que viaja a 90 km/h por una carretera recta, ¿cuál será la lectura en el instante en que apunta en una dirección que forma un ángulo de 30° con la carretera?

18. La parte superior de una escalera de 5 m de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se aleja de la base de la pared con una velocidad de 1/3 m/s, ¿con qué velocidad se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera cuando está a 3 m de altura por encima de la base de la pared?

19. Un hombre de 2 m de altura camina hacia un farol a una velocidad de 0.5 m/s. Si la lámpara del farol está a 5 m de altura, ¿con qué velocidad decrece la longitud de la sombra del hombre cuando está a 3 m del farol? ¿Con qué velocidad se está moviendo en ese instante la sombra de su cabeza?

20. Una mujer de 6 pies de alto camina con una velocidad de 2 pies/s por un camino recto sobre la tierra. Hay un farol de 5 pies de alto a un lado del camino. Una luz a 15 pies de altura proyecta la sombra de la mujer sobre el suelo. ¿Con qué velocidad cambia la longitud de la sombra de la mujer cuando ésta está a 12 pies del punto del camino más cercano al farol?

21. **(Coste de producción)** Al propietario de una mina de carbón le cuesta C € al día mantener una producción de x toneladas, siendo $C = 10\,000 + 3x + x^2/8000$. ¿A qué velocidad crece la producción cuando ésta vale 12 000 t y el coste diario crece a razón de 600 € al día?

22. **(Distancia entre barcos)** A la una de la tarde el barco A está a 25 km al norte del barco B. Si el barco A navega al oeste con una velocidad de 16 km/h y el barco B navega al sur con una velocidad de 20 km/h, ¿a qué velocidad cambia la distancia entre los dos barcos a la una y media de la tarde?

23. ¿Cuál es la primera hora después de las tres de la tarde a la que las manecillas del reloj están juntas?

24. **(Seguimiento de un globo)** Un globo que se lanza en el punto A sube verticalmente con una velocidad constante de 5 m/s. El punto B está al mismo nivel que el punto A y dista 100 m de éste. ¿Con qué velocidad cambia el ángulo de elevación del globo en B cuando dicho globo está a 200 m por encima de A?

25. Se vierte serrín en una pila con una velocidad de 1/2 m^3/min. Si la pila mantiene la forma de un cono circular recto cuya altura es igual a la mitad del diámetro de su base, ¿con qué velocidad crece la altura de la pila cuando dicha pila tiene 3 m de altura?

26. (Tanque cónico) Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto invertido con un radio de 10 m en su parte superior y una profundidad de 8 m. Se vierte agua en el interior del cono con una velocidad de $1/10$ m^3/min. ¿Con qué velocidad crece la profundidad del agua en el tanque cuando dicha profundidad es de 4 m?

27. (Tanque con fugas) Repita el Ejercicio 26 con el supuesto añadido de que el agua sale por el fondo del tanque con una velocidad de $h^3/1000$ m^3/min cuando la profundidad de agua en el tanque es de h m. ¿Cuánto se puede llenar el tanque en este caso?

28. (Otro tanque con fugas) Se introduce agua en otro tanque con fugas con una velocidad de 10 m^3/min. El tanque tiene la forma de un cono invertido, de 9 m de profundidad y de 6 m de diámetro en su parte superior. La superficie de agua en el tanque sube con una velocidad de 20 cm por hora cuando la profundidad es de 6 m. ¿Con qué velocidad está saliendo agua del tanque en ese instante?

29. (Vuelo de una cometa) ¿Con qué velocidad hay que soltar cuerda si la cometa que estamos haciendo volar está a 30 m de altura, a 40 m de distancia horizontal desde nuestra posición, y alejándose horizontalmente con una velocidad de 10 m por minuto?

30. (Noria) Suponga que está en una noria de 20 m de diámetro. La noria da vueltas a 1 revolución por minuto. ¿Con qué velocidad está subiendo o bajando cuando está a una distancia horizontal de 6 m de la línea vertical que pasa por el centro de la noria?

31. (Distancia entre aeronaves) Una aeronave está 144 km al este de un aeropuerto y viaja hacia el oeste a 200 km/h. Al mismo tiempo, una segunda aeronave a la misma altitud dista 60 km al norte del aeropuerto y viaja hacia el norte a 150 km/h. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre las dos aeronaves?

32. (Tasa de producción) Si una factoría de camiones emplea a x trabajadores y tiene unos gastos de operación diarios de y €, puede producir $P = (1/3)x^{0.6}y^{0.4}$ camiones al año. ¿Con qué velocidad disminuyen los gastos diarios cuando su valor es de 10 000 € y el número de trabajadores es de 40, si el número de trabajadores crece a razón de uno por día y la producción permanece constante?

33. Una lámpara está situada en el punto (3, 0) del plano xy. Una hormiga camina por el primer cuadrante del plano y la lámpara arroja su sombra en el eje y. ¿Con qué velocidad se mueve la sombra de la hormiga por el eje y cuando dicha hormiga está en la posición (1, 2) y se mueve de forma que su coordenada x crece con una velocidad de 1/3 unidades/s y su coordenada y disminuye con una velocidad de 1/4 unidades/s?

34. Una autopista recta y un canal recto se cruzan formando ángulos rectos. La autopista cruza sobre el canal por un puente de 20 m de altura sobre el agua. Un barco que viaja con una velocidad de 20 km/h pasa bajo el puente en el mismo instante en que un coche que viaja a 80 km/h pasa sobre el puente. ¿Con qué velocidad se están separando el barco y el coche tras un minuto?

35. (Llenado de un abrevadero) La sección cruzada de un abrevadero es un triángulo equilátero con su lado superior horizontal. Si el abrevadero tiene 10 m de longitud y 30 cm de profundidad, y se está llenando de agua con una velocidad de 1/4 m^3/min, ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando dicho nivel es de 20 cm por encima del vértice inferior?

36. (Vaciado de una piscina) Una piscina rectangular tiene 8 m de anchura y 20 m de longitud (*véase* la Figura 4.7). Su fondo es un plano con pendiente, y la profundidad crece desde 1 m en el lado menos hondo hasta 3 m en el lado más profundo. Se vacía el agua de la piscina con una velocidad de 1 m^3/min. ¿Con qué velocidad desciende la superficie del agua cuando la profundidad del agua en el extremo más profundo es de (a) 2.5 m, (b) 1 m?

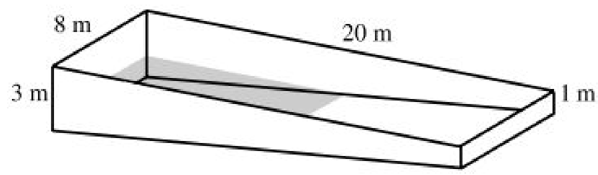

Figura 4.7

***37.** Un extremo de una escalera de 10 m de largo se apoya en el suelo y dicha escalera descansa también sobre la parte superior de una valla de 3 m de altura (*véase* la Figura 4.8). Si el pie de la escalera está a 4 m de distancia de la base de la valla y se aleja de dicha base a una velocidad de 1/5 m/s, ¿con qué velocidad se mueve el extremo superior de la escalera (a) verticalmente y (b) horizontalmente?

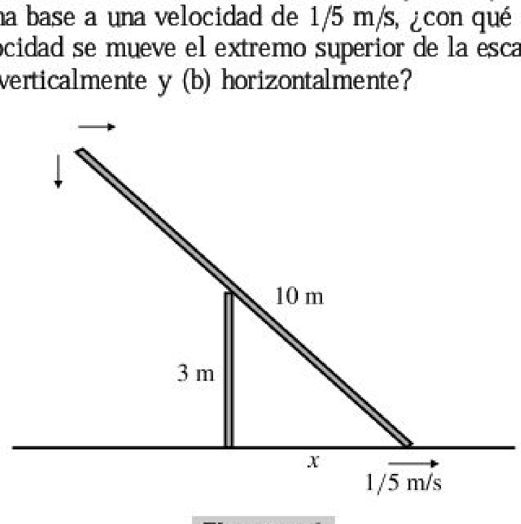

Figura 4.8

*__38.__ Dos cajones, A y B se encuentran en el suelo de un almacén. Están unidos por una cuerda de 15 m de longitud, y cada cajón está enganchado a la cuerda a nivel del suelo. La cuerda se mantiene tensa y se pasa por una polea P sujeta a una viga a 4 m de altura con respecto a un punto Q en el suelo directamente entre las dos cajas (*véase* la Figura 4.9). Si la caja A está a 3 m de Q y se aleja de dicho punto Q a una velocidad de 1/2 m/s, ¿a qué velocidad se mueve la caja B hacia el punto Q?

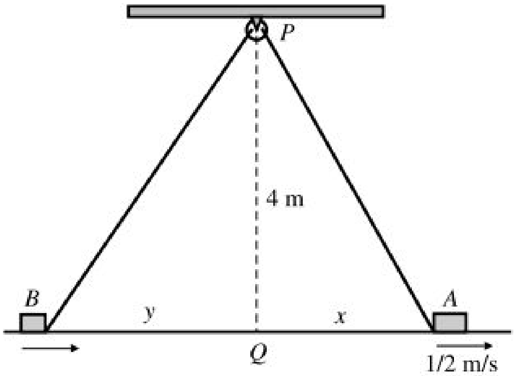

Figura 4.9

39. (Seguimiento de un cohete) Poco después de su lanzamiento, un cohete está a 100 km de altura y a 50 km de distancia desde el punto de lanzamiento. Si viaja a una velocidad de 4 km por segundo formando un ángulo de 30º respecto a la horizontal, ¿con qué velocidad cambia su ángulo de elevación medido desde el punto de lanzamiento?

40. (Sombra de una bola que cae) Una lámpara está situada a 20 m de altura sobre un poste. En el instante $t = 0$ se arroja una bola desde un punto situado a nivel de la lámpara y a 10 metros de distancia de la misma. La bola cae por efecto de la gravedad (aceleración de 9.8 m/s^2) hasta que llega al suelo. ¿Con qué velocidad se mueve la sombra de la bola por el suelo (a) 1 s después de ser lanzada y (b) en el instante en que llega al suelo?

41. (Seguimiento de un cohete) Se lanza un cohete en el instante $t = 0$ que se eleva verticalmente con una aceleración de 10 m/s^2. Se monitoriza el progreso del cohete en una estación de seguimiento localizada a una distancia horizontal de 2 km del punto de lanzamiento. ¿Con qué velocidad vertical gira la antena de la estación de seguimiento 10 s después del lanzamiento?

4.2 Problemas de valores extremos

La primera derivada de una función es una fuente de información de mucha utilidad sobre el comportamiento de dicha función. Como ya hemos visto, el signo de f' indica si f es creciente o decreciente. En esta sección utilizaremos esta información para obtener los valores máximos y mínimos de funciones. En la Sección 4.5 emplearemos las técnicas desarrolladas aquí para resolver problemas que requieren la obtención de valores máximos y mínimos.

Valores máximo y mínimo

Recuérdese (*véase* la Sección 1.4) que una función tiene un valor máximo en x_0 si $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo x perteneciente al dominio de f. El valor máximo es $f(x_0)$. Para ser más precisos, ese tipo de máximo debería denominarse máximo *absoluto* o *global* debido a que es el máximo valor que toma la función f en todo su dominio.

DEFINICIÓN 1 Valores extremos absolutos

Una función f tiene un **valor máximo absoluto** $f(x_0)$ en el punto x_0 de su dominio si $f(x) \leqslant f(x_0)$ se cumple para todo x perteneciente al dominio de f.

Una función f tiene un **valor mínimo absoluto** $f(x_1)$ en el punto x_1 de su dominio si $f(x) \geqslant f(x_1)$ se cumple para todo x perteneciente al dominio de f.

Una función puede tener como mucho un valor máximo o mínimo absolutos, aunque ese valor se puede alcanzar en muchos puntos. Por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene un valor máximo de 1 en todo punto que cumpla $x = (\pi/2) + 2n\pi$, siendo n un entero. Por supuesto, no es necesario que una función tenga valores extremos absolutos. La función $f(x) = 1/x$ se hace arbitrariamente grande cuando x se aproxima a 0 por la derecha, por lo que no tiene un máximo absoluto finito (recuérdese que ∞ no es un número, por lo que no puede ser un valor de f). Incluso una función acotada puede no tener valores máximo y mínimo absolutos. La función $g(x) = x$, con dominio especificado como el intervalo *abierto* $(0, 1)$, no tiene máximo ni mínimo absoluto. El rango de g es también el intervalo $(0, 1)$, y no existe ningún valor máximo o mínimo en este intervalo. Por supuesto, si el dominio de g se extendiera al intervalo *cerrado* $[0, 1]$, entonces g tendría un valor máximo, 1, y un valor mínimo, 0.

Los valores máximo y mínimo de una función se denominan colectivamente **valores extremos**. El teorema que sigue es un replanteamiento (y una ligera generalización) del Teorema 8 de la Sección 1.4. Se mostrará de gran utilidad en algunas circunstancias en las que se desea calcular valores extremos.

TEOREMA 1 **Existencia de valores extremos**

Si el dominio de la función f es un intervalo *cerrado* y *finito*, o se puede expresar como una unión finita de intervalos de ese tipo, y si f es *continua* en dicho dominio, entonces f debe tener un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.

Considérese la gráfica $y = f(x)$ que se muestra en la Figura 4.10. Evidentemente, el valor mínimo absoluto de f es $f(x_2)$, y el valor mínimo absoluto es $f(x_3)$. Además de esos valores extremos, f tiene otros valores máximos y mínimos «locales» correspondientes a puntos de la gráfica con valores mayores o menores que sus puntos vecinos. Obsérvese que f tiene *valores máximos locales* en a, x_2, x_4 y x_6, y valores mínimos locales en x_1, x_3, x_5 y b. El máximo absoluto es el mayor de los máximos locales; el mínimo absoluto es el menor de los mínimos locales.

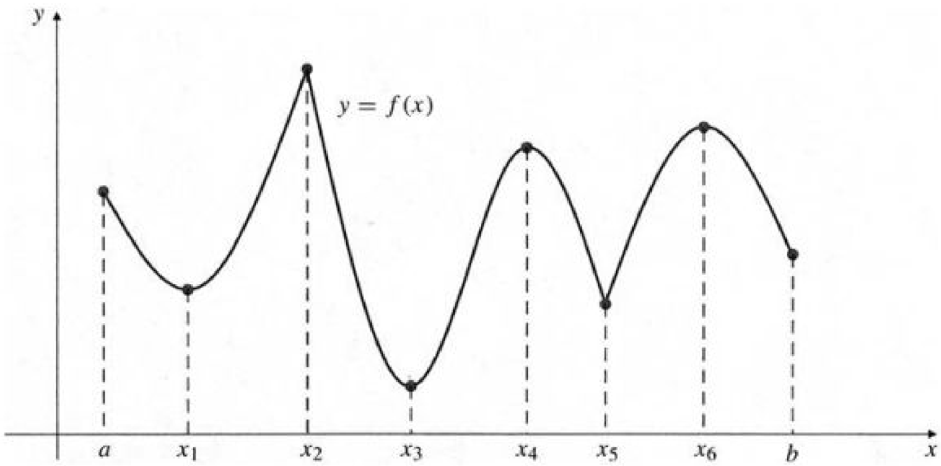

Figura 4.10 Valores extremos locales.

DEFINICIÓN 2 **Valores extremos locales**

Una función f tiene un **valor máximo local** $f(x_0)$ en el punto x_0 de su dominio si existe un número $h > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0)$ siempre que x esté en el dominio de f y $|x - x_0| < h$.

Una función f tiene un **valor mínimo local** $f(x_1)$ en el punto x_1 de su dominio si existe un número $h > 0$ tal que $f(x) \geqslant f(x_1)$ siempre que x esté en el dominio de f y $|x - x_1| < h$.

Por tanto, f tiene un valor máximo (o mínimo) en x si tiene un valor máximo (o mínimo) absoluto en x cuando su dominio se restringe a puntos suficientemente cercanos a x. Geométricamente, la gráfica de f es al menos tan alta (o tan baja) en x como en sus puntos vecinos.

Puntos críticos, puntos singulares y extremos

La Figura 4.10 sugiere que una función $f(x)$ puede tener valores extremos locales sólo en puntos x de tres tipos especiales:

(i) **Puntos críticos** de f (puntos x en $\mathcal{D}(f)$ donde $f'(x) = 0$).
(ii) **Puntos singulares** de f (puntos x en $\mathcal{D}(f)$ donde $f'(x)$ no está definida).
(iii) **Extremos** del dominio de f (puntos en $\mathcal{D}(f)$ que no pertenecen a ningún intervalo abierto contenido en $\mathcal{D}(f)$).

En la Figura 4.10, x_1, x_3, x_4 y x_6 son puntos críticos, x_2 y x_5 son puntos singulares, y a y b son extremos.

TEOREMA 2 **Localización de valores extremos**

Si la función f está definida en un intervalo I y tiene un valor máximo local (o mínimo local) en el punto $x = x_0$ de I, entonces x_0 debe ser un punto crítico de f, un punto singular de f o un extremo de I.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f tiene un máximo local en x_0 y que x_0 no es ni un extremo del dominio de f ni un punto singular de f. Entonces para algún $h > 0$, $f(x)$ está definido en el intervalo abierto $(x_0 - h, x_0 + h)$ y tiene un máximo absoluto (para ese intervalo) en x_0. Además existe $f'(x_0)$. Por el Teorema 14 de la Sección 2.6, $f'(x_0) = 0$. La demostración para el caso en el que f tiene un mínimo local en x_0 es similar.

Aunque una función no puede tener valores extremos excepto en sus puntos críticos, puntos singulares y extremos, no es obligatorio que tenga valores extremos en esos puntos. La Figura 4.11 muestra la gráfica de una función con un punto crítico x_0 y un punto singular x_1 y ninguno de ellos es un valor extremo. Es más difícil dibujar la gráfica de una función cuyo dominio tenga un extremo en el cual dicha función no tenga un valor extremo. *Véase* el Ejercicio 49 al final de esta sección donde se presenta un ejemplo de una función de ese tipo.

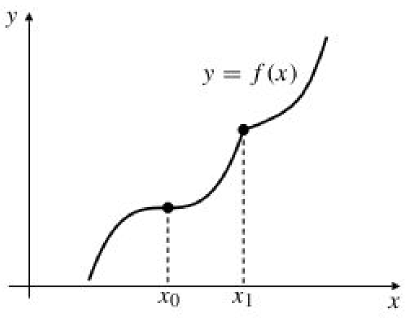

Figura 4.11 No es obligatorio que una función tenga valores extremos en un punto crítico ni en un punto singular.

Cálculo de valores extremos absolutos

Si una función f está definida en un intervalo cerrado o en una unión finita de intervalos cerrados, el Teorema 1 asegura que f debe tener un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. El Teorema 2 nos indica cómo obtenerlos. Sólo es necesario comprobar los valores de f en los puntos críticos, puntos singulares y extremos.

Ejemplo 1 Calcule los valores máximo y mínimo de la función

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Solución Como g es un polinomio, puede no tener puntos singulares. Para obtener los puntos críticos, se calcula

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) \\ &= 3(x+1)(x-3) \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x = -1 \text{ o } x = 3 \end{aligned}$$

Sin embargo, $x = 3$ no pertenece al dominio de g, por lo que puede ignorarse. Sólo es necesario considerar los valores de g en los puntos críticos $x = -1$ y en los extremos $x = -2$ y $x = 2$.

$$g(-2) = 0, \qquad g(-1) = 7, \qquad g(2) = -20$$

El valor máximo de $g(x)$ en $-2 \leqslant x \leqslant 2$ es 7, en el punto crítico $x = -1$, y el valor mínimo es -20, en el extremo $x = 2$. *Véase* la Figura 4.12.

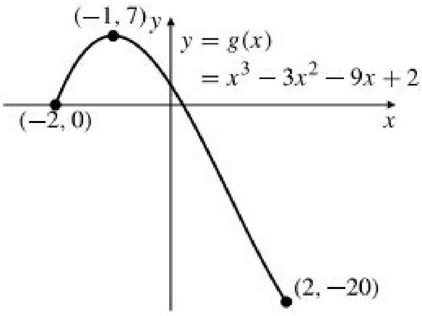

Figura 4.12 g tiene valores máximo y mínimo en 7 y -20, respectivamente.

Ejemplo 2 Calcule los valores máximo y mínimo de $h(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución La derivada de h es

$$h'(x) = 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} - 2 = 2(x^{-1/3} - 1)$$

Nótese que $x^{-1/3}$ no está definida en el punto $x = 0$ en $\mathcal{D}(h)$, por lo que $x = 0$ es un punto singular de h. Además, h tiene un punto crítico en $x^{-1/3} = 1$, es decir, en $x = 1$, que además es también un extremo del dominio de h. Por tanto, hay que examinar los valores de h en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, así como en el otro extremo $x = -1$. Tenemos que

$$h(-1) = 5, \qquad h(0) = 0, \qquad h(1) = 1$$

La función h tiene un valor máximo de 5 en el extremo -1 y un valor mínimo de 0 en el punto singular $x = 0$. *Véase* la Figura 4.13.

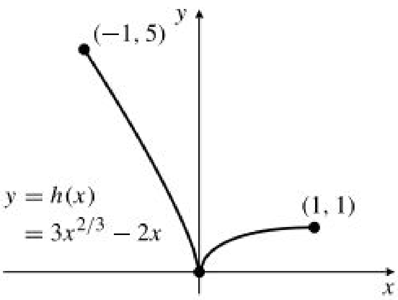

Figura 4.13 h tiene un valor mínimo absoluto de 0 en un punto singular.

El test de la primera derivada

La mayoría de las funciones que aparecen en cálculo elemental tienen derivadas distintas de cero en todo su dominio excepto posiblemente en un número finito de puntos críticos, puntos singulares y extremos de dicho dominio. En los intervalos entre esos puntos la derivada existe y no es cero, por lo que la función es o bien creciente o bien decreciente allí. Si f es continua y creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha, entonces debe tener un valor máximo local en x_0. El siguiente teorema agrupa varios resultados de este tipo.

TEOREMA 3 **El test de la primera derivada**

PARTE I. Comprobación de puntos críticos interiores y de puntos singulares.
Supongamos que f es continua en x_0, y x_0 no es un extremo del dominio de f.

(a) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0 tal que $f'(x) > 0$ en (a, x_0) y $f'(x) < 0$ en (x_0, b), entonces f tiene un valor máximo local en x_0.
(b) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0 tal que $f'(x) < 0$ en (a, x_0) y $f'(x) > 0$ en (x_0, b), entonces f tiene un valor mínimo local en x_0.

PARTE II. Comprobación de los extremos del dominio.
Supongamos que a es un extremo izquierdo del dominio de f y que f es continua por la derecha en a.

(c) Si $f'(x) > 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor mínimo local en a.
(d) Si $f'(x) < 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor máximo local en a.

Supongamos que b es un extremo derecho del dominio de f y que f es continua por la izquierda en b.

(e) Si $f'(x) > 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor máximo local en b.
(f) Si $f'(x) < 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor mínimo local en b.

Observación Si f' es positivo (o negativo) en *ambos* lados de un punto crítico singular, entonces f no tiene un valor máximo ni mínimo en ese punto.

Ejemplo 3 Calcule los valores extremos locales y absolutos de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ en el intervalo $[-2, 2]$. Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

Solución Empezaremos por calcular y factorizar la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Los puntos críticos son 0, -1 y 1. Los valores correspondientes son $f(0) = -3$, $f(-1) = f(1) = -4$. No existen puntos singulares. Los valores de f en los extremos -2 y 2 son $f(-2) = f(2) = 5$. La forma factorizada de $f'(x)$ es también adecuada para determinar el signo de $f'(x)$ en los intervalos entre esos extremos y puntos críticos. Donde un número impar de factores de $f'(x)$ sean negativos, $f(x)$ será a su vez negativa. Donde un número par de factores sean negativos, $f'(x)$ será positiva. Resumimos en forma de tabla las propiedades de los signos de $f'(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de $f(x)$ que se desprende de dichos signos:

	PE		PC		PC		PC		PE
x	-2		-1		0		1		2
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	máx	↘	mín	↗	máx	↘	mín	↗	máx

Nótese cómo las flechas indican de forma visual la clasificación de los extremos (EP) y puntos críticos (CP) tal como quedan determinados por el test de la primera derivada. En secciones posteriores haremos un uso extenso de este tipo de tablas. La gráfica de f se muestra en la Figura 4.14. Como el dominio es un intervalo cerrado y finito, f debe tener valores máximo y mínimo absolutos. Son 5 (en ± 2) y -4 (en ± 1).

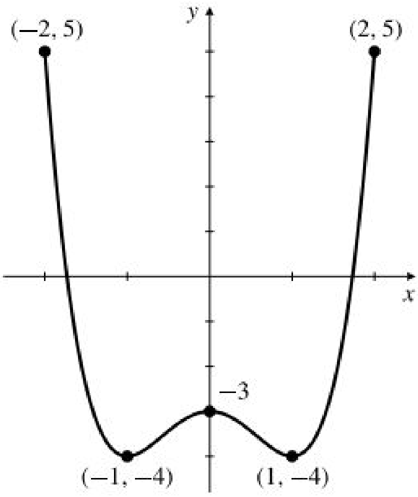

Figura 4.14 Gráfica de $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Ejemplo 4 Calcule y clasifique los valores extremos absolutos y locales de la función $f(x) = x - x^{2/3}$ con dominio $[-1, 2]$. Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

Solución $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = (x^{1/3} - \frac{2}{3})/x^{1/3}$. Existe un punto singular, $x = 0$ y un punto crítico, $x = 8/27$. Los extremos son $x = -1$ y $x = 2$. Los valores de f en esos puntos son $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(8/27) = -4/27$ y $f(2) = 2 - 2^{2/3} \approx 0.4126$ (*véase* la Figura 4.15). Otro punto interesante de la gráfica es el corte con el eje x en $x = 1$. La tabla que sigue resume la información sobre f':

	PE		PS		PC		PE
x	-1		0		8/27		2
f'		+	indef	−	0	+	
f	mín	↗	máx	↘	mín	↗	máx

Existen dos mínimos locales y dos máximos locales. El máximo absoluto de f es $2 - 2^{2/3}$ en $x = 2$. El mínimo absoluto es -2 en $x = -1$.

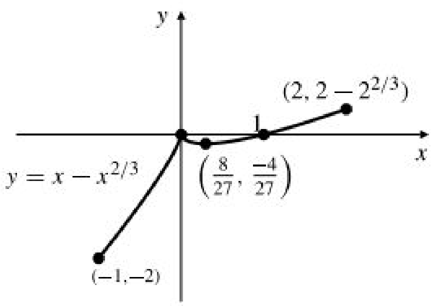

Figura 4.15 Gráfica del Ejemplo 4.

Funciones no definidas en intervalos cerrados y finitos

Si la función f no está definida en un intervalo cerrado y finito, entonces el Teorema 1 no se puede utilizar para garantizar la existencia de valores máximos y mínimos de f. Por supuesto, f puede tener tales valores extremos. En muchas situaciones prácticas desearemos calcular los valores extremos de funciones definidas en intervalos abiertos y/o infinitos. El siguiente teorema adapta el Teorema 1 para contemplar algunas de esas situaciones.

TEOREMA 4 **Existencia de valores extremos en intervalos abiertos**

Si f es una función continua en el intervalo abierto (a, b), y si

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = M$$

entonces se cumplen las siguientes conclusiones:

(i) Si $f(u) > L$ y $f(u) > M$ para algún u en (a, b), entonces f tiene un valor máximo absoluto en (a, b).
(ii) Si $f(v) < L$ y $f(v) < M$ para algún v en (a, b), entonces f tiene un valor mínimo absoluto en (a, b).

En este teorema a puede ser $-\infty$, en cuyo caso $\lim_{x \to a+}$ debería sustituirse por $\lim_{x \to -\infty}$, y b puede ser ∞, en cuyo caso $\lim_{x \to b-}$ debe sustituirse por $\lim_{x \to \infty}$. Además, tanto L como M o ambos pueden ser ∞ o $-\infty$.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el apartado (i), ya que la demostración del apartado (ii) es similar. Tenemos que existe un número u en (a, b) tal que $f(u) > L$ y $f(u) > M$. Aquí, L y M son números finitos o $-\infty$. Como $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ debe existir un número x_1 en (a, u) tal que

$$f(x) < f(u) \qquad \text{siempre que} \qquad a < x < x_1$$

De forma similar, debe existir un número x_2 en (u, b) tal que

$$f(x) < f(u) \qquad \text{siempre que} \qquad x_2 < x < b$$

Véase la Figura 4.16. Por tanto, $f(x) < f(u)$ en todos los puntos de (a, b) que no estén en el subintervalo cerrado finito $[x_1, x_2]$. Por el Teorema 1, la función f, continua en $[x_1, x_2]$, debe tener un valor máximo absoluto en ese intervalo, que podemos denominar w. Como u pertenece al intervalo $[x_1, x_2]$, debemos tener que $f(w) \geqslant f(u)$, por lo que $f(w)$ es el valor máximo de $f(x)$ en todo (a, b).

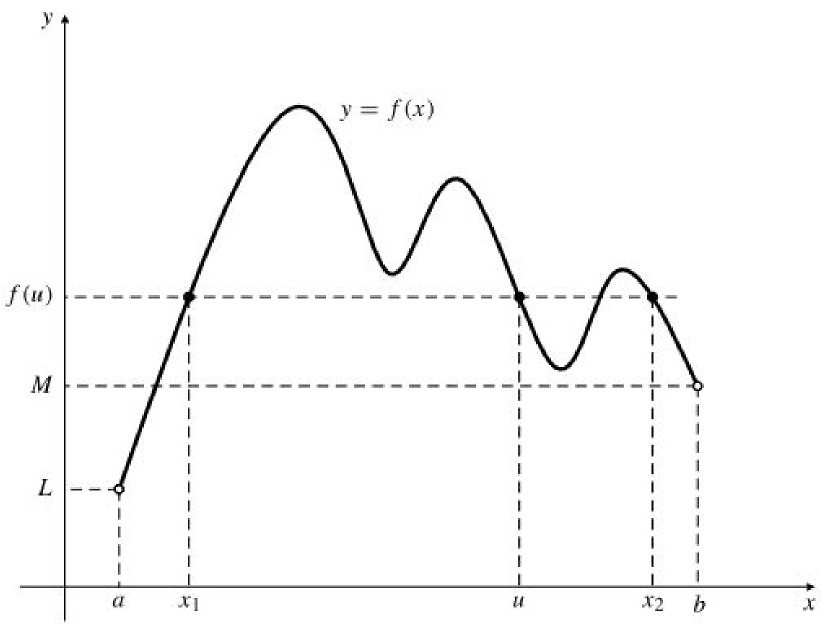

Figura 4.16

El Teorema 2 puede utilizarse para buscar valores extremos. En un intervalo abierto no hay extremos que considerar, pero todavía es posible mirar los valores de una función en los puntos críticos o singulares del intervalo.

Ejemplo 5 Demuestre que $f(x) = x + (4/x)$ tiene un valor mínimo absoluto en el intervalo $(0, \infty)$ y calcule ese valor mínimo.

Solución Tenemos que

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Como $f(1) = 5 < \infty$, el Teorema 4 garantiza que f debe tener un valor mínimo absoluto en algún punto de $(0, \infty)$. Para calcular el valor mínimo hay que comprobar los valores de f en los puntos críticos o singulares del intervalo. Tenemos que

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

que sólo vale 0 en $x = 2$ y $x = -2$. Como el dominio de f es $(0, \infty)$, no existen puntos singulares y sólo hay un punto crítico, concretamente $x = 2$, donde f tiene el valor $f(2) = 4$. Éste debe ser el valor mínimo de f en $(0, \infty)$ (*véase* la Figura 4.17).

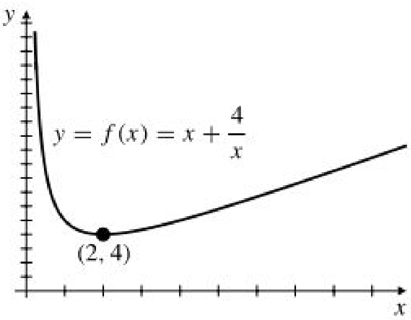

Figura 4.17 f tiene un valor mínimo de 4 en $x = 2$.

Ejemplo 6 Sea $f(x) = xe^{-x^2}$. Calcule y clasifique los puntos críticos de f, evalúe $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y utilice estos resultados como ayuda para dibujar aproximadamente la gráfica de f.

Solución $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$ sólo si $1 - 2x^2 = 0$ ya que la exponencial es siempre positiva. Por tanto, los puntos críticos son $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tenemos que $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$. f' es positiva (o negativa) cuando $1 - 2x^2$ es positiva (o negativa). La siguiente tabla resume los intervalos en los que f es creciente o decreciente:

x		PC $-1/\sqrt{2}$		PC $1/\sqrt{2}$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	mín	↗	máx	↘

Nótese que $f(0) = 0$ y que f es una función impar ($f(-x) = -f(x)$), de forma que la gráfica es simétrica respecto al origen. Además,

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}\right) = 0 \times 0 = 0$$

ya que $\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{u\to\infty} ue^{-u} = 0$ por el Teorema 5 de la Sección 3.4. Como $f(x)$ es positiva en $x = 1/\sqrt{2}$ y es negativa en $x = -1/\sqrt{2}$, f debe tener valores máximo y mínimo absolutos por el Teorema 4.

Estos valores sólo pueden ser los valores $\pm 1/\sqrt{2e}$ en los dos puntos críticos. La gráfica se muestra en la Figura 4.18. El eje x es una asíntota en $x \to \pm\infty$.

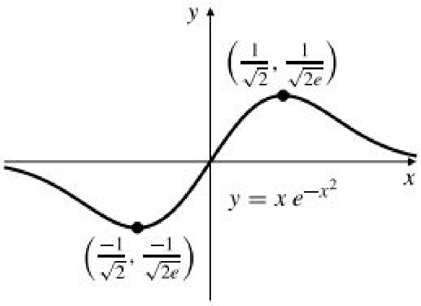

Figura 4.18 Gráfica del Ejemplo 6.

Ejercicios 4.2

En los Ejercicios 1-17, determine si las funciones dadas tienen valores extremos locales o absolutos, y obtenga sus valores si es posible.

1. $f(x)=x+2$ en $[-1, 1]$
2. $f(x)=x+2$ en $(-\infty, 0]$
3. $f(x)=x+2$ en $[-1, 1)$
4. $f(x) = x^2 - 1$
5. $f(x)=x^2-1$ en $[-2, 3]$
6. $f(x) = x^2 - 1$ en $(2, 3)$
7. $f(x)=x^3+x-4$ en $[a, b]$
8. $f(x)=x^3+x-4$ en (a, b)
9. $f(x)=x^5+x^3+2x$ en $(a, b]$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $(0, 1)$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $[2, 3]$
13. $|x-1|$ en $[-2, 2]$
14. $|x^2-x-2|$ en $[-3, 3]$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
16. $f(x) = (x+2)^{2/3}$
17. $f(x) = (x-2)^{1/3}$

En los Ejercicios 18-40, localice y clasifique todos los valores extremos de las funciones dadas. Determine si algunos de esos valores extremos son absolutos. Dibuje aproximadamente las gráficas de las funciones.

18. $f(x) = x^2 + 2x$
19. $f(x) = x^3 - 3x - 2$
20. $f(x) = (x^2 - 4)^2$
21. $f(x) = x^3(x-1)^2$
22. $f(x) = x^2(x-1)^2$
23. $f(x) = x(x^2-1)^2$
24. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
25. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
26. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$
27. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$
28. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$
29. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$
30. $f(x) = x - 2\tan^{-1} x$
31. $f(x) = 2x - \operatorname{sen}^{-1} x$
32. $f(x) = e^{-x^2/2}$
33. $f(x) = x2^{-x}$
34. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$
35. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
36. $f(x) = |x+1|$
37. $f(x) = |x^2-1|$
38. $f(x) = \operatorname{sen}|x|$
39. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
***40.** $f(x) = (x-1)^{2/3} - (x+1)^{2/3}$

En los Ejercicios 41-46, determine si las funciones dadas tienen valores absolutos máximos o mínimos. Justifique sus respuestas. Calcule los valores extremos si es posible.

41. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
42. $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$
43. $x\sqrt{4-x^2}$
44. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$
***45.** $\dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}$ en $(0, \pi)$
***46.** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

47. Si una función tiene un valor máximo absoluto, ¿debe tener valores máximos locales? Si una función tiene un valor máximo local, ¿debe tener un valor máximo absoluto? Justifique sus respuestas.

48. Si la función f tiene un valor máximo absoluto y $g(x) = |f(x)|$, ¿debe tener g un valor máximo absoluto? Justifique su respuesta.

***49.** **(Una función sin máximo ni mínimo en un extremo)** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $[0, \infty)$ y diferenciable en $(0, \infty)$, pero que en el extremo $x = 0$ no tiene ni un máximo local ni un mínimo local.

4.3 Concavidad y puntos de inflexión

Como la primera derivada, la segunda derivada de una función proporciona también información de utilidad sobre el comportamiento de dicha función y la forma de su gráfica. Determina si la gráfica se *curva hacia arriba* (es decir, su pendiente es creciente) o se *curva hacia abajo* (es decir, su pendiente es decreciente) a medida que nos movemos por la gráfica hacia la derecha.

DEFINICIÓN 3

Se dice que la función f es **convexa** en un intervalo abierto I si es diferenciable en dicho intervalo y su derivada f' es una función creciente en I. De forma similar, la función f es **cóncava** en I si existe f' y es decreciente en I.

Los términos «convexa» y «cóncava» se utilizan para describir tanto la gráfica de la función como la función en sí misma.

Nótese que la concavidad sólo se define para funciones diferenciables, e incluso para éstas, sólo en los intervalos en los que sus derivadas no son constantes. De acuerdo con la definición anterior, en los intervalos donde la gráfica de una función sea una línea recta, la función no es cóncava ni convexa. Se dice que la función no tiene concavidad en dicho intervalo. También se dice que una función tiene concavidad opuesta en dos intervalos si es cóncava en un intervalo y convexa en el otro.

La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 4.19 es convexa en el intervalo (a, b) y cóncava en el intervalo (b, c).

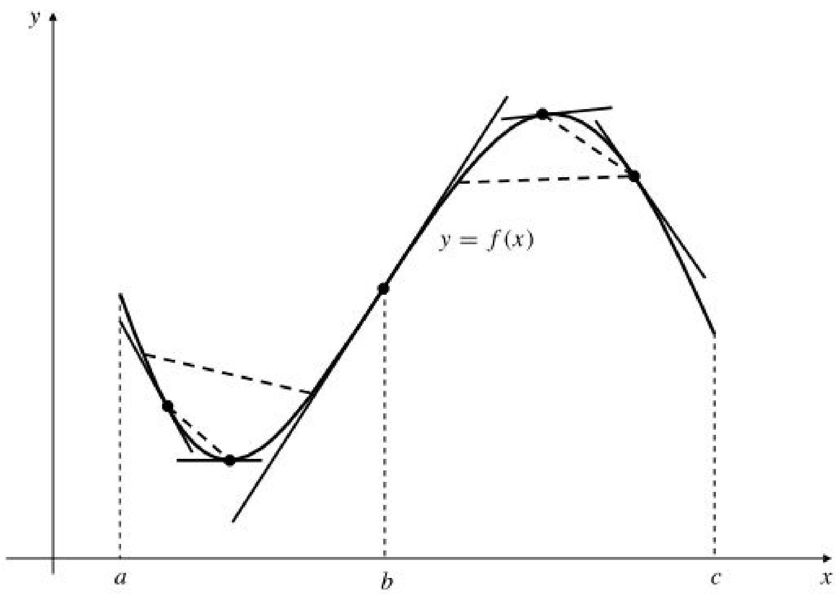

Figura 4.19 f es convexa en (a, b) y cóncava en (b, c).

Es conveniente tener en cuenta algunas consideraciones geométricas sobre la concavidad:

(i) Si f es convexa en un intervalo, entonces, en dicho intervalo, su gráfica está por encima de sus tangentes, y las cuerdas que unen puntos de su gráfica están por encima de dicha gráfica.

(ii) Si f es cóncava en un intervalo entonces, en dicho intervalo, su gráfica está por debajo de sus tangentes, y las cuerdas que unen puntos de su gráfica están por debajo de dicha gráfica.

(iii) Si la gráfica de f tiene una tangente en un punto, y si la concavidad de f es contraria en lados opuestos de dicho punto, entonces la gráfica de la función corta a su tangente en ese punto (esto ocurre en el punto $(b, f(b))$ de la Figura 4.19). Los puntos en los que ocurre eso se denominan *puntos de inflexión* de la gráfica de f.

DEFINICIÓN 4 Puntos de inflexión

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un **punto de inflexión** de la curva $y = f(x)$ (o que la función $f(x)$ *tiene* un **punto de inflexión** en $x = x_0$) si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) La gráfica $y = f(x)$ tiene una tangente en x_0.
(b) La concavidad de f toma valores opuestos en lados opuestos de x_0.

Nótese que la condición (a) implica que o bien f es diferenciable en x_0 o bien su gráfica tiene una tangente vertical en ese punto, y (b) implica que la gráfica cruza a su tangente en x_0. Un punto de inflexión de una función f es un punto de la gráfica de la función diferente de lo que se entiende como punto crítico o punto singular. Una función puede tener o no tener un punto de inflexión en un punto crítico o un punto singular. En general, un punto P es un punto de inflexión (o simplemente *una inflexión*) de una curva C (que no tiene que ser necesariamente la gráfica de una función) si C tiene una tangente en P y los arcos de C que se extienden en direcciones opuestas desde P están en lados opuestos de dicha tangente.

Las Figuras 4.20-4.22 ilustran algunas situaciones en las que aparecen puntos críticos, puntos singulares y puntos de inflexión.

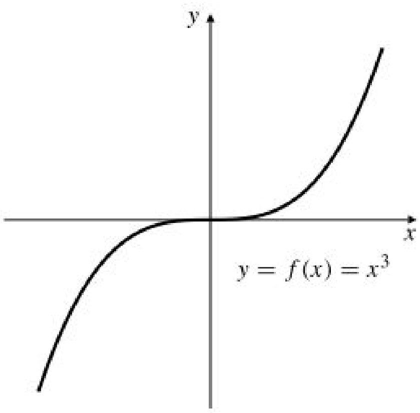

Figura 4.20 $x = 0$ es un punto crítico de $f(x) = x^3$ y f tiene un punto de inflexión en dicho punto.

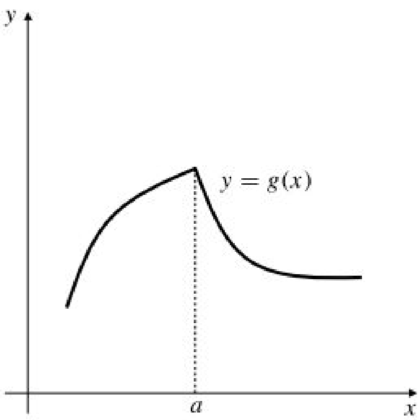

Figura 4.21 La concavidad de g es contraria en lados opuestos de a, pero su gráfica no tiene tangente en ese punto y, por tanto, no hay punto de inflexión allí.

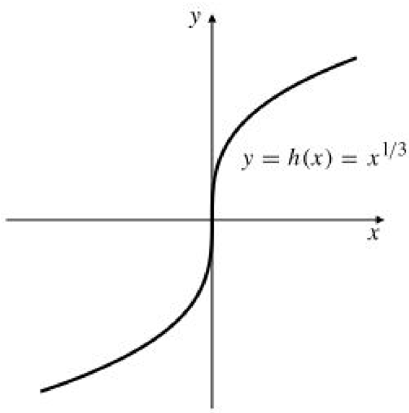

Figura 4.22 La gráfica de h tiene un punto de inflexión en el origen incluso aunque $x = 0$ es un punto singular de h.

Si una función f tiene derivada segunda f'', el signo de dicha derivada segunda nos indica si la primera derivada f' es creciente o decreciente y, por tanto, determina la concavidad de f.

TEOREMA 5 Concavidad y segunda derivada

(a) Si $f''(x) > 0$ en un intervalo I, entonces f es convexa en I.
(b) Si $f''(x) < 0$ en un intervalo I, entonces f es cóncava en I.
(c) Si f tiene un punto de inflexión en x_0 y existe $f''(x_0)$, entonces $f''(x_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Los apartados (a) y (b) se deducen al aplicar el Teorema 12 de la Sección 2.6 a la derivada f' de f. Si f tiene un punto de inflexión en x_0 y existe $f''(x_0)$, entonces f debe ser diferenciable en un intervalo abierto que contiene a x_0. Como f' es creciente a un lado de x_0 y decreciente al otro lado, debe tener valor máximo o mínimo local en x_0. Por el Teorema 2, $f''(x_0) = 0$.

El Teorema 5 nos indica que para obtener (las coordenadas x de) puntos de inflexión de una función f dos veces diferenciable, sólo se necesita buscar en los puntos donde $f''(x) = 0$. Sin embargo, no todos esos puntos tienen que ser puntos de inflexión. Por ejemplo, $f(x) = x^4$, cuya gráfica se muestra en la Figura 4.23, no tiene un punto de inflexión en $x = 0$, incluso aunque $f''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$. De hecho, x^4 es convexa para todo intervalo.

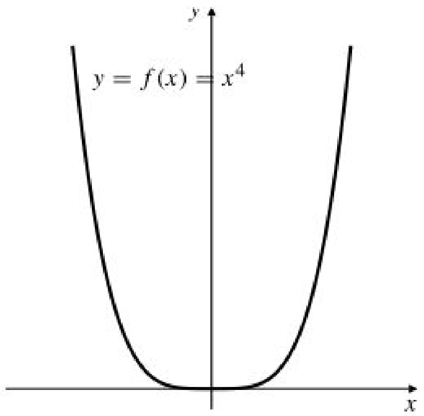

Figura 4.23 $f''(0) = 0$, pero f no tiene un punto de inflexión en 0.

Ejemplo 1 Determine los intervalos de concavidad de $f(x) = x^6 - 10x^4$ y los puntos de inflexión de su gráfica.

Solución Tenemos que

$$f'(x) = 6x^5 - 40x^3$$

$$f''(x) = 30x^4 - 120x^2 = 30x^2(x-2)(x+2)$$

Habiendo factorizado $f''(x)$ de esta forma, podemos ver que sólo se anula en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. En los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) > 0$, por lo que f es convexa. En $(-2, 0)$ y $(0, 2)$, $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava. $f''(x)$ cambia de signo cuando pasamos por -2 y 2. Como $f(\pm 2) = -96$, la gráfica de f tiene puntos de inflexión en $(\pm 2, 96)$. Sin embargo, $f''(x)$ no cambia de signo en $x = 0$, ya que $x^2 > 0$ para valores de x positivos y negativos. Por tanto, no hay punto de inflexión en 0. Como en el caso de la primera derivada, la información del signo de $f''(x)$ y sus consecuencias sobre la concavidad de f se pueden expresar convenientemente en una tabla:

x		-2		0		2	
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	infl	$\cap$		$\cap$	infl	$\cup$

La gráfica de f se dibuja en la Figura 4.24.

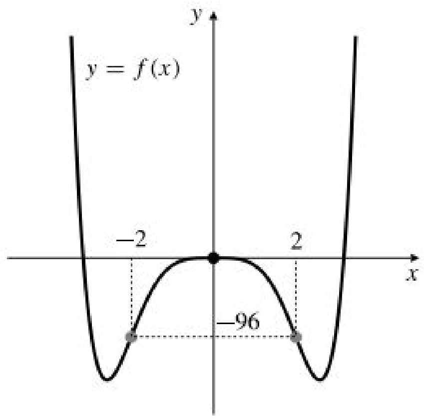

Figura 4.24 Gráfica de $f(x) = x^6 - 10x^4$.

Ejemplo 2 Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores de los extremos locales y la concavidad de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Utilice la información para dibujar aproximadamente la gráfica de f.

Solución

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = 3/2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = 1$$

El comportamiento de f se resume en la siguiente tabla:

x		PC 0		1		PC 3/2	
f'	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
f	↘ ∪	infl	↘ ∩	infl	↘ ∪	mín	↗ ∪

Nótese que f tiene un punto de inflexión en el punto crítico $x = 0$. Calculamos los valores de f en los «valores de interés de x» en la tabla:

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 0, \qquad f\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{11}{16}$$

La Figura 4.25 muestra la gráfica de f.

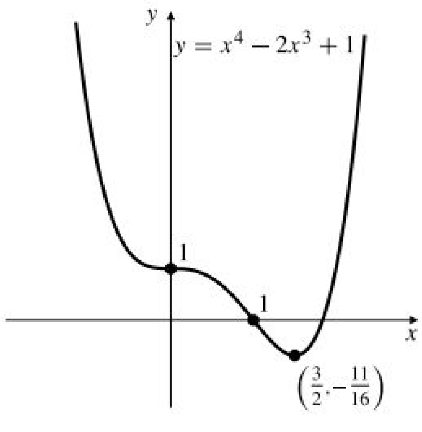

Figura 4.25 La función del Ejemplo 2.

El test de la segunda derivada

Una función f tendrá un valor máximo (o mínimo) local en un punto crítico si su gráfica es cóncava o convexa en un intervalo que contenga dicho punto. De hecho, a menudo se utiliza el valor de la segunda derivada en el punto crítico para determinar si la función tiene un valor máximo o mínimo local allí.

TEOREMA 6 **Test de la segunda derivada**

(a) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un valor máximo local en x_0.
(b) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo local en x_0.
(c) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, entonces no se puede extraer ninguna conclusión; f puede tener un máximo local en x_0, o un mínimo local, o, en vez de eso, un punto de inflexión.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$. Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0) < 0$$

se deduce que $f'(x_0 + h) < 0$ para todo h positivo suficientemente pequeño, y $f'(x_0 + h) > 0$ para todo h negativo suficientemente pequeño. Por el test de la primera derivada (Teorema 3), f debe tener un valor máximo local en x_0. La demostración para el caso de mínimo local es similar.

Las funciones $f(x) = x^4$ (Figura 4.23), $f(x) = -x^4$ y $f(x) = x^3$ (Figura 4.20) satisfacen $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Pero x^4 tiene un valor mínimo en $x = 0$, $-x^4$ tiene un valor máximo en $x = 0$ y x^3 no tiene ni máximo ni mínimo en $x = 0$, sino que presenta un punto de inflexión. Por tanto, no se pueden extraer conclusiones sobre la naturaleza de un punto crítico basándose solamente en el conocimiento de que $f''(x) = 0$ en dicho punto.

Ejemplo 3 Calcule y clasifique los puntos críticos de $f(x) = x^2e^{-x}$.

Solución

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = 2$$
$$f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$
$$f''(0) = 2 > 0, \qquad f''(2) = -2e^{-2} < 0$$

Por tanto, f tiene un valor mínimo local en $x = 0$ y un valor máximo local en $x = 2$. *Véase* la Figura 4.26.

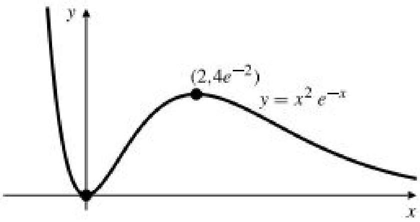

Figura 4.26 Puntos críticos de $f(x) = x^2e^{-x}$.

En muchas funciones, la segunda derivada es más complicada de calcular que la primera derivada, por lo que el test de la primera derivada es más fácil de utilizar para clasificar puntos críticos que el test de la segunda derivada. Nótese también que el test de la primera derivada sólo puede clasificar valores extremos que aparezcan en puntos críticos, puntos singulares y extremos.

Es posible generalizar el test de la segunda derivada para obtener tests sobre derivadas superiores que puedan considerar algunas situaciones en que la segunda derivada es cero en un punto crítico (*véase* el Ejercicio 40 al final de esta sección).

Ejercicios 4.3

En los Ejercicios 1-22, determine los intervalos de concavidad constante de las funciones dadas, y localice sus puntos de inflexión.

1. $f(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x) = 2x - x^2$

3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

4. $f(x) = x - x^3$

5. $f(x) = 10x^3 - 3x^5$

6. $f(x) = 10x^3 + 3x^5$

7. $f(x) = (3 - x^2)^2$

8. $f(x) = (2 + 2x - x^2)^2$

9. $f(x) = (x^2 - 4)^3$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3}$

11. $f(x) = \operatorname{sen} x$

12. $f(x) = \cos 3x$

13. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x$

14. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$

15. $f(x) = \tan^{-1} x$

16. $f(x) = xe^x$

17. $f(x) = e^{-x^2}$

18. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

19. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ **20.** $f(x) = (\ln x)^2$

21. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x - \dfrac{25}{3}$

22. $f(x) = (x-1)^{1/3} + (x+1)^{1/3}$

23. Discuta la concavidad de la función lineal $f(x) = ax + b$. ¿Tiene puntos de inflexión?

Clasifique los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 24-35 utilizando el test de la segunda derivada siempre que sea posible.

24. $f(x) = 3x^3 - 36x - 3$ **25.** $f(x) = x(x-2)^2 + 1$

26. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ **27.** $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

28. $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$ **29.** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

30. $f(x) = xe^x$ **31.** $f(x) = x\ln x$

32. $f(x) = (x^2 - 4)^2$ **33.** $f(x) = (x^2 - 4)^3$

34. $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ **35.** $f(x) = x^2 e^{-2x^2}$

36. Sea $f(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = -x^2$ si $x < 0$. ¿Es 0 un punto crítico de f? ¿Tiene f un punto de inflexión allí? ¿Es $f''(x) = 0$? Si una función tiene una tangente no vertical en un punto de inflexión, ¿se tiene que hacer cero necesariamente la segunda derivada de la función en ese punto?

*****37.** Verifique que si f es convexa en un intervalo, entonces su gráfica está por encima de sus tangentes en dicho intervalo. *Sugerencia*: Suponga que f es convexa en un intervalo abierto que contiene a x_0. Sea $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Demuestre que h tiene un valor mínimo local en x_0 y, por tanto, que $h(x) \geqslant 0$ en el intervalo. Demuestre que $h(x) > 0$ si $x \neq x_0$.

*****38.** Verifique que la gráfica $y = f(x)$ cruza a su tangente en un punto de inflexión. *Sugerencia*: Considere separadamente los casos en los que la tangente es vertical y no vertical.

39. Sea $f_n(x) = x^n$ y $g_n(x) = -x^n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Determine si estas funciones tienen un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión en $x = 0$.

40. **(Test de derivadas superiores)** Utilice las conclusiones del Ejercicio 39 para plantear una generalización del test de la segunda derivada que se pueda aplicar cuando

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

para algún $k \geqslant 2$.

*****41.** Este problema demuestra que ningún test que se base solamente en los signos de las derivadas en x_0 puede determinar para toda función con un punto crítico en x_0 si en ese punto tiene un máximo o un mínimo local o un punto de inflexión. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to 0} x^{-n} f(x) = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(b) $\lim_{x\to 0} P(1/x)\, f(x) = 0$ para todo polinomio P.

(c) Para $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)\, f(x)\, (k = 1, 2, 3, \ldots)$, siendo P_k un polinomio.

(d) $f^{(k)}(0)$ existe y es igual a 0 para $k = 1, 2, 3, \ldots$

(e) f tiene un mínimo local en $x = 0$; $-f$ tiene un máximo local en $x = 0$.

(f) Si $g(x) = x f(x)$, entonces $g^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k y g tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

*****42.** Una función puede tener un punto crítico y no tener en dicho punto un máximo local ni un mínimo local ni un punto de inflexión. Demuestre que esto es así considerando la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(0) = f(0) = 0$, por lo que el eje x es tangente a la gráfica de f en $x = 0$; pero $f'(x)$ no es continua en $x = 0$, por lo que no existe $f''(0)$. Demuestre que la concavidad de f no es constante en ningún intervalo con extremo 0.

4.4 Dibujo de la gráfica de una función

Al dibujar la gráfica $y = f(x)$ de una función f, hay tres fuentes de información de utilidad:

(i) **La propia función f**, mediante la que se pueden determinar las coordenadas de algunos puntos de la gráfica, su simetría, y si existen asíntotas.

(ii) **Su primera derivada f'**, de donde se pueden determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la localización de los valores extremos locales.

(iii) **Su segunda derivada f''**, de donde se puede determinar la concavidad y los puntos de inflexión, y algunas veces los valores extremos.