Tache Alexandru - Petre

Geometrie complexă generalizată

Lucrare ştiinţifică

Editura Sfântul Ierarh Nicolae

ISBN 978-606-577-017-1

Rezumat

Această lucrare are drept scop prezentarea conceptului recent apărut de varietate complexă generalizată. Lucrarea este structurată în două părţi, a câte trei capitole fiecare.

În prima parte a acesteia sunt prezentate pe scurt cele două geometrii principale ce sunt generalizate prin acest concept nou, anume geometria complexă şi cea simplectică, precum şi noţiunea de foliaţie (generalizată) a unei varietăţi diferenţiabile, necesară pentru o mai bună înţelegere a unor fapte prezentate ulterior. Partea a doua cuprinde pregătirile algebrice, respectiv analitice necesare definirii varietăţilor complexe generalizate precum şi prezentarea propriu-zisă a acestora.

Primul capitol începe cu prezentarea noţiunii de olomorfie pentru funcţii de mai multe variabile complexe. Urmează definirea varietăţilor complexe şi prezentarea proprietăţilor de bază ale acestora privite ca varietăţi reale: dimensiunea pară, orientabilitatea şi existenţa canonică a unei structuri speciale pe fibratul tangent. Ultima secţiune cuprinde teorema Newlander-Nirenberg ce stipulează condiţiile în care o varietate reală cu proprietăţile de mai sus provine dintr-o structură de varietate complexă.

În al doilea capitol sunt prezentate varietăţile simplectice. Prima secţiune studiază formele simplectice liniare, iar a doua prezintă varietăţile reale înzestrate cu o 2-formă închisă, simplectică în fiecare punct. Ca şi în cazul varietăţilor complexe, proprietăţile de bază ale unei astfel de structuri sunt dimensiunea pară şi orientabilitatea. Capitolul se încheie cu prezentarea teoremei de structură locală a lui Darboux, potrivit căreia orice două varietăţi simplectice sunt local indistinctibile.

Capitolul al treilea prezintă noţiunea geometrică de foliaţie. Pornind de la integrabilitatea câmpurilor vectoriale diferenţiabile, sunt prezentate distribuţiile diferenţiabile precum şi condiţiile în care acestea sunt complet integrabile. Rezultatul din urmă este cunoscut sub numele de teorema lui Frobenius. Ultima secţiune prezintă o generalizare a acestui rezultat pentru cazul distribuţiilor diferenţiabile de dimensiune variabilă.

Primul capitol al părţii secunde a lucrării prezintă noţiuni de algebră liniară a spaţiului vectorial $V \oplus V^*$ necesare prezentării varietăţilor complexe generalizate. Reţinem de aici: produsul interior canonic existent pe un astfel de spaţiu, automorfismele liniare induse de o 2-formă liniară a spaţiului V (B-transformări) precum şi forma generală a subspaţiilor maximal izotrope ale lui $V \oplus V^*$.

Capitolul cinci realizează pregătirile analitice necesare definirii varietăţilor complexe generalizate. Paranteza Courant reprezintă un analog al parantezei Lie pentru fibratul $TM \oplus T^*M$. Sunt studiate structura nou obţinută pe fibratul $TM \oplus T^*M$, automorfismele acesteia, precum şi structura particulară obţinută prin restrângerea parantezei Courant la un subfibrat involutiv maximal izotrop, numită în general algebroid Lie.

Capitolul final introduce noţiunea de varietate complexă generalizată, arată cum aceasta generalizează atât geometria complexă cât şi pe cea simplectică şi prezintă teorema lui M. Gualtieri de structură locală a varietăţilor complexe generalizate.

Cuprins

Partea I

Noţiuni geometrice clasice

Capitolul 1

Varietăţi complexe

1.1 Funcţii olomorfe

O funcţie $F = f(x, y) + ig(x, y) : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte *olomorfă* dacă îndeplineşte ecuaţiile Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{şi} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Diferenţiala funcţiei F vazută ca funcţie reală, $F = F(x, y) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, este dată într-un punct oarecare $p \in U$ de aplicaţia liniară

$$(dF)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{pmatrix}.$$

Notând cu j automorfismul liniar al lui $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ corespunzător înmulţirii complexe cu i, automorfism dat în bazele canonice de matricea

$$j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se verifică uşor faptul că ecuaţiile Cauchy-Riemann sunt echivalente cu următoarea relaţie de comutare: $j \circ (dF)_p = (dF)_p \circ j\ ,\ \forall p \in U$.

În mod similar, vom identifica $\mathbb{C}^m$ cu $\mathbb{R}^{2m}$ prin

$$(z_1, \ldots, z_m) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_m + iy_m) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$$

şi vom nota cu j_m automorfismul lui $\mathbb{R}^{2m}$ corespunzător multiplicării cu i de pe $\mathbb{C}^m$

$$j_m := \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},$$

pentru a da următoarea definiţie:

Definiţia 1.1. O aplicaţie $F : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ se numeşte *olomorfă* dacă diferenţiala dF a aplicaţiei F văzută ca aplicaţie reală $F : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$ îndeplineşte relaţia: $j_m \circ (dF)_p = (dF)_p \circ j_n\ ,\ \forall p \in U$.

1.2 Varietăţi complexe

Definiţia 1.2. Numim *varietate complexă* de dimensiune m o varietate topologică $(M, \mathcal{A})$ de aceeaşi dimensiune al cărei atlas $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ îndeplineşte următoarea condiţie de compatibilitate:

oricare ar fi U_α şi $U_\beta \in \mathcal{A}$ cu $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, aplicaţia dintre deschişi din $\mathbb{C}^m$ $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ este olomorfă.

O pereche $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se numeşte *hartă* iar în acest caz atlasul se mai numeşte şi *structură olomorfă.*

O *funcţie* $f : M \to \mathbb{C}$ se numeşte *olomorfă* dacă aplicaţia $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ este olomorfă în sensul definiţiei (1.1), oricare ar fi $\alpha \in \Lambda$.

Considerăm $(N, \mathcal{B})$ o altă varietate complexă de structură olomorfă notată cu $\mathcal{B} = (V_\gamma, \psi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. O *aplicaţie* $F : M \to N$ se numeşte *olomorfă* dacă aplicaţia $\psi_\gamma \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ este olomorfă, oricare ar fi $\alpha \in \Lambda$ şi $\gamma \in \Gamma$.

Exemplul 1.1. $\mathbb{C}^m$ *ca varietate complexă*

În mod banal, $\mathbb{C}^m$ împreună cu atlasul $\mathcal{A} = (\mathbb{C}^m, Id)$ formează o varietate complexă.

Exemplul 1.2. *Spaţiul proiectiv complex*

Notat $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$ şi definit ca mulţimea dreptelor complexe din $\mathbb{C}^{m+1}$, spaţiul proiectiv complex $m-$dimensional poate fi organizat ca varietate complexă. Mai precis, dacă definim pe $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ relaţia de echivalenţă $(z_0, \dots, z_m) \sim (w_0, \dots, w_m)$ $\iff \exists\ \alpha \in \mathbb{C}^*$ a.î $z_i = \alpha \cdot w_i$ pentru orice i, atunci $\mathbb{C}\mathrm{P}^m := (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})/_\sim$.

Notând cu $[z_0 : \cdots : z_m]$ clasa de echivalenţă a vectorului $(z_0, \dots, z_m)$, cu $U_i := \{[z_0 : \cdots : z_m] | z_i \neq 0\}$ şi cu φ_i aplicaţiile $\varphi : U_i \to \mathbb{C}^m$ date prin

$$\varphi_i([z_0 : \cdots : z_m]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_m}{z_i}\right)$$

se poate uşor arăta că

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(w_1, \dots, w_m) = \left(\frac{w_1}{w_i}, \dots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_j}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_m}{w_i}\right).$$

În mod clar, funcţiile de schimbare de hartă $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sunt olomorfe pe domeniul de definiţie, ceea ce arată că $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$ împreună cu atlasul $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{0\leq i\leq m}$ formează o structură de varietate complexă de dimensiune m.

Exemplul 1.3. *Grassmanniana complexă*

Notată cu $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{C}^m)$ şi definită ca mulţimea tuturor subspaţiilor vectoriale complexe de dimensiune p ale spaţiului vectorial complex $\mathbb{C}^m$, se poate arăta că grassmanniana complexă are o structură de varietate complexă $p(m-p)$-dimensională.

Remarca 1.1. *Varietatea diferenţiabilă subiacentă unei varietăţi complexe*

Cum orice aplicaţie olomorfă între deschişi din $\mathbb{C}^m$ este în particular o aplicaţie $C^\infty-$diferenţiabilă între deschişi din $\mathbb{R}^{2m}$, orice varietate complexă M de dimensiune complexă m defineşte o varietate diferenţiabilă $2m-$dimensională $M_{\mathbb{R}}$, care este identică cu M din punct de vedere topologic. În plus, varietatea diferenţiabilă $M_{\mathbb{R}}$ este întotdeauna orientabilă.

Într-adevăr, fie $\varphi_{\alpha\beta}$ o aplicaţie de schimbare de hartă între hărţile arbitrar alese $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) ale atlasului olomorf de pe M. Atunci, din relaţia de comutare $j_m \circ d\varphi_{\alpha\beta} = d\varphi_{\alpha\beta} \circ j_m$ pe care diferenţiala aceasteia o îndeplineşte în orice punct, obţinem că $d\varphi_{\alpha\beta}$ are – în orice punct în care este definită – forma

$$d\varphi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

cu A, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Folosind identitatea

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_m \\ C & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ 0_m & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

şi regula lui Leibnitz de calculare a determinanţilor obţinem

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta}) = \det(A)\det(A - BA^{-1}B) = (\det A)^2 \det(I_m + (A^{-1}B)^2).$$

În final, notând cu $w := \det(I_m + i(A^{-1}B))$, avem că

$$\det(I_m + (A^{-1}B)^2) = \det(I_m + i(A^{-1}B))\det(I_m - i(A^{-1}B)) = w \cdot \overline{w} > 0,$$

de unde obţinem faptul că $det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$,deci $M_{\mathbb{R}}$ este orientabilă.

Remarca 1.2. *Structura aproape complexă indusă de o structură olomorfă*

Dată o structură olomorfă corespunzătoare unei varietăţi complexe M de dimensiune m, aceasta atrage în mod canonic existenţa unui automorfism J al fibratului tangent $TM_{\mathbb{R}}$ ce are proprietatea $J^2 = -Id$. Acesta se poate defini local astfel: pentru fiecare $X \in T_pM_{\mathbb{R}}$ considerăm $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ o hartă ce conţine punctul p şi definim $J_\alpha(X) := (d\varphi_\alpha)^{-1} \circ j_m \circ d\varphi_\alpha(X)$. Alegând o altă hartă (U_β, φ_β) ce conţine punctul p şi notând cu $\varphi_{\beta\alpha}$ aplicaţia olomorfă de schimbare de hartă, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ avem

$$\begin{aligned} J_\beta(X) &= (d\varphi_\beta)^{-1} \circ j_m \circ d\varphi_\beta(X) = (d\varphi_\beta)^{-1} \circ j_m \circ d\varphi_{\beta\alpha} \circ d\varphi_\alpha(X) = \\ &= (d\varphi_\beta)^{-1} \circ d\varphi_{\beta\alpha} \circ j_m \circ (d\varphi_\alpha)^{-1} = (d\varphi_\alpha)^{-1} \circ j_m \circ d\varphi_\alpha(X) = \\ &= J_\alpha(X), \end{aligned}$$

ceea ce arată că definiţia lui J nu depinde de harta aleasă. În plus, din modul de definire descris mai sus, se poate observa acum uşor faptul că $J \circ J = -Id$.

Această remarcă îndreptăţeşte următoarea definiţie:

Definiţia 1.3. Spunem că o varietate diferenţiabilă M admite o *structură aproape complexă* J dacă $J \in \mathrm{Aut}(TM)$ şi $J^2 = -Id$. În acest caz, vom numi perechea (M, J) *varietate aproape complexă.*

Astfel, orice varietate complexă este în mod canonic o varietate aproape complexă. Reciproca nu este în general adevărată, iar condiţiile suplimentare în care aceasta are loc fac obiectul următoarei secţiuni.

1.3 Teorema Newlander-Nirenberg

Considerăm (M, J) o varietate aproape complexă m-dimensională. Am vrea să diagonalizăm automorfismul J. Pentru aceasta, trebuie să complexificăm fibratul tangent al varietăţii. Definim astfel

$$TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Extindem toate automorfismele şi toţi operatorii diferenţiali de la TM la $TM^{\mathbb{C}}$ prin $\mathbb{C}$-liniaritate. Notăm cu $T^{1,0}M$ (respectiv $T^{0,1}M$) subfibratul vectorilor proprii al lui $TM^{\mathbb{C}}$ corespunzător valorii proprii i (respectiv $-i$) a automorfismului J. Atunci are loc următorul rezultat simplu:

Lema 1.1. *Subfibraţii vectoriali proprii $T^{1,0}M$ şi $T^{0,1}M$ pot fi descrişi astfel: $T^{1,0}M = \{X - iJX | X \in TM\}$, $T^{0,1}M = \{X + iJX | X \in TM\}$. În plus, are loc descompunerea $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$.*

Demonstraţie. Pentru a proba descompunerea folosim rezultatul elementar de algebră liniară potrivit căruia vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenţi, precum şi faptul că $TM^{\mathbb{C}}$ este fibrat vectorial peste un corp algebric închis. Aşadar

$$TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

Din egalitatea $X - iJX = Y + iJY$ obţinem, egalând părţile reale şi cele imaginare şi ţinând seama de faptul că J e în particular injectiv $X = Y = 0$. Deducem de aici că $\{X - iJX | X \in TM\} \cap \{X + iJX | X \in TM\} = \{0\}$. Ţinând seama de $\dim_{\mathbb{R}}\{X - iJX | X \in TM\} = \dim_{\mathbb{R}}\{X + iJX | X \in TM\} = m$ cât şi de $\dim_{\mathbb{R}} TM^{\mathbb{C}} = 2m$, avem că

$$TM^{\mathbb{C}} = \{X - iJX | X \in TM\} \oplus \{X + iJX | X \in TM\}.$$

Pe de altă parte, perechea de incluziuni $\{X - iJX | X \in TM\} \subseteq T^{1,0}M$, respectiv $\{X + iJX | X \in TM\} \subseteq T^{0,1}M$ poate fi probată prin calcul direct astfel $J(X - iJX) = JX - iJ^2(X) = JX + iX = i(X - iJX)$, respectiv $J(X + iJX) = = JX + iJ^2(X) = JX - iX = -i(X + iJX)$.

Punând la un loc toate cele de mai sus, deducem uşor concluzia lemei. $\square$

Definiţia următoare este necesară pentru a putea enunţa teorema Newlander-Nirenberg.

Definiţia 1.4. Un subfibrat L al fibratului tangent complexificat $TM^{\mathbb{C}}$ se spune a fi *integrabil* dacă secţiunile sale $\Gamma(L)$ formează o subalgebră Lie a algebrei Lie $\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}}$ a câmpurilor vectoriale complexificate ale varietăţii M, unde am notat cu $\mathcal{X}(M)^{\mathbb{C}} := \Gamma(TM^{\mathbb{C}})$ iar paranteza Lie asociată se obţine extinzând-o pe cea obişnuită prin $\mathbb{C}$-liniaritate. Altfel spus, L este integrabil dacă şi numai dacă $[\Gamma(L), \Gamma(L)] \subseteq \Gamma(L)$.

Cu aceste pregătiri, putem acum enunţa rezultatul principal prezentat în această secţiune:

Teorema 1.2. (A. Newlander- L. Nirenberg, 1957)
Considerăm (M, J) o varietate aproape complexă. Atunci structura aproape complexă J provine dintr-o structură olomorfă dacă şi numai dacă subfibratul $T^{0,1}M$ al fibratului tangent complexificat $TM^{\mathbb{C}}$ este integrabil.

Demonstraţie. Vom arăta doar implicaţia inversă a acestei teoreme. Demonstraţia completă este dificilă, şi poate fi găsită spre exemplu în [3].

Să presupunem în cele ce urmează că structura aproape complexă J provine dintr-o structură olomorfă a varietăţii M. Considerăm $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ o hartă olomorfă arbitrară de coordonate $(z_k)_{1\leq k\leq m}$, $z_k = x_k + iy_k$. Atunci $\frac{\partial}{\partial x_k} = (d\varphi_\alpha)^{-1}(e_k)$ şi $\frac{\partial}{\partial y_k} = (d\varphi_\alpha)^{-1}(e_{m+k})$, unde prin $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ am notat baza canonică a lui $\mathbb{R}^{2m}$. În plus, $j_m(e_k) = e_{m+k}$, de unde obţinem cu ajutorul definiţei automorfismului J

$$J\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_k}. \tag{1.1}$$

Facem în continuare următoarele notaţii:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} := \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\bigg), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} := \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\bigg).$$

Din lema de mai sus şi relaţia (1.1) obţinem imediat că $\frac{\partial}{\partial z_k}$ şi $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$ sunt secţiuni locale ale fibraţilor $T^{1,0}M$, respectiv $T^{0,1}M$. Mai mult, acestea formează baze locale de secţiuni pe vecinătatea U_φ. Considerăm acum Z şi W două secţiuni locale ale fibratului $T^{0,1}M$ date prin

$$Z = \sum_{k=1}^{m} Z_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}, \qquad W = \sum_{k=1}^{n} W_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}.$$

Un calcul direct simplu arată că

$$[Z, W] = \sum_{k,\, l=1}^{m} \bigg(Z_l \frac{\partial W_k}{\partial \overline{z}_l} - W_l \frac{\partial Z_k}{\partial \overline{z}_l}\bigg) \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k},$$

care este în mod clar o secţiune locală a fibratului $T^{0,1}M$. □

Remarca 1.3. *Asupra implicaţiei directe a teoremei Newlander-Nirenberg*

Partea dificilă în demonstrarea implicaţiei directe a acesei teoreme este dată de probarea existenţei unui atlas diferenţiabil pe M ale cărui hărţi îndeplinesc relaţia (1.1) în raport cu structura aproape complexă J. Odată demonstrat acest fapt, devine uşor de arătat că funcţiile de tranziţie asociate unui astfel de atlas sunt olomorfe. Într-adevăr, fie $(w_l = u_l + iv_l)_{1\leq l\leq m}$ un sistem local de coordonate dat de harta (U_β, φ_β) care se intersectează nevid cu sistemul de coordonate locale $(w_l = u_l + iv_l)_{1\leq l\leq m}$ şi satisface

$$J(\frac{\partial}{\partial u_k}) = \frac{\partial}{\partial v_k}.$$

Atunci, cu ajutorul formulei de schimbare de coordonate avem:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial v_k} \tag{1.2}$$

şi

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial y_l}\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial y_l}\frac{\partial}{\partial v_k}. \tag{1.3}$$

Aplicând J în relaţia (1.2) şi comparând cu (1.3) obţinem

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_k}{\partial y_l} \quad \text{respectiv} \quad \frac{\partial u_k}{\partial y_l} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_l}, \quad \text{oricare ar fi} \quad 1 \leq k, l \leq m,$$

relaţii ce se redau condensat prin $j_m \circ d\varphi_{\alpha\beta} = d\varphi_{\alpha\beta} \circ j_m$. Aşadar aplicaţia $\varphi_{\alpha\beta}$ de schimbare de coordonate între cele două hărţi este într-adevăr olomorfă.

Capitolul 2

Varietăţi simplectice

2.1 Forme simplectice liniare

O formă simplectică liniară asociată unui spaţiu vectorial real este o 2-formă exterioară nedegenerată. Pe parcursul acestei secţiuni vom studia în amănunt proprietăţile unui astfel de obiect.

Un rezultat general de algebră multiliniară afirmă că, în general, formele exterioare ale unui spaţiu vectorial real pot fi identificate în mod canonic cu aplicaţiile sale multiliniare alternate. Enunţul precis al acestui fapt este dat de următoarea

Lemă. *Spaţiul vectorial al p-formelor exterioare $\Lambda^p V^*$ ale unui spaţiu vectorial real finit dimensional V este canonic izomorf cu mulţimea aplicatiilor p-liniare alternate, $\{\Omega : V^p \to \mathbb{R} \,|\, \Omega$ este multiliniară şi alternată$\}$. Izomorfismul este dat pe monoame exterioare prin $\big(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p\big)(v_1, \ldots, v_p) := det\Big(\big(\alpha_i(v_j)\big)_{i,j}\Big)$.*

Considerăm acum V un spaţiu vectorial real m-dimensional şi $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Atunci, potrivit lemei anterioare, forma exterioară Ω poate fi privită ca o aplicaţie biliniară $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ ce are proprietatea $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$, oricare ar fi $u, v \in V$. Observăm de asemenea că în acest caz $\Omega(u, u) = 0$, oricare ar fi $u \in V$. De aici înainte vom folosi această identificare în mod constant, fără a face referire la ea în mod explicit.

Teorema 2.1. (Forma standard a unei 2-forme exterioare)

Considerăm Ω o 2-formă exterioară pe V. Atunci există o bază a spaţiului vectorial V de forma $\{u_1, \ldots, u_k; e_1, \ldots, e_m; f_1, \ldots, f_m\}$ astfel încât

$\Omega(u_i, v) = 0\,,$ *oricare ar fi* $1 \leq i \leq k$ *şi* $v \in V$,

$\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j)\,,$ *oricare ar fi* $1 \leq i, j \leq m$, *şi*

$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}\,,$ *oricare ar fi* $1 \leq i, j \leq m$.

Demonstraţie. Notăm cu $\operatorname{Ker}\Omega := \{u \in V \,|\, \Omega(u, v) = 0$ oricare ar fi $v \in V\}$ şi considerăm $\{u_1, \ldots, u_k\}$ o bază a lui $\operatorname{Ker}\Omega$ şi $W \leq V$ astfel încât $V = \operatorname{Ker}\Omega \oplus W$.

Pasul 1

Alegem $e_1 \in W$ nenul. Atunci există $f_1 \in W$ astfel încât $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$. Înmulţind eventual vectorul f_1 cu un scalar real nenul, putem presupune că $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Notăm acum cu W_1 spaţiul generat de vectorii $\{e_1, f_1\}$ şi cu $W_1^\Omega := \{w \in W \,|\, \Omega(w, v) = 0 \text{ pentru orice } v \in W_1\}$. Vom arăta că $W = W_1 \oplus W_1^\Omega$.

Fie $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\Omega$. Atunci $-b = \Omega(v, e_1) = 0 = \Omega(v, f_1) = a$, de unde $v = 0$. Aşadar $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$.

Alegând $v \in W$ arbitrar, şi notând cu $c := \Omega(v, e_1)$ şi $d := \Omega(v, f_1)$, scrierea $v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$ este o scriere a lui v ca sumă de doi vectori din W_1 respectiv W_1^Ω. Deducem aşadar că $W = W_1 \oplus W_1^\Omega$.

Pasul 2

Repetăm procedeul de la pasul anterior cu W_1^Ω pe post de W. Atunci există e_2 şi $f_2 \in W_1^\Omega$ astfel încât $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Notăm cu W_2 spaţiul generat de vectorii $\{e_2, f_2\}$ şi cu $W_2^\Omega := \{w \in W_1^\Omega \,|\, \Omega(w, v) = 0 \text{ pentru orice } v \in W_2\}$. Similar cu pasul precedent, obţinem că $W_1^\Omega = W_2 \oplus W_2^\Omega$.

Pasul 3

Continuând procedeul descris mai sus, obţinem după un număr finit m de paşi $W_m^\Omega = \{0\}$. Am obţinut astfel pentru V următoarea descompunere:

$$V = Ker\, \Omega \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m,$$

unde termenii sumei sunt mutual ortogonali în raport cu forma Ω, iar spaţiul W_i are drept bază mulţimea $\{e_i, f_i\}$ cu proprietatea $\Omega(e_i, f_i) = 1$. $\square$

Definiţia 2.1. O bază cu proprietăţile din enunţul teoremei 2.1 se numeşte *bază canonică* în raport cu 2-forma exterioară Ω.

Remarca 2.1. *Scrierea* 2*-formei exterioare* Ω *în baza canonică*

Dacă notăm cu $\{u_1^*, \ldots, u_k^*; e_1^*, \ldots, e_m^*; f_1^*, \ldots, f_m^*\}$ duala bazei canonice de mai sus, 2-forma exterioară Ω are în raport cu aceasta următoarea scriere concisă:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} e_i^* \wedge f_i^*.$$

Privită ca aplicaţie biliniară alternată, Ω se scrie în coordonate astfel:

$$\Omega(u, v) = (\text{—}u\text{—}) \begin{pmatrix} 0_k & 0_k & 0_k \\ 0_m & 0_m & I_m \\ 0_m & -I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}.$$

Definiţia 2.2. Spunem că Ω este o *formă simplectică liniară* pe spaţiul vectorial V dacă $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ şi $Ker\, \Omega = \{0\}$. În acest caz, perechea (V, Ω) se numeşte *spaţiu vectorial simplectic.*

Remarca 2.2. *Paritatea dimensiunii unui spaţiu vectorial simplectic*

În conformitate cu teorema 2.1, $\dim(\mathrm{Ker}\Omega) = k = 0$, de unde rezultă că $\dim V = 2m$ este pară. În plus, spaţiul vectorial simplectic (V, Ω) are o bază de forma $\{e_1, \ldots, e_m; f_1, \ldots, f_m\}$ care îndeplineşte

$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \qquad \text{şi} \qquad \Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j).$$

O astfel de bază se numeşte *bază simplectică* pentru (V, Ω).

Modelul de spaţiu vectorial simplectic $2m$-dimensional este dat de $(\mathbb{R}^{2m}, \Omega_0)$ cu $\Omega_0 := \sum_{i=1}^{m} e_i \wedge e_{m+i}$, unde $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ reprezintă baza vectorială canonică a spaţiului $\mathbb{R}^{2m}$. În acest caz, $\{e_1, \ldots, e_m; f_1, \ldots, f_m\}$ cu $f_i := e_{m+i}$ reprezintă o bază simplectică pentru $(\mathbb{R}^{2m}, \Omega_0)$.

Definiţia 2.3. O aplicaţie $\varphi : (V, \Omega) \to (V', \Omega')$ se numeşte *simplectomorfism liniar* dacă φ este un izomorfism de spaţii vectoriale astfel încât $\varphi^*\Omega' = \Omega$, unde 2-forma exterioară $\varphi^*\Omega'$ se defineşte prin: $\varphi^*\Omega'(u, v) := \Omega\big(\varphi(u), \varphi(v)\big)$, oricare ar fi $u, v \in V$. În cazul în care un astfel de simplectomorfism există, spunem că spaţiile (V, Ω) şi (V', Ω') sunt *simplectomorfe*.

Remarca 2.3. *Clasificarea spaţiilor vectoriale simplectice finit dimensionale*

Relaţia de a fi simplectomorf este în mod clar o relaţie de echivalenţă. Cu ajutorul teoremei 2.1, observăm uşor faptul că orice spaţiu vectorial simplectic $2m$-dimensional (V, Ω) este simplectomorf cu modelul $(\mathbb{R}^{2m}, \Omega_0)$. Într-adevăr, alegerea unei baze simplectice pentru (V, Ω) determină un simplectomorfism între acesta şi $(\mathbb{R}^{2m}, \Omega_0)$.

2.2 Varietăţi simplectice

Definiţia 2.4. Considerăm M o varietate diferenţiabilă oarecare şi $\omega \in \Lambda^2 M$ o 2-formă diferenţiabilă pe M. Spunem că ω este o *formă simplectică* pe M dacă aceasta este închisă ca formă diferenţiabilă ($d\omega = 0$) şi $\omega_p \in \Lambda^2(T_p^*M)$ este o formă liniară simplectică, oricare ar fi $p \in M$. În acest caz, numim perechea (M, ω) *varietate simplectică*.

O aplicaţie $F : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ se numeşte *simplectomorfism* dacă F este un difeomorfism ce îndeplineşte $F^*\omega_2 = \omega_1$, unde 2-forma $F^*\omega_2$ se defineşte punctual prin $(F^*\omega_2)_p(u, v) := (\omega_2)_{F(p)}(dF_p(u), dF_p(v))$, $\forall\ u,\ v \in T_pM$, $\forall\ p \in M$.

Cu ajutorul remarcei 2.2, observăm uşor că orice varietate simplectică este de dimensiune pară.

Exemplul 2.1. $\mathbb{R}^{2m}$ *ca varietate simplectică*

Considerăm $M = \mathbb{R}^{2m}$ cu atlasul canonic format dintr-o singură hartă de coordonate liniare $(x_1 \ldots x_m; y_1 \ldots, y_m)$. Atunci 2-forma

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge dy_i$$

este simplectică, iar mulţimea

$$\Big\{ \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)_p, \dots, \Big(\frac{\partial}{\partial x_m}\Big)_p, \Big(\frac{\partial}{\partial y_1}\Big)_p, \dots, \Big(\frac{\partial}{\partial y_m}\Big)_p \Big\}$$

este o bază simplectică pentru T_pM.

Dacă pe $M = \mathbb{C}^m$ considerăm atlasul canonic format din harta de coordonate liniare $(z_1 \dots z_m)$, atunci 2-forma

$$\tau_0 := \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{m} dz_k \wedge d\overline{z}_k$$

este simplectică. De fapt, identificând $\mathbb{C}^m$ cu $\mathbb{R}^{2m}$ prin $z_k = x_k + iy_k$, observăm uşor că forma τ_0 este egală cu ω_0.

Exemplul 2.2. *Sfera S^2 ca varietate simplectică*

Considerăm sfera $M = S^2$ privită ca mulţimea vectorilor unitari din $\mathbb{R}^3$. Atunci vectorii tangenţi în punctul p la S^2 pot fi identificaţi cu vectorii ortogonali pe p. Forma simplectică standard pe S^2 este indusă de produsul mixt astfel:

$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v \rangle, \qquad \text{oricare ar fi } u, v \in T_pS^2.$$

Aceasta este închisă pentru că este de grad maxim şi liniar simplectică în fiecare punct întrucât $\langle p, u \times (p \times u)\rangle \neq 0$ oricare ar fi $u \neq 0$.

Exemplul 2.3. *Fibratul cotangent al unei varietăţi ca varietate simplectică*

Considerăm M o varietate diferenţiabilă oarecare de dimensiune reală m. Vom arăta că se poate găsi întotdeauna pe fibratul cotangent T^*M al acesteia o 2-formă simplectică ω, numită *forma simplectică canonică* a fibratului T^*M.

Pentru aceasta să considerăm $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ o hartă pe M de coordonate locale $(x_1, \dots, x_m)$. Acesteia îi asociem în mod canonic harta $(T^*U_\alpha, d\varphi_\alpha)$ de coordonate locale notate cu $(x_1, \dots, x_m; \xi_1, \dots, \xi_m)$ de pe T^*M. Definim ω pe $T * U_\alpha$ prin:

$$\omega := \sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge d\xi_i.$$

Pentru a verifica că această definiţie nu depinde de harta considerată, să observăm mai întâi că $\omega = -d\tau$, unde $\tau := \sum_{i=1}^{m} \xi_i dx_i$. Este suficient acum să arătăm că definiţia 1-formei τ nu depinde de harta aleasă. Pentru aceasta, să considerăm (U_β, φ_β) o altă hartă pe M de coordonate $(x'_1, \dots, x'_m)$ ce se intersectează nevid cu cea de mai înainte, şi să notăm cu $(x'_1, \dots, x'_m; \xi'_1, \dots, \xi'_m)$ coordonatele induse de aceasta pe T^*M. Atunci, ţinând seama de formulele de schimbare de coordonate, avem:

$$\sum_{j=1}^{m} \xi'_j dx'_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \Big(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\Big) \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\Big) dx_k = \sum_{i,\,k=1}^{m} \xi_i \delta^i_k dx_k = \sum_{i=1}^{m} \xi_i dx_i,$$

de unde deducem că definiţia 1-formei τ (deci şi cea a 2-formei ω) nu depinde de harta aleasă.

Remarca 2.4. *Forma volum asociată unei varietăţi simplectice*

O proprietate fundamentală a varietăţilor simplectice este orientabilitatea. Pentru a o proba vom arăta că dată o varietate simplectică (M, ω) de dimensiune $2m$, forma de grad maxim $\Omega := \omega^m$ nu se anulează în nici un punct de pe M. Într-adevăr, dat un punct $p \in M$, să considerăm $\{e_1, \dots, e_m; f_1 \dots, f_m\}$ o bază simplectică în T_p^*M. Folosind remarca 2.1, $\omega_p = \sum_{i=1}^m e_i \wedge f_i$ în această bază. Notăm cu τ_i 2-forma $e_i \wedge f_i$. Atunci

$$\Omega_p = \bigwedge_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tau_i = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq m} \bigwedge_{k=1}^m \tau_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq m} \bigwedge_{k=1}^m \tau_{i_k} = m! \bigwedge_{i=1}^m \tau_i,$$

unde în ultima egalitate s-a ţinut cont de faptul că formele τ_i sunt de grad par. Aşadar, $\Omega_p = m!(e_1 \wedge f_1) \wedge (e_2 \wedge f_2) \wedge \dots \wedge (e_m \wedge f_m) \neq 0$, iar cum p a fost ales arbitrar, deducem că ω^m este o formă de grad maxim pe M nicăieri nulă.

Observăm că structurile simplectice – în asemănare cu cele olomorfe – nu pot fi date pe orice varietate diferenţiabilă, ci doar pe varietăţile orientabile de dimensiune pară. O obstrucţie în plus este dată de faptul că orice varietate simplectică compactă are al doilea grup de coomologie de Rham $H^2(M)$ netrivial. Într-adevăr, aplicând teorema lui Stokes formei volum, se poate arăta uşor că o formă simplectică a unei varietăţi compacte nu este niciodată exactă. Deducem de aici, spre exemplu, că S^2 este singura sferă de dimensiune pară care admite (conform exemplului 2.2) o structură simplectică.

După cum bine ştim, geometria riemanniană – definită ca studiul perechilor (M, g), unde M este varietate diferenţiabilă iar g este un 2-tensor simetric nedegenerat pe M – are drept caracteristică fundamentală existenţa unor invarianţi locali precum curbura. Spre deosebire de aceasta, geometria simplectică nu admite nici un invariant local, în sensul că orice două varietăţi simplectice de aceeaşi dimensiune sunt local indistinctibile. Încheiem acest capitol de prezentare a varietăţilor simplectice cu enunţul precis al acestui fapt însoţit de o remarcă.

Teorema 2.2. (G. Darboux, 1882)

Considerăm (M, ω) o varietate simplectică de dimensiune $2m$ şi p un punct oarecare pe M. Atunci atlasul varietăţii M conţine cel puţin o hartă $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de coordonate locale $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ cu $p \in U_\alpha$ aşa încât forma ω se scrie în aceste coordonate

$$\omega = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i.$$

Remarca 2.5. *Modelul local al unei varietăţi simplectice*

Conform teoremei 2.2, modelul local al unei varietăţi simplectice de dimensiune $2m$ este cel dat de exemplul 2.1, anume $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$. În plus, desprindem uşor faptul că orice două varietăţi simplectice de aceeasi dimensiune sunt local simplectomorfe, adică local indistinctibile din punctul de vedere al geometriei simplectice.

Capitolul 3

Foliaţii pe varietăţi diferenţiabile

3.1 Curbe integrale

Ne vom reaminti în cele ce urmează câteva noţiuni şi rezultate clasice de geometrie diferenţială legate de curbele integrale.

Definiţia 3.1. Considerăm M o varietate diferenţiabilă, $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp vectorial diferenţiabil pe aceasta şi $p \in M$ oarecare. Numim *curbă integrală* prin p a câmpului vectorial X o curbă diferenţiabilă $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ (cu ϵ posibil ∞) care îndeplineşte $c(0) = p$ şi $\dot{c}\ (t) = X_{c(t)}$ oricare ar fi $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Curba c se va numi *curbă integrală maximală* dacă aceasta nu poate fi prelungită strict la o altă curbă integrală prin p.

Următorul rezultat reprezintă, în esenţă, o rescriere în limbaj geometric a teoremei Cauchy-Lipschitz de existenţă, unicitate şi dependenţă diferenţiabilă de datele iniţiale a soluţiei maximale a unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul I.

Teorema 3.1. (A. L. Cauchy - R. Lipschitz)
Considerăm X un câmp vectorial diferenţiabil pe varietatea M. Atunci:
(i) Prin orice punct p al varietăţii M trece o unică curbă integrală maximală $c_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \to M$ a câmpului vectorial X;
(ii) Pentru orice punct $p \in M$ există o vecinătate deschisă U_p a lui p astfel încât $\epsilon_q = \epsilon_p$ oricare ar fi $q \in U_p$;
(iii) Aplicaţia $\Psi : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \times U_p \to M$ definită prin $\Psi(t, q) := c_q(t)$ este diferenţiabilă. În plus, aplicaţiile $X_t(\cdot) := \Psi(t, \cdot)$ sunt difeomorfisme locale ce îndeplinesc proprietatea $X_t \circ X_s = X_{t+s}$ oriunde aceasta are sens.

Definiţia 3.2. Aplicaţiile $\{X_t\}$ definite în teorema precedentă formează un pseudogrup de difeomorfisme locale ale lui M numit *curentul local* sau *fluxul* câmpului vectorial X.

3.2 Distribuţii diferenţiabile

Am văzut în secţiunea precedentă că, dat un câmp vectorial diferenţiabil X pe o varietate, prin orice punct al varietăţii trece o unică curbă diferenţiabilă tangentă la X în fiecare punct al ei. Putem pune aceeaşi problemă pentru două sau mai multe câmpuri diferenţiabile deodată: date l câmpuri diferenţiabile pe o varietate M şi fixat p un punct oarecare pe aceasta, există o subvarietate l-dimensională a varietăţii M ce trece prin punctul fixat p şi este tangentă la toate câmpurile date în fiecare punct al ei? Răspunsul la această întrebare este dat de teorema lui Frobenius, iar pentru a-l putea prezenta avem nevoie de câteva noţiuni pregătitoare.

Definiţia 3.3. Considerăm M o varietate diferenţiabilă de dimensiune m şi l un număr natural cuprins între 1 şi m. Numim *distribuţie* de dimensiune l o familie de subspaţii vectoriale l-dimensionale $(D_p)_{p\in M}$ astfel încât $D_p \leq T_pM$, oricare ar fi $p \in M$.

Spunem că distribuţia $(D_p)_{p\in M}$ este o *distribuţie diferenţiabilă* dacă pentru orice punct $p \in M$ există o vecinătate deschisă U_p a lui p şi câmpurile vectoriale diferenţiabile locale $X_1, \ldots, X_l \in \mathcal{X}(U_p)$ astfel încât $\{X_1(q), \ldots, X_l(q)\}$ este bază pentru $D_q, \forall q \in U_p$.

Noţiunea de curbă integrală capătă în acest context următoarea generalizare:

Definiţia 3.4. O subvarietate N a varietăţii M se numeşte *varietate integrală* a distribuţiei $\mathcal{D} = (D_p)_{p\in M}$ dacă $T_pN \subseteq D_p$ oricare ar fi $p \in M$. O varietate integrală de aceeaşi dimensiune cu distribuţia $\mathcal{D}$ se numeşte *varietate integrală maximală.*

Dacă prin fiecare punct p al varietăţii M trece o varietate integrală maximală N_p a distribuţiei $\mathcal{D}$, spunem că distribuţia $\mathcal{D}$ este *complet integrabilă.* Atunci când există, o familie $(N_p)_{p\in M}$ de astfel de subvarietăţi integrabile maximale se numeşte *foliaţie* a varietăţii M subiacentă distribuţiei $\mathcal{D}$.

Reformulând parte din teorema 3.1 cu ajutorul acestor noţiuni, obţinem că distribuţiile 1-dimensionale (câmpurile vectoriale) sunt complet integrabile. Acest rezultat nu se păstrează, însă, fără ipoteze suplimentare în dimensiune ≥ 2. Într-adevăr, are loc

Lema 3.2. *O distribuţie diferenţiabilă complet integrabilă $\mathcal{D}$ are proprietatea de a fi* involutivă*, adică: dacă X şi Y sunt câmpuri vectoriale cu $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, atunci $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$.*

Demonstraţie. Alegem $p \in M$ oarecare şi notăm cu N_p varietatea integrală maximală prin p a distribuţiei diferenţiabile date. Notăm deasemenea cu $\mathcal{D} = (D_p)_{p\in M}$ distribuţia din enunţ şi cu l dimensiunea sa.

Problema fiind de natură locală, alegem o hartă (U, φ) în jurul punctului p, de coordonate locale, $(x_1, \ldots, x_m)$ astfel încât $\varphi(p) = 0$ şi $U \cap N_p$ să fie descrisă în această hartă de ecuaţiile $x_{l+1} = \cdots = x_m = 0$. Cu aceste alegeri, obţinem uşor că pentru orice $q \in U \cap N_p$ mulţimea de vectori $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_l})_q\}$ formează bază pentru spaţiul vectorial D_q.

Câmpurile vectoriale $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ vor avea în coordonatele locale de mai sus expresii de forma:

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{respectiv} \quad Y = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

unde coeficienţii a_i, b_i verifică:

$$a_i(x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0) = b_i(x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{oricare ar fi } i > l.$$

Deducem din aceste expresii că

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(0) = 0 \quad \text{oricare ar fi } i \leq l \text{ şi } j > l.$$

Calculând acum paranteza Lie a câmpurilor vectoriale X şi Y:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{unde } c_i := \sum_{j=1}^{m} \Big(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \Big),$$

obţinem uşor că $c_i(p) = 0$ pentru $j > l$, adică $[X, Y](p) \in D_p$. □

Vedem că involutivitatea este o condiţie necesară pentru ca o distribuţie diferenţiabilă să fie complet integrabilă. Teorema lui Frobenius afirmă că această condiţie este de fapt şi suficientă. Pentru a putea însă prezenta demonstraţia acestui fapt, avem nevoie de următorul rezultat ajutător:

Teorema 3.3. (De îndreptare simultană a câmpurilor vectoriale diferenţiabile)
Considerăm M o varietatate diferenţiabilă, p un punct pe M, V_p o vecinătate deschisă a punctului p şi $X_1, \ldots, X_l \in \mathcal{X}(V_p)$ l câmpuri vectoriale diferenţiabile locale. Presupunem că aceste câmpuri vectoriale comută două câte două în raport cu paranteza Lie ($[X_i, X_j] = 0$ oricare ar fi $1 \leq i, j \leq l$) şi că vectorii $X_1(p), \ldots, X_l(p) \in T_pM$ sunt liniar independenţi. Atunci există o hartă locală (U, φ) în jurul punctului p de coordonate $(x_1, \ldots, x_m)$ astfel încât

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \textit{oricare ar fi} \quad 1 \leq i \leq l.$$

Demonstraţie. Enunţul fiind local, putem presupune că V_p este un deschis din $\mathbb{R}^m$ şi $p = 0$. Putem presupune de asemenea că V_p este o vecinatate suficient de mică a lui p astfel încât toate curentele locale $X_{1t}, \ldots, X_{lt}$ să fie definite pe V_p.

Considerăm acum W o vecinătate suficient de mică a originii $0 \in \mathbb{R}^m$ şi aplicaţia $\varphi : W \to V_p$ dată prin

$$\varphi(t_1, \ldots, t_m) = X_{1t_1} \circ \cdots \circ X_{lt_l}(0, \ldots, 0; t_{l+1}, \ldots, t_m).$$

Aplicaţia φ este diferenţiabilă şi, deoarece curentele locale X_{it} comută două câte două, obţinem

$$(d\varphi)_0\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_0 X_{it}(X_{1t_1}\circ\cdots\circ \widehat{X}_{it_i}\circ\cdots\circ X_{lt_l}(0,\ldots,0)) = X_i(p), \quad 1\le i\le l,$$

$$(d\varphi)_0\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0\Big) = \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0, \quad l+1\le i\le m.$$

Aşadar, φ^{-1} este o hartă cu proprietăţile din enunţ. □

Cu acest rezultat demonstrat, putem prezenta acum teorema lui Frobenius.

Teorema 3.4. (G. Frobenius, 1887)
O distribuţie diferenţiabilă $\mathcal{D}=(D_p)_{p\in M}$ pe o varietate M este complet integrabilă dacă şi numai dacă aceasta este involutivă.

Demonstraţie. După cum am văzut, implicaţia directă este dată de lema 3.2.

Pentru implicaţia inversă, să notăm cu l dimensiunea distribuţiei $\mathcal{D}$ şi cu m dimensiunea varietăţii M. Fixăm p un punct oarecare pe M. Vom arăta că prin punctul p trece o varietate integrală maximală a distribuţiei $\mathcal{D}$.

Pasul 1 *Existenţa unei baze locale de câmpuri vectoriale comutative pentru distribuţia $\mathcal{D}$*

Considerăm (U,ψ) o hartă în jurul punctului p de coordonate locale notate $(x_1,\ldots,x_m)$ şi câmpurile vectoriale locale $Y_1,\ldots Y_l\in\mathcal{X}(U)$ ca în definiţia 3.3. Notăm cu

$$Y_i := \sum_{i=1}^{m} b_i^j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

expresiile lor locale.

Din modul în care acestea au fost alese, matricea de funcţii $(b_i^j)_{1\le i\le m,1\le j\le l}$ are rangul l în fiecare punct din U. Mai mult, printr-o eventuală renumerotare a coordonatelor, putem presupune că matricea $(b_i^j)_{1\le i,j\le l}$ este inversabilă pe U. Notând cu $(\beta_i^j)_{1\le i,j\le l}$ inversa sa, definim câmpurile vectoriale X_i astfel

$$X_i := \sum_{j=1}^{l}\beta_i^jY_j \quad \text{oricare ar fi } 1\le i\le l.$$

Acestea au următoarea expresie în coordonate locale

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=l+1}^{m} c_i^j\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{3.1}$$

unde c_i^j sunt funcţii diferenţiabile pe U, şi formează la rândul lor o bază locală de câmpuri vectoriale pentru distribuţia $\mathcal{D}$.

Din ipoteza de involutivitate deducem că există funcţiile $f_1, \ldots, f_l$ pe U astfel încât

$$[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{l} f_l X_l \quad \text{pe } U.$$

Cum, în general $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, deducem din egalitatea 3.1 că parantezele $[X_i, X_j]$ sunt combinaţii liniare doar de $\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$. Aşadar $f_1 = \cdots = f_l = 0$, adică $[X_i, X_j] = 0$ pe U.

Pasul 2 *Îndreptăm câmpurile X_i cu ajutorul teoremei 3.3*

Ca în demonstraţia teoremei 3.3, găsim acum o aplicaţie $\varphi : W \to U_p$ cu proprietatea

$$(d\varphi)_0\big(\frac{\partial}{\partial t_i}\big) = X_i(p), \quad \text{oricare ar fi } 1 \leq i \leq l,$$

unde $W \subseteq \mathbb{R}^l$ este o vecinătate suficient de mică a lui 0.

Din faptul că vectorii $X_1(p), \ldots, X_l(p)$ sunt liniar independenţi, deducem că diferenţiala $(d\varphi)_0$ este injectivă. Conform teoremei rangului, micşorând eventual vecinătatea W, putem presupune că aplicaţia φ este o scufundare. Aşadar, $\varphi(W) := N_p$ este o subvarietate l-dimensională ce trece prin p a varietăţii M.

Pasul 3 *Arătăm că N_p este varietate integrală maximală pentru distribuţia $\mathcal{D}$*

Din modul în care a fost definită subvarietatea N_p, avem că $T_pN_p = D_p$. Pentru un punct oarecare $q \in N_p \setminus \{p\}$ putem scrie (ca în demonstraţia teoremei 3.3)

$$q = \varphi(t_1, \ldots, t_l) = X_{1t_1} \circ \cdots \circ X_{lt_l}(p).$$

Cum curenţii locali X_{it_i} comută doi câte doi, putem rescrie această egalitate astfel:

$$q = \varphi(t_1, \ldots, t_l) = X_{it_i}\big(X_{1t_1} \circ \cdots \circ \widehat{X}_{it_i} \circ \cdots \circ X_{lt_l}(p)\big).$$

Lăsând parametrul t_i să varieze şi fixându-i pe ceilalţi, punctul q va descrie o curbă ce trece prin p şi rămâne pe N_p pentru variaţii mici ale lui t_i. Această curbă este, prin definiţie, o curbă integrală a câmpului vectorial X_i. Aşadar, $X_i(q)$ este tangent la subvarietatea N_p. Cum i a fost fixat arbitrar, deducem că $D_q = T_qN_p$, ceea ce încheie demonstraţia teoremei. $\square$

3.3 Distribuţii diferenţiabile generalizate

Noţiunea de distribuţie diferenţiabilă poate fi generalizată în mai multe moduri. Unul dintre ele este acela de a lăsa dimensiunea spaţiilor vectoriale ce o compun să varieze. Definiţia precisă este:

Definiţia 3.5. Spunem că distribuţia $(D_p)_{p \in M}$ este o *distribuţie (diferenţiabilă) generalizată* dacă pentru orice punct $p \in M$ există o vecinătate deschisă U_p a lui p şi câmpurile vectoriale diferenţiabile locale $X_1, \ldots, X_{l_p} \in \mathcal{X}(U_p)$ astfel încât $\{X_1(q), \ldots, X_{l_p}(q)\}$ este sistem de generatori pentru $D_q, \forall q \in U_p$.

Remarca 3.1. *Inferior semi-continuitatea dimensiunii unei distribuţii generalizate*

Dată o distribuţie generalizată $\mathcal{D} = (D_p)_{p\in M}$ pe o varietate M, să considerăm aplicaţia $\dim\mathcal{D} : M \to \mathbb{N}$ dată prin $\dim\mathcal{D}(p) := \dim(D_p)$. Atunci, această aplicaţie este inferior semi-continuă, adică: oricare ar fi $p \in M$, există V_p vecinătate deschisă a lui p astfel încât $\dim\mathcal{D}(q) \geq \dim\mathcal{D}(p)$ pentru orice $q \in V_p$.

Într-adevăr, fixând un punct p al varietăţii M, să considerăm U_p o vecinătate deschisă a lui p şi câmpurile vectoriale diferenţiabile locale $X_1, \ldots, X_{l_p} \in \mathcal{X}(U_p)$ ca în definiţia 3.5. Micşorând eventual U_p, putem presupune că aceasta este o vecinătate de hartă a lui M. Notăm cu $(a_i^1, \ldots a_i^m)$ coordonatele locale ale câmpului X_i în această hartă. Atunci

$$\dim\mathcal{D}(p) = \mathrm{rang}\big((a_i^j(p))_{i,j}\big).$$

Considerând $K(p)$ un minor al matricei $(a_i^j(p))_{i,j}$ ce dă rangul acesteia avem că $\det K(p) \neq 0$. Cum funcţiile a_i^j sunt diferenţiabile, deci continue, obţinem că există o vecinătate deschisă $V_p \subseteq U_p$ a lui p astfel încât $\det K(q) \neq 0$, oricare ar fi $q \in V_p$. Dar atunci

$$\dim\mathcal{D}(q) = \mathrm{rang}\big((a_i^j(q))_{i,j}\big) \geq \mathrm{rang}K(q) = \mathrm{rang}K(p) = \dim\mathcal{D}(p),$$

oricare ar fi $q \in V_p$.

La fel ca în cazul distribuţiilor diferenţiabile obişnuite, ne putem pune problema integrabilităţii complete a distribuţiilor generalizate. Definiţiile adecvate ale conceptelor de varietate integrală, integrabilitate completă şi foliaţie sunt, schimbând ceea ce este de schimbat, cele din secţiunea precedentă. Rezultatul analog teoremei lui Frobenius pentru acest caz este datorat lui Hector J. Sussmann. Nu vom prezenta acest rezultat[1], ci doar un corolar al său, însă pentru aceasta avem nevoie de următoarea definiţie:

Definiţia 3.6. Spunem că o distribuţie generalizată $\mathcal{D} = (D_p)_{p\in M}$ este de *tip finit*, dacă oricare ar fi punctul $p \in M$, există câmpurile vectoriale diferenţiabile locale $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(\mathcal{D})$ astfel încât sunt îndeplinite în acelaşi timp condiţiile:

(i) mulţimea $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ formează un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial D_p;

(ii) oricare ar fi $X \in \mathcal{D}$, există o vecinătate deschisă U a lui p şi funcţiile diferenţiabile $c_k^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ astfel încât

$$[X, X_i] = \sum_{k=1}^{n} c_k^i X_k, \quad \text{oricare ar fi } 1 \leq i \leq n.$$

Cu aceste pregătiri enunţăm fără demonstraţie:

Teorema 3.5. (H. J. Sussmann, 1973)

Dacă $\mathcal{D}$ este o distribuţie generalizată de tip finit pe varietatea M, atunci aceasta este complet integrabilă la o foliaţie generalizată pe M.

[1] enunţul însoţit de o demonstraţie poate fi găsit în [7]

Partea II

Structuri complexe generalizate

Capitolul 4

Algebra liniară a spaţiului $V \oplus V^*$

4.1 Produsul interior pe $V \oplus V^*$

Considerăm V un spaţiu vectorial real de dimensiune m şi V^* dualul său. Atunci $V \oplus V^*$ e înzestrat în mod canonic cu următoarea formă biliniară, simetrică:

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle := \frac{1}{2}\big(\xi(Y) + \eta(X)\big),$$

unde $X, Y \in V$ şi $\xi, \eta \in V^*$.

Definiţia 4.1. Numim forma de mai sus *produsul interior de pe* $V \oplus V^*$.

Remarca 4.1. *Signatura produsului interior*

Notăm cu $\{f_1, \ldots, f_m\}$ o bază pentru spaţiul vectorial V şi cu $\{f_1^*, \ldots, f_m^*\}$ duala sa. Matricea produsului interior de mai sus în baza $\{f_1, \ldots, f_m; f_1^*, \ldots, f_m^*\}$ va fi

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} O_m & I_m \\ I_m & O_m \end{pmatrix},$$

de unde deducem că acesta este nedegenerat.

Identificând $V \oplus V^*$ cu $\mathbb{R}^{2m}$ prin izomorfismul $f_i \to e_i$, $f_i^* \to e_{m+i}$ (unde $\{e_1, \ldots e_{2m}\}$ reprezintă baza canonică a lui $\mathbb{R}^{2m}$), forma pătratică asociată produsului interior se scrie

$$Q(x_1, \ldots, x_{2m}) = \sum_{k=1}^{m} x_k x_{m+k} = \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \sum_{k=1}^{m} y_{m+k}^2,$$

unde am notat cu $y_k := \frac{1}{2}(x_k + x_{m+k})$, $y_{m+k} := \frac{1}{2}(x_k - x_{m+k})$, $1 \le k \le m$. Aşadar, produsul interior este de signatură (m, m), de unde deducem că grupul ortogonal $O(V \oplus V^*, \langle , \rangle)$ este izomorf cu $O(m, m)$.

Remarca 4.2. *Orientarea canonică pe $V \oplus V^*$*

A da o orientare canonică pe $V \oplus V^*$ înseamnă a da un izomorfism canonic între puterea exterioară de grad maxim a lui $V \oplus V^*$ şi $\mathbb{R}$. Pentru aceasta să observăm că

$$\Lambda^{2m}(V \oplus V^*) \simeq \Lambda^m V \otimes \Lambda^m V^* \simeq \mathbb{R}$$

în mod canonic, unde izomorfismul din urmă e dat prin

$$(v_1^*, \ldots, v_m^*; u_1, \ldots, u_m) \to \det\Big(\big(v_i^*(u_j)\big)_{i,j}\Big).$$

Aşadar, $V \oplus V^*$ admite o orientare canonică şi $SO(V \oplus V^*, \langle,\rangle) \simeq SO(m,m)$.

4.2 Simetriile lui $V \oplus V^*$

Algebra Lie a grupului ortogonal special $SO(V \oplus V^*, \langle,\rangle)$ e dată prin

$$\mathfrak{so}(V \oplus V^*) = \{T | \langle Tx, y\rangle + \langle x, Ty\rangle = 0 \ \ \forall \ \ x, y \in V \oplus V^*\}.$$

Se poate verifica uşor că orice element al acesteia este de forma

$$T = \begin{pmatrix} A & \beta \\ B & -A^* \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

unde $A \in End(V)$, $B : V \to V^*$, $\beta : V^* \to V$, şi unde B şi β sunt antisimetrice. În acest caz putem privi B ca pe o 2-formă din $\Lambda^2 V^*$ prin $B(X) = i_X B$, şi similar putem privi β ca un bivector.

Prin exponenţiere, obţinem anumite simetrii ortogonale importante ale lui $V \oplus V^*$.

Exemplul 4.1. *B-transformări*

Considerând B ca mai sus, obţinem

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

o transformare ortogonală dată prin $X + \xi \to X + \xi + i_X B$ pe care o vom numi B-transformare.

Exemplul 4.2. *β-transformări*

Considerând β ca mai sus, obţinem

$$\exp(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

o transformare ortogonală dată prin $X + \xi \to X + \xi + i_\xi \beta$ pe care o vom numi β-transformare.

Exemplul 4.3. *Acţiuni ale grupului general liniar*

Dacă alegem $A \in \mathfrak{so}(V \oplus V^*)$ ca mai sus, obţinem

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & (\exp A^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

4.3 Subspaţii izotrope maximale

Definiţia 4.2. Un subspaţiu $L \leq V \oplus V^*$ se numeşte *izotrop* dacă îndeplineşte proprietatea: $\langle X, Y\rangle = 0$ oricare ar fi $X, Y \in L$. Acesta se numeşte *izotrop maximal* dacă nu este conţinut strict într-un alt subspaţiu izotrop.

Cum signatura spaţiului $V \oplus V^*$ este (m, m), orice subspaţiu izotrop maximal al său va avea dimensiunea egală cu m.

Exemplul 4.4. Considerăm $E \leq V$ un subspaţiu vectorial oarecare. Atunci spaţiul

$$E \oplus \mathrm{Ann}(E) \leq V \oplus V^*,$$

unde $\mathrm{Ann}(E)$ este anulatorul lui E în V^* este un subspaţiu izotrop maximal.

Exemplul 4.5. *Forma generală a unui subspaţiu izotrop maximal*

Considerăm $E \leq V$ oarecare şi $\epsilon \in \Lambda^2 E^*$. Privind ϵ ca o aplicaţie antisimetrică de la $E \to E^*$ prin $X \to i_X\epsilon$, să considerăm următorul subspaţiu

$$L(E, \epsilon) := \{X + \epsilon \in E \oplus V^* : \epsilon\big|_E = \epsilon(X)\}.$$

Atunci în mod clar $\dim L(E, \epsilon) = m$. Dacă $X + \epsilon$, $Y + \eta \in L(E, \epsilon)$, verificăm uşor că

$$\langle X + \xi, Y + \eta\rangle = \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)) = \frac{1}{2}(\epsilon(Y, X) + \epsilon(X, Y)) = 0,$$

ceea ce arată că $L(E, \epsilon)$ este un subspaţiu izotrop maximal.

Afirmăm că orice subspaţiu izotrop maximal al lui $V \oplus V^*$ este de această formă. Într-adevăr, să considerăm L un subspaţiu izotrop maximal oarecare, şi să notăm cu $E := \pi_V(L)$ proiecţia pe V a acestuia. Întrucât L este izotrop maximal, avem $L \cap V^* = \mathrm{Ann}(E)$. Cum $E^* = V^*/\mathrm{Ann}(E)$, aplicaţia $\epsilon : E \to E^*$ dată prin $e \to \pi_{V^*}\big(\pi_V^{-1}(e) \cap L\big) \in V^*/\mathrm{Ann}(E)$ este bine definită. Atunci $L = L(E, \epsilon)$.

Definiţia 4.3. Numim *tipul* unui subspaţiu izotrop maximal L numărul natural $k := m - \dim \pi_V(L)$.

Remarca 4.3. *Acţiunea simetriilor lui $V \oplus V^*$ asupra tipului unui subspaţiu izotrop maximal*

Considerăm $L = L(E, \epsilon)$ un subspaţiu izotrop maximal de tip k. Întrucât B-transformările păstrează proiecţiile pe V, acestea nu afectează spaţiul $E = \pi_V(L)$. Într-adevăr, $\exp B\big(L(E, \epsilon)\big) = L(E, \epsilon + i^*B)$, unde $i : E \hookrightarrow V$ este incluziunea canonică. Aşadar, B-transformările nu modifică tipul unui subspaţiu izotrop maximal.

Pe de altă parte, β-transformările modifică proiecţiile pe V, deci pot schimba dimensiunea lui E. Pentru a a vedea aceasta mai clar, observăm că, similar cu exemplul anterior, orice subspaţiu izotrop maximal L poate fi scris sub forma

$$L(F, \gamma) = \{X + \xi \in V \oplus F : X\big|_F = \gamma(\xi)\},$$

cu $F = \pi_{V^*}(L)$ şi $\gamma : V^* \to V$, $\gamma(f) := \pi_V\big(\pi_{V^*}^{-1}(f) \cap L\big)$. Atunci, ca mai sus, $\exp\beta\big(L(F,\gamma)\big) = L(F, \gamma + j^*\beta)$, unde $j : F \hookrightarrow V^*$ este incluziunea canonică. Cum proiecţia $E = \pi_V(L(F,\gamma))$ conţine întotdeauna $L \cap V = \mathrm{Ann}(F)$, avem că

$$\frac{E}{L \cap V} = \frac{E}{\mathrm{Ann}(F)} = \mathrm{Im}(\gamma),$$

de unde $\dim(E)=\dim(L\cap V)+\mathrm{rang}\gamma$. Pentru că γ este antisimetrică, dimensiunea sa e pară. Cum o β-transformare trimite $\gamma \to \gamma + j^*\beta$, care are de asemenea rang par, vedem că o β-transformare păstrează întotdeauna paritatea tipului unui subspaţiu izotrop maximal.

4.4 Complexificatul spaţiului $V \oplus V^*$

Produsul interior se extinde în mod natural prin $\mathbb{C}$-liniaritate la $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$. În acest context, un subspaţiu total izotrop maximal de tip k este dat în mod echivalent de următoarele date

(i) un subspaţiu complex $L < (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ de dimensiune complexă m, total izotrop în raport cu produsul interior astfel încât $E := \pi_{V\otimes\mathbb{C}}(L)$ are dimensiune complexă $m - k$;

sau

(ii) un subspaţiu complex $E < V \otimes \mathbb{C}$ astfel încât $\dim_{\mathbb{C}} E = m - k$, împreună cu o 2-formă complexă $\epsilon \in \Lambda^2 E^*$.

Observăm că dacă L este un subspaţiu oarecare al lui $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$, atunci $L \cap \overline{L}$ este întotdeauna un subspaţiu real, în sensul că este complexificatul unui spaţiu vectorial real, $L \cap \overline{L} = K \otimes \mathbb{C}$. Acest fapt motivează

Definiţia 4.4. Considerăm L un subspaţiu vectorial maximal izotrop al spaţiului $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$. Numim *indexul real* al lui L numărul real $r := \dim_{\mathbb{C}}(L \cap \overline{L}) = \dim_{\mathbb{R}} K$.

Spre exemplu, $V < V \oplus V^*$ este un subspaţiu maximal izotrop de index real m.

Remarca 4.4. *Paritatea indexului real*

Cum paritatea lui L este determinată de intersecţia acestuia cu spaţiul real $V \otimes \mathbb{C}$, este clar că L şi $\overline{L}$ trebuie să aibă aceeaşi paritate, de unde deducem că $\dim(L \cap \overline{L}) \equiv m (\mathrm{mod}\ 2)$, adică

$$r \equiv m \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Aşadar, indexul real al unui subspaţiu vectorial este par sau impar, în funcţie de paritatea dimensiunii spaţiului vectorial V.

Capitolul 5

Paranteza Courant

5.1 Algebroizi Lie

Definiţia 5.1. Numim *algebroid Lie* un triplet $(L, [,], a)$, unde perechea $(L, [,])$ reprezintă un fibrat vectorial pe varietatea diferenţiabilă M ale cărui secţiuni $\Gamma(L)$ posedă o structură de algebră Lie astfel încât aplicaţia de fibraţi $a : L \to TM$ induce un morfism de algebre Lie pe secţiunile acestora. Mai exact, aplicaţia indusă pe secţiuni notată tot $a : \Gamma(L) \to \Gamma(TM) = \mathcal{X}(M)$ îndeplineşte

$$a([X, Y]) = [a(X), a(Y)] \quad \forall\, X, Y \in \Gamma(L),$$

şi

$$[X, fY] = f[X, Y] + (a(X)f)Y \quad \forall\, X, Y \in \Gamma(L),\ f \in \mathcal{F}(M).$$

Aplicaţia de fibraţi a se numeşte *ancora* algebroidului Lie $(L, [,], a)$.

Exemplul 5.1. *Fibratul tangent*

Fibratul tangent al unei varietăţi este un exemplu banal de algebroid Lie, unde pe post de ancoră se consideră identitatea. Este util să privim algebroizii Lie drept generalizări ale fibratului tangent.

Exemplul 5.2. *Distribuţii complet integrabile*

Orice subfibrat complet integrabil al fibratului tangent împreună cu aplicaţia de incluziune defineşte – conform teoremei lui Frobenius – un algebroid Lie.

Exemplul 5.3. *Structuri complexe*

Dacă M este o varietate complexă, atunci $T^{0,1}M < TM \otimes \mathbb{C}$ este – conform teoremei Newlander-Nirenberg – un subfibrat complex închis la paranteza Lie. Folosind aplicaţia de incluziune pe post de ancoră, $T^{0,1}M$ defineşte un algebroid Lie complex.

Generalizând cazul fibratului tangent, se pot defini în mod natural mai multe operaţii pe algebroizi Lie. Prin analogie cu paranteza Schouten definită pe câmpuri multivectoriale, dăm

Definiţia 5.2. Considerăm L un algebroid Lie. Definim *paranteza Schouten* ce acţionează pe secţiuni $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \in \Gamma(\Lambda^p L)$, $Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_q \in \Gamma(\Lambda^q L)$ prin

$$[X_1 \wedge \cdots \wedge X_p, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_q] :=$$

$$:= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_j \wedge \cdots \wedge Y_q,$$

şi $[X, f] = -[f, X] = a(X)f$ oricare ar fi $X \in \Gamma(L)$ şi $f \in \mathcal{F}(M)$.

Secţiunile $\Gamma(\Lambda^* L)$ formează împreună cu paranteza Schouten o algebră Lie, întrucât un calcul simplu arată că au loc

$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)}[B, A]$$

şi

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + (-1)^{(a-1)(b-1)}[B, [A, C]],$$

oricare ar fi $A \in \Gamma(\Lambda^a L)$, $B \in \Gamma(\Lambda^b L)$ şi $C \in \Gamma(\Lambda^c L)$.

Pentru $A \in \Gamma(\Lambda^a L)$, definim $\mathrm{ad}_A := [A, \cdot]$, o derivare de grad $a-1$ a produsului exterior de pe $\Gamma(\Lambda^* L)$. Într-adevăr, se verifică uşor că

$$\mathrm{ad}_A(B \wedge C) = \mathrm{ad}_A(B) \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge \mathrm{ad}_A(C).$$

În afară de paranteza Schouten a câmpurilor vectoriale, varietăţile diferenţiabile posedă de asemenea un operator de derivare exterioară d definit pe algebra formelor exterioare. Întrucât acesta poate fi definit în funcţie de paranteza Lie, putem generaliza această definiţie la

Definiţia 5.3. Considerăm L un algebroid Lie. Definim operatorul liniar de ordinul întâi $d_L : \Gamma(\Lambda^k L^*) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} L^*)$ prin

$$d_L\sigma(X_0, \ldots, X_k) := \sum_i (-1)^i a(X_i)\sigma(X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_k)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_k),$$

unde $\sigma \in \Gamma(\Lambda^k L^*)$ şi $X_i \in \Gamma(L)$.

Prin analogie, definim de asemenea operatorii de derivare interioară şi derivata Lie pentru algebroizi Lie:

Definiţia 5.4. Considerăm $X \in \Gamma(L)$. Atunci *produsul interior* i_X este derivarea de grad -1 definită pe $\Gamma(\Lambda^* L^*)$ prin $i_X\sigma := \sigma(X; \ldots)$, iar *derivata Lie* $\mathcal{L}^L_X$ se defineşte prin formula lui Cartan

$$\mathcal{L}^L_X := d_L i_X + i_X d_L.$$

Până acum am descris structurile algebrice intrinseci deteminate de un algebroid Lie. Pe lângă acestea prezenţa oricărui algebroid Lie are efecte asupra geometriei varietăţii subiacente. Într-adevăr, are loc

Propoziţia 5.1. *Dacă L este un algebroid Lie pe varietatea M de ancoră a, atunci $\mathcal{D} := a(L)$ este o distribuţie (diferenţiabilă) generalizată complet integrabilă a varietăţii M.*

Demonstraţie. Vom aplica teorema 3.5. Pentru aceasta, să observăm mai întâi că, întrucât aplicaţia a este prin definiţie o aplicaţie diferenţiabilă, $\mathcal{D} = a(L)$ formează într-adevăr o distribuţie diferenţiabilă generalizată. Rămâne să arătăm că aceasta este de tip finit.

Pentru aceasta să fixăm arbitrar un punct p pe varietatea M. Cum L este un fibrat vectorial finit dimensional, acesta admite o bază locală de secţiuni $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(L\big|_U)$ în jurul lui p. Atunci $a(X_1), \ldots, a(X_n)$ formează un sistem de generatori pentru $\mathcal{D}$ în jurul punctului p. Mai mult, folosindu-ne de proprietaţile ancorei, vedem că există funcţiile $c_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ astfel încât

$$[a(X_i), a(X_j)] = a([X_i, X_j]) = a(\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X^k) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k a(X_k),$$

ceea ce arată că distribuţia $a(L)$ este de tip finit. □

În cazul algebroizilor Lie complecşi avem următorul rezultat:

Propoziţia 5.2. *Considerăm L un algebroid Lie complex pe M de ancoră a astfel încât $E + \overline{E} = TM \otimes \mathbb{C}$, unde $E := a(L)$. Notăm cu $\mathcal{D}$ distribuţia reală definită prin $\mathcal{D} \otimes \mathbb{C} = E \cap \overline{E}$. Atunci $\mathcal{D}$ este o distribuţie diferenţiabilă generalizată complet integrabilă a varietăţii M.*

Demonstraţie. Întrucât $E + \overline{E} = TM \otimes \mathbb{C}$, aplicaţia de fibraţi vectoriali reali $i(a - \overline{a}) : L \to TM$ este surjectivă. Nucleul ei este un subfibrat real $K < L$ dat de

$$K = \{X \in L \big| a(X) = \overline{a(X)}\}.$$

Proiectând K prin ancora a obţinem exact distribuţia $\mathcal{D}$. Aşadar aceasta este o distribuţie diferenţiabilă.

Pentru a verifica că aceasta este de tip finit, să fixăm p un punct arbitrar şi $X_1, \ldots, X_n$ o bază locală de secţiuni în jurul lui p pentru $\Gamma(K\big|_U)$. Atunci $a(X_1), \ldots, a(X_n)$ formează un sistem de generatori pentru $\mathcal{D}$ în jurul punctului p. Cum $a([X_i, X_j]) = [a(X_i), a(X_j)] = \overline{[a(X_i), a(X_j)]} = \overline{a([X_i, X_j])}$, vedem că $[X_i, X_j] \in \Gamma(K\big|_U)$. Dar paranteza Lie $[X_i, X_j]$ se poate scrie ca $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, de unde

$$[a(X_i), a(X_j)] = c_{ij}^k a(X_k),$$

ceea ce arată faptul că $\mathcal{D}$ este de tip finit, deci complet integrabilă. □

În afară de foliaţia generalizată prezentată mai sus, un algebroid Lie complex de acest tip induce o structură complexă transversă pe această foliaţie, într-un sens pe care îl vom preciza în cele ce urmează.

Definiţia 5.5. O distribuţie complexă $E < TM \otimes \mathbb{C}$ de codimensiune complexă constantă k pe o varietate reală M de dimensiune m se numeşte *integrabilă* dacă pentru fiecare punct p al varietaţii, există o vecinătate deschisă U_p şi funcţiile complexe $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(U_p, \mathbb{C})$ astfel încât $\{df_1, \ldots, df_k\}$ sunt liniar independenţi în fiecare punct din U_p şi anulează toţi vectorii complecşi din E.

Din teorema Newlander-Nirenberg ştim că o astfel de distribuţie E este integrabilă dacă şi numai dacă E este involutiv şi $\dim(E \cap \overline{E})$ este constantă şi $E + \overline{E}$ este involutiv. În acest caz, funcţiile $f_1, \ldots, f_k$ sunt coordonate complexe transverse foliaţiei determinate de $E \cap \overline{E}$. Cu alte cuvinte, fiecare punct al varietăţii are o vecinătate difeomorfă cu un deschis din $\mathbb{R}^{m-2k} \times \mathbb{C}^k$ care are distribuţia canonică de bază $\{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{m-2k}; \partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_k\}$.

Aplicând aceasta în situaţia dată de propoziţia anterioară, vedem că în punctele în care dimensiunea distribuţiei $E \cap \overline{E}$ este local constantă (numite puncte *regulate*), toate condiţiile de mai sus sunt îndeplinite. Am obţinut:

Propoziţia 5.3. *Considerăm L un algebroid Lie complex de ancoră a pe varietatea mdimensională M astfel încât $E + \overline{E} = TM \otimes \mathbb{C}$, unde am notat cu $E := a(L)$. Să considerăm p un punct regulat de pe varietate (adică un punct pentru care $k := dim(E \cap \overline{E})$ este local constantă). Atunci local în jurul punctului p varietatea are o structură complexă transversă la foliaţia determinată de distribuţia $E \cap \overline{E}$.*

5.2 Paranteza Courant

Paranteza Courant este o paranteză antisimetrică definită pe mulţimea secţiunilor netede ale fibratului $TM \oplus T^*M$, dată prin

$$[X + \xi, Y + \eta] = [X, Y] + \mathcal{L}_Y \eta - \mathcal{L}_Y \xi - \frac{1}{2} d(i_X \eta - i_Y \xi),$$

cu $X + \xi, Y + \eta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$.

Observăm că pe câmpuri vectoriale paranteza Courant se reduce la paranteza Lie, adică

$$\pi([A, B]) = [\pi(A), \pi(B)],$$

pentru orice $A, B \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$, unde $\pi : TM \oplus T^*M \to TM$ este proiecţia canonică. Pe de altă parte, paranteza Courant se anulează pe 1-forme.

Paranteza Courant nu este o paranteză Lie întrucât nu îndeplineşte identitatea lui Jacobi. Aşadar, deşi aplicaţia π se comportă ca o ancoră, tripletul

$(TM \oplus T^*M, [,], \pi)$ nu formează un algebroid Lie. Definim *jacobiatorul* parantezei Courant drept cantitatea ce măsoară abaterea acesteia de la îndeplinirea identităţii lui Jacobi, anume

$$Jac(A,B,C) := [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B],$$

unde $A, B, C \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$. Vom arăta că jacobiatorul poate fi exprimat drept derivarea unei cantităţi numite *operatorul Nijenhuis* care se defineşte prin

$$Nij(A,B,C) := \frac{1}{3}\big(\langle [A,B],C\rangle + \langle [B,C],A\rangle + \langle [C,A],B\rangle\big),$$

unde $\langle , \rangle$ este *produsul interior* definit pe secţiunile lui $TM \oplus T^*M$ în perfectă similitudine cu cel prezentat în capitolul anterior:

$$\langle X+\xi, Y+\eta\rangle := \frac{1}{2}\big(\xi(Y) + \eta(X)\big).$$

Propoziţia 5.4. *Jacobiatorul parantezei Courant este întotdeuna un termen exact dat mai precis prin* $Jac(\cdot,\cdot,\cdot) = d(Nij(\cdot,\cdot,\cdot))$.

Demonstraţie. Pentru a demonstra mai uşor acest rezultat, introducem *paranteza Dorfman* definită pe secţiunile lui $TM \oplus T^*M$ prin

$$(X+\xi)\circ(Y+\eta) = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - i_Y d\xi.$$

În mod evident au loc: $[A,B] = A\circ B - d\langle A,B\rangle$ şi $[A,B] = \frac{1}{2}(A\circ B - B\circ A)$. În plus, paranteza Dorfman îndeplineşte

$$A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C + B\circ(A\circ C),$$

oricare ar fi $A = X+\xi$, $B = Y+\eta$ şi $C = Z+\zeta \in \Gamma(TM\oplus T^*M)$.

Într-adevăr, cu notaţiile de mai sus avem:

$$(A\circ B)\circ C + B\circ(A\circ C) =$$

$$= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] + \mathcal{L}_{[X,Y]}\zeta - i_Z d(\mathcal{L}_X\eta - i_Y d\xi) + \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\zeta - i_Z d\xi) - i_{[X,Z]}d\eta$$
$$= [X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\zeta - \mathcal{L}_X i_Z d\eta - \mathcal{L}_Y i_Z d\xi + i_Z d i_Y d\xi$$
$$= [X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\zeta - i_Z d\eta) - i_{[Y,Z]}d\xi$$
$$= A\circ(B\circ C).$$

Să mai observăm că are loc $[[A,B],C] = [A,B]\circ C - d\langle [A,B],C\rangle = (A\circ B - d\langle A,B\rangle)\circ C - d\langle [A,B],C\rangle = (A\circ B)\circ C - d\langle [A,B],C\rangle$, unde am folosit în ultima egalitate faptul că $\mu\circ C = 0$ de fiecare dată când 1-forma μ este închisă.

Punând la un loc toate cele de mai sus avem:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Jac}(A,B,C) = \\
&= \sum_{cicl} [[A,B],C] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cicl} \big((A\circ B)\circ C - C\circ(A\circ B) - (B\circ A)\circ C + C\circ(B\circ A)\big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cicl} \big((A\circ B)\circ C - B\circ(A\circ C) - C\circ(A\circ B) - B\circ(A\circ C) + A\circ(B\circ C) + C\circ(B\circ A)\big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cicl} \big(A\circ(B\circ C) - B\circ(A\circ C)\big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cicl} \big(A\circ(B\circ C)\big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cicl} \big([[A,B],C] + d\langle [A,B],C\rangle\big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\mathrm{Jac}(A,B,C) + 3\mathrm{d}(\mathrm{Nij}(A,B,C))\big),
\end{aligned}$$

ceea ce arată că $\mathrm{Jac}(A,B,C) = \mathrm{d}(\mathrm{Nij}(A,B,C))$. □

Următoarea propoziţie descrie abatarea parantezei Courant de la a doua axiomă a algebroizilor Lie.

Propoziţia 5.5. *Considerăm $f \in \mathcal{F}(M)$. Atunci paranteza Courant îndeplineşte*

$$[A, fB] = f[A,B] + (\pi(A)f)B - \langle A,B\rangle df.$$

Demonstraţie. Să considerăm $A = X + \xi$ şi $B = Y + \eta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$. Atunci

$$\begin{aligned}
[X+\xi, f(Y+\eta)] &= [X, fY] + \mathcal{L}_X f\eta - \mathcal{L}_{fY}\xi - \frac{1}{2}d(i_X(f\eta) - i_{fY}\xi) \\
&= f[X+\xi, Y+\eta] + (Xf)Y + (Xf)\eta - (i_Y\xi)df - \frac{1}{2}(i_X\eta - i_Y\xi)df \\
&= f[X+\xi, Y+\eta] + (Xf)(Y+\eta) - \langle X+\xi, Y+\eta\rangle df.
\end{aligned}$$ □

Observăm că şi în acest caz paranteza Courant se abate printr-un termen exact de la îndeplinirea axiomei a doua a algebroizilor Lie.

5.3 Simetriile parantezei Courant

Paranteza Lie de pe câmpurile vectoriale ale unei varietăţi diferenţiabile este o structură canonic definită, anume este invariantă la difeomorfisme. De fapt are loc

Propoziţia 5.6. *Considerăm un automorfism al fibratului tangent* (TM, M, π) *al unei varietăţi diferenţiabile* M *dat prin perechea* (f, F). *Să presupunem că* F *invariază paranteza Lie a câmpurilor vectoriale de pe varietatea* M, *adică* $F([X, Y]) = [F(X), F(Y)]$, *oricare ar fi* X *şi* Y *câmpuri vectoriale pe* M. *Atunci* $F = df$.

Demonstraţie. Să observăm că (f, df) este un automorfism al fibratului tangent care invariază paranteza Lie. Notând cu $G := df^{-1} \circ F$, perechea (Id, G) este, conform ipotezei, de asemenea un automorfism al fibratului tangent care păstrează paranteza Lie. În particular, oricare ar fi câmpurile vectoriale X, Y şi $h \in \mathcal{F}(M)$, avem

$$G([hX, Y]) = G\big(h[X, Y] - Y(h)X\big) = hG([X, Y]) - Y(h)G(X)$$

precum şi

$$[G(hX), G(Y)] = h[G(X), G(Y)] - (G(Y)h)G(X) = hG([X, Y]) - (G(Y)h)G(X),$$

de unde deducem că $Y(h)G(X) = (G(Y)h)G(X)$, oricare ar fi X, Y şi h. Dar aceasta poate avea loc doar atunci când $G(Y) = Y$ oricare ar fi Y, adică $G = Id$, de unde $F = df$. $\square$

În cazul fibratului $TM \oplus T^*M$ situaţia se schimbă. În afară de difeomorfisme, paranteza Courant si produsul interior sunt invariate de încă un set de simetrii numite *B-câmpuri*. Acestea sunt transformări de forma

$$e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} : X + \xi \to X + \xi + i_X B,$$

unde $B \in \Omega^2(M)$ este o 2-formă închisă pe M privită ca o aplicaţie antisimetrică $B : TM \to T^*M$. Într-adevăr are loc

Propoziţia 5.7. *Aplicaţia* e^B *este un automorfism al fibratului* $TM \oplus T^*M$ *ce păstrează paranteza Courant dacă şi numai dacă* B *este o formă închisă.*

Demonstraţie. Să considerăm $X + \xi, Y + \eta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ şi B o 2-formă pe M. Atunci

$$\begin{aligned}[][e^B(X + \xi), e^B(Y + \eta)] &= [X + \xi + i_X B, Y + \eta + i_Y B] \\ &= [X + \xi, Y + \eta] + [X, i_Y B] + [i_X B, Y]\end{aligned}$$

$$= [X+\xi, Y+\eta] + \mathcal{L}_X i_Y B - \frac{1}{2} d i_X i_Y B - \mathcal{L}_Y i_X B + \frac{1}{2} d i_Y i_X B$$
$$= [X+\xi, Y+\eta] + \mathcal{L}_X i_Y B - i_Y \mathcal{L}_X B + i_Y i_X dB$$
$$= [X+\xi, Y+\eta] + i_{[X,Y]} B + i_Y i_X dB$$
$$= e^B([X+\xi, Y+\eta]) + i_Y i_X dB.$$

Aşadar vedem că automorfismul e^B invariază paranteza Courant dacă şi numai dacă $i_Y i_X dB = 0$ oricare ar fi X, Y câmpuri vectoriale, adică dacă şi numai dacă $dB = 0$. □

Să mai observăm că B-câmpurile sunt întotdeauna ortogonale întrucât 2-forma B este antisimetrică privită ca aplicaţie $B : TM \to T^*M$. Într-adevăr, folosind $B^* = -B$, avem că $e^B(e^B)^* = e^B e^{-B} = Id$.

Următorul rezultat arată că difeomorfismele împreună cu B-câmpurile sunt, în esenţă, singurele simetrii ortogonale ale fibratului $TM \oplus T^*M$ care invariază paranteza Courant.

Propoziţia 5.8. *Considerăm (f, F) un automorfism ortogonal al fibratului vectorial $TM \oplus T^*M$ al unei varietăţi diferenţiabile M. Să presupunem că F păstrează paranteza Courant de pe $\Gamma(TM \oplus T^*M)$. Atunci F este compunerea dintre un difeomorfism al lui M şi un B-câmp.*

Demonstraţie. Observăm că dacă f este un difeomorfism al varietăţii M, atunci aplicaţia $f_c = \begin{pmatrix} f_* & 0 \\ 0 & (f^*)^{-1} \end{pmatrix}$ este un automorfism ortogonal al fibratului $TM \oplus T^*M$ care păstrează paranteza Courant. Notând cu $G := f_c^{-1} \circ F$, perechea (Id, G) este – conform ipotezei – de asemenea un automorfism ortogonal ce invariază paranteza Courant. În particular, pentru orice două seţiuni $A, B \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ şi $h \in \mathcal{F}(M)$ avem

$$G([hA, B]) = G\big(h[A, B] - (B_T h)A - \langle A, B\rangle dh\big)$$
$$= hG([A, B]) - (B_T h)G(A) - \langle A, B\rangle G(dh),$$

precum şi

$$[G(hA), G(B)] = h[G(A), G(B)] - (G(B)_T h)G(A) - \langle G(A), G(B)\rangle dh$$
$$= hG([A, B]) - (G(B)_T h)G(A) - \langle G(A), G(B)\rangle dh.$$

Egalând cele două rezultate şi ţinând seama de ortogonalitatea aplicaţiei G obţinem

$$(B_T h)G(A) + \langle A, B\rangle G(dh) = (G(B)_T h)G(A) - \langle A, B\rangle dh.$$

Alegând acum $A = X$, $B = Y$ cu X, Y câmpuri vectoriale obţinem $Y(h)G(X) = (G(Y)_T h)G(X)$ oricare ar fi X, Y, h. Aceasta se poate întâmpla doar atunci când $G(Y)_T = Y$ pentru orice câmp vectorial Y, de unde deducem că G trebuie să fie de forma $G = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Dar acum relaţia anterioară devine

$$\langle A, B\rangle G(dh) = \langle A, B\rangle dh,$$

de unde G trebuie să aibă forma $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$. Ortogonalitatea impune forma $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} = e^B$ unde B este o 2-formă care trebuie să fie închisă pentru a păstra paranteza Courant. Aşadar, $F = f_c \circ e^B$. $\square$

5.4 Structuri Dirac

Din cele prezentate în secţiunea precedentă, este clar că paranteza Courant se abate de la a fi un algebroid Lie din cauza unor termeni exacţi ce implică produsul interior. Din acest motiv, orice subfibrat $L < TM \oplus T^*M$ care este involutiv şi total izotrop în acelaşi timp formează, împreună cu paranteza Courant şi proiecţia canonică $\pi : L \to TM$ un algebroid Lie. Mai mult, imaginea printr-un B-câmp al unui astfel de subfibrat este la rândul ei algebroid Lie.

În cazul în care L este maximal izotrop, există o serie de condiţii naturale echivalente cu ipoteza de involutivitate a acestuia.

Propoziţia 5.9. *Să considerăm L un subfibrat maximal izotrop al fibratului $TM \oplus T^*M$ (sau a complexificatului acestuia). Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*
(i) L este involutiv (adică $[\Gamma(L), \Gamma(L)] \subseteq \Gamma(L)$);
(ii) $Nij|_L = 0$;
(iii) $Jac|_L = 0$.

Demonstraţie. Dacă L este involutiv este clar că $\mathrm{Nij}\,|_L = 0$, şi cum Jac=d(Nij), obţinem că $\mathrm{Jac}\,|_L = 0$. Rămâne să arătăm implicaţia (iii) $\Rightarrow$ (i).

Pentru aceasta, să presupunem că $\mathrm{Jac}\,|_L = 0$ dar că subfibratul L nu este involutiv. Cum L este maximal izotrop, înseamnă că există $A, B, C \in \Gamma(L)$ astfel încât $\langle [A, B], C\rangle \neq 0$. Atunci, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$0 = Jac(A, B, fC) = d(Nij(A, B, fC)) = \frac{1}{3}\langle [A, B], C\rangle df,$$

ceea ce este o contradicţie. Aşadar L este involutiv. $\square$

Definiţia 5.6. Un subfibrat maximal izotrop $L < TM \oplus T^*M$ se numeşte *structură aproape Dirac*. Dacă acesta este involutiv, spunem că L este o *structură Dirac*. În mod similar, un subfibrat complex $L < (TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ maximal izotrop şi involutiv se numeşte *structură Dirac complexă*.

Exemplul 5.4. *Geometria (pre)simplectică*

Fibratul tangent TM este o structură Dirac. Acesteia îi putem aplica orice B-câmp pentru a obţine o altă structură Dirac. Într-adevăr, spaţiul maximal izotrop

$$e^{\omega}(TM) = \{X + i_X\omega : X \in TM\}$$

este involutiv dacă şi numai dacă $d\omega = 0$ (conform propoziţiei 5.7). Vedem aşadar că geometria presimplectică poate fi descrisă cu ajutorul structurilor Dirac.

Exemplul 5.5. *Geometria foliaţiilor*

Să considerăm $\mathcal{D} < TM$ o distribuţie diferenţiabilă de rang constant. Atunci

$$\mathcal{D} \oplus Ann(\mathcal{D}) < TM \oplus T^*M$$

este un subfibrat total izotrop maximal. Această structură aproape Dirac este Courant involutivă dacă şi numai dacă distribuţia $\mathcal{D}$ este complet integrabilă la o foliaţie pe varietatea M. Din acest punct de vedere, foliaţiile pot fi privite ca structuri Dirac reale.

Exemplul 5.6. *Geometria complexă*

O structură aproape complexă $J \in End(TM)$ determină o distribuţie complexă dată de subfibratul propriu $T^{0,1}M < TM \otimes \mathbb{C}$ corespunzător valorii proprii $-i$ a lui J. Subfibratul maximal izotrop asociat acestuia este dat prin

$$L_J := T^{0,1}M \oplus Ann(T^{0,1}M) = T^{0,1}M \oplus (T^{1,0}M)^*.$$

Dacă acesta este Courant involutiv, cum componenta vectorială a parantezei Courant este paranteza Lie, deducem că subfibratul $T^{1,0}M$ este Lie involutiv, adică J este integrabilă. Reciproc, presupunând că J este integrabilă, atunci pentru $X + \xi, Y + \eta \in \Gamma\big(T^{0,1}M \oplus (T^{1,0}M)^*\big)$ avem

$$[X + \xi, Y + \eta] = [X, Y] + i_X\overline{\partial}\eta - i_Y\overline{\partial}\xi,$$

care este clar o secţiune a lui $T^{0,1}M \oplus (T^{1,0}M)^*$. Aşadar L_J este involutiv Courant dacă şi numai dacă J este integrabil. În acest mod structurile complexe integrabile pot fi privite drept structuri Dirac complexe.

Capitolul 6

Varietăţi complexe generalizate

6.1 Structuri complexe generalizate liniare

Începem prin a defini noţiunea de structură complexă generalizată pe un spaţiu vectorial real. Vom folosi binecunoscutele structuri ale geometriei complexe şi simplectice pentru a ne ghida.

Să considerăm V un spaţiu vectorial real finit dimensional. După cum am văzut în capitolul 2 în cazul varietăţilor, o *structură complexă liniară* este un automorfism $J : V \to V$ care îndeplineşte condiţia $J \circ J = -Id$. Prin comparaţie, o *structură simplectică liniară* pe V este o 2-formă nedegenerată $\Omega \in \Lambda^2 V^*$. Aceasta poate fi privită ca un izomorfism $\Omega : V \to V^*$ dat prin $\Omega : v \to i_v\Omega$ ce are proprietatea de a fi antisimetric: $\Omega^* = -\Omega$.

În încercarea de a include amândouă aceste structuri într-o structură algebrică superioară, vom considera automorfisme ale sumei directe $V \oplus V^*$.

Definiţia 6.1. O *structură complexă generalizată (liniară)* pe V este un automorfism $\mathcal{J}$ al sumei directe $V \oplus V^*$ care îndeplineşte două condiţii: este complex, adică $\mathcal{J} \circ \mathcal{J} = -Id$ şi simplectic, adică $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$.

Propoziţia 6.1. *Echivalent, putem defini o structură complexă generalizată pe V ca o structură complexă pe $V \oplus V^*$ care este ortogonală în raport cu produsul interior definit la începutul capitolului 4.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{J}^2 = -Id$ şi $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$, atunci $\mathcal{J}^*\mathcal{J} = Id$, adică $\mathcal{J}$ este ortogonal. Reciproc, dacă $\mathcal{J}^2 = -Id$ şi $\mathcal{J}^*\mathcal{J} = 1$, atunci $\mathcal{J} = -\mathcal{J}^*$. □

Structurile complexe şi simplectice liniare uzuale sunt incluse în noţiunea de structură complexă generalizată în următorul mod. Să considerăm automorfismul

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix},$$

unde J este o structură complexă liniară obişnuită pe V, iar matricea e dată în raport cu suma directă $V \oplus V^*$. Atunci vedem că $\mathcal{J}_J^2 = -Id$ şi $\mathcal{J}_J^* = -\mathcal{J}$, adică $\mathcal{J}_J$ este o structură complexă generalizată. Similar, considerăm automorfismul

$$\mathcal{J}_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^{-1} \\ \Omega & 0 \end{pmatrix},$$

unde Ω este o structură simplectică liniară obişnuită pe V. Observăm încă o dată că $\mathcal{J}_\Omega$ este o structură complexă generalizată. Astfel, vedem că structurile complexe generalizate diagonale şi anti-diagonale corespund la structuri liniare complexe, respectiv simplectice. Am dori acum să înţelegem mai bine structurile intermediare ce pot apare. Observaţia importantă este că a da $\mathcal{J}$ este echivalent cu a da un subspaţiu izotrop maximal al spaţiului $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$:

Propoziţia 6.2. *O structură complexă generalizată liniară pe V este echivalentă cu a menţiona un subspaţiu izotrop maximal $L < (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ de index real nul, adică astfel încât $L \cap \overline{L} = \{0\}$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{J}$ este o structură complexă generalizată, atunci notăm cu $L < (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ subspaţiul propriu al său corespunzător valorii proprii $+i$. Dacă $x, y \in L$, avem că $\langle \mathcal{J}x, \mathcal{J}y \rangle = \langle ix, iy \rangle = -\langle x, y \rangle$, dar şi $\langle x, y \rangle = \langle \mathcal{J}x, \mathcal{J}y \rangle$ din ortogonalitate, ceea ce implică $\langle x, y \rangle = 0$. Aşadar L este un subspaţiu izotrop de dimensiune jumătate din dimensiunea spaţiului $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$, deci izotrop maximal.

Reciproc, dat un asemenea L, alegem $\mathcal{J}$ să fie multiplicarea cu i pe L şi cu $-i$ pe $\overline{L}$. Acest automorfism defineşte o structură complexă generalizată pe $V \oplus V^*$. □

Aceasta înseamnă că a studia structuri complexe generalizate este echivalent cu a studia subspaţii complexe maximal izotrope de index real 0. Condiţia impusă asupra indexului real se exprimă în scrierea $L(E, \epsilon)$ astfel:

Propoziţia 6.3. *Subspaţiul maximal izotrop $L(E, \epsilon)$ are index real 0 dacă şi numai dacă $E + \overline{E} = V \otimes \mathbb{C}$ şi ϵ este aşa încât 2-forma reală antisimetrică $\omega_\Delta = Im(\epsilon|_{E \cap \overline{E}})$ este nedegenerată pe $E \cap \overline{E} = \Delta \otimes \mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Să considerăm L de index real 0. Cum $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C} = L \oplus \overline{L}$, avem că $E + \overline{E} = V \otimes \mathbb{C}$. De asemenea, dacă $0 \neq X \in \Delta$ astfel încât $(\epsilon - \overline{\epsilon})(X) = 0$, atunci există $\xi \in V \otimes \mathbb{C}$ astfel încât $X + \xi \in L \cap \overline{L}$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar ω_Δ este nedegenerată.

Reciproc, sa presupunem că $E + \overline{E} = V \otimes \mathbb{C}$ şi că ω_Δ este nedegenerată. Să presupunem că $0 \neq X + \xi \in L \cap \overline{L}$; atunci $\xi|_E = \epsilon(X)$ şi $\xi|_{\overline{E}} = \overline{\epsilon}(X)$. Astfel $(\epsilon - \overline{\epsilon})(X) = 0$, ceea ce implică $X = 0$. Dar atunci $\xi|_E = \xi_{\overline{E}} = 0$, de unde $\xi = 0$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar $L \cap \overline{L} = \{0\}$. □

Conform remarcei 4.4, structurile complexe generalizate liniare pot fi întâlnite doar pe spaţii vectoriale de dimensiune pară. Are loc

Propoziţia 6.4. *Spaţiul vectorial V admite structuri complexe generalizate dacă şi numai dacă acesta este de dimensiune pară.*

Demonstraţie. Într-adevăr, un spaţiu vectorial real de dimensiune pară admite întotdeauna structuri complexe şi simplectice, care sunt, după cum am văzut, structuri complexe generalizate.

Reciproc, considerând L subspaţiul izotrop maximal asociat unei structuri complexe generalizate a lui V, avem – conform remarcei amintite mai sus – că indexul real al acestuia este de aceeaşi paritate cu $\dim V$. Cum L este un subspaţiu vectorial de index 0, deducem că V are dimensiune pară. □

Remarca 6.1. *Subspaţiul maximal izotrop asociat unei structuri simplectice liniare*

Structura complexă generalizată asociată unei structuri simplectice

$$\mathcal{J}_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^{-1} \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$$

determină subspaţiul vectorial maximal izotrop

$$L = \{X - i\Omega(X) : X \in V \otimes \mathbb{C}\}.$$

Această structură complexă generalizată are tipul $k = 0$, unde k reprezintă codimensiunea proieţiei lui L pe $V \otimes \mathbb{C}$.

Cum o B-transformare nu afectează proiecţiile pe $V \otimes \mathbb{C}$, aceasta păstrează tipul. Dacă tranformăm structura de mai sus printr-o B-transformare obţinem o altă structură complexă generalizată de tip 0, anume:

$$e^{-B}\mathcal{J}_\Omega e^B = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^{-1} \\ \Omega & 0 \end{pmatrix},$$

de subspaţiu vectorial maximal izotrop

$$e^{-B}(L) = \{X - (B + i\Omega)(X) : X \in V \otimes \mathbb{C}\}.$$

Pe aceasta o vom numi *structură B-simplectică.*

Remarca 6.2. *Subspaţiul maximal izotrop asociat unei structuri complexe liniare*

Structura complexă generalizată asociată unei structuri complexe

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}$$

determină subspaţiul vectorial maximal izotrop

$$L = V_{0,1} \oplus V^*_{1,0}$$

de tip $k = n$ (unde $V_{1,0} = \overline{V_{0,1}}$ este subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $+i$ a lui J). Dacă transformăm această structură printr-o B-transformare, obţinem

$$e^{-B}\mathcal{J}_J e^B = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ BJ + J^*B & J^* \end{pmatrix}$$

de subspaţiu vectorial maximal izotrop

$$e^{-B}(L) = \{X + \xi + i_X B : X + \xi \in V_{0,1} \oplus V_{1,0}^*\}.$$

6.2 Structuri complexe generalizate

Dorim în cele ce urmează să transportăm structurile complexe generalizate liniare pe o varietate diferenţiabilă. În cazul varietăţilor complexe şi simplectice aceasta presupune doi paşi: menţionarea unei structuri algebrice pe fibratul tangent, precum şi a unei condiţii de integrabilitate a acestei structuri. În cazul structurilor complexe generalizate, condiţia algebrică este dată pe fibratul $TM \oplus T^*M$, iar condiţia de integrabilitate este dată în raport cu paranteza Courant.

Definiţia 6.2. Numim *structură aproape complex-generalizată* pe o varietate diferenţiabilă $2m$-dimensională M un automorfism $\mathcal{J}$ al fibratului $TM \oplus T^*M$ care îndeplineşte oricare din următoarele trei condiţii echivalente:
(i) $\mathcal{J}^2 = -Id$ şi $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$;
sau
(ii) $\mathcal{J}$ este ortogonal în raport cu produsul interior şi $\mathcal{J}^2 = -Id$;
sau
(iii) subfibratul propriu $L < (TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ corespunzător valorii proprii $+i$ a lui $\mathcal{J}$ este total izotrop maximal de index real 0 în fiecare punct.

Introducem acum condiţia de integrabilitate a structurilor aproape complex-generalizate care interpolează între condiţia simplectică $d\omega = 0$ şi cea complexă $[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subseteq \Gamma(T^{1,0}M)$.

Definiţia 6.3. Spunem că structura aproape complex-generalizată $\mathcal{J}$ este *integrabilă* la o *structură complexă generalizată* atunci când subfibratul său propriu corespunzător valorii proprii $+i$ este involutiv Courant. Altfel spus, o structură complexă generalizată poate fi interpretată ca o structură Dirac complexă de index real 0.

Pentru că are loc descompunerea $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C} = L \oplus \overline{L}$, proiecţia $E := \pi_T(L)$ îndeplineşte $E \oplus \overline{E} = TM \otimes \mathbb{C}$, şi suntem în situaţia propoziţiei 5.2, de unde deducem că E dă naştere unei distribuţii generalizate integrabile $\mathcal{D}$ definită prin $\mathcal{D} \otimes \mathbb{C} = E \cap \overline{E}$. Ne aducem aminte că un punct pentru care dim$\mathcal{D}$ este local constantă se numeşte punct regulat, iar din propoziţia 5.3 deducem că în jurul unui punct regulat al unei structuri complexe generalizate obţinem o structură complexă transversă foliaţei definite de $\mathcal{D}$. Tipul k al structurii complexe generalizate în punctul $p \in M$ este definit drept codimensiunea spaţiului $E_p \in T_pM \otimes \mathbb{C}$, aşadar foile foliaţiei induse au dimensiune $2m - 2k$. Aceste foi moştenesc o structură complexă după cum urmează: în vecinătatea regulată, structura complexă Dirac L poate fi exprimată, ca în propoziţia 6.3, drept $L(E, \epsilon)$, unde $E < TM \otimes \mathbb{C}$ este un subfibrat cu $E + \overline{E} = TM \otimes \mathbb{C}$, iar $\epsilon \in \Gamma(\Lambda^2 E^*)$ este astfel încât 2-forma reală $\omega_{\mathcal{D}} = Im(\epsilon|_{E\cap\overline{E}})$ este nedegenerată pe $\mathcal{D}$. Integrabiliatea formei $\omega_{\mathcal{D}}$ urmează din involutivitatea Courant a lui $L(E, \epsilon)$:

Propoziţia 6.5. *Considerăm $E < TM \otimes \mathbb{C}$ un subfibrat şi $\epsilon \in \Gamma(\Lambda^2 E^*)$. Atunci subfibratul maximal izotrop $L(E, \epsilon)$ defineşte o structură complexă generalizată integrabilă dacă şi numai dacă E este involutiv şi $d_E\epsilon = 0$.*

Demonstraţie. Considerăm $i : E \hookrightarrow TM \otimes \mathbb{C}$ incluziunea canonică. Atunci derivarea $d_E : \Gamma(\Lambda^k E^*) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} E^*)$ este definită prin $i^* \circ d = d_E \circ i^*$. Notăm cu $\sigma \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \mathbb{C})$ o extindere netedă a lui ϵ, adică aşa încât $i^*\sigma = \epsilon$. Considerăm de asemenea $X + \xi, Y + \eta \in \Gamma(L)$. Atunci $\xi|_E = i_X\epsilon$ şi $\eta|_E = i_Y\epsilon$. Notăm cu $Z + \zeta := [X + \xi, Y + \eta]$. Dacă L este Courant involutiv, atunci $Z \in \Gamma(E)$, ceea ce arată că E este involutiv, iar diferenţa

$$
\begin{aligned}
\zeta|_E - i_Z\epsilon &= i^*\big(\mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\xi)\big) - i_{[X,Y]}i^*\sigma \\
&= i_X d_E i^*\eta - i_Y d_E i^*\xi + \frac{1}{2}d_E(i_X i_Y\epsilon - i_Y i_X\epsilon) - i^*[\mathcal{L}_X, i_Y]\sigma \\
&= i_X d_E i^*\eta - i_Y d_E i^*\xi + d_E i_X i_Y\epsilon - i^*(i_X d i_Y\epsilon + d i_X i_Y\epsilon - i_Y d i_X\sigma - i_Y i_X d\sigma) \\
&= i_Y i_X d_E\epsilon
\end{aligned}
$$

trebuie să se anuleze pentru orice $X + \xi, Y + \eta \in \Gamma(L)$, arătând că $d_E\epsilon = 0$. Inversând argumentul, vedem că reciproca este de asemenea adevărată. $\square$

O consecinţă simplă a acestui rezultat este faptul că 2-forma nedegenerată $\omega_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\Lambda^2\mathcal{D}^*)$ este închisă de-a lungul foilor, arătând că într-o vecinătate regulată o structură complexă generalizată dă naştere unei foliaţii cu foi simplectice si structură complexă transversă.

Verificăm acum că involutivitatea Courant a structurilor aproape complex-generalizate poate fi particularizată la condiţiile de integrabilitate simplectice, respectiv complexe, după cum ne-am dorit.

Exemplul 6.1. *Varietăţi simplectice*

Structura aproape complex-generalizată

$$
\mathcal{J}_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^{-1} \\ \Omega & 0 \end{pmatrix},
$$

determinată de 2-forma Ω este, după cum am văzut în exemplul 5.4, integrabilă Courant dacă şi numai dacă $d\Omega = 0$. Bineînţeles că acesteia îi putem aplica un B-câmp (unde B este o 2-formă închisă) pentru a obţine o *structură complexă generalizată B-simplectică.*

Exemplul 6.2. *Varietăţi complexe*

Structura aproape complex-generalizată

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}$$

determinată de structura aproape complexă J este, după cum am văzut în exemplul 5.6, integrabilă Courant dacă şi numai dacă J este integrabilă Lie la o structură complexă.

6.3 Teorema lui M. Gualtieri de structură locală

După cum putem uşor observa, orice varietate complexă este local echivalentă printr-un difeomorfism cu $(\mathbb{C}^m, j_m)$, unde j_m reprezintă structura complexă canonică de pe $\mathbb{C}^m$. În mod similar, teorema lui Darboux afirmă că orice structură simplectică de pe o varietate diferenţiabilă este local echivalentă cu structura simplectică standard $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$, unde

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2m-1} \wedge dx_{2m}.$$

În această secţiune vom prezenta o teoremă similară care generalizează aceste rezultate în contextul varietăţilor complexe generalizate.

Teorema 6.6. (M. Gualtieri, 2003)

Orice punct regulat de tip k al unei varietăţi complexe generalizate M de dimensiune reală $2m$ are o vecinătate care este echivalentă, printr-un difeomorfism şi un B-câmp, cu produsul dintre o mulţime deschisă din $\mathbb{C}^k$ şi un deschis al varietăţii simplectice $(\mathbb{R}^{2m-2k}, \omega_0)$.

Demonstraţie. Am văzut în propoziţia 6.5 că într-o vecinătate regulată, o structură complexă generalizată poate fi exprimată ca $L(E, \epsilon)$, unde $E < TM \otimes \mathbb{C}$ este un subfibrat involutiv, iar $\epsilon \in \Gamma(\Lambda^2 E^*)$ îndeplineşte $d_E \epsilon = 0$. Din propoziţia 5.3, distribuţia E determină o foliaţie a vecinătăţii regulate de structură complexă transversă izomorfă cu o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^{2m-2k} \times \mathbb{C}^k$, unde E are drept bază de secţiuni $\{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{2m-2k}; \partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_k\}$, unde $\{x_i\}$ sunt coordonate pentru foile $\mathbb{R}^{2m-2k}$ şi $\{z_i\}$ sunt coordonatele transverse complexe. Aşadar, alegând $B + i\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \mathbb{C})$ astfel încât $i^*(B + i\omega) = \epsilon$, putem scrie un generator pentru fibratul canonic ce defineşte $L(E, \epsilon)$ după cum urmează:

$$\rho = e^{B+i\omega}\Omega,$$

unde $\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k$. În plus, vedem că

$$i^*d(B + i\omega) = d_E i^*(B + i\omega) = d_E\epsilon = 0,$$

ceea ce arată că $d(B + i\omega) \in \mathrm{Ann}^*E$, de unde

$$d\rho = e^{B+i\omega}d(B + i\omega) \wedge \Omega = 0.$$

Am arătat aşadar că orice structură complexă generalizată a unei $2m$-varietăţi poate fi exprimată într-o vecinătate regulată printr-o formă diferenţiabilă închisă $\rho = e^{B+i\omega}\Omega$, unde Ω este decompozabilă de grad $0 \leq k \leq m$ astfel încât

$$\omega^{m-k} \wedge \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0.$$

Demonstraţia lui Weinstein [4] a teoremei lui Darboux pentru o familie de structuri simplectice poate fi folosită pentru a găsi un difeomorfism local φ care păstrează foile şi duce ω într-o 2-formă al carei pullback pe fiecare foaie este forma simplectică canonică de pe $\mathbb{R}^{2m-2k}$. Aplicând acest difeomorfism obţinem 2-forma nouă $\varphi^*B + i\varphi^*\omega$. Să observăm că Ω rămâne neafectată de acest difeomorfism, întrucât $\{z_i\}$ sunt constante de-a lungul foilor.

Pentru uşurinţă, să notăm cu $K = \mathbb{R}^{2m-2k}$ şi $N = \mathbb{C}^k$, în aşa fel încât formele diferenţiale au acum o tri-graduare (p, q, r) corespunzătoare componentelor din $\Lambda^pK^* \otimes \Lambda^qN^*_{1,0} \otimes \Lambda^rN^*_{0,1}$. În plus, derivata exterioară se descompune într-o sumă de trei operatori

$$d = d_f + \partial + \overline{\partial},$$

fiecare de gradul 1 pe componenta corespunzătoare a tri-graduării. Să observăm că d_f este derivata exterioară de-a lungul foilor. În timp ce Ω este de tip $(0, k, 0)$, 2-forma complexă $A = \varphi^*B+i\varphi^*\omega$ se descompune în şase componente, anume: A^{200}, A^{110}, A^{101}, A^{020}, A^{011} şi A^{002}. Să observăm de asemenea că doar componentele A^{200}, A^{101}, A^{002} acţionează netrivial pe Ω în expresia $e^A\Omega$. Aşadar, putem modifica după cum dorim celelalte trei componente. Mai observăm că partea imaginară a componentei A^{200} este ω_0, de unde deducem că $d(A^{200} - \overline{A^{200}}) = 0$.

Din $d(B + i\omega) \wedge \Omega = 0$, obţinem

$$\overline{\partial}A^{002} = 0 \tag{6.1}$$

$$\overline{\partial}A^{101} + d_fA^{002} = 0 \tag{6.2}$$

$$\overline{\partial}A^{200} + d_fA^{101} = 0 \tag{6.3}$$

$$d_fA^{200} = 0 \tag{6.4}$$

Ultima ecuaţie afirmă pur şi simplu că pullback-ul formei $B + i\omega$ la orice foaie este închis în acea foaie, după cum ştim deja.

Dorim acum să modificăm A aşa încât $\varphi^*\rho = e^A\Omega$ rămâne neschimbată, dar A este înlocuit cu $\tilde{A} = \tilde{B} + \frac{1}{2}(A^{200} - \overline{A^{200}})$, unde $\tilde{B}$ este o 2-formă închisă. Aceasta ar demonstra că

$$\varphi^*\rho = e^{\tilde{B}+i\omega_0}\Omega,$$

adică, ρ este echivalent, prin compunerea dintre un B-câmp şi un difeomorfism, cu produsul dintre o structură complexă şi una simplectică.

Pentru a păstra $\varphi^*\rho$, forma cea mai generală pentru $\tilde{B}$ este

$$\tilde{B} = \frac{1}{2}(A^{200} + \overline{A^{200}}) + A^{101} + \overline{A^{101}} + A^{002} + \overline{A^{002}} + C,$$

unde C este o 2-formă reală de tip (011). Atunci clar $\varphi^*\rho = e^{\tilde{B}+i\omega_0}\Omega$. Cerând ca $d\tilde{B} = 0$ obţinem

$$(d\tilde{B})^{012} = \partial A^{002} + \overline{\partial} C = 0; \tag{6.5}$$

$$(d\tilde{B})^{111} = \partial A^{101} + \overline{\partial A^{101}} + d_f C = 0. \tag{6.6}$$

Aşadar ne-am redus la a arăta existenţa unei (011)-forme reale C astfel încât aceste ecuaţii sunt îndeplinite. Următoarele argumente sunt locale şi fac uz în mod repetat de lema lui Dolbeault.

- Din ecuaţia 6.1 obţinem că $A^{002} = \overline{\partial}\alpha$ pentru o (001)-formă α. Condiţia 6.5 este echivalentă cu $\overline{\partial}(C - \partial\alpha) = 0$, a cărei soluţii generale este

  $$C = \partial\alpha + \overline{\partial\alpha} + i\partial\overline{\partial}\chi,$$

  unde χ este o funcţie reală oarecare. Rămâne de verificat că se poate să alegem χ astfel încât condiţia 6.6 să fie îndeplinită.

- Din ecuaţia 6.2 obţinem că $\overline{\partial}(A^{101} - d_f\alpha) = 0$, de unde $A^{101} = d_f\alpha + \overline{\partial}\beta$ pentru o (100)-formă β. Condiţia 6.6 devine acum

  $$-id_f\partial\overline{\partial}\chi = \partial\overline{\partial}(\beta - \overline{\beta}),$$

  care poate fi rezolvată pentru necunoscuta χ dacă şi numai dacă partea dreaptă este d_f-închisă. Din ecuaţia 6.3 vedem că $\overline{\partial}(A^{200} - d_f\beta) = 0$, ceea ce arată că $A^{200} = d_f\beta + \delta$, unde δ este o (200)-formă $\overline{\partial}$-închisă. Aşadar

  $$d_f\partial\overline{\partial}(\beta - \overline{\beta}) = \partial\overline{\partial}(A^{200} - \overline{A^{200}}),$$

  iar partea dreaptă se anulează întrucât $A^{200} - \overline{A^{200}} = 2\omega_0$, care este închisă. Aşadar χ poate fi ales să îndeplinească condiţia 6.6.

Aceasta încheie demonstraţia teoremei. $\square$

Bibliografie

[1] W. Boothby: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press (1975)

[2] M. Gualtieri: *Generalized complex geometry*, PhD Thesis, University of Oxford (2003)

[3] L. Hormander: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland (1990)

[4] D. McDuff, D. Salamon: *Introduction to symplectic topology*, Oxford University Press (1998)

[5] A. Moroianu: *Lectures on Kahler Geometry*, Cambridge University Press (2007)

[6] A.C. da Silva: *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer (2001)

[7] H.J. Sussmann: *Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions*, Transactions of the American Mathematical Society, **180** (1973) pp. 171-188