INTRODUCERE

"Electrotehnica" are ca obiect aplicaţiile în tehnică ale fenomenelor electrice şi magnetice, iar "Bazele teoretice ale electrotehnicii" (numită, mai scurt, şi "Bazele electrotehnicii") se ocupă cu studiul (cu "teoria") fenomenelor electrice şi magnetice din punctul de vedere al aplicaţiilor pe care aceste fenomene naturale le au –sau le pot avea– în tehnică, prin "reproducerea" lor conştientă (intenţionată) cu diverse echipamente, aparate şi instalaţii, în scopul obţinerii unor efecte utile într-o anumită activitate.

Aplicaţiile tehnice cu un anumit scop practic –aplicativ, *ingineresc*, cu un anumit *specific industrial*, sunt studiate– sub multiple aspecte (didactic-teoretic, cercetare-proiectare, producţie/construcţie şi exploatare) de diversele ramuri ale electrotehnicii (ale ingineriei electrice-electronice sau ale industriei electrotehnice şi electronice), în prezent foarte numeroase şi adânc specializate, dintre care amintim numai câteva: maşini şi aparate electrice (de fapt electromagnetice), acţionări electrice, măsurări electrice şi magnetice, tehnica tensiunilor înalte, reţele electrice de distribuţie a energiei electrice (de fapt electromagnetice), linii de transport a energiei electrice (electromagnetice), electroenergetica, iluminatul electric, electroacustica, electrotermia, electroliza, electrometalurgia etc.etc., sau aplicaţiile inginereşti ale electronicii (ce se ocupă –în esenţă– cu procesarea semnalelor, care sunt electromagnetice) şi ale telecomunicaţiilor. Toate aceste ramuri ale industriei electrotehnice sunt exemple concrete ale modului în care teoria generală a fenomenelor electromagnetice (dezvoltată şi sistematizată de "Bazele electrotehnicii"), conduce la diverse aplicaţii practice inginereşti.

Spre deosebire de "Fizică" (care este o ştiinţă fundamentală din ciclul ştiinţelor naturii) ce se ocupă cu studiul şi stabilirea proprietăţilor şi structurii materiei, cu fenomenele naturii anorganice (printre care şi fenomenele electromagnetice), "Bazele electrotehnicii" este o disciplină (cu pronunţat caracter didactic) care se ocupă cu teoria generală a fenomenelor electrice şi magnetice, mai precis cu prezentarea sistematică a conceptelor, a legilor şi a teoremelor "Electromagnetismului" sub forma cea mai "avantajoasă" pentru utilizarea lor în practica inginerească (în tehnică).

Metodele teoretice şi modelele (v. subcap. 9.2) specifice "Bazelor electrotehnicii" se folosesc în teoria circuitelor şi a reţelelor electrice (v. subcap. 8.1) cu parametri concentraţi (localizaţi) şi/sau distribuiţi (repartizaţi), teoria conducţiei electrice în conductoare masive, teoria undelor electromagnetice (v. cap. 7) şi teoria circuitelor electronice (formate din dispozitive neliniare, cu vid, cu gaze şi semiconductori).

"Bazele electrotehnicii", ca disciplină didactică, se bazează pe "Fizică" (pe care o considerăm cunoscută cititorului – conform programelor analitice ale specializărilor "Electronică aplicată" şi "Electromecanică"), pe metodele "Matematicii" (pentru capitolele care încă nu au fost studiate la "Matematică", s-a introdus un compendiu matematic prin subcapitolul 9.1) şi –mai recent (dar de destulă vreme)– pe metodele de simulare numerică din "Informatică" (v. subcapitolele 9.2 şi 9.3).

În linii mari, problemele "Bazelor electrotehnicii" se împart în două categorii (*Timotin, A. ş.a., 1962*): probleme de electromagnetică/electromecanică (de "curenţi tari"), care se referă la producerea, transmiterea şi utilizarea energiei electromagnetice; probleme de electrocomunicaţii (de "curenţi slabi"), care se referă la producerea, transmiterea, refacerea/reproducerea şi înregistrarea semnalelor electromagnetice purtătoare de date. De cele mai multe ori, aceste două categorii de probleme intervin împreună în aplicaţiile tehnice de azi (când metodele de automatizare şi informatizare s-au generalizat).

Sperăm că –prin cele arătate la începutul acestei introduceri– să fi reuşit să explicăm cititorului (şi mai ales studenţilor cărora li se adresează acest manual, de la specializările "Electromecanică" şi "Electronică aplicată"), care este rolul şi poziţia cursului "Bazele electrotehnicii" în pregătirea şi formarea specialiştilor în profilul electric.

Dintre numeroasele teorii elaborate până acum pentru studiul fenomenelor electrice şi magnetice, am folosit în acest manual teoria macroscopică clasică (teoria lui Maxwell şi Hertz), din cel puţin trei motive:

- pentru inginerul cu profil electric (mai ales cu specializările electromecanică şi electronică aplicată – nu şi electronică fizică, pe care nu o avem în vedere) considerăm că teoria macroscopică clasică asigură cunoştinţele necesare acestui profil şi are o eficienţă mai mare în procesul de abordare şi însuşire a disciplinelor de specialitate şi de corelare cu alte discipline fundamentale;

- ne aliniem tradiţiei din învăţământul cu profil electric din România şi ne încadrăm în reputata şcoală de bazele electrotehnicii creată în ţara noastră de iluştri profesori ca: D. Hurmuzescu, St. Procopiu, Vasilescu-Karpen, C. Budeanu şi P. Andronescu, consolidată prin contribuţii însemnate la teoria macroscopică şi modelarea (matematică) a fenomenelor electromagnetice şi a regimului tranzitoriu al circuitelor electrice de către academicianul profesor Remus Răduleţ şi continuată în mod strălucit de discipolii săi – profesorii A. Timotin, A. Ţugulea, Viorica Hortopan, C. Mocanu, M. Preda, P. Cristea şi mulţi alţii;

- ecuaţiile lui Maxwell oferă modele ce permit o uşoară dar eficientă simulare numerică prin utilizarea sistemelor de calcul automat (foarte răspândite astăzi), atât în domeniul undelor electromagnetice (ale căror modele formate din sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale spaţio-temporale pot fi rezolvate, pentru orice probleme practice prin metoda elementului finit – v.§ 9.3.2) cât şi în cazul circuitelor electrice (cu modele formate din ecuaţii matriceale, foarte comod şi precis de rezolvat prin utilizarea produsului informatic MATLAB - v.§ 9.3.1).

În contextul teoriei acţiunii din aproape în aproape, al descoperirii fenomenului inducţiei electromagnetice (în fapt efectul electric al fenomenelor magnetice) şi al introducerii conceptului de câmp electromagnetic unitar (ambele datorate lui Michael Faraday), al studiilor de electrocinetică ale lui G.S. Ohm şi R. Kirchhoff, ale descoperirilor lui H.C. Oersted (care dezvăluiau efectul magnetic al fenomenelor electrice) şi al altor experimente, la mijlocul secolului al XIX-lea (mai precis în anul 1873, când Mawell, J.C. a publicat lucrarea "Tratat despre electricitate şi magnetism" în care corpurile au fost considerate ca medii continue), a fost elaborată şi conturată teoria macroscopică (zisă şi clasică) a electricităţii şi magnetismului, numită teoria lui Maxwell – care se aplică numai corpurilor în mişcare.

Această teorie este o teorie fenomenologică, bazată pe relaţia univocă dintre cauză şi efect, foarte potrivită pentru pregătirea fundamentală în domeniul electromagnetismului a inginerului electrician, care în profesia sa va trebui să conceapă (să creeze şi să proiecteze) noi aplicaţii tehnice ale fenomenelor electrice şi magnetice şi să le exploateze tocmai bazat pe latura fenomenologică.

Poate inconsecvenţi, însă din dorinţa de a face mai clare unele noţiuni şi fenomene (cum ar fi momentul electric, momentul magnetic, polarizarea electrică, magnetizaţia, fenomenele electrocinetice în vid şi în electroliţi, noţiunea de câmp electric imprimat ş.a.), în unele situaţii vom face apel şi la teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice (adică la teoria electronică elaborată de Hendrik Antoon Lorentz şi definitivată prin lucrarea sa "Teoria electronilor" apărută la Leyda în anul 1909).

Alte teorii consacrate, cu privire la fenomenele electrice şi magnetice, cum sunt acelea ale relativităţii restrânse (a lui Albert Einstein) şi teoria cuantică (electrodinamica cuantică a lui A.M. Dirac) vor fi numai arareori citate în acest manual.

Plecând de la concepţiile fecunde ale academicianului şi profesorului Remu Răduleţ –primul care a arătat că predarea electrotehnicii trebuie să aibă ca suport teoria unitară a câmpului electromagnetic– vom folosi în acest manual (v. cap.1) teoria potrivit căreia mărimile şi legile fizicii sunt independente, că mărimile necesare studierii fenomenelor electrice şi magnetice au un caracter convenţional care, într-o teorie dată, se introduc în urma unui proces inductiv, plecând de la experiment (ce poate fi şi teoretic !), adică de la senzorial la raţional şi că teoria mărimilor poate fi constituită înaintea teoriei legilor.

În sfârşit, având în vedere progresele de astăzi ale informaticii şi eficienţa aplicării ei în toate domeniile activităţii umane, vom prezenta analiza fenomenelor electrice şi magnetice efectuată pe baza teoriei macroscopice clasice în concepţia academicianului Răduleţ, prin utilizarea consecventă a teoriei modelării şi simulării (v. subcap. 9.2), precum şi a produselor CAD/CAE (v. subcap. 9.3) în toate aplicaţiile (zicem noi numerice) introduse în acest manual spre exemplificare şi ca exerciţii de însuşire şi consolidare a teoriei.

Având în vedere şi dotările informatice de care dispune catedra "Electrotehnică – Electronică" din U.P.G. (reţea de calculatoare proprie, un laborator de tehnologia predării, numeroase produse informatice de tip CAD/CAE, un "site" pe pagina web a U.P.G. din Ploieşti, pe care se găseşte şi prezentul manual), precum şi tendinţele actuale de pregătire universitară (asistată de calculator, cu procedee interactive, cu implicarea ca prim personaj a studentului, cu numeroase teste şi cu învăţământul la distanţă), acest curs de "Bazele electrotehnicii", tipărit aici ca versiune 0 (ce va fi perfecţionată pe "site"-ul Internet după fiecare an universitar, în procesul predării), va fi prezentat în consonanţă cu dotările informatice de care dispunem şi cu cerinţele pedagogice actuale.

1. ELEMNTE ALE TEORIEI MACROSCOPICE A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

În natură au loc neîncetat numeroase şi diverse fenomene. În înțelesul cel mai general, *fenomenul* este o manifestare exterioară a esenței unui obiect (sistem), a unui proces etc. care este accesibilă în mod nemijlocit. În limbajul curent, fenomenul înseamnă o transformare, o evoluție, un proces sau un *efect* etc., din natură sau din societate.

Din punctul de vedere al *esenței sistemului* (obiectului) analizat, dintre numeroasele fenomene existente în mod natural, în concordanță cu tematica acestui manual sunt numai fenomenele fizicochimice. Fenomenele fizicochimice reprezintă mulțimea ordonată a stărilor pe care le are un sistem fizicochimic în momentele succesive ale unui interval de timp. Rezultă din această sumară definiție, că fenomenele depind de natura stărilor sistemului, de localizarea lor spațială (topologică) şi temporală.

După natura *stărilor* considerate, se deosebesc fenomene fizice şi fenomene chimice, iar după natura *mărimilor* prin care se consideră determinate aceste stări, se deosebesc fenomene mecanice (în parțial acustice), fenomene de gravitație, fenomene termice, *fenomene electrice şi magnetice* (în particular optice), fenomene electrono-pozitronice, mesonice etc.

Din punctul de vedere al localizării spațiale, fenomenele pot fi globale (relative la un 'întreg' sistem / obiect, în particular un corp) sau locale (relative la un punct al sistemului analizat, raportat la un anumit sistem de referință). Din punctul de vedere temporal, fenomenele pot fi statice, staționare şi variabile, iar în funcție de stabilitatea lor temporală, fenomenele pot fi permanente şi tranzitorii.

În aceste definiții au apărut câteva noțiuni (ca sistem, sistem fizic, stare, mărime) care se cer a fi explicate, acest lucru făcând obiectul subcapitolului ce urmează.

1.1. Fenomene fizice. Noțiuni preliminarii

Fenomenele, considerate ca o multime ordonată a stărilor pe care le are un grup de obiecte (corpuri) în momentele succesive ale unui interval de timp, se numesc *fenomene fizice* dacă nu produc, în nici un fel, modificarea naturii substanței corpurilor implicate în fenomene pe întreg intervalul de manifestare a lor. În caz contrar, când fenomenele constau numai în modificări ale naturii substanței, ele se numesc fenomene chimice, iar dacă în şirul stărilor sistemului în intervalul de timp considerat, apare cel puțin o modificare în natura substanței corpurilor, fenomenele se numesc fenomene fizicochimice.

Datorită subiectului pe care îl are acest manual, se vor avea în vedere numai fenomenele fizice în general (dar, în special de-a lungul cărții, *fenomenele electromagnetice*) şi foarte rar cele fizicochimice (a se vedea: efectul chimic al electrocineticii, electroliții, disociația electrolitică, legea electrolizei ş.a.).

Pentru a se putea studia un fenomen cu o anumită caracteristică aparte (ce poate fi descrisă de o anumită specie de proprietăți) este necesară o *delimitare* (o „separare") spațială şi temporală care constă în:

- definirea *obiectelor fizice* (numite, în ansamblul lor, *sistem fizic*) considerate ca porțiuni mărginite şi univoc definite ale materiei, care prin modificarea stărilor lor succesive (ordonate) pun în evidenţă (fac perceptibilă) sau indică senzorial sau inteligibil ceea ce se denumeşte –în mod generic– un fenomen. Aceasta în virtutea principiului (de ce nu, filozofic) că modul de existenţă al obiectelor fizice (sistemelor fizice) constă în manifestările lor (ca procese-fenomene) şi că nu există proces (fenomen) care să nu implice sisteme fizice;

- definirea temporală, care constă în precizarea secvenţei din mulţimea ordonată a stărilor sistemului fizic, secvenţă caracterizată de o aceeaşi specie de proprietăţi, astfel încât să se poată stabili o stare iniţiala (la „stânga") care constituie *cauza* modificării stărilor sistemului fizic analizat în secvenţa studiată şi o stare finală (la „dreapta") a secvenţei care constituie o nouă stare a sistemului fizic, un rezultat al secvenţei, adică un *efect*. Prin urmare, definirea temporală delimitează un fenomen al unui sistem fizic între cele două evenimente: cauză şi efect, evenimente care ele însele sunt tot fenomene. De exemplu, în anumite condiţii, un fenomen termic la care este supus un corp poate genera (deci este cauza) unui fenomen electric (care este un efect), aşa cum sunt câmpurile imprimate termoelectrice de volum (v. subcap. 4.3).

Esenţial, pentru cunoaşterea unui fenomen relativ la un sistem fizic dat, este determinarea relaţiei dintre cauza şi efect. În condiţiile unui sistem fizic precizat, un fenomen este determinat atunci când se poate preciza raportul univoc: cauza→efect. Activitatea de cunoaştere prin care, în condiţiile unui sistem fizic dat, se determină efectul pe care îl creează în sistem o anumită cauză poartă numele generic de *analiză*; activitatea „inversă", prin care se încearcă determinarea cauzelor ce ar produce într-un sistem dat un anume efect dorit este denumită, în general, *sinteză*. În planul cunoaşterii şi al modelarii fenomenelor fizice, stabilirea relaţiilor cauză↔efect se realizează cu ajutorul *legilor fizicii* şi al unor *teoreme*, în care intervine un anumit număr de aşa numite *mărimi fizice*, ce pot descrie –atât sub aspect calitativ, cât şi cantitativ– caracteristicile specifice sistemului fizic şi fenomenelor care se produc în sistem.

Dacă, pentru un sistem fizic cunoscut, se poate stabili ce efecte produce, *întotdeauna*, un grup de cauze dat, în mod univoc şi la orice „repetare" a cauzelor (reproducere a fenomenului), ceea ce în domeniul modelării sistemelor se precizează prin *teoremele de unicitate* (care afirmă că legile fizice specifice fenomenului studiat determină starea spaţio-temporală a sistemului fizic analizat, adică în fiecare punct al domeniului său cât şi în fiecare moment), atunci se spune că fenomenul are caracter *determinist*. În caz contrar, când raportul cauză→efect nu poate fi stabilit în mod univoc şi când reproducerea exactă a fenomenului în aceleaşi condiţii ale sistemului fizic analizat nu este sigur posibilă, se spune despre fenomen că are caracter întâmplător sau *aleator*.

1.1.1. Mărimi fizice

Cercetarea sistemelor fizice şi a fenomenelor fizice pe care le „găzduiesc",considerate –în procesul de cunoaştere– ca obiecte ale gândirii, duce la constatarea că aceste obiecte se diferenţiază între ele atât calitativ cât şi cantitativ, ceea ce a impus găsirea (introducerea) unor note (în sensul din „logică") şi noţiuni prin care să se poată caracteriza şi deosebi între ele. O astfel de noţiune este **mărimea**, care se exprimă lingvistic şi se reprezintă simbolic prin procedee ale semioticii.

Astfel, prin activitatea de identificare a proceselor şi de modelare a lor (adică de reprezentare matematică a relaţiilor din sistemul obiect analizat) se stabilesc anumite proprietăţi (elemente-note specifice) *diferite calitativ* pe care le putem denumi *mărimi* (sau specii de mărimi – pentru a le preciza natura lor diferită) şi anumite *corelaţii* între ele descrise matematic (modelate) prin *legi* –dacă sunt deduse experimental sau prin *teoreme*, *formule* etc.– dacă sunt stabilite deductiv din legi.

Pentru cunoaşterea şi modelarea fenomenelor fizice, concomitent cu sistemele fizice în care se manifestă, precum şi pentru evaluarea raporturilor cauza↔efect, nu este suficientă numai caracterizarea calitativă. Este necesară –în plus– o *determinare cantitativă* a relaţiilor existente între proprietăţile obiectelor studiate, care să conducă la corelarea aspectelor calitative ce delimitează obiectul (sistemul), la cuantificarea interacţiunilor existente între proprietăţile sistemului-obiect şi la precizarea evoluţiei sistemului. Determinarea cantitativă a proprietăţilor calitative ale unui sistem-obiect, adică a speciilor sale de „mărimi” ce exprimă aspecte de natură diferită, se face prin aşa numitele *mărimi fizice*. Deşi noţiunea de „mărime” presupune –prin semantica ei– şi o evaluare cantitativă, simplificând puţin lucrurile vom defini o mărime fizică prin acea mărime (ca aspect calitativ) care poate fi determinată şi cantitativ, adică o mărime ce poate fi măsurată şi căreia –prin măsurare– i se poate atribui o „valoare” (mai exact o exprimare matematică, căreia –prin abuz terminologic– i se spune ”mărime matematică”). *Mărimea matematica* ataşată –prin măsurare– unei mărimi (adică unei proprietăţi calitative), reprezintă o *măsură* a mărimii, cu valori în mulţimea *valorilor mărimii* (continuă – analogică sau discretă – numerică).

Sintetizând, o mărime fizică conţine în plus faţă de mărime (adică faţă de aspectul calitativ al proprietăţii pe care o exprimă) şi determinări cantitative (prin măsurare) specifice, care reflectă o anumită manifestare internă existentă în mod natural.

De exemplu, în cazul unor procese mecanice putem constata că diferite corpuri în „mişcare” parcurg, faţă de un sistem de referinţa dat, „spaţii” diferite în acelaşi „interval de timp” (aceeaşi „durată”). Aceasta este o analiză sumară a unui fenomen cu un specific al său (zis mecanic), în care noţiunile: mişcare, spaţiu şi durată reprezintă aspecte (caracteristici) calitative, zise pe scurt mărimi. Pentru o analiză de conţinut, cu evaluări cantitative care să determine, în esenţa sa, deplasarea corpurilor, se introduc noi mărimi: viteza, acceleraţia, masa, forţa etc. Toate acestea (inclusiv spaţiul şi durata) sunt mărimi fizice, deoarece ele sunt mărimi măsurabile, cărora li se poate ataşa câte o măsură sub forma unor mărimi matematice cu valori în mulţimea numerelor reale, cu precizarea ca mărimile fizice ataşate viteza, forţa şi acceleraţia sunt mărimi vectoriale, iar spaţiul, durata şi masa sunt mărimi scalare.

Măsurarea, prin care se determină cantitativ o mărime fizică, este o activitate experimentală de tip informatic al cărui scop este obţinerea unor *date cantitative* cu privire la proprietăţile unui sistem-obiect şi redarea lor într-o formă potrivită pentru observator (utilizator). Semnificaţia (interpretarea) pe care observatorul-utilizator o atribuie acestor date cantitative, prin intermediul convenţiilor folosite pentru reprezentarea lor, constituie *informaţia* care este necesară în procesul continuu de *cunoaştere, comunicare* şi *conducere (decizie).*

Determinarea cantitativă, prin măsurare, a diverselor specii de mărimi diferite calitativ, nu se poate realiza decât în raport cu mărimi de aceeaşi specie (aceeaşi natură fizică) alese ca unităţi cantitative, numite *unităţi de măsură,* fixate în mod convenţional decât în cadrul unui *sistem de unităţi de măsură coerent*. O specie de mărimi fizice este determinată atunci când se indică procedeul de măsurare, alegerea unităţii de măsură fiind, în principiu, o opţiune arbitrară. Dintre sistemele de unităţi practice, unul –şi anume **S**istemul **I**nternaţional de unităţi (SI)– a fost adoptat pe plan mondial, la el aderând oficial majoritatea ţărilor lumii. Deoarece, din anul 1961, SI a fost introdus şi în România ca singur sistem de unităţi de măsură legal şi obligatoriu, în cadrul acestui manual se vor folosi numai unităţile de măsura ale SI, care se consideră cunoscut de la cursul de Fizică.

Clasificarea mărimilor fizice

Speciile de mărimi fizice pot fi clasificate după numeroase criterii. Clasificarea speciilor de mărimi prezintă importanţă atât pentru optimizarea modelelor ce descriu fenomenele şi sistemele fizice în cadrul unei teorii, cât şi pentru aplicabilitatea unor categorii de metode de măsurare.

Privite sub aspectul **relaţiilor dintre** ele, **mărimile fizice** (care stabilesc determinări cantitative pentru o proprietate comună unei mulţimi de obiecte fizice) trebuie să satisfacă în mod obiectiv câteva cerinţe şi anume:

- să existe o *relaţie de echivalenţă* între obiectele fizice având aceeaşi specie de mărimi (proprietăţi), care este *simetrică* (în sensul că dacă un obiect fizic *A* este echivalent cu un alt obiect fizic *B*, atunci *B* este echivalent cu *A*), *tranzitivă* (adică: „*A* echivalent cu *B*” şi „*B* echivalent cu C” $\Rightarrow$ „A echivalent cu C”) şi *reflexivă* (întotdeauna un obiect fizic A este echivalent cu el însuşi). Exemple de echivalenţă sunt: pentru proprietatea „forma geometrică” a obiectelor$\rightarrow$asemănarea geometrică, pentru proprietatea „lungime” a unor segmente$\rightarrow$coincidenţa extremităţilor segmentelor, pentru mărimea (proprietatea unor obiecte fizice) „temperatură” $\rightarrow$ echilibrul termic a două corpuri etc.;

- să existe o *relaţie de ordonare* între două din obiectele unei mulţimi de obiecte caracterizate de aceeaşi specie de proprietăţi, care sunt neechivalente în sensul algebrei propoziţionale binare (potrivit căreia, o propoziţie poate fi ori „adevărată” $\widehat{=} 1$, ori „falsă” $\widehat{=} 0$), adică „dacă obiectul A este diferit de B” (ceea ce s-ar putea scrie $A \neq B$) să se poată stabili o relaţie de ordonare în raport cu specia de mărimi (proprietate) considerată, prin $A>B \Rightarrow B<A$ (adică *asimetria*, care se mai poate formula şi prin $A<B$ exclude $B<A$) şi prin $A>B$ şi $B<C \Rightarrow A>C$ (adică *tranzitivitatea*). Ca exemplu, lungimile unor segmente de dreaptă sunt ordonabile în raport cu relaţia „mai lung decât” sau „mai scurt decât”, care se obţine experimental suprapunându-se segmentele de dreaptă analizate, cu una din extremităţi puse împreună.

Revenind la clasificarea propriu-zisă a mărimilor fizice, dacă se ia drept criteriu felul cum se introduc ele în teorie, speciile de mărimi fizice se împart în:

- specii de **mărimi primitive** care, într-o teorie dată, se introduc direct printr-un proces logic inductiv, însă pe cale experimentală şi cu precizarea concretă a procedeului de măsurare. Astfel, în teoria clasică a mecanicii s-au introdus ca mărimi primitive: lungimea (distanţa), durata (timpul), masa şi forţa, iar în termodinamică: căldura şi temperatura. Mărimile primitive nu se mai pot defini cu ajutorul altora, fără utilizarea experienţei practice. Prin urmare, speciile de mărimi primitive se introduc prin indicarea explicită a relaţiilor de echivalenţă şi ordonare, precum şi a procesului de comparare;

- specii de **mărimi derivate** care –în cadrul unei teorii date pentru un domeniu de cercetare– se introduc prin analiza logică în funcţie de alte specii de mărimi de referinţă cunoscute, introduse în prealabil, fără a face uz de experienţă. Aşa de exemplu, în cinematica viteza $\overline{w}$ e o mărime derivată din speciile de mărimi „lungime” ($\overline{l}$) şi „durată” (t) prin expresia $\overline{w} = \mathrm{d}\overline{l} / \mathrm{d}t$, iar acceleraţia $\overline{a}$ este o mărime derivată prin: $\overline{a} = \mathrm{d}\overline{w} / \mathrm{d}t$ etc. La introducerea unei specii de mărimi derivate cu ajutorul unei relaţii de definiţie a valorilor ei numerice, pot apărea doua situaţii speciale. Dacă experienţa arată că aceste valori nu depind de valorile mărimilor în funcţie de care au fost definite, dar depind de natura materialului sau obiectului la care se referă, mărimea derivată nou introdusă se numeşte (este) o **mărime de material**, iar expresia prin care a fost definită este o relaţie (lege, teoremă etc.) de material (de exemplu, în domeniul Căldurii, coeficientul de dilataţie liniară al unui corp solid, notat cu β, este o mărime derivată definită prin expresia $\beta \overset{D}{=} \mathrm{d}l / l\mathrm{d}\theta$ şi deoarece practic ea nu depinde de lungimea l şi –într-un anumit interval– de temperatură θ, rezultă că β este o mărime de material). Dacă experienţa arată că aceste valori nu depind nici de valorile mărimilor în funcţie de care au fost definite şi nici de alte mărimi sau condiţii fizice (ca, de exemplu, valorile definite de raportul forţei de atracţie gravitaţională G, a doua puncte materiale prin produsul maselor lor m_1 şi m_2, multiplicat cu pătratul distanţei r dintre ele, adică $f = Gr^2 / m_1 m_2$), mărimea derivată nou introdusă este o *constantă universală* (în exemplul dat, constanta de gravitaţie $f = 6{,}67\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$), iar expresia ei de definiţie –în care se consideră explicit independenţa menţionată– este o *lege generală* (ca, de exemplu, legea atracţiei universale: $G = f\, m_1\, m_2 / r^2$).

Calitatea de mărime primitivă şi derivată este relativă. Academicianul Remus Răduleţ, analizând sistemic relaţia dintre numărul mărimilor primitive şi derivate dintr-o teorie aflată la un anumit nivel de dezvoltare, a arătat că numărul mărimilor primitive pentru studiul unui anumit fel de fenomene este un număr obiectiv. Într-o anumită formă şi stadiu al unei teorii se pot introduce anumite mărimi ca primitive, iar în altă formă sau / şi stadiu al teoriei ele ar putea apare ca derivate. Totuşi, numărul speciilor de mărimi primitive este invariabil în cadrul unui anumit domeniu de cercetare dat şi la nivelul unei anumite teorii relativă la acest domeniu.

După criteriul funcției pe care o au în legătura cauzală a fenomenelor, mărimile fizice se clasifică în:

- **mărimi de stare**, adică acele mărimi fizice prin care se poate descrie situația manifestărilor („stărilor") care au loc într-un sistem fizic izolat. Mărimile de stare, prin modelele în care sunt incluse în cadrul unei teori, permit determinarea univocă a stării inițiale şi a evoluției în viitor, pe baza principiului cauzalității (efect $\leftrightarrow$ cauză). De exemplu, în Mecanica clasică starea unui corp punctiform cu masa m (aşa-numitul punct material) este complet determinată de mărimile de stare numite impuls şi rază vectoare;
- **mărimi de proces**, adică mărimile fizice prin care se descrie interacțiunea unui sistem fizic cu alte sisteme sau trecerea sa dintr-o stare în alta. Luând exemple tot din Mecanica clasică, mărimile forță $\overline{F} = k \cdot m_1\, m_2 / r^2$ şi lucru mecanic $L = \int_{c:a\to b} \overline{F} \cdot \overline{\mathrm{d}l}$ sunt mărimi de proces deoarece forța descrie interacțiunea unui punct material cu alte corpuri, iar lucrul mecanic caracterizează trecerea punctului material dintr-o stare în alta când parcurge o traiectorie c între două puncte a şi b.

După rolul pe care îl au în alcătuirea sistemelor de unități de măsură, speciile de mărimi se clasifică în:

- **mărimi fundamentale**, care sunt acele mărimi ale căror unități de măsură se aleg independent, prin indicarea reprezentării lor în mod concret (prin măsuri, etaloane, relații de calcul ce definesc unitatea etc.). În Sistemul Internațional de unități de măsură, mărimile fundamentale sunt: lungimea, masa, durata, temperatura termodinamică, intensitatea luminoasă, intensitatea curentului electric ş.a.;
- **mărimi secundare** care sunt acele mărimi ale căror unități de măsură rezultă univoc din modelele ce includ speciile de mărimi fundamentale, în funcție de unitățile de măsură independente ale acestor specii. Aşa sunt, de exemplu: viteza, accelerația, lucrul mecanic, fluxul luminos, căldura etc. etc.

Din punctul de vedere al modelării sistemelor, mărimile susceptibile de a fi măsurate şi evaluate valoric (deci mărimile fizice) se pot clasifica şi după mărimile matematice care le sunt ataşate. În activitatea de modelare şi de măsurare, fiecărei specii de mărimi fizice $\{X\}$ îi este ataşată o aşa-numită **mărime matematică** $\{X_m\}$, prin aplicația $\{X\} \to \{X_m\}$, care poate fi: *scalară*, *vectorială* sau *tensorială*. De exemplu: lungimea, temperatura, debitul (masic sau volumic) etc. sunt reprezentabile prin scalari ($X_m \in$ R), pozitivi sau negativi (iar masa, durata ş.m.a. prin scalari pozitivi); viteza unui punct material, accelerația, forța etc. sunt reprezentabile prin vectori $\overrightarrow{X}_m$ (cu valoarea absolută $\left|\overrightarrow{X}_m\right| \in$ R); pe când starea de tensiune dintr-un punct al unui corp solid deformabil elastic este reprezentată printr-un tensor simetric. *Tensorul* este o entitate matematică prin care fiecărui punct dintr-un sistem de referință n-dimensional i se asociază o matrice n^m ordonată de valori reale, ce exprimă *cantitativ* (*valoric*) o mărime fizică. Aici m este ordinul tensorului, astfel că într-un sistem de referință cartezian tridimensional (n = 3), Ox, Oy şi Oz, dacă m = 0 tensorul este de ordinul zero (adică scalarul), dacă m = 1 tensorul este de ordinul unu (adică vectorul) şi dacă m = 2 tensorul este de ordinul doi (adică tensorul propriu-zis). Astfel, în tridimensional, cu n = 3, scalarul se reprezintă printr-o matrice cu un singur element ($n^m = 3^0 = 1$) care este un număr real, vectorul prin matricea cu $3^1 = 3$ elemente (X_x , X_y si X_z – fiecare fiind un număr real) şi tensorul prin $3^2 = 9$ elemente (toate, de asemenea, numere reale). De aceea, la evaluarea unei mărimi fizice prin măsurare se vor determina pentru acea mărime unu, trei sau nouă mărimi scalare, în funcție de felul mărimii matematice care îi este ataşată.

Din punctul de vedere al aditivității (însumării) lor, mărimile fizice pot fi: aditive, indirect aditive şi neaditive. **Aditivitatea** este proprietatea unei mărimi fizice de a putea fi evaluată prin însumarea directă a unor „porțiuni” ale acelei mărimi, măsurate separat şi direct, iar mărimile care au această însuşire se numesc *mărimi direct aditive* (aşa sunt mărimile: lungimea, masa, debitul instantaneu al unui fluid printr-o conductă ş.a.). La această specie de mărimi, convenția de scară (de indicare a valorii) se reduce la relația de proporționalitate dintre mărimea aditivă (X) şi unitatea sa de măsură (u_m), adică $X = X_m\, u_m$, factorul de proporționalitate X_m reprezentând chiar valoarea mărimii. De aceea unitatea de măsură u_m se stabileşte convențional, prin specificarea etalonului, fiind suficient un singur etalon pentru construirea întregii scări (datorită proprietății de aditivitate). La *mărimile neaditive*, întreaga scară a aparatelor prin care se determină valoarea lor trebuie stabilită convențional, prin fixarea unui număr suficient de repere şi a modului de interpolare între ele (un exemplu este scara internațională practică de temperatură). Există mărimi care nefiind direct aditive se numesc *mărimi indirect aditive* dacă pot fi exprimate valoric în funcție de alte mărimi aditive. Aşa sunt majoritatea mărimilor de material, ca – de exemplu – coeficientul de dilatație liniară termică a unui material β, ce se exprimă în [1/grd] cu expresia: $\beta \overset{D}{=} \mathrm{d}l/l\mathrm{d}\theta$, pentru a cărui determinare se confecționează (din materialul analizat: alamă, aliaj fier-nichel, plumb etc.) o bară cu lungimea l_0 la temperatura θ_0 (să zicem de 20°C), cu aria secțiunii transversale a relativ mică (adică $\sqrt{a} << l_0$), se încălzeşte uniform la o temperatură $\theta > \theta_0$ (dacă $\theta_0 = 20°\mathrm{C}$, se ia $\theta = 120°\mathrm{C} \div 400°\mathrm{C}$) şi se măsoară la această temperatură lungimea l_θ la care a ajuns bara; atunci, deoarece lungimea şi temperatura sunt mărimi direct aditive, coeficientul de dilatație liniară se determină indirect, făcându-se calculul: $\beta_{\theta_0 \to \theta} = (l_\theta - l_0)/l(\theta - \theta_0)$ [1/grd].

Din punctul de vedere al felului cum apar diferitele mărimi fizice în modelele unei teorii relative la o specie de fenomene, mărimile pot fi:

- *mărimi de grad 1*, adică mărimile care în modelele lor de definiție figurează ca termeni de gradul unu (de exemplu, în cazul unui punct material cu masa m: viteza $\overline{w} = \mathrm{d}\overline{l}/\mathrm{d}t$, impulsul $\overline{J} = m\,\overline{w}$, accelerația $\overline{a} = \mathrm{d}\overline{w}/\mathrm{d}t$, forța $\overline{F} = m \cdot \overline{a}$, lucrul mecanic $L = \int_{c:a\to b} \overline{F} \cdot \overline{\mathrm{d}l}$ etc.);

- *mărimi de grad 2*, adică mărimile care în modelele teoriei apar prin produse sau sume de produse a câte două mărimi de grad 1 (de exemplu, în cazul punctului material, energia sa cinetică $W_c = \frac{1}{2} m\, w^2$ este o mărime de grad 2);

- *mărimi de grad 0*, adică mărimile care în modelele teoriei se definesc prin raportul dintre două mărimi de grad 1 sau grad 2 (considerându-se tot exemplul punctului material, masa sa m este o mărime de grad 0, fie dacă se defineşte prin raportul $m = \left|\overline{J}\right| / \left|\overline{w}\right|$, fie prin raportul $m = \left|\overline{F}\right| / \left|\overline{a}\right|$).

Clasificarea mărimilor după grad prezintă importanță în special în legatură cu alegerea celei mai adecvate tehnici de măsurare (din punctele de vedere ale: preciziei, simplității, duratei de măsurare ş.a.).

1.1.2. Noțiunea de câmp

În studiul fenomenelor fizice se utilizează frecvent termenul „câmp”; astfel apar adesea exprimări de felul: „câmp scalar”, „câmp vectorial”, „câmp gravific”, „câmpul gradienților de temperatură”, „câmp electromagnetic”, „intensitatea câmpului electrostatic”, „intensitatea câmpului magnetic”, „câmpul de inducție magnetică $\overline{B}$” (şi lista aceasta poate fi încă mult continuată). Termenul de „câmp” este în Fizică o noțiune plurisemantică, deoarece el poate desemna mai multe situații şi anume:

i) indică un sistem fizic şi manifestările (fenomenele) de o anumită natură care există în mod natural. De aceea se spune: câmp electromagnetic, câmp electric, câmp magnetic, câmp termic, câmp gravific etc. Aceasta este, deci, o semnificaţie fenomenologică a noţiunii de câmp;

ii) desemnează o regiune din spaţiu (un domeniu), notat cu Ω şi format din mulţimea punctelor P în care se manifestă anumite proprietăţi funcţionale F: $\Omega = \{P \mid \exists\ F(P)\}$. Frontiera domeniului Ω se notează cu Σ şi se scrie $\Sigma = \mathrm{Fr}\ \Omega$, iar domeniul Ω mărginit de Σ se notează cu $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$. Spunându-se câmpul $\overline{\Omega}$, i se dă acestei noţiuni un înţeles topologic şi / sau fizic;

iii) indică o mulţime de valori ale unei mărimi fizice ca funcţie de punct: $F(P)$ în $\forall\ P \in \overline{\Omega}$. Astfel se zice: câmp scalar, câmp de temperaturi, câmp de vectori, câmpul de gradienţi ai temperaturii, câmpul de viteze ale unui fluid, câmpul de forţe etc., în acest caz noţiunea de câmp având o semnificaţie matematică;

iu) indică o anumită mărime de stare a unui sistem ca, de pildă, câmpul electric în loc de „intensitatea câmpului electric”, câmpul magnetic în loc de „intensitatea câmpului magnetic” (sau chiar de „inducţie magnetică”) etc., ceea ce reprezintă o exprimare prescurtată.

În accepţiunea i), **câmpul electromagnetic** are următoarea definiţie: *câmpul electromagnetic este un sistem fizic de corpuri şi vid în care se manifestă acţiuni ponderomotoare specifice (forţe şi momente) asupra corpurilor, precum şi anumite efecte în corpuri (termice, chimice şi fiziologice) sau luminoase, având energie şi impuls pe care le poate transmite corpurilor, de a căror substanţă se deosebeşte (macroscopic) prin faptul că nu-i este caracteristică starea de mişcare mecanică.*

Câmpul electromagnetic este un câmp unitar, dar care prezintă două componente ce pot fi evidenţiate numai în cazuri particulare:

- **câmpul electric**, care este câmpul electromagnetic considerat numai din punctul de vedere al proprietăţilor sale electrice şi
- **câmpul magnetic**, care este câmpul electromagnetic considerat numai din punctul de vedere al proprietăţilor sale magnetice.

Deosebirile dintre aceste două componente (ca aspecte ale câmpului electromagnetic unitar) au totuşi un caracter relativ, ceea ce nu permite considerarea lor distinctă decât precizând sistemul de referinţă la care se raportează câmpul şi faţă de care se definesc mărimile electrice şi magnetice. Bazându-ne pe cunoştinţele de la Fizică, se poate explica, încă de la începutul acestui manual, un caz –ca exemplu– în care este posibilă evidenţierea separată a celor două componente ale câmpului electromagnetic. Astfel, dacă un „mic” corp electrizat cu sarcina electrică q se deplasează cu viteza $\overline{w}$, într-un sistem de referinţă imobil S, se obţine un curent electric care produce un câmp magnetic şi –ca urmare– în sistemul de referinţă S apar ambele componente ale câmpului: electrică şi magnetică.

Dacă observatorul fenomenelor se plasează într-un sistem de referinţă mobil S’, care se deplasează pe direcţia de mişcare a corpului electrizat cu aceeaşi viteză $\overline{w}$ (faţă de sistemul iniţial, imobil S) ca şi corpul, atunci în sistemul S’ curentul electric este nul şi –ca urmare– în acest sistem S’ (în care corpul electrizat este imobil) apare numai aspectul de câmp electric (după cum se va vedea mai târziu, un corp electrizat în repaus nu produce decât câmp electric).

În teoria macroscopică aşa-zisă clasică (a lui Maxwell şi Hertz), la care ne referim în acest capitol, mărimile electrice şi magnetice se definesc întotdeauna într-un sistem de referinţă imobil faţă de corpurile din câmp; de aceea caracterul relativ ale componentelor electrice şi magnetice ale câmpului electromagnetic nu apare în mod explicit. Totuşi, între câmpul electric şi câmpul magnetic există o interdependenţă, ele constituind laturi ale aceleiaşi unităţi: câmpul electromagnetic; de fapt, experienta arată că există un “efect electric al câmpului magnetic” şi un “efect magnetic al câmpului electric” (v. subcap. 1.3). Tot în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic se consideră că în domeniul analizat Ω există diverse corpuri Ω_1, Ω_2, …, compacte, formate din diferite substanţe, delimitate de suprafeţe de separaţie Σ_1, Σ_2,…(Σ_1=FrΩ_1,

Σ_2=Fr Ω_2,…) între care există –în C($\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \ldots$) în Ω – un spaţiu "foarte rarefiat" numit vid. În legătură cu aceste aspecte se fac următoarele precizări:

- mărimile electrice şi magnetice depind de natura substanţei corpurilor şi de constituţia ei. De aceea, pentru caracterizarea stării câmpului electromagnetic în funcţie de natura substanţei se introduc aşa-numitele *mărimi electrice şi magnetice de material* (v.§ 1.2.3);
- constituţia (structura) materială (substanţială) a corpurilor este caracterizată de:

• *omogenitatea corpului*. Despre un corp Ω_o sau materialul din care este realizat corpul se spune că este omogen dacă mărimile sale de material (proprietăţile ce caracterizează materialul) x_m sunt aceleaşi în orice punct P al corpului ($x_m \to \underset{p}{\text{const.}} <=\forall P \in \overline{\Omega}_0$). Mai general, *omogenitatea* este proprietatea unui sistem fizicochimic de a avea o aceeaşi valoare a unei mărimi fizicochimice specifice în domenii situate oriunde în interiorul acelui sistem (un sistem poate fi omogen şi la scară microscopică, $\mathrm{d}\overline{\Omega}_0$, definiţia anterioară fiind dată la scară macroscopică). Despre un corp care nu are această proprietate se spune că este *neomogen* sau *eterogen*;

• *izotropia corpului*. Un corp Ω_i, sau un sistem fizic, este izotrop, în raport cu o anumită mărime (proprietate) de material, dacă valoarea scalară locală (dintr-un punct P) a acelei mărimi nu variază cu direcţia plecând din orice loc al domeniului ($\forall P\in\Omega_i$). În caz contrar, se spune despre corp că este *anizotrop* sau *eolotrop*. Despre un corp sau un material se spune că este anizotrop dacă el are una sau mai multe mărimi de material locale a căror valoare scalară variază cu direcţia. Un corp poate prezenta izotropie în raport cu o anumită mărime şi poate fi anizotrop în raport cu alte mărimi. Exemple de corpuri care prezintă izotropie în raport numai cu unele mărimi sunt monocristalele din sistemul cubic (ce are izotropie optică, dar poate prezenta anizotropie în raport cu alte mărimi). Anticipând (v.§1.2.3), corpurile cu anizotropie din punctul de vedere al permitivităţii (ε), al permeabilităţii (μ) şi al rezistivităţii (ρ) au mărimile de material ε, μ şi ρ exprimate printr-un tensor de ordinul al doilea (o matrice cu 9 valori scalare, într-un sistem tridimensional de referinţă). În Elasticitate (din Rezistenta materialelor), există corpuri cu anizotropie elastică, ce au mărimea denumită tensorul lui Hooke, care leagă tensorul stărilor de tensiune (mecanică) cu tensorul stărilor de deformaţie, exprimată printr-un tensor de ordinul al patrulea (cu o matrice compusă din $n^m=3^4=81$ scalari). În corpurile izotrope, mărimile de material ε, μ şi ρ sunt mărimi scalare;

• *uniformitatea corpului*. Despre un corp se spune că este uniform dacă el este simultan şi omogen şi izotrop. În caz contrar, el este neuniform. Uniformitatea este o caracteristică ce se poate extinde la diferite obiecte: material, corp, sistem fizic, câmp etc. Astfel, un câmp scalar (de exemplu de temperaturi θ) este uniform într-un domeniu Ω dacă pentru $\forall P\in\Omega$ $=>\theta(P)$ = const., iar un câmp vectorial (de exemplu gradienţi de temperatură grad θ – v.§9.1.2) este uniform dacă în orice punct P al câmpului $\Omega=\{P \mid \overline{F}\ (P)\}$ vectorul $\text{grad}\theta(P) = \underset{p}{\text{const.}}$, adica în $\forall P\in\Omega$, grad θ are aceeaşi valoare absolută, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens sau, într-un sistem de referinţă triortonormal, componentele vectorului grad θ(x,y,z) sunt: $\text{grad}\theta_x = \underset{p}{\text{const.}}$, $\text{grad}\theta_y = \underset{p}{\text{const.}}$ şi $\text{grad}\theta_z = \underset{p}{\text{const.}} => \forall(x,y,z) \in\Omega$;

- **vidul** reprezintă un concept de referinţă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, el fiind considerat ca un etalon pentru corpul uniform (adică omogen şi izotrop). Din punctul de vedere al Fizicii, vidul este domeniul din spaţiu care nu conţine substanţe sau – local – vidul este domeniul Ω_0 în ale cărui puncte, $P\in\Omega_0$, densitatea de substanţă (masa specifică, definită local prin derivata masei m în raport cu volumul v în punctul P considerat: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}v|_P$) este zero: $\Omega_0=\{P|\mathrm{d}m/\mathrm{d}v|_P=0\}$. Din punctul de vedere al tehnicii, vidul este starea fizică din regiunile din spaţiu care conţin foarte puţine particule corporale sau (la limită, teoretic) nu conţin astfel de particule; în acest sens, se spune că într-un recipient este vid atunci când a fost îndepărtat din el gazul (aerul) pe care îl conţinea. Din punctul de vedere al Astrofizicii, vidul este spaţiul interstelar, adică spațiul existent în macrocosmos între corpurile cerești (Soarele, planetele cu sateliții lor – naturali sau artificiali, cometele, meteoriții, stelele, particule cosmice etc.). Din punctul de vedere al teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic (a lui Maxwell şi Hertz) se consideră că substanța corpurilor este "răspândită" continuu în întregul spațiu, vidul reprezentând o stare de extremă rarefiere a substanței, "spațiul dintre corpuri" în care există câmp electromagnetic, acțiuni ponderomotoare, forțe şi momente, densitate de volum a energiei electromagnetice (v.subcap.2.6 şi 5.5), densitate de suprafață a puterii radiate (v.§1.5.3), unde electromagnetice (v.cap.7), localizarea acțiunilor etc. În cadrul acestui manual, toate mărimile electrice şi magnetice (de stare şi de material) definite sau relative la vid vor purta indicele 0 ($\overline{E}_0, \overline{B}_0$, ε_0, μ_0 etc).

Explorarea câmpului electromagnetic

Studiul, calitativ şi cantitativ, al câmpului electromagnetic se face determinând efectele (de exemplu forțele şi momentele unor cupluri de forțe) care se produc asupra unor corpuri plasate în câmp. Determinarea acestor efecte în fiecare punct al câmpului electromagnetic, adică explorarea lui, trebuie făcută cu ajutorul unor *corpuri de referință* care *să nu influențeze* cu nimic câmpul electromagnetic existent prin prezența lor şi să asigure redarea cantitativă a stării câmpului electromagnetic în *fiecare punct* al domeniului considerat (adică local). Corpurile care asigură o astfel de explorare a câmpului electromagnetic se numesc **corpuri de probă** şi ele pot avea o definire şi existență pur teoretică, însă în concordanță cu logica experimentului de "cercetare" a câmpului.

Pentru explorarea macroscopică a câmpului electromagnetic numai sub aspectul lui electric, format în jurul unor corpuri aşa-zis electrizate (v.cap.2) imobile, *corpul de probă (electric)* este un corp cu dimensiuni foarte mici în comparație cu distanța de la punctul în care este plasat (unde se face explorarea) la corpul electrizat, fiind deci practic punctiform, pentru a permite explorarea unor regiuni, în principiu, oricât de mici din câmp, teoretic în fiecare punct din domeniul explorat. Starea de electrizare (v.§1.2.1) a corpului de probă electric trebuie să fie invariabilă (de referință, pentru care –în condiții exterioare egale– să se exercite asupra lui forțe egale). Prin experiență se constată că pentru a se menține starea de electrizare a corpului de probă neschimbată (invariabilă) trebuie ca structura sa fizicochimică să nu se modifice, ceea ce înseamnă că el trebuie să fie metalic (dintr-un material conductor – v.§1.2.3) sau metalizat şi să fie perfect izolat (se presupune corpul de probă suspendat printr-un fir foarte subțire din mătase şi perfect elastic la încovoiere, dar inextensibil). În plus, starea corpului de probă trebuie să fie astfel încât să nu modifice cu nimic starea inițială a sistemului explorat, ceea ce impune ca sarcina electrică (v.§1.2.1) a corpului de probă, care se notează cu q_{cp}, să fie foarte mică (teoretic $q_{cp}\to 0$). Se consideră că sarcina electrică q_{cp} a corpului de probă este pozitivă (v.§1.2.1). În sfârşit, pentru ca explorarea prin corpul de probă să pună în evidență numai forțele de proveniență electrică, trebuie ca toate celelalte forțe ce ar putea apare (şi un exemplu sunt forțele de atracție masică şi cele din câmpul gravific) să fie extrem de mici (să tindă la zero); de aceea, corpul de probă electric se consideră a fi un corp cu masă neglijabilă. Un exemplu, comparativ, de corp de probă electric ar fi particula elementară numită pozitron.

Pentru explorarea macroscopică a câmpului electromagnetic numai sub aspectul lui magnetic, format în jurul unor corpuri aşa-zis magnetizate (v. cap.5 şi §1.2.1), sau/şi a unor conductoare (v.§1.2.3) aflate în stare electrocinetică (v.cap.4 şi §1.2.1), precum şi a unor corpuri electrizate care –față de sistemul de referință imobil– se deplasează cu o viteză $\overline{w}$, se foloseşte drept corp de probă fie *acul magnetic*, fie aşa-zisă *buclă de curent*.

Acul magnetic, considerat corp de probă pentru explorarea câmpului magnetic, este un ac "mic" de busolă slab magnetizat pentru a nu influența câmpul explorat (aici, atributul de "mică" înseamnă că acul de busolă are dimensiuni neglijabile în comparație cu distanțele față de corpurile ce produc câmpul magnetic, dimensiuni ce tind la limită/teoretic către zero, pentru ca acul să se identifice cu punctul în care se explorează câmpul magnetic). Explorarea cu acul magnetic constă în determinarea –în fiecare punct din câmp– a cuplului de forțe (cu un moment) şi, eventual, a rezultantei forțelor la care este supus, în general, acul magnetic plasat în câmp magnetic. Acul magnetic se caracterizează prin *momentul* său *magnetic* $\overline{m}_{ac}$ (v.§1.2.1), care trebuie să fie invariant.

Bucla de curent este un corp de probă, cu caracter teoretic, pentru explorarea câmpului magnetic care constă într-o "mică" spiră realizată dintr-un conductor foarte subțire, închis (un inel), în care s-a stabilit un curent electric (v.§1.2.1) constant şi invariabil I_{bc} (atributul de "mic" vrea să însemne că aria închisă în planul ei de buclă, A_{bc}, tinde la limită către zero, confundându-se cu punctul din câmpul analizat). În practică (mai clar, în tehnică) bucla de curent (al cărui model teoretic este arătat în figura 1.1*a*) se realizează din una sau mai multe spire (bucle) relativ mici, alimentate de la o sursă electrică (v.cap.4) de curent continuu *SEcc* prin fire de aducțiune răsucite strâns între ele, situație în care forțele din câmp exercitate asupra firelor de alimentare a buclei se anulează reciproc şi nu influențează spirele de explorare (se obține astfel aşa-numită *buclă de explorare*, reprezentată în figura 1.1*b*).

Bucla de curent se caracterizează prin momentul magnetic al buclei, sau *momentul buclei*, $\overline{m}_b$, un vector perpendicular pe planul ce conține bucla, definit prin expresia:

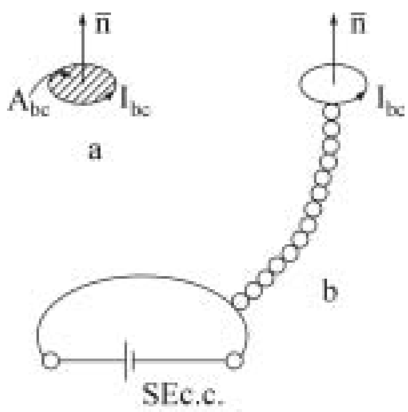

Fig. 1.1

$$\overline{m}_b \overset{D}{=} \overline{n}\, I_{bc}\, A_{bc} \qquad (1.1)$$
$$\begin{cases} A_{bc} \to 0 \\ I_{bc} \to \infty \end{cases},$$

în care $\overline{n}$ este versorul normalei pe suprafața buclei, al cărui sens este asociat cu sensul curentului I_{bc} după regula sistemului drept (v.§ 9.1.1). Conform expresiei (1.1), trecerea la limită $A_{bc}\to 0$ (pentru ca bucla să fie punctiformă, pentru a reda starea locală a câmpului magnetic, din punctul în care se face explorarea) impune şi trecerea la limita $I_{bc}\to\infty$ pentru ca momentul să fie finit.

Pentru a putea preciza condițiile de explorare a unui câmp, trebuie stabilit ce se înțelege prin *acelaşi punct* din câmp şi prin *regăsirea* lui după un anumit interval de timp. Un punct al unui corp poate fi recunoscut –în principiu– oricând (considerând corpul nedeformabil şi incompresibil), independent de sistemele geometrice de referință. Un punct din afara corpurilor (din vid) nu poate fi regăsit decât cu ajutorul unui sistem de referință, care este legat de corpuri. În teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, corpurile sunt presupuse continue, indiferent dacă sunt dense sau atât de "rarefiate" încât nu există decât "urme" din ele (la limită vid). În această ipoteză de explorare este posibilă identificarea directă a punctelor, legat de corpuri "existente peste tot", fără a mai fi necesară folosirea explicită a unui sistem de referință.

Stări ale câmpului electromagnetic

În funcție de natura efectelor sale şi de situația în timp a mărimilor de stare electrică şi magnetică, dar şi de mişcarea corpurilor în câmp şi de transformările energetice, fenomenele electromagnetice pot avea mai multe stări sau regimuri de manifestare:

- regimul static în cadrul căruia mărimile de stare electrică şi magnetică nu variază în timp şi nu există transferuri termodinamice (nu se dezvoltă caldură, schimburi de masă etc.). În regim static nu au loc procese care să modifice starea sistemelor fizice, ci numai interacțiuni de echilibru între obiecte (ca forțe şi momente, deci efecte mecanice), fără transformări de energie. În acest regim static fenomenele electrice şi magnetice se produc independent (fără interacțiuni reciproce), cele două aspecte ale câmpului electromagnetic, numite în acest caz câmp electrostatic şi câmp magnetostatic, putând fi studiate separat. *Electrostatica* se referă la studiul stărilor electrice invariabile în timp, produse de corpurile imobile electrizate (v.§1.2.1) în regim static şi fără dezvoltare de caldură. *Magnetostatica* se referă la studiul stărilor magnetice invariabile în timp produse de câmpurile imobile magnetizate (v. § 1.2.3, cap.5 şi subcap. 6.2), în lipsa câmpului electric variabil în timp şi a corpurilor electrizate în mişcarea sau/şi cu stare de electrizare variabilă în timp;

- regimul staționar în cadrul căruia deşi mărimile de stare electrică şi magnetică nu variază în timp se produc transferuri termodinamice (transformări energetice produse de interacțiunile câmpului cu corpurile şi de mişcarea corpurilor cu stare de electrizare invariabilă de timp);

- regimul cvasistaționar în cadrul căreia variațiile în timp ale mărimilor electrice şi magnetice sunt destul de lente pentru a se putea neglija radiația (propagarea) câmpului electromagnetic. Un caz aparte îl constituie *câmpul magnetic cvasistaționar* (v. cap. 5);

- **regimul nestaționar (variabil)** care este regimul carespunzător celui mai general caz de variație în timp ale mărimilor electrice şi magnetice. Stările electromagnetice variabile în timp sunt acelea în care câmpul electric şi câmpul magnetic se condiționează reciproc şi direct.

Corpurile conductoare (v. § 1.2.3) aflate în regim electromagnetic staționar sau nestaționar capătă o stare aparte, ireductibilă la starea de electrizare şi la cea de magnetizare, numită **stare electrocinetică**, caz în care apar o serie de efecte (numite *efecte electrocinetice*) ca: mecanice, termice, magnetice, electrice, chimice (într-o specie aparte de corpuri conductoare – v. § 1.3.12), luminoase (în cazul gazelor rarefiate) şi fiziologice (în cazul corpurilor organice vii).

1.2. Mărimi ale teoriei câmpului electromagnetic

În teoria macroscopică aşa-zisă clasică (a lui Maxwell şi Hertz) a câmpului electromagnetic, modelerea sistemelor electrice şi magnetice –privite ca un tot unitar în interacțiune– se face prin utilizarea unui „set” de mărimi fizice –electrice şi magnetice– care vor fi prezentate în cadrul acestui subcapitol asociate în trei grupe: mărimi de stare electrică şi magnetică a corpurilor, mărimi de stare a câmpului electromagnetic şi mărimi de material electrice şi magnetice.

1.2.1. Mărimi de stare electromagnetică a corpurilor

Mărimile ce vor fi descrise în continuare sunt indicate într-o ordine mai mult didactică. Pentru fiecare dintre ele se va arăta aspectul calitativ pe care îl reprezintă, poziția în grupele de clasificare a mărimilor fizice, simbolul clasic utilizat pentru mărime în modele, expresia de definire a ei şi unitatea de mărură SI adoptată pentru redarea valorică a mărimii prezentate.

Sarcina electrică

Sarcina electrică, notată cu q, este *o mărime primitivă* care *descrie global starea de electrizare a corpurilor*. Ea se prezintă valoric printr-un *scalar*, *pozitiv* sau *negativ*.

Starea de electrizare. În general, numim stare de electrizare a corpurilor orice stare în care corpurile pot exercita asupra altor corpuri forțe de natura celor produse de corpurile electrizate prin frecare. Asupra corpurilor electrizate se exercită forțe care nu existau înainte de a fi electrizate.

Experiența arată că în afară de frecare, corpurile mai pot fi electrizate în funcție şi de natura substanței lor şi prin contactul cu alte corpuri electrizate, prin încălzire, prn şocuri mecanice, prin întindere sau compresiune, prin iradiere cu radiații ultraviolete sau Roentgen, prin efecte chimice ş.a.

Considerându-se frecarea ca un proces de referință, prin care corpurile capătă o proprietate nouă (ienexistentă înainte de frecare) şi anume aceea de a exercita forțe asupra altor corpuri (frecate sau nu), proprietate căreia –calitativ– i se spune *stare de electrizare*, se constată că se pot ordona corpurile într-un şir (în funcţie de natura substanţei din care sunt formate) în aşa fel încât prin frecarea unui corp cu oricare corp din stânga lui să se exercite între ele forţe de atracţie şi prin frecare cu orice corp din dreapta lui să se exercite între ele forţe de respingere. Se constată, prin această experienţă, că electrizării i se poate asocia –convenţional– un semn pozitiv sau negativ.

Experienţa arată, deci, că un corp electrizat situat la o distanţă de alt corp electrizat este fie atras, fie respins; orice corp neelectrizat este însă întotedeauna atras de orice corp electrizat. Astfel, există corpuri neelectrizate care după ce au fost atrase de un corp electrizat şi au ajuns în contact cu el sunt imediat respinse; aceste corpuri se numesc *conductori* (metalele, cărbunele, soluţiile de săruri organice, de acizi şi de baze sunt materiale conductoare[1]). Alte corpuri continuă să fie atrase şi după ce au ajuns în contact, unele chiar timp de câteva zile; aceste corpuri se numesc *izolanţi* sau *dielectrici* (aşa sunt: mica, mătasea, hârtia, porţelanul, marmura, sticla, răşinile, ebonita, aerul uscat şi multe altele). Corpurile care se situează între cele două categorii (conductori şi izolanţi), adică să fie atrase de corpul electrizat şi după ce au ajuns în contact cu el, dar un timp de ordinul secundarelor, să fie respinse, se numesc *semiconductori*.

Proprietatea de electrizare a corpurilor (să zicem prin frecare) ce are ca efect producerea unui câmp de forţe asupra altor corpuri situate în preajmă, este o calitate a corpurilor cu un evident caracter cantitativ (ca mărime a forţelor din câmpul produs, numit *câmp electric*), care depinde –aşa cum arată experienţa– de natura corpurilor electrizate (prin faptul că forţele pot fi de atracţie sau de respingere) şi –relativ la un acelaşi corp vecin, cu stare invariabilă şi situat în acelaşi punct (la aceeaşi distanţă)– şi de starea lui de electrizare (de „frecare”).

Atunci, pentru a determina cantitativ această stare de electrizare a corpurilor, s-a introdus (în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic) mărimea fizică denumită *sarcină electrică*, notată tradiţionl cu litera q, ca mărime primitivă: în mod inductiv şi bazat pe experienţă, care a constat în determinarea forţelor produse de corpul aşa zis electrizat asupra unui corp de probă (v. § 1.1.2), plasat în diferite puncte din câmp şi în cazul unor stări diferite de electrizare (ca natură a corpului şi ca lucru mecanic „cheltuit” pentru frecarea corpului). În trecut sarcina electrică mai era denumită şi „cantitate de electricitate”.

Sarcină electrică – mărime primitivă de stare a corpurilor electrizate. Din punctul de vedere al exprimării valorice (ca mărime matematică), sarcina electrică, q, este un *scalar pozitiv* sau *negativ*, experienţa arătând că un corp de probă poate fi supus unei forţe de respingere sau de atracţie, fapt ce depinde de natura corpului cu aceeaşi geometrie şi situat în acelaşi loc din câmp.

Pentru exprimarea cantitativă (valorică) a sarcinii electrice q se poate face următorul experiment:

- se consideră un sistem oarecare de corpuri imobile electrizate, a,b,c..., situate în vid, a căror stare de eletrizare este constantă în timp;

- în două puncte oarecare, P şi P’, în vid, din acest sistem se introduc succesiv mai multe corpuri de probă, identice din punctul de vedere structural însă electrizate diferit. Se va constata că asupra corpurilor de probă se exercită forţe ($\overline{F}_1, \overline{F}_1'$; $\overline{F}_2, \overline{F}_2'$; $\overline{F}_3, \overline{F}_3'$...) *ale căror valori absolute şi sens sunt* în general *diferite* (în funcţie de starea de electrizare diferită a corpurilor de probă), dar a căror *direcţie rămâne constantă* (aşa cum se arată în figura 1.2). Acest fapt duce la concluzia că valoarea prin care se va exprima cantitativ starea de electrizare este un *scalar*;

- ca urmare a acestei constatări, diferitele corpuri de probă se pot grupa în clase de echivalenţă (v. §1.1.1) utilizând relaţia de echivalenţă proporţională: „aceeaşi valoare absolută a

[1] Printr-o convenţie lingvistică, chiar oficializată, denumirea aparatelor din tehnică sunt substantive ambigene (de gen masculin la singular şi feminin la plural). Substantivele conductor, izolant şi semiconductor în înţelesul natural de substanţă au însă pluralul tot de gen masculin, adică conductori, izolanţi şi semiconductori. Obiectele tehnice (piese, dispozitive, aparate etc) realizate exclusiv din aceste materiale au pluralul de gen feminin, conductoare (de exemplu firele conductoare de legătură), izolatoare (de exemplu piesele de susţinere a cablurilor electrice) şi semiconductoare (de exemplu dispozitivele semiconductoare, diode, tranzistoare etc).

forței $F(P)$ de interacțiune". Ordonarea claselor de echivalență se va face prin relația de ordonare proporțională: „forța $F(P)$ mai mare".

Dacă se consideră şi celălalt punct P' (v. fig. 1.2), forța $\overline{F}(P')$ –exercitată asupra fiecărui corp de probă adus în P'– este în general diferită ca mărime, direcție şi sens fața de forța $\overline{F}(P)$ care se exercită asupra lor când sunt în punctul P, însă experiența (măsurările) arată că împărțirea corpurilor de probă în clase de echivalență şi ordonarea lor față de valorile $F(P')$ ale forțelor din punctul P' rămâne aceeaşi;

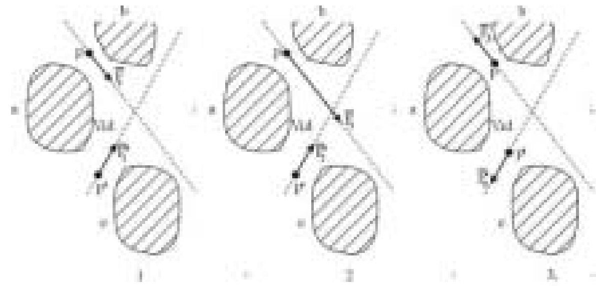

Fig. 1.2

- din cele precedente rezultă că proprietatea evidențiată de împărțire în clase de echivalență a mulțimii corpurilor de probă este o caracteristică a acestora, determinată de starea lor de electrizare şi nu depinde de punctul din câmp în care sunt introduse. Experiența arată că raportul valorilor absolute ale forțelor exercitate asupra a două corpuri de probă diferite este acelaşi în *orice punct*, ceea ce înseamnă că se poate scrie (v. fig. 1.2): $F_1(P)/F_2(P) = F_1(P')/F_2(P')$... . Aceasta permite asocierea valorilor numerice ale mărimii care măsoară starea de electrizare a unor corpuri de probă –şi s-a denumit această mărime *sarcină electrică*, notată cu q_{cp}– proporțional cu valorile absolute (numerice) ale forțelor exercitate asupra acestora într-un punct dat din regiunea în care există câmp electric. Prin acest experiment rezultă, deductiv, următorul postulat:

$$\frac{q_{cp1}}{q_{cp2}} = \frac{F_1(P)}{F_2(P)}, \tag{1.2}$$

în care q_{cp1} şi q_{cp2} sunt sarcinile electrice a două corpuri de probă, iar $F_1(P)$ şi $F_2(P)$ sunt forțele exercitate asupra acestor corpuri când sunt plasate succesiv în acelaşi punct dat, P;

- reunind două sau mai multe corpuri de probă într-un singur corp „rezultant" punctiform, se constată experimental că valoarea absolută a forței ce acționează asupra corpului rezultant în punctul P din câmp este suma valorilor forțelor care au acționat asupra fiecărui corp de probă „constituent" când se află în punctul P. Acest fapt experimental pune în evidență *relația de descompunere internă a sarcinilor electrice* şi permite stabilirea izomorfismului între sarcinile electrice ale corpurilor punctiforme şi forțele exercitate asupra acestora în punctul considerat. Aceasta include şi convenția de zero ca şi pe cea de scară, sarcina electrică fiind direct măsurabilă (v. § 1.1.1).

Alegând unul din corpurile de probă ca etalon, cu sarcina sa electrică considerată ca unitate de măsură q_u (cu valoarea numerică egală cu unu), sarcina electrică q, introdusă ca mărime de stare a electrizării corpului punctiform, este complet definită prin:

$$q = \frac{F(P)}{F_u(P)} q_u, \tag{1.3}$$

unde $F(P)$ este valoarea forței exercitată în punctul P asupra corpului punctiform şi $F_u(P)$ este forța exercitată asupra corpului de probă etalon (cu sarcina electrică aleasă ca unitate de măsură) când este plasat în acelaşi punct P.

Sarcina electrică fiind o mărime aditivă (algebric), înseamnă că expresia (1.3) se poate scrie pentru orice corp, oricât de mare (sarcina electrică fiind o mărime de stare a corpurilor şi nedepinzând de punctul P, roportul $q = F(P)q_u/F_u(P)$ se poate scrie pentru orice punct, deci şi pentru unul atât de îndepărtat, față de dimensiunile corpului, încât acesta poate fi considerat punctiform), iar prin extensie sarcina q a corpului poate creşte oricât.

Unitatea de măsură a sarcinii electrice. Etalonul ales în Sistemul Internațional pentru sarcina electrică a corpurilor, adică unitatea de măsură SI pentru sarcina electrică, este denumită *coulomb* şi are simbolul C.

În practică se folosesc submultipli: milicoulomb [mC] cu 1mC = 10^{-3}C, microcoulombul [μC] cu 1μ C = 10^{-6}C, nanocoulombul [nC] cu 1nC = 10^{-9}C etc.

Densitatea sarcinii electrice

Sarcina electrică q este o mărime globală, care descrie starea de electrizare la nivelul întregului corp. Se constată, experimental, că –în general– sarcina electrică nu se repartizează uniform, în toate punctele unui corp. În unele cazuri, la nivel global, sarcina electrică a unui corp poate fi nulă, corpul fiind considerat –în ansamblul său– ca fiind neutru din punctul de vedere al electrizării. Chiar şi în această situaţie, în unele punctele –din interiorul corpului sau după suprafaţa lui– se poate ca starea locală de electrizare să fie diferită de zero.

De aceea, s-au introdus două mărimi *derivate* care să descrie local (în fiecare punct al corpului) starea de electrizare. Acestea sunt: densitatea de volum a sarcinii electrice şi densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice, care sunt funcţii scalare de punct, pozitive sau negative.

Densitatea de volum a sarcinii electrice. Considerând un corp oarecare electrizat (aşa ca cel reprezentat în figura 1.3) care ocupă domeniul Ω şi are sarcina electrică globală q (pentru întregul corp $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, unde $\Sigma = \mathrm{Fr}\Omega$ este suprafaţa ce delimitează corpul Ω), potrivit principiului localizării stărilor şi acţiunilor din Fizică, sarcina electrică q (care este o mărime aditivă) se poate extinde oricum în şi pe corpul $\overline{\Omega}$, deci şi pe porţiuni finite oricât de mici în interiorul crpului $\Delta v \subset \Omega$ sau/şi pe suprafaţa lui ΔA, cu valori Δq care sunt fracţiuni ale sarcinii globale q (fig. 1.3). În aceste condiţii pentru orice punct din interiorul corpului (P∈Ω) se poate defini o mărime derivată care să descrie cum se repartizează local, în interiorul corpului, sarcina electrică; această mărime se notează cu q_v (tradiţional cu ρ) şi se defineşte astfel:

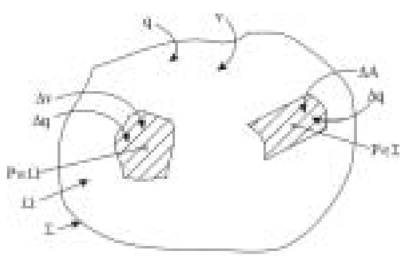

Fig. 1.3

(1.4)
$$q_v(P) \overset{D}{=} \lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ P \in \Delta v}} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}v}\right|_P ,$$

care, mai general, se mai poate scrie şi sub forma $q_v = \mathrm{d}q/\mathrm{d}v$ sau $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}v$. În expresia din definiţia (1.4), densitatea de volum a sarcinii electrice $q_v(P)$ apare ca o funcţie scalară de punct, calculată prin limita raportului dintre o „fracţiune" de sarcină, Δq din q, ce se află în porţiunea de volum $\Delta v \subset \Omega$ şi care conţine punctul P în care se determină densitatea de volum a sarcinii electrice, astfel că atunci când $\Delta v \to 0$ punctul P este menţinut în permanenţă în interiorul lui Δv.

Aşa cum este definită prin expresia (1.4), $q_v(P)$ sau $\rho(P)$, constituie un câmp scalar, pozitiv şi/sau negativ, şi anume acela al densităţii de volum a sarcinii electrice. Dacă $\rho(P) = \text{const.} \Leftarrow \forall P \in \Omega$ se spune că volumul corpului este uniform electrizat .

Unitatea de masură a densităţi de volum a sarcini electrice este coulombul pe metru la cub, cu simbolul C/m^3.

Ecuaţia dimensională a densităţi de volum a sarcinii electrice este: $[q_v] = [Q][L]^{-3}$.

Densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice. Considerându-se tot figura 1.3 şi principiile arătate în aliniatul anterior, se defineşte şi mărimea de punct ce descrie starea locală de electrizare a suprafeţei unui corp, denumită densitate de suprafaţă a sarcini electrice, care se notează cu q_Σ sau (tradiţional cu σ), şi se defineşte prin:

$$q_\Sigma(P) \overset{D}{=} \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ P \in \Delta A}} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}A}, \tag{1.5}$$

care, mai general, se poate scrie şi sub forma $q_\Sigma = \mathrm{d}q/\mathrm{d}A$ sau $\sigma = \mathrm{d}q/\mathrm{d}A$. În definiția (1.5), *P* este orice punct de pe suprafața $\Sigma = \mathrm{Fr}\Omega$, in jurul căruia se ia o porțiune de suprafață $\Delta A \subset \Sigma$ ce conține punctul *P* considerat şi are o sarcină electrică Δq, ca fracțiune a sarcinii electrice globale q a întregului corp $\overline{\Omega}$. Limita din expresia (1.5), adică $\Delta A \to 0$, se ia astfel încât în permanență punctul *P* să fie în interiorul lui ΔA, oricât de mică ar deveni.

Mărimea derivată "densitatea de suprafață a sarcinii electrice" are valori scalare , negative sau pozitive, ce se exprimă prin unitatea de măsură coulomb pe metru la pătrat $[\mathrm{C/m^2}]$.

Ecuația dimensională a densității de suprafață a sarcini electrice este: $[q_\Sigma] = [Q][L]^{-2}$.

Sarcina electrică globală q a unui corp $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Sigma$ se poate calcula în funcție de distribuțiile $q_v(P)$ şi $q_\Sigma(P)$ pe $\overline{\Omega}$ cu expresia evidentă (rezultată din definițiile 1.4 şi 1.5):

$$q = \int_{v(\Omega)} q_v \mathrm{d}v + \int_\Sigma q_\Sigma \mathrm{d}A. \tag{1.6}$$

Intensitatea curentului electric de conducție

Experiența arată că dacă sarcina electrică a unui corp conductor variază în timp, sau densitatea de sarcină electrică variază în timp, deci dacă:

$$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t \neq 0 \bigcup \mathrm{d}q_v/\mathrm{d}t \neq 0 \bigcup \mathrm{d}q_\Sigma/\mathrm{d}t \neq 0,$$

atunci apare cel puțin un efect de încălzire a corpului care nu există atunci când $q = \underset{t}{\mathrm{const}}. \bigcup q_v \underset{t}{\mathrm{const}}. = \bigcup q_\Sigma = \underset{t}{\mathrm{const}}.$

Stare electrocinetică. Această stare a corpurilor conductoare, a căror electrizare este variabilă în timp, poartă denumirea de **stare electrocinetică**. Ea este specifică corpurilor conductoare, fiind o stare diferită de starea de electrizare (la care este ireductibilă) şi se manifestă (este pusă în evidentă) de o serie de efecte, numite **efecte electrocinetice** care constau în:

- *efecte mecanice,* adică forțe sau/şi momente care se exercită asupra altor corpuri aflate tot în stare electrocinetică (de pildă un corp de probă electrică ce se deplasează cu o viteză $\overline{w}$ față de corpul considerat) sau magnetizate (de exemplu acul magnetic – v.§.1.1.2), ce apar în mod aparte (suplimentar) față de forțele şi/sau momentele datorate stărilor de electrizare sau de magnetizare (stare ce va fi prezentată ceva mai încolo, tot în cadrul acestui paragraf);

- *efecte magnetice*, adică producerea "în jurul" corpului conductor aflat în stare electrocinetică a unui câmp magnetic (v.§1.2.2). De fapt, regimul staționar şi nestaționar (cărora le aparține starea electrocinetică) este "responsabil" întotdeauna de producerea unui câmp magnetic;

- *efecte electrice,* care constau în faptul că sarcina electrică a corpurilor poate să se modifice ca urmare a stării electrocinetice în regim nestaționar (v.§ 1.3.9 – „Legea conservării sarcinii electrice");

- *efecte termice*, care constau în faptul că întotdeauna în corpurile conductoare aflate în regim electrocinetic se produc degajări de căldură, efect –de altfel– cu totul specific stării electrocineticie (v.§1.3.11 – „Legea transformării de energie în conductori"). Totuşi, în cazurile (rare) ale conductorilor aflații în stare de supraconductibilitate, la temperaturi foarte joase (v.§ 4.6.2 şi Fizica), efectele calorice nu apar;

- *efecte chimice* sub forma unor reacții de descompunere a soluțiilor de electroliți (v.subcap. 4.5), adică reacții de electroliză (v.§ 4.5.3) în urma cărora se produc depuneri de substanțe (metale) provenite din descompunerea soluției;

- *efecte luminoase,* care apar numai în unele corpuri (specific: gaze rarefiate) aflate în regim electrocinetic (v. Fizica-descărcării în gaze);.

- *efecte fiziologice (biologice*), care apar numai în corpurile organismelor vii, aflate *accidental* în stare electrocinetică.

Efectele fiziologice ale electrocineticii nu sunt –încă– suficient de bine studiate şi mai ales modelate (nu s-au stabilit legi sau teoreme cu privire la acest caz deoarece starea electrocinetică, mai ales în cazul omului, trebuie imperios evitată pentru că poate provoca efecte patologice periculoase şi inprevizibile care produc moartea organismului prin aşa-zisa electrocutare). Totuşi, s-au făcut numeroase şi ample cercetări –în special experimentale– în legătură cu două aspecte: unul este acela al protecţiei împotriva electrocutării în instalaţiile electrice industriale şi al folosirii aparaturii electrice (în toate domeniile chiar şi cel casnic), iar altul este acela al aplicaţiilor medicale prin electroterapie. Protecţia împotriva electrocutării impune –în primul rând–asigurarea unei izolaţii perfecte a părţilor conductoare ce ar putea produce accidental un contact direct cu omul (utilizatorul aparatelor sau operatorii din instalaţiile electrice), o instruire adecvată a personalului ce lucrează cu aparatură electrică şi multe altele. Electroterapia s-a dezvoltat ca aplicaţie multidisciplinară, ce a impus colaborarea mai multor specialişti: electricieni, electronişti, fizicieni, chimişti, medici, biologi, fizioterapeuţi ş. a.

Cu titlu de informare, pentru a nu depăşi limitele acestui manual, se pot arăta următoarele:

- natura şi amploarea efectelor fiziologice ale electrocinetici corpului uman depind de: intensitatea curentului de conducţie (ce va fi definit în aliniatul următor), de frecvenţa lui (v. subcap.8.5), “de traseul” conducţiei prin organism, de situaţi de moment ale omului (fizice, psihice, de sănătate) şi de condiţiile extreme (de umiditate, praf, zgomot, confort etc.);

- frecvenţele cele mai periculoase sunt între 40 şi 60 hertzi (tocmai cele din instalaţiile electrice de producere, transport, distribuţie şi majoritatea utilizărilor energiei electrice –v.§1.5.3). În afara acestor limite, efectele sunt mai slabe, iar la frecvenţe de peste 10000 hertzi nu există nici o acţiune periculoasă aspra omului (ba, mai mult, la astfel de frecvenţe şi la frecvenţe mai mari se aplică procedurile de electroterapie);

- valorile limită de la care electrocinetica corplui uman devine periculoasă (adică se poate produce electrocutarea) depind de durata stării electrocinetice, efectele fiind cu atât mai grave cu cât durata acesteia este mi mare;

- în curentul alternativ (v.subcap.8.5), la durată de contact (de stare electrocinetică a organismului uman) scurtă (de 3-5 secunde) se poate considera intensitatea de 50 miliamperi (v. aliniatul următor) ca limita de la care încep pericolele grave pentru un om normal (sic!) şi intensitatea de 25 de miliamperi ca limită până la care securitatea este completă, căreia îi corespunde o tensiune (v.§ 1.2.2) maximă nepericuloasă de 24 volţi;
- în curent continuu (v.subcap. 8.3) limitele sunt mai mari (50 –1000 miliamperi limita pentru electrocutare şi 22 miliamperi limita sub care nu există nici un pericol);

- moartea prin electrocutare poate fi datorită inhibiţiei centrilor bulbari, având ca efect principal oprirea respiraţiei şi asfixia, care devine definitivă după un timp lung, de ordinul orelor (terapeutica ce trebuie aplicată unui electrocutat este respiraţia artificială prelungită), sau datorită efectului paralizant al electrocineticii asupra inimi, manifestată printr-un ritm cardiac foarte rapid (zis fibrilaţie), caz în care respiraţia artificială nu mai este indicată;

- protecţia menită să împiedice electrocutarea constă în: folosirea aparatelor electrice de mână cu tensiuni mici – nepericuloasă, executarea receptoarelor electrice cu o izolaţie suficientă, împiedicarea (eliminarea posibilităţilor ca) personalul din instalaţiile electrice sau utilizatorii să intre în contact cu părţile aflate sub tensiune, izolarea electrică a personalului din instalaţiile electrice (cu mănuşi şi cizme de cauciuc, podele izolate etc.) şi folosirea unor dispozitive speciale în instalaţiile electrice (legarea la pământ, relee de protecţie etc.).

Intensitatea curentului electric de conducţie – mărime de stare electrocinetică globală a corpurilor. Pentru modelarea proceselor electrocinetice ale corpurilor şi reprezentarea cantitativă a acestor procese, în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic s-a introdus în mod deductiv, prin experimente şi prin evaluarea efectelor electrocinetice, mărimea fizică denumită ”intensitatea curentului electric de conducție” care –printr-o convenție generală– se notează cu litera *i* şi *este o mărime primitivă* ce descrie *global starea electrocinetică a corpurilor, prin valori scalare, pozitiva sau negative*.

Aspectul calitativ denumit electrocinetică –ce caracterizează starea variabilă în timp a electrizării unor corpuri însoțită simultan de efectele arătate anterior (şi în special de transferul de energie calorică)– poate fi determinat şi cantitativ, experimental prin evaluarea efectelor electrocineticii. Datorită unității cauzale obiective (naturale) ale efectelor electrocinetice, din cele şapte efecte prezentate anterior este suficient să se aleagă numai unul singur.

Astfel, pentru introducerea mărimi primitive care să caracterizeze starea electrocinetică a corpurilor se utilizează efectul mecanic prin determinarea (măsurarea) forțelor care se produc asupra unui sistem fizic idealizat de corpuri conductoare: două *conductoare filiforme* (ceea ce înseamnă că au lungimea *l* mult mai mare decât diametrul *d* al conductorului, presupus şi cu secțiune circulară – fig.1.4), aşezate paralel în vid, pe o suprafață plană (față de care conductorul nu poate avea frecări), la o distanță *a* şi considerate rigide (indeformabile).

Neglijându-se forțele masice şi gravifice (considerând, idealizat, conductorul ,filiform el este deci fără masă), între cele două corpuri filiforme nu apare decât o forță electrocinetică, adică o forță care se exercită asupra firelor conductoare numai atunci când ele sunt în stare electrocinetică. Starea electrocinetică a conductoarelor filiforme se realizează (fig.1.4) „legându-le” la două surse de energie electrică *SE1* şi *SE2* lucrând în regim staționar (sursele de curent continuu –v. subcapitolele 4.3 şi 4.6) care –după cum se va arăta în capitolul 4– au însuşirea de a produce starea electrocinetică în conductoare aflate în buclă închisă. Sursele şi conductoarele fiind identice, starea electrocinetică creată va fii aceeaşi pentru ambele “fire”şi va avea valoarea dată de aşa-zisa intensitate a curentului de conducție *i.*

Aşa cum se arată în figura 1.4, cele două surse sunt conectate la conductoare cu polaritatea în mod diferit, față de un sens comun $\overline{s}$, caz în care conductoarele (în lungul lor) sunt supuse unor *forțe de respingere* ce dau (conductoarele fiind rigide) o rezultantă $\overline{F}$, aşa ca în figura 1.4. Dacă în aceeaşi situație din figura 1.4, sursele *SE1* şi *SE2* identice sunt conectate la conductoarele filiforme în acelaşi fel (cu aceeaşi polaritate față de un sens de referință $\overline{s}$), se va constata că forțele ce se exercită asupra celor două „fire” sunt de *atracție*. Rezultă, deductiv, că mărimea ce se introduce pentru determinarea cantitativă a stării electrocinetice a celor două conductoare filiforme –adică intensitatea curentului electric de conducție *i*– poate fii *pozitivă* sau *negativă*. Se constată, experimental, că fiecare porțiune a conductoarelor filiforme este supusă unei forțe (de atracție sau de respingere, după felul conectării la bornele surselor electrice), în planul conductoarelor, care dau o rezultantă $\overline{F}$ pe aceeaşi direcție perpendiculară pe cele două conductoare în formă de fir. Distribuția forței de-a lungul conductoarelor filiforme aflate în aceeaşi stare elecrocinetică, ne determină să considerăm mărimea *i* ca fiind aceeaşi în lungul firului şi –ca urmare– să o reprezentăm printr-o săgeată (trasată pe conductor), însă cu un sens (acelaşi sau contrar celui de referință $\overline{s}$), după cum forțele sunt de atracție sau –respectiv– de respingere, adică în mod corespunzător unor valori pozitive sau negative.

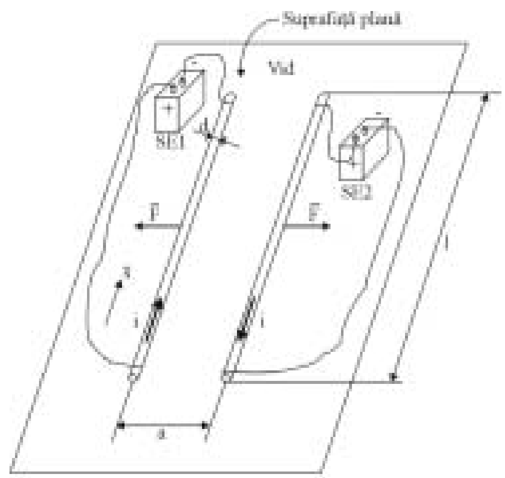

Fig. 1.4

Continuându-se experiența redată în figura 1.4, se înlocuiesc cele două surse electrice identice (*SR1 şi SR2*), cu altele *SR1' şi SR2'* identice între ele („sursele *SR1*’şi *SR2*’ au aceeaşi caracteristici calitative şi constructive”) dar diferite de sursele precedente („sursele *SR1*’ şi *SR2*’ sunt diferite cantitativ de sursele identice între ele *SR1* şi *SR2*, dar sunt aceleaşi calitativ"). Se va constata producerea unor noi forţe $\overline{F}$ (de atracţie sau de respingere în funcţie de modul de conectare al bornelor sursei la conductoare), cu aceeaşi direcţie (normală pe conductoare, în planul lor), însă cu valori diferite $F' \neq F$. Se continuă experienţa în acelaşi mod, dar cu alte surse identice între ele: *SR1''* şi *SR2''*, *SR1'''* şi *SR2'''*,…, rezultând între conductoarele filiforme forţe *cu aceeaşi direcţie dar de mărimi diferite* $F \neq F' \neq F'' \neq F''' \neq \ldots$. Rezultă, de aici, că mărimea de stare electrocinetică a conductorului filiform, este un *scalar*, căci se produc forţe între conductoare mereu pe aceeaşi direcţie (în planul firelor şi perpendicular pe ele) dar cu valori absolute diferite, scalar ce poate fi pozitiv sau negativ, corespunzător sensului forţelor (de atracţie sau de respingere). Pentru acelaşi mediu uniform în care se găsesc conductoare filiforme (s-a presupus vidul), intensitatea curentului de conducţie al unui singur fir, păstrându-se strict aceleaşi conductoare, aceleaşi dimensiuni, l şi d şi aceeaşi distanţă a (v.fig.1.4), este proporţională cu forţa la care este supus fiecare fir conductor. Considerând ambele conductoare simultan, ca sistem fizic unic, se poate postula relaţia:

$$(1.7) \qquad \frac{i^2}{(i')^2} = \frac{F}{F'} \quad \text{sau} \quad \frac{i^2}{(i'')^2} = \frac{F}{F''} \ \text{etc.}$$

Luându-se una din stările electrocinetice ca stare etalon de referinţă, deci luându-se arbitrar intensitatea curentului de conducţie a acelei stări ca unitate de măsură i_u, rezultă că orice altă stare electrocinetică a două conductoare filiforme, rectilinii, cu aceeaşi lungime, aflate în vid la aceeaşi distanţă, se poate determina cantitativ prin intensitatea i dată de expresia:

$$(1.8) \qquad i^2 = \frac{F}{F_u} i_u^{\ 2},$$

ce rezultă din postulatul (1.7), unde –prin urmare– i este *intensitatea curentului electric de conducţie, ca mărime primitivă ce caracterizează global starea electrocinetică a conductorului filiform*. Deoarece i caracterizează, din punctul de vedere global, starea electrocinetică pe toată lungimea l a firului conductor şi *are o valoare scalară pozitivă sau negativă după sensul forţei* la care este supus conductorul, *i se atribuie un sens*, numit *sensul de referinţă al curentului din conductorul filiform*, care se consideră arbitrar, dând lungimii conductorului un sens $\bar{l}$, arbitrar, unde $\bar{l}$ este aşa-zisa *lungime orientată*. Asupra acestui fapt se va reveni în detaliu în § 8.2.5 („asocierea sensurilor de referinţă a mărimilor electrice de circuit"). În aceste condiţii, se obişnuieşte ca intensitatea curentului electric de conducţie, al unui conductor filiform aflat în regim electrocinetic, să se reprezinte grafic cu o săgeată.

Fiind o mărime de stare a corpurilor (în regim electrocinetic) şi nicidecum un corp care se poate deplasa, cel puţin în cadrul acestui manual nu vom agrea expresii de forma: „conductor „străbătut" de curentul…" sau „curentul „parcurge" conductorul…" sau mai ales „curentul care „trece" prin conductor…" etc. Am prefera să spunem „intensitatea curentului electric de conducţie ce caracterizează starea electrocinetică a conductorului…" sau „curentul din conductorul…". De altfel, este frecventă înlocuirea expresiei „intensitatea curentului electric de conducţie" cu sintagma „curentul electric" sau pur şi simplu „curent", dacă din contextul frazei nu poate rezulta alt înţeles.

Conducţia electrică. Legat de starea electrocinetică a corpurilor, care în esenţă constă în faptul că introduse în câmp electric unele corpuri (deci nu toate) pot trece într-un regim în care sarcina lor electrică sau, local, densitatea sarcinii electrice să varieze în timp, deci sub efectul unui câmp electric să producă un „transfer" sau o „transmitere" a stării de electrizare dintr-o parte în alta a unui corp sau de la un corp la altul, considerându-se acesta ca un „transfer" al sarcinii electrice prin anumite corpuri (concluzie improprie, deoarece sarcina electrică e o mărime de stare a corpurilor şi nu un obiect care se poate deplasa independent de corpuri), s-a ajuns să se spună că unele corpuri „conduc electricitatea" sau sunt „bune conducătoare de electricitate". În acest context, fenomenului descris anterior i s-a dat numele de *conducţie electrică*, care însă rămâne o proprietate a anumitor corpuri, numite *conductoare* (dacă sunt aparate, materiale, dispozitive etc.) sau *conductori* (ca substanță), ce poate fi determinată cantitativ prin mărimea de material numită conductivitate (v. § 1.2.3).

Limitându-ne la situația calitativă, corpurile care prin natura substanței lor nu pot dobândi starea electrocinetică în mod evident (prin efecte suficient sesizabile) se numesc *izolanți* sau *dielectrici*, iar dacă sunt „cuprinse” într-un aparat, dispozitiv, instalație etc.: *izolatoare* (v. § 1.2.3).

Unitatea de măsură a intensității curentului electric de conducție. În Sistemul Internațional (SI), unitatea de măsură a intensității curentului electric de conducție este denumită **amper** (la plural amperi), are simbolul A şi este *unitate fundamentală*, ce „reprezintă” fenomenele electromagnetice în SI.

În SI, unitatea de măsură fundamentală **amperul** [A] se defineşte –pe baza relației (1.8)– astfel: „amperul este intensitatea unui curent electric constant care –menținut în două conductoare paralele, rectilinii, de lungime infinită şi cu secțiune circulară de arie neglijabilă, aşezate în vid la o distanță de un metru– ar produce între acestea, pe o lungime de un metru, o forță de $2\cdot10^{-7}$ newtoni”.

În practică se mai folosesc multiplul kiloamper, kA [1kA=10^3 A] sau submultiplii: miliamperul, mA [1mA=10^{-3} A], microamperul, μA [1 μ A=10^{-6} A], nanoamperul, nA [1nA=10^{-9} A] sau chiar picoamperul, pA [1pA=10^{-12} A].

Densitatea curentului electric de conducție

Densitatea curentului electric de conducție, care uzual se notează cu $\overline{J}$, este o *mărime derivată* ce descrie local, ca funcție de punct $P \to \overline{J}(P)$ starea electrocinetică a corpurilor (în principiu conductoare), fiind definită ca vectorul al cărui flux dintr-o suprafață Σ (v. § 9.1.2 şi definiția 9-19) este intensitatea curentului electric de conducție prin acea suprafață, adică:

$$i \overset{D}{=} \int_{\Sigma} \overline{J}\cdot \mathrm{d}\overline{A} \tag{1.9}$$

Conform definiției (1.9), unitatea de măsură a mărimi densitate (de suprafață) a curentului electric de conducție este, în SI, *amperul pe metru la pătrat*, cu simbolul A/m^2, iar dimensional, expresia (1.9) se scrie în forma:

$$[I]=[J][L]^2. \tag{1.10}$$

Conductoarele cu secțiune finită se pot descompune, în principiu, într-un ansamblu de conductoare aproape filiforme (teoretic, la limită, filiforme), astfel încât aria totală a secțiunii transversale a conductorului să fie egală cu suma ariilor transversale ale conductoarelor componente, iar intensitatea curentului de conducție total al conductorului să fie egală cu suma intensităților curenților conductoarelor cvasifiliforme componente. Aceasta pune în evidență necesitatea de a considera intensitatea curentului unui conductor oarecare ca o mărime definită pentru o suprafață de secțiune dată prin conductor, ceea ce a condus şi la ideea definirii curentului ca flux al unui vector de punct, şi anume al mărimii derivate densitate de curent electric de conducție $\overline{J}$, care reprezintă o densitate de suprafață a curentului.

În unele situații ale aplicațiilor practice, vectorul $\overline{J}$ poate descrie mult mai bine (în sensul de complet) starea electrocinetică a corpurilor şi aşa-zisa conducție electrică (v. § 1.3.10). Un astfel de caz îl constituie propagarea câmpului electromagnetic şi –în particular– conducția electrică în conductoare masive (cu multe aplicații practice concrete). Într-un conductor masiv Ω, mulțimea vectorilor $\overline{J}(P)$ în $\forall P \in \Omega$, formează câmpul densității de curent ce descrie aşa-numitul câmp electrocinetic (v. cap. 4).

Momentul electric

Este o *mărime primitivă*, notată cu $\overline{p}$, ce descrie *global* aşa-numita *stare de polarizare a corpurilor mici*.

Polarizarea electrică. Experienţa arată că, întotdeauna, corpurile neutre (cu sarcina neutră q=0) sunt atrase de corpurile electrizate imobile, iar –în această situaţie– corpul cu sarcina electrică globală nulă exercită forţe asupra unui corp de probă electric. Rezultă de aici că în corpurile neutre introduse în câmpul electric produs de corpul electrizat imobil apare o nouă stare electrică, specifică; această stare se numeşte *polarizare electrică temporară* (temporar în sensul că îndepărtat de corpul electrizat imobil, corpul neutru nu mai exercită forţe asupra corpurilor de probă din apropierea lui).

Se constată că prin polarizare electrică, corpul cu sarcina globală nulă (neutru) se electrizează totuşi, însă local, cu sarcini electrice – numite *sarcini electrice de polarizaţie*, –*Q* şi +*Q*, egale şi de semn contrar astfel că sarcina globală a corpului $q = -Q + Q = 0$, corpul – global, pe „ansamblul" său rămânând tot timpul neutru. În această situaţie, asupra corpului polarizat se exercită un cuplu de forţe ($\overline{F}_-$ şi $\overline{F}_+$), aşa ca în figura 1.5, care au un moment $\overline{C}$; dacă în jurul corpului electrizat imobil câmpul electric pe care îl produce este neuniform, atunci $\left|\overline{F}_-\right| \neq \left|\overline{F}_+\right|$.

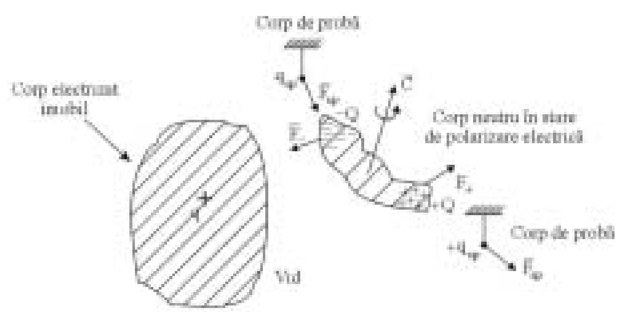

Fig. 1.5

Polarizarea electrică este, aşa cum rezultă din figura 1.5, o stare de electrizare „suplimentară" a corpurilor. În principiu, toate corpurile se pot polariza electric, unele însă foarte slab (imperceptibil), iar altele foarte pronunţat, caz în care ele sunt din anumite materiale izolante ce se numesc **dielectrice**. Corpurile metalice sunt practic nepolarizabile (din acest motiv, corpurile de probă se consideră metalic – v. § 1.1.2, pentru a evidenţia/explora numai fenomenele strict electrice).

Există însă corpuri la care starea de polarizare nu depinde numai de introducerea lui într-un câmp electric. De exemplu, prin comprimarea sau întinderea unui cristal piezoelectric (din cuarţ, turmalină ş.a.) apare o stare de polarizare ce depinde şi de o axă privilegiată, denumită axă electrică. Această stare se numeşte *polarizare electrică permanentă*.

Starea de polarizare electrică este o stare suplimentară celei de electrizare (ca, de exemplu, cea de frecare). De aceea, corpurile pot avea şi sarcină electrică şi pot fi, în acelaşi timp, şi polarizate (temporar sau/şi permanent).

Momentul electric – mărime primitivă a stării de polarizare a corpurilor. Pentru introducerea unei mărimi fizice care să descrie starea de polarizare electrică, se folosesc –şi pe baza experienţei redată schematic în figura 1.5– noţiunile de sarcină electrică de polarizare (despre care s-a pomenit ceva mai înainte), care se mai numeşte şi *sarcină dipolară*, şi *dipol electric* (fig. 1.6).

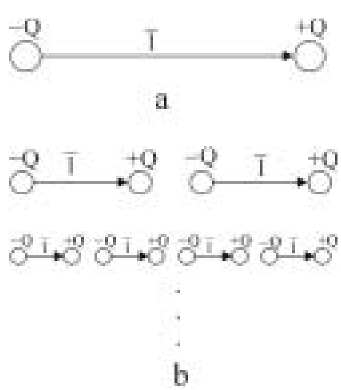

Fig. 1.6

Plecând de la faptul că un corp polarizat este un corp neutru la care s-a realizat (în câmp electric sau permanent) o distribuţie polară (o polarizare) a sarcinii electrice –*Q* şi +*Q, cu* $|-Q| = |+Q|$ (v. fig. 1.5), corpul poate fi reprezentat printr-un model grafic numit dipol electric, ca un ansamblu format de două sarcini electrice (*Q*), egale şi de semn contrar, situate la o distanţă foarte mică una de alta $\overline{l}$, orientate de la sarcina –*Q* către sarcina +*Q* (fig. 1.6, *a*).

Se constă, experimental, că dacă un corp neutru polarizat (ca cel din figura 1.5) este divizat în alte două corpuri, ele rămân tot neutre din punct de vedere al sarcinii electrice însă –introduse sau rămase după divizare– în câmp electric fiecare corp în parte este polarizat şi poate fi asemuit cu un dipol electric. Continuând divizarea, această situaţie se repetă, teoretic la infinit (fig. 1.6, *b*), şi fiecare mic dipol electric în parte va fi supus unui cuplu de forţe $\overline{F}_-$, $\overline{F}_+$ şi (eventual, în câmp electric neuniform) unei forţe $\overline{F}$. Se constată că se pot exprima, momentul cuplului de forţe $\overline{C}$ şi forţa $\overline{F}$ în funcţie de un vector, care se notează cu $\overline{p}$, căruia i s-a dat denumirea de **moment electric**, fiind introdus –ca mărime primitivă– prin definiţia:

$$\overline{p} \overset{D}{=} \lim_{\begin{cases} l\to 0 \\ Q\to\infty \end{cases}} Q\overline{l} \; , \tag{1.11}$$

în care limita $l \to 0$ implică, pentru ca $\overline{p}$ să fie finit, trecerea simultană şi la limita $Q \to \infty$, în acest fel mărimea „moment electric" descriind global starea de polimerizare electrică pentru corpurile mici, oricât de mici ar fi acestea, chiar şi elementare (dipolul electric elementar).

Mai târziu (v. cap. 3) se va arăta că efectele mecanice (moment $\overline{C}$ şi forţă $\overline{F}$) care se produc asupra unui mic corp polarizat electric (dipol electric), ce are momentul electric $\overline{p}$ şi care este introdus într-un câmp electromagnetic în vid, se determină cu expresiile: $\overline{C} = \overline{p} \times \overline{E}_0$ şi $\overline{F} = (\overline{p}\ grad)\overline{E}_0 = (\overline{p}\nabla)\overline{E}_0$, unde $\overline{E}_0$ este vectorul intensităţii câmpului electric în vid (v. § 1.2.2) şi care presupun că p = const.

În principiu, un corp dielectric se poate polariza electric atât în mod temporar cât şi permanent, definindu-se pentru fiecare situaţie în parte, cu expresia (1.11) – un *moment electric permanent* $\overline{p}_p$ şi un *moment electric temporar* $\overline{p}_t$; atunci, momentul electric (numit total) al micului corp polarizat electric este dat de însumarea vectorială:

$$\overline{p} = \overline{p}_p + \overline{p}_t \, . \tag{1.12}$$

În acest fel, sarcina electrică q şi momentul electric $\overline{p}$, descriu (determină) complet starea de electrizare a corpurilor.

Unitatea de măsură a momentului electric. În Sistemul Internaţional (SI) unitatea de măsură a momentului $\overline{p}$ este, conform definiţiei (1.11): *coulomb metru*, cu simbolul Cm, iar dimensiunile momentului electric sunt:

$$[p]=[Q]\,[L] \tag{1.13}$$

Polarizaţia electrică

Se constată, experimental, că şi corpurile dielectrice mari (masive) se polarizează în toată masa lor. Atunci, inductiv, pentru a *descrie local* (în fiecare punct P al corpului dielectric polarizat Ω) starea lui de polarizare electrică s-a introdus un vector $\overline{P}$ căruia i s-a dat numele de *polarizaţie electrică,* care este o *mărime derivată* şi *definită ca densitatea de volum a momentului electric* (fig. 1.7):

$$\overline{P}(P) \overset{D}{=} \lim_{\begin{cases} \Delta v\to 0 \\ P\supset\Delta v \end{cases}} \frac{\Delta\overline{p}}{\Delta v} = \left.\frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\mathrm{d}v}\right|_P \quad , \tag{1.14}$$

în general scriindu-se, în $\forall P \in \Omega$: $\overline{P} = \mathrm{d}\overline{p}/\mathrm{d}v$.

Aşa cum se precizează în manualul *Preda, M., Cristea, P. şi Spinei, F. (1980),* „...Introducerea acestei mărimi se bazează pe ideea descompunerii unui corp într-o reuniune de corpuri de dimensiuni foarte mici. Fiecare corp component, de volum Δv , are un moment electric $\Delta\overline{p}$ (fig. 1.7). Operaţia de trecere la limită (1.14) este în acest caz numai teoretică şi nu poate reprezenta un fapt experimental, deoarece componenta temporară $\Delta\overline{p}_t$ a momentului electric $\Delta\overline{p}$ al fiecărui corp component depinde de câmpul electric produs în corpul respectiv de ansamblul

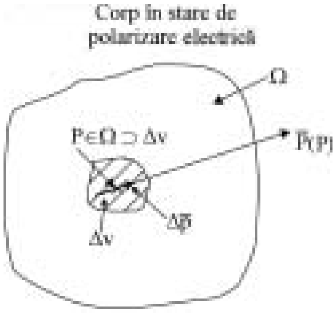

Fig. 1.7

tuturor corpurilor componente şi nu este deci măsurabilă individual. Polarizaţia electrică $\overline{P}$ descrie, deci, starea de polarizare locală a unui corp masiv, în condiţii date, fiind –ca mărime derivată– un exemplu tipic de mărime introdusă inductiv pe plan teoretic ...”.

Corespunzător fenomenelor de polarizare temporară şi de polarizare permanentă, avându-se în vedere relaţiile (1.12) şi (1.14) se pot introduce şi noţiunile:

- *polarizaţia electrică permanentă* $\overline{P}_p = \mathrm{d}\overline{p}_p / \mathrm{d}v$;

- *polarizaţia electrică temporară* $\overline{P}_t = \mathrm{d}\overline{p}_t / \mathrm{d}v$, astfel că *polarizaţia electrică totală* dintr-un punct al unui dielectric este:

(1.15) $$\overline{P} = \overline{P}_p + \overline{P}_t .$$

Unitatea de măsură SI a polarizaţiei electrice $\overline{P}$ este *coulomb pe metru la pătrat,* cu simbolul C/m^2 care rezultă din expresiile (1.11) şi (1.14). *Dimensiunea polarizaţiei electrice* rezultă din aceleaşi relaţii şi este:

(1.16) $$\left[\overline{P}\right] = \frac{[Q][L]}{[L]^3} = [Q][L]^{-2} .$$

Fluxul (v. § 9.1.2) *vectorului* $\overline{P}$ are o semnificaţie aparte. Pentru a vedea acest lucru, se poate porni de la relaţia:

$$\overline{P} \cdot \Delta v = \Delta \overline{p} ,$$

care rezultă din definiţia (1.14) şi înlocuindu-se $\Delta\overline{p}$ cu $\Delta\overline{p} = \Delta Q\overline{l}$, ce reiese din definiţia (1.11), se mai poate scrie:

$$P \cdot \Delta v = l\Delta Q .$$

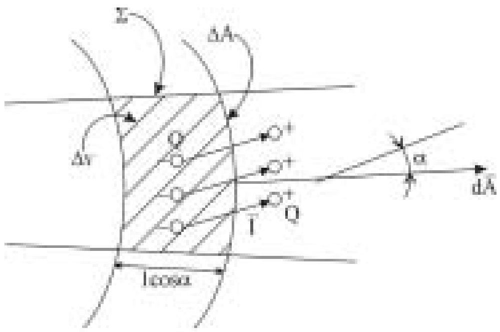

Fig. 1.8

Această ultimă relaţie se referă la un „mic” volum dintr-un corp (fig.1.8).

Pentru acest volum, cu secţiunea ΔA şi lungimea $l\cos\alpha$, se observă că ΔQ reprezintă sarcini dipolare de un semn conţinute în volumul Δv . Deoarece volumul poate fi exprimat prin:

$$\Delta v = \Delta A \ l\cos\alpha ,$$

rezultă:

$$\Delta Q = P \ \Delta A\cos\alpha ,$$

sau, la limită:

(1.17) $$\mathrm{d}Q = \overline{P} \cdot \overline{\mathrm{dA}} .$$

Prin urmare, fluxul elementar al vectorului polarizaţiei electrice $\overline{P}$ reprezintă o sarcină electrică rezultată din sarcina dipolară a dipolilor electrici ce traversează parţial suprafaţa ΔA (la limita dA), căreia i se dă numele de *sarcină de polarizaţie* (notată adesea şi cu Q_p) de pe suprafaţa ΔA, dacă $\forall P \in \Delta A \Rightarrow \overline{P}(P)$= const. (iar dacă nu, la limită, de pe suprafaţa elementară $\mathrm{d}A$). Pentru o suprafaţă închisă Σ luată într-un corp polarizat electric (v. fig. 1.8) se va putea scrie:

$$Q' = -\oint_\Sigma \overline{P} \cdot \overline{\mathrm{d}A} ,$$

care reprezintă sarcina dipolară conţinută în interiorul suprafeţei închise Σ datorită „fracţiunii” de dipol electric rămas înăuntrul lui Σ (v. fig.1.8) şi:

$$Q'' = \oint_\Sigma \overline{P} \cdot \mathrm{d}\overline{A} ,$$

care reprezintă sarcina dipolară ce „iese” (mai bine zis a „fracțiunii” celeilalte a dipolilor electrici care −prin orientarea lor în câmpul electric− ies în afara suprafeței Σ), deoarece ele trebuie să fie egale şi de semn contrar în condițiile modelului dipolului electric arătat în figura 1.6.

La un corp Ω ce are polarizație electrică uniformă, adică $\overline{P}$ = const. în orice punct din Ω, sa va putea scrie:

$$\oint_{\Sigma} \overline{P} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = 0,$$

deoarece pe toată suprafața Σ „iese” şi „intră” acelaşi număr de „jumătăți” de dipoli electrici (conform definiției 1.11), adică aceeaşi sarcină dipolară.

Dacă suprafață Σ este situată în întregime în vid şi corpul se află complet în interiorul ei, va exista de asemenea egalitatea:

$$\oint_{\Sigma} \overline{P}_o \cdot \mathrm{d}\overline{A} = 0,$$

deoarece în vid $\overline{P_0} = 0$. Dacă însă corpul este polarizat electric neuniform şi suprafața Σ este luată în corp, atunci într-o parte poate ieşi o sarcină dipolară mai mare decât cea care intră în cealaltă parte. Această sarcină Q se numeşte *sarcină electrică de polarizație*. Dacă acelaşi corp polarizat electric are şi o sarcină electrică q (ca aceea obținută prin frecare), atunci suma celor două sarcini electrice, se numeşte *sarcină electrică liberă* (notată cu Q_l):

$$Q_l = q + Q. \tag{1.18}$$

Ca şi în cazul sarcinii electrice q, corpurile cu polarizare electrică pot fi caracterizate şi prin *densitatea de volum a sarcinii electrice de polarizație:*

$$\rho_p = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}v},$$

de unde rezultă:

$$Q = \int_v \rho_p \mathrm{d}v \tag{1.18v}$$

şi prin *densitatea de suprafață a sarcinii de polarizație* :

$$\sigma_p = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}. \tag{1.18A}$$

Expresiile (1.4), (1.17) şi (1.18) justifică afirmația că perechea de mărimi q_v –densitatea de volum a sarcinii electrice (v. definiția 1.4) şi $\overline{P}$– polarizația electrică determină complet starea locală (dintr-un punct) de electrizare a unui corp.

Momentul magnetic

În natură există corpuri, aşa cum sunt –de exemplu– minereurile *magnetita* (cu formula chimică Fe_3O_4) şi *pirotina* (FeS), care prezintă proprietatea că exercită forțe între ele precum şi asupra altor corpuri din fier, cobalt, nichel etc., aflate în apropierea lor. Despre corpurile care prezintă astfel de proprietăți se spune că sunt **magnetizate** sau că sunt în **stare de magnetizare**.

Se mai constată că asupra corpurilor magnetizate mici (ca, de exemplu, acul magnetic), aflate în apropierea unor circuite electrice (un „lanț” închis de conductoare) se exercită forțe atunci –şi numai atunci– când conductoarele sunt în stare electrocinetică (*efectul magnetic al electrocineticii).*

În regiunea din jurul corpurilor magnetizate sau/şi din jurul conductoarelor aflate în regim electrocinetic, unde se manifestă forțe şi momente asupra unor corpuri în stare de magnetizare, a unor corpuri **feromagnetice**[2] (v. subcap. 6.2) şi a altor conductoare în stare electrocinetică, se

[2] Metalele arătate la începutul acestui subparagraf (fierul, cobaltul, nichelul ş.a.), numeroase aliaje (fier-carbon/adică oțelurile, nichel–fier, nichel–crom–fier, nichel–molibden–fier şi foarte multe altele), feritele (nişte aliaje sintetizate – un proces tehnologic de

spune că există **câmp magnetic** (v. cap.5) în accepțiunea arătată în paragraful 1.1.2, adică de aspect sau componentă a câmpului electromagnetic unitar (astfel, existența unui câmp electric variabil în timp determină şi apariția unui câmp magnetic).

Din cele de mai sus rezultă două tipuri de magnetizare a corpurilor: **magnetizarea temporară** (dobândită prin efectul câmpului magnetic şi numai atâta timp cât corpurile se găsesc în câmp magnetic) şi **magnetizare permanentă** (la corpurile a căror stare de magnetizare există independent de prezența lor în câmp magnetic).

Momentul magnetic – mărime primitivă a stării de magnetizare globală a corpurilor mici. După cum se ştie (v. § 1.1.2), câmpul magnetic se explorează cu un corp de probă fie sub forma unui ac de busolă, fie sub forma unei bucle de curent (v. fig.1.1*a*) care fiind în regim electrocinetic (ce produce efect magnetic) este caracterizată de aşa-numitul moment al buclei, definit prin expresia (1.1) adică: $\overline{m}_b = \overline{n} I_{bc} A_{bc} = I_{bc} \overline{A}_{bc}$, unde $\overline{A}_{bc}$ este aria orientată a buclei din propriul plan, cu semnul asociat sensului de referință al curentului buclei (I_{bc}) după regula sistemului drept. Dacă bucla de probă este introdusă într-un câmp magnetic, în vid, câmp caracterizat prin mărimea primitivă numită inducția magnetică în vid, notată cu $\overline{B}_0$ (care va fi prezentată în § 1.2.2, ce va urma), se va constata că bucla este supusă unui cuplu de forțe $\overline{F}, \overline{F}'$ (aşa ca în figura 1.9) care au un moment $\overline{C}_b$ dat de expresia:

(1.19) $$\overline{C}_b = \overline{m}_b \times \overline{B}_0$$

şi eventual (atunci când inducția magnetică în vid nu este uniformă în zona buclei şi deci cele două forțe $\overline{F}, \overline{F}'$ din figura 1.9 nu sunt egale) unei forțe rezultante $\overline{F}_b$ dată de:

(1.20) $$\overline{F}_b = (\overline{m}_b \nabla)\overline{B}_0 \Leftarrow \overline{F} \neq \overline{F}',$$

bucla de curent fiind considerată, teoretic, aproape punctiformă (imediat în jurul punctului *P*).

Se constată, experimental că dacă în locul buclei de curent se introduce în câmpul magnetic din vid un mic corp magnetizat el este supus, ca şi bucla de curent, unui cuplu de forțe şi – eventual– unei forțe. Atunci se ajunge la concluzia că şi micul corp magnetizat poate fi caracterizat prin momentul său magnetic $\overline{m}$, care să satisfacă expresii ca (1.19) şi (1.20), adică:

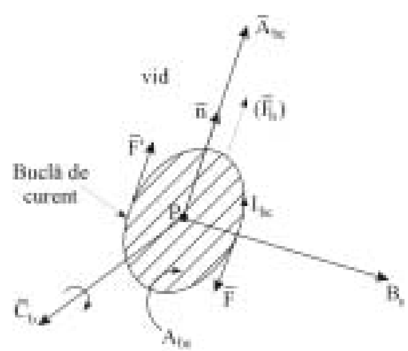

Fig. 1.9

(1.19') $$\overline{C} = \overline{m} \times \overline{B}_0$$

şi

(1.20') $$\overline{F} = (\overline{m}\nabla)\overline{B}_0 = (\overline{m}\,\mathrm{grad})\,\overline{B}_0,$$

în care $\overline{B}_0$ este vectorul inducției magnetice în vid ce caracterizează câmpul magnetic în punctul în care se găseşte micul corp magnetizat.

Prin acest proces inductiv, pornind de la experiență, se constată că starea de magnetizare a corpurilor mici este complet descrisă de **momentul magnetic** al corpului, prin expresiile (1.19') şi (1.20').

Deoarece există două tipuri de magnetizare (temporară şi permanentă), care pot exista simultan la acelaşi corp, atunci şi momentul magnetic are două componente: *momentul magnetic temporar* $\overline{m}_t$ şi *momentul magnetic permanent* $\overline{m}_p$ astfel că există egalitatea:

(1.21) $$\overline{m} = \overline{m}_t + \overline{m}_p$$

---

sudare a particulelor de anumite pulberi, prin presare şi încălzire, sub influența unor forțe interatomice, cu formarea unor straturi limită noi între particule) au proprietatea de a se magnetiza atunci când sunt introduse în câmp magnetic şi de a păstra această stare şi după dispariția câmpului magnetic. Corpurile de acest fel se numesc *feromagnetice*. De fapt, orice corp se magnetizează în câmp magnetic, însă "mult mai puțin" decât corpurile feromagnetice (susceptibilitatea materialelor de a se magnetiza în câmp magnetic este descrisă de o mărime de material specifică v. § 1.2.3.).

Unitatea de măsură SI a momentului magnetic. Plecând da la expresia de definire a momentului magnetic al buclei de curent (1.1), rezultă că dimensiunile mărimii primitive “moment magnetic”, ce defineşte cantitativ starea de magnetizare a corpurilor mici, este:

$$[m]=[I][L]^2\,, \tag{1.22}$$

de unde rezultă că unitatea de măsură în Sistemul Internațional, SI, este: *amper metru la pătrat*, cu simbolul Am^2.

Magnetizația

Magnetizația este o *mărime derivată care descrie local* (în orice punct al unui corp masiv) *starea de magnetizare a corpurilor*. Din definiția (1.23), de introducere în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, rezultă că *magnetizația este o mărime vectorială de punct*, ce se notează cu $\overline{M}$.

Corpurile magnetizate de dimensiuni oarecari pot fi descompuse, cel puțin teoretic, în mici corpuri magnetizate, a căror stare este descrisă de momentul magnetic al fiecărui corp mic constituent. De aceea, pentru a descrie local (într-un punct *P* al corpului) starea de magnetizare a corpului se introduce –ca mărime derivată– densitatea de volum din punctul *P* considerat al momentelor magnetice $\overline{m}$. Notând cu $\overline{M}(P)$ densitatea de volum a momentelor magnetice, se consideră în jurul punctului *P*, în care se determină $\overline{M}$, o porțiune de volum Δv din corp, în care momentele magnetice dau o rezultantă $\Delta\overline{m}$; atunci –prin definiție– magnetizația corpului în punctul *P* considerat se defineşte prin limita:

$$\overline{M}(P)\overset{D}{=}\lim_{\begin{cases}\Delta v\to 0\\ P\subset\Delta v\end{cases}}\left.\frac{\Delta\overline{m}}{\Delta v}\right|_P=\left.\frac{\mathrm{d}\overline{m}}{\mathrm{d}v}\right|_P\,, \tag{1.23}$$

sau – la modul general: $\overline{M}=\mathrm{d}\overline{m}/\mathrm{d}v$.

Existând două feluri de magnetizație a corpurilor, prin aceeaşi procedură (1.23) se definesc şi:

- *magnetizația temporară*:

$$\overline{M}_t=\frac{\mathrm{d}\overline{m}_t}{\mathrm{d}v}\,,$$

- magnetizația permanentă:

$$\overline{M}_p=\frac{\mathrm{d}\overline{m}_p}{\mathrm{d}v}\,,$$

care satisface realția:

$$\overline{M}=\overline{M}_t+\overline{M}_p\,.$$

Dacă pentru un corp oarecare, cu volumul *v*, se cunoaşte distribuția locală a magnetizației, adică se ştie câmpul $\overline{M}(P)$ în $\forall P\in v$, atunci se poate determina un aşa-numit moment magnetic total al corpului cu:

$$\overline{m}=\int_v \mathrm{d}\overline{m}=\int_v \overline{M}\mathrm{d}v\,,$$

care rezultă din definiția (1.23).

Unitatea de măsură SI a magnetizației este – aşa cum rezultă din egalitatea (1.22) şi definiția (1.23) – *amperul pe metru*, cu simbolul A/m.

Din aceleaşi relații rezultă şi dimensiunile mărimii magnetizației:

$$[M]=\frac{[m]}{[L]^3}=\frac{[I][L]^2}{[L]^3}=[I][L]^{-1}\,. \tag{1.24}$$

1.2.2. Mărimi de stare a câmpului electromagnetic

În jurul unui sistem de corpuri, imobile sau/şi mobile, aflate în stare de electrizare, de polarizare, de magnetizare sau/şi electrocinetică se manifestă o serie de interacţiuni, specifice acestor stări ale sistemului de corpuri, şi în special efecte ponderomotoare (forţe şi momente), interacţiuni cărora le corespunde un câmp specific numit **câmp electromagnetic** (v. § 1.1.2. – definiţia i).

Manifestările calitative specifice câmpului electromagnetic se pot exprima cantitativ printr-o serie de mărimi fizice numite **mărimi de stare a câmpului electromagnetic**. O parte dintre aceste mărimi, dar toate mărimile primitive de stare a câmpului electromagnetic, din teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, vor fi prezentate în cadrul acestui paragraf.

Intensitatea câmpului electric în vid

Este o *mărime vectorială de punct*, notată consacrat cu $\overline{E}_0$, care *descrie local starea electrică* a câmpului electromagnetic în vid, fiind introdusă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic ca *mărime primitivă*.

Introducerea acestei mărimi s-a făcut pe baza următoarei experienţe idealizate:

- se consideră un sistem oarecare de *corpuri electrizate*, *în vid* şi *imobile* (aşa ca în schemele din figura 1.2 – v. § 1.2.1), astfel încât în jurul lor există numai componenta electrică a câmpului electromagnetic;

- se ia un corp de probă electric (v. § 1.1.2) şi se explorează câmpul electric din vid, în diverse puncte în jurul corpurilor electrizate imobile (într-un domeniu Ω_0). Se va constata că în orice punct P ar fi plasat corpul de probă cu sarcina electrică q_{ep} = const., asupra lui se exercită o forţă (ca efect mecanic al câmpului electric), forţă care la q_{ep} = const. şi la un sistem de corpuri electrizate dat şi invariabil, depinde numai şi numai de punctul în care a fost plasat corpul de probă: $\overline{F}(P)$, $F'(P'), ...$;

- se înlocuieşte corpul de probă utilizat în experimentul precedent, cu un şir de alte corpuri de probă, însă cu sarcini electrice diferite (dar suficient de mici pentru a nu influenţa starea de electrizare a sistemului de corpuri, existente iniţial): $q_{cp_1} \neq q_{cp_2} \neq q_{cp_3}$, ... (v. fig. 1.2), care vor fi plasate fiecare în parte şi pe rând în punctele P, P', ...

Se va constata că, în fiecare punct, forţele diferă de la un corp de probă la altul: $\overline{F}_1(P,q_{cp_1}) \neq \overline{F}_1(P,q_{cp_2}) \neq \overline{F}_1(P,q_{cp_3}) \neq \overline{F}_1(P,q_{cp})$ ... pentru plasarea corpurilor în punctul P, după cum $\overline{F}_1'(P',q_{cp_1}) \neq \overline{F}_2'(P',q_{cp_2}) \neq \overline{F}_3'(P',q_{cp_3}) \neq \overline{F}'(P',q_{cp}) \neq$ ... pentru aşezarea corpului de probă în punctul P';

- se deduce, deci, că acţiunile ponderomotoare (aici forţele) exercitate în vid, în câmpul electric, asupra corpurilor de probă (punctiforme şi cu sarcina electrică neglijabilă în raport cu sarcina electrică a sistemului ce produce câmpul electric) depind –cantitativ– de poziţia în câmp a corpului de probă (deci punctul $P \in \Omega_0$) şi de sarcina electrică a corpului de probă q_{cp} (de valoare foarte mică). Adică, forţele produse în câmpul electric asupra unor corpuri punctiforme cu sarcini electrice foarte mici sunt date de o funcţie vectorială de punct (P) şi de sarcina electrică q a câmpului aflat în acel punct: $\overline{F}(P,q)$;

- se mai constată că într-un punct dat, $\forall P \in \Omega_0$ – în vid, raportul între forţa exercitată asupra corpului punctiform din acel punct şi sarcina sa electrică este un vector constant, adică:

$$\frac{\overline{F}_1(P,q_1)}{q_1} = \frac{\overline{F}_2(P,q_2)}{q_2} = ... = \frac{\overline{F}_n(P,q_n)}{q_n}.$$

Atunci, pentru a determina cantitativ starea unui câmp electric (caracterizat calitativ de acțiunile ponderomotoare) este suficient să se introducă o mărime vectorială de punct, care – pentru a reprezenta cantitativ (prin mărimea „raportată” a forței ce se exercită asupra unui corp punctiform aflat în punctul considerat)– va fi dată de raportul:

$$\overline{E}_0(P) \overset{D}{=} \lim_{q \to 0} \frac{\overline{F}(P,q)}{q} \Leftarrow \forall P \in \Omega_0 , \qquad (1.25)$$

dacă se va conveni să notăm cu $\overline{E}_0$ această mărime (indicele 0 indicând faptul că punctul considerat este în vid) şi să o numim „intensitatea câmpului electric în vid”.

Din cele de până aici (v. şi § 1.2.1 – „Sarcina electrică”), rezultă că –prin măsurarea forțelor din câmpul electric în vid asupra corpurilor de probă punctiforme electrizate– s-au introdus inductiv două mărimi primitive: sarcina electrică (mărime ce caracterizează starea de electrizare a corpurilor) şi *intensitatea câmpului electric în vid* (mărime vectorială care descrie local starea electrică a câmpului electromagnetic) mărimi care sunt legate prin relația:

$$\overline{F} = q\overline{E}_0 \Leftarrow \forall P \in \Omega_0 , \qquad (1.26)$$

unde $\overline{F}$ este forța la care este supus un corp punctiform electrizat (cu sarcina electrică q) aflată într-un punct P din domeniul vid Ω_0 în care câmpul electric are intensitatea $\overline{E}_0$.

Din definiția (1.25) rezultă că $\overline{E}_0$ este o mărime specifică câmpului electric însuşi şi nu depinde de prezența corpului de probă utilizat pentru explorarea lui.

Unitatea de măsură, în Sistemul Internațional (**SI**) **pentru măsurarea intensității câmpului electric în vid** este *volt pe metru*, cu simbolul V/m. Modul în care s-a ajuns la această unitate de măsură pentru $\overline{E}_0$ va fi explicat ceva mai încolo (la subparagraful „Potențialul electric”).

Intensitatea câmpului electric în corpuri

Pentru a se extinde definiția (1.25) şi la punctele $P \in \Omega_c$ din corpurile (Ω_c) existente într-un câmp electric este necesar să se aplice următoarea procedură idealizată:

- se execută o cavitate în corp (care rămâne vidă prin îndepărtarea materialului), în jurul punctului considerat $P \in \Omega_c$;

- se introduce în această cavitate, în punctul $P \in \Omega_{cav} \subset \Omega_c$, un corp de probă electric cu sarcina, foarte mică, q_{cp} (fig. 1.10) şi se determină forța la care va fi supus corpul de probă: $\overline{F}_{cav}$. Atunci, conform definiției (1.25) intensitatea câmpului electric în punctul P din interiorul cavității va fi: $\overline{E}_{cav} = \overline{F}_{cav} / q_{cp}$ (conform definiției 1.25);

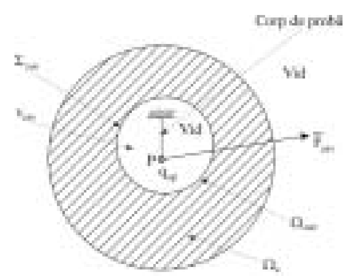

Fig. 1.10

- pentru a se determina intensitatea câmpului electric din punctul $P \in \Omega_c$, trebuie efectuată trecerea la limită cerută de definiția (1.25), având grijă ca –în acelaşi timp– să reducem şi volumul v_{cav} (al cavității Ω_{cav}, proiectată inițial în corp) prin limita $v_{cav} \to 0$, cu păstrarea în permanență a parametrului P în interiorul volumului cavității (ce se restrânge mereu). Trecerea aceasta la limită trebuie realizată în aşa fel încât frontiera $\Sigma_{cav} = \mathrm{Fr}\Omega_{cav}$ să-şi păstreze într-una forma (în micşorarea ei prin trecerea la limita $v_{cav} \to 0$, să rămână în permanență asemenea cu ea însăşi).

În aceste condiții, intensitatea câmpuluzi electric din vidul cavității este riguros determinată prin definiția (1.25), care în acest caz (v. Fig. 1.10) se scrie sub forma:

$$\overline{E}_{cav} \overset{D}{=} \lim \frac{\overline{F}_{cav}}{q_{cp}} \Leftarrow P \in \Omega_c$$

$$(1.27) \qquad \begin{cases} q_{cp} \to 0 \\ v_{cav} \to 0 \\ P \subset v_{cav} \end{cases} ;$$

- se va constata, însă, că –pentru acelaşi punct $P \in \Omega_c$– intensitate $\overline{E}_{cav}$, oricât de mic ar fi volumul cavităţii v_{cav}, are o valoare care depinde puternic de forma cavităţii. Acest fapt se explică prin aceea că, eliminându-se materialul din jurul punctului P din corp, care fiind în câmp electric este polarizat astfel că dipolii electrici din corp, orientându-se pe direcţia câmpului $\overline{E}_0$, produc sarcini de polarizare (sarcini dipolare –Q şi +Q) pe suprafaţa cavităţii (fig. 1.11), care –evident– vor influenţa forţa $\overline{F}_{cav}$ şi prin ea şi $\overline{E}_{cav}$, în funcţie de forma cavităţii (deci, mărimea sarcinii dipolare de pe feţele cavităţii) şi orientarea ei în câmpul $\overline{E}_0$ sau faţă de polarizaţia locală $\overline{P}$ a corpului.

Din acest motiv se caută o procedură pentru a se scoate în evidenţă efectul polarizării electrice a corpului. Pentru aceasta, într-un corp uniform (omogen şi izotrop) polarizat electric şi având polarizaţia electrică $\overline{P}$, se practică mai întâi un *canal* lung şi îngust (cu lungimea l_{can} mult mai mare decât diametrul ariei frontale A_{can}, adică având $l_{can} >> \sqrt{A_{can}}$), orientat chiar pe direcţie vectorului polarizaţiei (fig. 1.12, *a*). În acest canal, pe faţa laterală cilindrică nu există sarcini de polarizaţie, deoarece fluxul $\overline{P} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = 0$ (căci $\overline{\mathrm{d}A}$ este perpendicular pe $\overline{P}$ – conform relaţiei 1.17) şi faptului că dipolii electrici din corp, orientaţi pe direcţia vectorului $\overline{P}$ sunt paraleli cu aria laterală a canalului, astfel că sarcinile dipolare se anulează reciproc (v. figurile 1.8 şi 1.12, *a*). La acest canal, pe feţele laterale A_{can} (v. fig. 1.12 *a*), de la capetele canalului, sunt de semne contrare, iar efectul în centrul canalului se neglijează, suprafeţele laterale fiind foarte mici şi mult depărtate de punctul central. Prin urmare, din punctul de vedere al câmpului sarcinilor de polarizare, perturbaţia introdusă prin practicarea canalului este nulă. Rezultă că –în aceste condiţii– în centrul canalului vid va exista un câmp electric ce se poate determina cu relaţia de definiţie (1.25) scrisă direct sub forma:

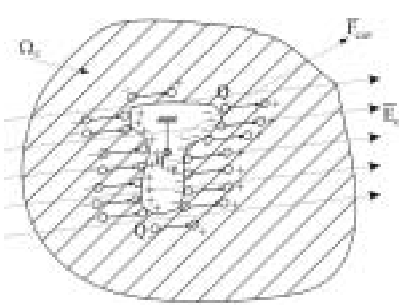

Fig. 1.11

$$(1.28) \qquad \overline{E}_{can} = \frac{\overline{F}_{can}}{q_{cp}} \quad ,$$

în care $\overline{F}_{can}$ reprezintă forţa ce s-ar exercita asupra unui corp de probă cu sarcina foarte mică q_{cp} (la limită $q_{cp} \to 0$), plasat în punctele din centrul canalului.

În acest fel, relaţia (1.28) defineşte mărimea derivată numită intensitatea câmpului electric în corpuri, un vector local (o funcţie de punct), notat cu $\overline{E}$:

$$(1.28') \qquad \overline{E} = \overline{E}_{can}$$

Unitatea de măsură SI a acestei mărimi este –ca şi pentru $\overline{E}_0$– *volt pe metru* [V/m].

Dacă, pentru a pune în evidenţă şi efectul stării de polarizare a corpului, se execută în corp o aşa-numită *fantă*, adică o cavitate vidă în formă de disc foarte subţire cu lăţimea d_{fan} şi aria suprafeţelor discului A_{fan} (v. fig. 1.12 *b*) în aşa fel că $d_{fan}^2 << A_{fan}$ (teoretic neglijabil de subţire), orientată perpendicular pe vectorul polarizaţiei electrice (adică $\overline{A}_{fan} \| \overline{P}$), se va constata că în centrul fantei intensitatea câmpului electric, notată cu $\overline{E}_{fan}$, calculată cu relaţia (1.28) este complet diferită de $\overline{E}_{can}$, cei doi vectori, $\overline{E}_{can}$ şi $\overline{E}_{fan}$, situându-se la „extremităţile” şirului de vectori $\overline{E}_{cav}$ care se obţin pentru diversele cavităţi practicate în acelaşi corp şi în jurul aceluiaşi punct. Reiese, de aici, că în corpuri este necesară utilizarea a două mărimi pentru a se putea determina starea locală a câmpului electric dintr-un corp; una este mărimea $\overline{E}$, adică *intensitatea câmpului electric*, definită prin relațiile (1.28') şi (1.28) şi alta va fi un vector determinat prin intermediul câmpului electric din centrul fantei $\overline{E}_{fan}$, denumit *inducția electrică*.

Componentele intensității câmpului electric $\overline{E}$. Experimentele au arătat că un câmp electric poate fi produs în mai multe feluri distincte, dintre care trei sunt tipice:

- câmpul electric produs de corpurile electrizate, imobile la care intensitatea câmpului se poate determina prin expresia (1.25), adică $\overline{E} = \overline{F} / q_{cp}$, unde $\overline{F}$ este forța care se exercită ca efect al câmpului electric asupra unui corp de probă cu sarcina q_{cp} extrem de mică. Unei astfel de forțe, care se poate determina cu expresia (1.26), i se mai spune şi forță electrică. Dacă sistemul fizic în care există acest fel de câmp electric nu efectuează schimb de energie cu alte sisteme şi $\mathrm{d}\overline{E} / \mathrm{d}t = 0$ (adică $\overline{E} = \text{const.}$) atunci câmpul electric se numeşte câmp electrostatic (v. cap.2) şi în acest caz, aşa cum se va arăta în subcapitolul 2.2 circulația vectorului $\overline{E}$ (v.9.1.2) este nulă, adică $\oint_\Gamma \overline{E} \cdot \mathrm{d}l = 0$. Un astfel de câmp este un câmp irotațional (are rot $\overline{E}$ = 0), se numeşte prin tradiție câmp **electric coulombian**, intensitatea lui se notează cu $\overline{E}_C$ şi îndeplineşte condițiile:

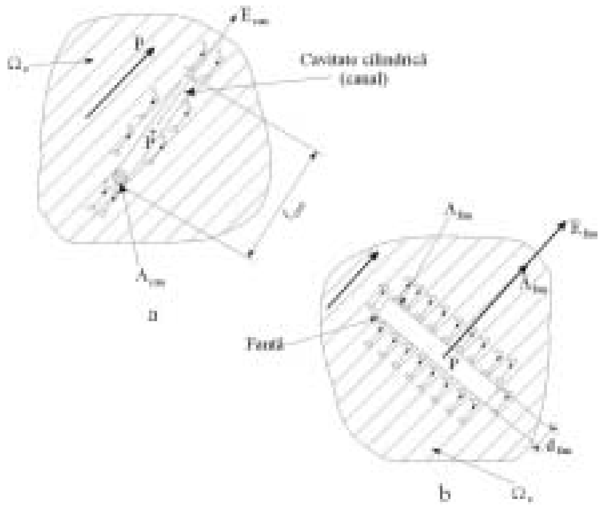

Fig. 1.12

$$\overline{E} = \overline{E}_C \Rightarrow \oint_\Gamma \overline{E}_C \cdot \overline{\mathrm{d}l} = 0 \quad \text{sau local} \quad \mathrm{rot}\, \overline{E}_C = 0 \quad ; \tag{1.28C}$$

- câmpul electric produs în corpurile conductoare de repartiții locale diferite ale sarcinii electrice, datorită unor forțe de natură neelectrică $\overline{F}_{neel}$ care apar în conductoarele neomogene sau/şi cu neuniformitate în repartiția locală în corp a unor mărimi ca temperatură, accelerație, concentrație etc. Sarcinile electrice astfel repartizate (de forțe neelectrice $\overline{F}_{neel}$) produc un câmp electric numit **câmp electric imprimat** a cărei intensitate se notează cu $\overline{E}_i$ (*intensitatea câmpului electric imprimat*) şi se poate determina, prin extinderea relației (1.25) şi în acest caz, cu:

$$\overline{E}_i \stackrel{D}{=} \lim_{q \to 0} \frac{\overline{F}_{neel}}{q} \tag{1.28 i}$$

Asupra câmpului electric imprimat se va reveni pe larg în subcapitolul 4.3. În unele lucrări, intensitatea câmpului electri imprimat $\overline{E_i}$ este considerată o mărime de material;

- prin variația în timp a câmpului magnetic (v. § 1.3.7), se produce un câmp electric numit câmp *electric indus* sau **câmp electric solenoidal**, a cărui intensitate se notează cu $\overline{E}_s$.

După cum se va arăta în paragraful 1.3.7, circulația acestui vector este diferită de zero, adică $\oint_\Gamma \overline{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}l} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rot}\overline{E}_s \neq 0$, ceea ce face să se spună că orice câmp electric solenoidal este un câmp rotațional.

Ca urmare, intensitatea câmpului electric $\overline{E}$ are –în general– trei componente: coulombiană, imprimată şi solenoidală, ceea ce permite să se scrie:

$$\overline{E} = \overline{E}_c + \overline{E}_i + \overline{E}_s \ . \tag{1.28E}$$

Inducția electrică

Pentru a defini această a doua mărime (derivată, aptă să descrie complet, împreună cu $\overline{E}$ –definită în subparagraful precedent– câmpul electric în corpuri) se utilizează o cavitate de tip fantă (aşa ca în figura 1.12 *b*) şi –în aceste condiții– se numeşte inducție elctrică într-un punct dintr-un corp, ce se notează cu $\overline{D}$, o mărime vectorială locală de stare electrică a câmpului electromagnetic, egală numeric cu produsul dintre permitivitatea vidului ε_0 şi vectorul intensității câmpului electric $\overline{E}_{fan}$ din vidul unei mici fante extrem de plate, orientată transversal față de direcția locală a polarizației electrice $\overline{P}$ (v. fig.1.12 *b*), adică:

(1.29') $$\overline{D} \stackrel{D}{=} \varepsilon_0 \overline{E}_{fan} \quad ,$$

unde constanta universală ε_0 (permitivitatea vidului) are o valoare ce depinde de sistemul de unități de măsură ales (v.§ 1.2.3), iar $\overline{E}_{fan}$ se determină prin:

(1.29) $$\overline{E}_{fan} = \frac{\overline{F}_{fan}}{q_{cp}} \quad ,$$

în care $\overline{F}_{fan}$ este forța ce s-ar exercita asupra unui corp de probă cu sarcina q_{cp} (la limită, $q_{cp} \to 0$) adus în punctul *P* din centrul fantei.

Astfel, prin practicarea fantei perturbația introdusă de această cavitate vidă, din punctul de vedere al câmpului produs de sarcinile de polarizare, este maximă.

În vid $\overline{P} = 0$ **şi rezultă,** conform definiției (1.29'), că $\overline{D}_0 = \varepsilon_0 \overline{E}_0$; adică inducția electrică în vid este direct proporțională cu vectorul câmp electric în vid. De aceea folosirea a două mărimi de stare pentru determinarea câmpului electric în vid (adică pe $\overline{E}_0$ şi $\overline{D}_0$) este lipsită de utilitate, fiind suficientă numai mărimea $\overline{E}_0$, o mărime primitivă.

Prin urmare, experiența a arătat că starea câmpului electric din corpuri este descrisă complet de un ansamblu de două mărimi vectoriale $\overline{E}$ şi $\overline{D}$, spre deosebire de mediul vid unde este suficientă o singură mărime $\overline{E}_0$, introdusă ca mărime primitivă. Deoarece $\overline{E}$ şi $\overline{D}$ au fost definite în raport cu mărimea primitivă $\overline{E}_0$ cunoscută, ele sunt deci subspecii de mărimi derivate.

Unitatea de măsură SI a inducției electrice este: *coulomb pe metru la pătrat*, cu simbolul C/m^2. Modul cum a fost introdusă această unitate de măsură va fi arătat în paragraful 1.3.1, unde este prezentată legea fluxului electric.

Inducția magnetică în vid

Pentru caracterizarea stării magnetice a câmpului electromagnetic, mai precis pentru determinarea cantitativă a câmpului magnetic (aşa cum a fost el prezentat calitativ la începutul subparagrafului „Momentul magnetic" – v. aliniatul 3), trebuie introdusă o mărime primitivă, ceea ce se poate face numai pe cale inductivă, printr-un experiment realizat cu un sistem fizic specific.

În acest scop, în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic se efectuează un experiment idealizat, considerându-se ca mediu vidul (ales ca „etalon" de uniformitate şi cu densitatea de volum a masei nulă) şi ca obiect de explorare un corp de probă electric (v. § 1.1.2), adică un corp punctiform electrizat pozitiv, cu sarcina electrică foarte mică q_{cp} (la limită, $q_{cp} \to 0$), plasat într-un punct *P* al câmpului magnetic din vid şi deplasat rectiliniu cu o viteză $\overline{w}$ (fig.1.13).

Pentru descrierea stării câmpului magnetic din punctul P se va determina acţiunea ponderomotoare, adică efectul mecanic al câmpului magnetic care –în acest caz– constă într-o forţă $\overline{F}$ ce se exercită asupra corpului de probă electric mobil, ce trece prin P cu viteza locală $\overline{w}$. Pentru a nu se produce şi alte efecte , ca –de pildă cele elctrice– se va considera că, pe parcursul experienţei, câmpul magnetic este invariabil în timp, fapt constatat prin aceea că efectul mecanic ce se va determina cantitativ (adică forţa $\overline{F}$) este constatat în timp.

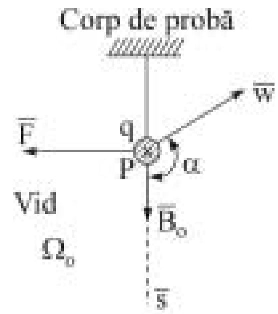

Fig. 1.13

Ca rezultat, această experienţă va arăta că forţa $\overline{F}$ ce se exercită asupra corpului de probă este întotdeauna perpendiculară pe viteza lui $\overline{w}$ şi pe o direcţie fixă $\overline{s}$ caracteristică, în punctul P, câmpului magnetic invaribil. Valoarea absolută $|\overline{F}| = F$ a forţei se constată că este proporţională cu produsul dintre sarcina electrică q_{cp} a corpului de probă, valoarea absolută $|\overline{w}| = w$ a vitezei acestui corp şi cu sinusul unghiului α (v. fig.1.13) dintre $\overline{w}$ şi direcţia fixă $\overline{s}$ (specifică punctului P din câmpul magnetic în vid). Atunci factorul de proporţionalitate dintre F şi produsul $q_{cp} \overline{w} \sin\alpha = q_{cp}(\overline{w} \times \overline{s}_0)$, unde $\overline{s}_0$ este versorul direcţiei $\overline{s}(P)$, poate fi luată ca o măsură a stării locale a câmpului magnetic. Dacă se notează, convenţional, cu B_0 valoarea acestui factor de proporţionalitate, se va putea scrie:

$$F = B_0(q_{cp} w \sin\alpha) \quad \text{sau} \quad \overline{F} = B_0 q_{cp}(\overline{w} \times \overline{s}_0) = q_{cp}(\overline{w} \times \overline{s}_0 B_0)$$

şi notându-se cu $\overline{B}_0 = \overline{s}_0 B_0 = \overline{B}(P)$, atunci $\overline{B}(P)$ este un vector de punct ce poate determina (prin efectul său ponderomotor) starea locală a câmpului magnetic în vid. Numindu-se acest vector de stare **inducţia magnetică în vid** rezultă că el poate fi introdus ca mărime primitivă prin definiţia:

$$\overline{F} \overset{D}{=} q(\overline{w} \times \overline{B}_0) \Leftarrow \forall P \in \Omega , \tag{1.30}$$

în care $\overline{F}$ este forţa care se exercită în câmpul magnetic din domeniul vid Ω_0 , asupra unui corp punctiform electrizat (cu sarcina electrică extrem de mică q) aflat în mişcare cu viteza $\overline{w}$ în punctul oarecare P din câmpul electromagnetic, a cărei stare magnetică este determinată local (în $P \in \Omega_0$) de vectorul $\overline{B}_0(P) = \overline{B}_0$, numit inducţia magnetică în vid, o mărime primitivă introdusă experimental.

Valoarea absolută a vectorului inducţiei magnetice în vid rezultă din definiţia (1.30), fiind:

$$B_0 = |\overline{B}_0| = \frac{F}{qw\sin\alpha} = \frac{F_{\max}}{qw} ,$$

în care $F_{\max}$ este valoarea maximă a forţei care se exercită asupra corpului punctiform (electrizat cu sarcina infimă q şi având viteza de deplasare $\overline{w}$, de valori date), corespunzătoare cazului în care viteza $\overline{w}$, este perpendiculară pe direcţia $\overline{s}$, adică atunci când $\alpha = \pi/2$ (v.fig.1.13).

Direcţia inducţiei magnetice în vid $\overline{B}_0$ coincide cu direcţia fixă $\overline{s}$ din punctul considerat în câmp (v.fig.1.13), iar sensul lui $\overline{B}_0$ se fixează convenţional, astfel încât vectorii $\overline{F}, \overline{w}$ şi $\overline{B}_0$ din definiţia (1.30) să formeze un triedru drept. Rezultă că inducţia magnetică în vid este un vector de tip axial, pentru că nu are un sens al său dat (intrinsec), ci un sens ales convenţional.

Experienţa descrisă anterior, pentru introducerea inductivă, a mărimii de stare a câmpului magnetic în vid, $\overline{B}_0$, poate fi realizată cu acelaşi rezultat şi cu alte corpuri de probă, specifice explorării câmpului magnetic şi anume: bucla de curent – caz în care expresia de definiţie a lui $\overline{B}_0$ este dată de relaţia (1.19) în funcţie de momentul magnetic al buclei $(\overline{m}_b)$ sau cu acul magnetic $\overline{m}_{ac}$, în ambele cazuri măsurându-se momentul cuplului de forţe la care sunt supuse în câmp magnetic aceste corpuri de probă.

Unitatea de măsură SI a inducţiei magnetice în vid. Acestei unităţi de măsură i s-a dat denumirea *tesla*, cu simbolul T, ea rezultând din definiţia (1.30), în care se consideră F=1N, q=1C şi w=1m/s.

Din motive care vor fi arătate mai târziu (v.§1.3.2, „Legea fluxului magnetic"), în multe situaţii unitatea de măsură a inducţiei magnetice în vid, tot în SI, se numeşte *weber pe metru la pătrat*, cu simbolul Wb/m^2, existând echivalenţa $1T=1Wb/m^2$.

Forţa Lorentz. Experienţele descrise până acum arată că mărimile vectoriale $\overline{E}_0$ şi $\overline{B}_0$ –introduse ca mărimi primitive– sunt suficiente pentru caracterizarea completă a stării locale a câmpului electromagnetic în vid. În condiţiile generale ale existenţei simultane a ambelor componente (electrică şi magnetică) ale câmpului electromagnetic în vid, un corp punctiform cu o sarcină electrică *q* suficient de mică (un corp de probă electric-v.§1.1.2) va fi supus simultan atât forţei din câmpul electric –conform relaţiei (1.26), cât şi forţei din câmpul magnetic– conform relaţiei (1.30), forţa rezultantă fiind dată de însumarea vectorială:

(1.31) $$\overline{F} = q\overline{E}_0 + q(\overline{w} \times \overline{B}_0) = q(\overline{E}_0 + \overline{w} \times \overline{B}_0),$$

în care $\overline{F}$ este forţa totală ce se exercită asupra unui corp punctiform cu sarcina *q* (infimă) ce se deplasează cu o viteză $\overline{w}$ într-un punct al câmpului electromagnetic în vid, numită *forţa lui Lorentz*. În expresia (1.31), numită şi ea *relaţia lui Lorentz*, vectorii viteză $\overline{w}$ (a corpului punctiform), intensitatea locală $\overline{E}_0$ şi inducţia $\overline{B}_0$ din acelaşi punct sunt definiţi faţă de un acelaşi sistem de referinţă inerţial (v. Fizica); la schimbarea lui, forţa totală $\overline{F}$ care se exercită asupra corpului punctiform nu se modifică, dar viteza sa va avea o altă valoare relativă, fapt care indică modul în care este necesar să se transforme componentele electrică şi magnetică ale câmpului electromagnetic la schimbarea sistemului de referinţă.

Aşa cum s-a arătat la începutul paragrafului 1.1.2, în teoria macroscopică clasică, câmpul electromagnetic se consideră raportat la un sistem de referinţă local, asociat corpurilor în mişcare, ceea ce nu implică schimbarea sensului de referinţă, care este unul intrinsec (în acest caz viteza deplasării corpului punctiform este unic definită, ca viteză faţă de celelalte corpuri ale sistemului fizic din vidul prin care trece).

Inducţia magnetică în corpuri

Pentru a determina starea câmpului magnetic dintr-un punct $P \in \Omega_c$, unde se află un corp oarecare Ω_c, prin aplicarea defiţiei (1.30), va trebui să se execute o cavitate mică în corp (în jurul punctului *P*), din care să se îndepărteze materialul (o cavitate vidă) pentru a se putea introduce corpul de probă.

Se va constata că –pentru un corp Ω_c dat, un acelaşi punct *P*, un câmp electromagnetic invariabil şi un corp de probă cu aceeaşi sarcină q_{cp} şi aceeaşi viteză $\overline{w}$– forţa care se exercită asupra corpului de probă plasat în cavitate, $\overline{F}_{cav}$, va fi definită în funcţie de forma şi orientarea în câmpul magnetizaţiei $\overline{M}$ din corp, care –fiind în câmpul electromagnetic produs din exteriorul lui Ω_c– se magnetizează (temporar) sau –eventual– era magnetizat (permanent).

În aceste condiţii, experienţa arată că valoarea maximă a forţei $\overline{F}_{cav}$, se produce în cazul unei activităţi în formă de fantă, cu feţele laterale perpendiculare pe vectorul magnetizaţiei locale $\overline{M}$, sau cu aria laterală a fantei orientată $\overline{A}_{fan}$ paralelă cu $\overline{M}$ (fig.1.14).

Aplicarea definiției (1.30) în punctul $P \in \Omega_{fan} \subset \Omega_c$, ceea ce înseamnă $\overline{F}_{fan} = q_{cp}(\overline{w} \times \overline{B}_{fan})$ –unde $\overline{F}_{fan}$ este forța care s-ar exercita în cazul experimentului idealizat redat în figura 1.14 asupra unui corp de probă cu sarcina electrică infimă q_{cp}, ce se deplasează prin fantă trecând cu viteza $\overline{w}$ prin punctul P din centrul fantei, forță care are cea mai mare valoare dintre toate forțele ce s-ar exercita în aceleași condiții însă în cavități vide de forme și orientare diferită ($F_{fan} = \max\limits_{\overline{n}} F_{cav}$)– duce la determinarea celei mai mari inducții magnetice într-o cavitate vidă, $\overline{B}_{fan}$. Aceasta se explică prin efectul maxim pe care îl are magnetizarea corpului (prin magnetizația $\overline{M}$ sau momentele magnetice $\overline{m}$) asupra inducției magnetice determinată prin definiția (1.30) într-o cavitate în formă de fantă (foarte subțire în raport cu aria ei: $d^2_{fan} << A_{fan}$) orientată perpendicular pe magnetizația locală $\overline{M}(P) \Rightarrow P \in \Omega_{fan} \subset \Omega_c$ (sau cu aria orientată $\overline{A}_{fan} \parallel \overline{M}$, cu $\overline{A}_{fan} = \overline{n} A_{fan}$, $\overline{n}$ fiind versorul normalei pe fețele fantei – v. fig.1.14).

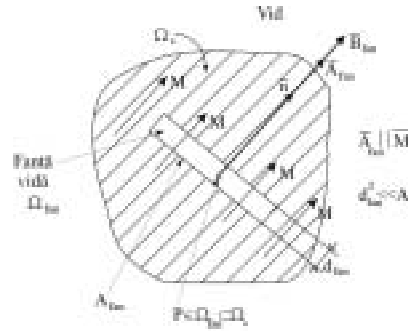

Fig. 1.14

Atunci această inducție magnetică $\overline{B}_{fan}$ este aptă să descrie starea magnetică a câmpului electromagnetic în corpuri și a fost introdusă în acest scop, ca mărime derivată. Astfel, prin definiție se numește inducție magnetică într-un punct din interiorul unui corp magnetizat o mărime de stare a câmpului magnetic numeric egală cu vectorul inducției magnetice dintr-o cavitate vidă în formă de fantă infimă, extrem de plată și orientată transversal față de magnetizație (fig.1.14):

$$\overline{B}(P) = \overline{B} \overset{D}{=} \overline{B}_{fan} \;\Rightarrow\; \overline{B}(P) = \max_{\overline{n}} \left\{ \left| \overline{n} \cdot \overline{B}_{cav}(P, \overline{n}) \right| \overline{n} \right\}, \quad P \in \Omega_{cav} \subset \Omega_c, \tag{1.32}$$

în care $\overline{B}_{cav}$ este inducția magnetică din punctul central P al unei cavități vide Ω_{cav} oarecare efectuată în corpul magnetizat Ω_c, în jurul punctului P considerat.

Unitatea de măsură SI a inducției magnetice din corpuri este *tesla*, cu simbolul T (denumită, uneori, și *weber pe metru la pătrat*, Wb / m^2, cu 1T = 1Wb / m^2).

Intensitatea câmpului magnetic

Deoarece $\overline{B}_{cav}$, definită prin expresia (1.30), depinde de forma și orientarea cavității practicate în corp, în condiții în rest egale (același corp magnetizat Ω_c, același câmp magnetic exterior corpului Ω_c, același punct $P \in \Omega_{cav} \subset \Omega_c$, același corp de probă în ceea ce privește sarcina lui electrică q_{cp} și viteza lui de deplasare $\overline{w}$ prin punctul P), rezultă că $\overline{B} \equiv \overline{B}_{fan}$ din definiția (1.32) nu este suficientă pentru caracterizarea stării magnetice locale a câmpului electromagnetic dintr-un punct P situat într-un corp, ce poate fi magnetizat sau se poate magnetiza atunci când se află în câmp magnetic.

De aceea este necesară introducerea a încă unei mărimi de stare magnetică, derivată, care să caracterizeze local câmpul electromagnetic în puncte din interiorul corpurilor fără a fi influențată de starea de magnetizare a acestora.

Pentru aceasta se execută, în corpul Ω_c și în jurul punctului $P \in \Omega_c$, o cavitate vidă infimă în formă de canal, adică cu o secțiune transversală A_{can} foarte mică ($\sqrt{A_{can}} << l_{can}$, unde l_{can} este lungimea canalului), orientată pe direcția magnetizației locale $\overline{M}(P)$ a corpului ($\overline{M} \parallel \overline{l}_{can}$, unde $\overline{l}_{can}$ este lungimea sau axa orientată a canalului), așa ca în figura 1.15.

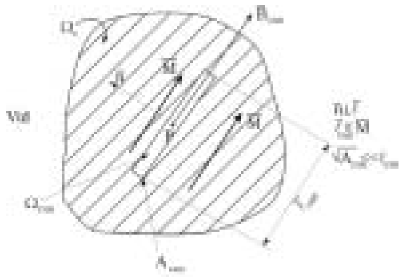

Fig. 1.15

Determinând inducția magnetică în punctul $P \in \Omega_{can} \subset \Omega_c$ cu ajutorul definiției (1.30) rezultă că inducția magnetică $\overline{B}_{can}$ într-un canal vid mic, cu $\overline{l}_{can} \parallel \overline{M}$, are numeric cea mai mică valoare dintre toate valorile B_{cav} determinate cu definiția (1.30) în cavități vide practicate în același corp Ω_c, în jurul aceluiași punct P, cu același corp de probă (cu aceeași sarcină electrică q_{cp} și aceeași viteză $\overline{w}$ în punctul P) și în același câmp electromagnetic exterior corpului Ω_c, adică $B_{can} = \min_{\overline{n}} B_{cav}$, unde $\overline{n}$ este versorul normalei pe suprafața laterală a cavității vide.

Atunci, prin definiție, **intensitatea câmpului magnetic** este un vector, care se notează cu $\overline{H}$, ce descrie local starea magnetică a câmpului electromagnetic, ca funcție de punct, $\overline{H}(P)$, definit prin:

$$\text{(1.33)} \qquad \overline{H}(P) = \overline{H} \overset{D}{=} \frac{\overline{B}_{can}}{\mu_0} \;\Rightarrow\; \overline{H}(P) = \frac{1}{\mu_0} \max_{\overline{n}} \left\{ \left| \overline{n} \times \overline{B}_{cav}(P, \overline{n}) \right| \times \overline{n} \right\},$$

unde μ_0, denumită *permeabilitatea vidului* (v. § 1.2.3), este o constantă universală a cărei valoare depinde numai de sistemul de unități de măsură folosit.

Introducerea intensității câmpului magnetic $\overline{H}$, ca mărime derivată în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, s-a făcut deoarece această mărime duce la simplificarea unor modele ale acestei teorii și ușurează anumite calcule aplicative.

În concluzie, descrierea stării magnetice locale a câmpului electromagnetic în vid se face complet cu ajutorul unei singure mărimi $\overline{B}_0$ (inducția magnetică în vid) introdusă ca mărime primitivă, în timp ce pentru caracterizarea completă a stării magnetice locale a câmpului electromagnetic în puncte în care se află corpuri sunt necesare, simultan, două mărimi: $\overline{B}$ si $\overline{H}$, care sunt specii de mărimi derivate.

Unitatea de măsură SI pentru intensitatea câmpului magnetic. Din motive care vor fi prezentate în paragraful § 1.3.8 (v. „Legea circuitului magnetic"), unitatea de măsură SI a lui $\overline{H}$ este *amperul pe metru*, cu simbolul A / m.

Fluxul electric

Fluxul electric, notat de obicei cu ψ, *este o mărime derivată* care a fost introdusă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic *pentru a determina global* (relativ la o suprafață $\sum$ din câmpul Ω) *starea electrică* a câmpului electromagnetic.

Fluxul electric se definește ca flux al vectorului inducție electrică $\overline{D}$ (v. § 9.1.2), adică:

$$\text{(1.34)} \qquad \psi \overset{D}{=} \int_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{n}\ \mathrm{d}A = \int_{\Sigma} D\ 1\ \cos\alpha\ \ \mathrm{d}A = \int_{\Sigma} D_n\ \mathrm{d}A \quad \Leftarrow \forall \sum \subset \Omega,$$

unde D_n este componenta pe direcția normalei locale la suprafața $\sum$ (in punctul $\mathrm{P} \in \sum$) a vectorului inducției electrice $\overline{D}$, în punctul P, $\overline{D}(P)$, conform figurii 1.16.

Rezultă că fluxul electric ψ este o mărime scalară, pozitivă sau negativă în funcție de sensul ales pentru elementul de arie orientat $\overline{\mathrm{d}A} = \overline{n}\ \mathrm{d}A$, deci de sensul versorului normalei locale $\overline{n}$ la suprafața $\sum$ in punctul $P \in \sum$ considerat. Sensul lui $\overline{n}$ pentru care fluxul electric ψ rezultă pozitiv se numește *sensul de referință al fluxului* (zis și *sensul fluxului*).

Convențional, pentru o suprafață deschisă Σ sensul versorului $\overline{n}$ se asociază cu un sens ales pe conturul $\Gamma = \mathrm{Fr}\,\Sigma$ astfel încât valoarea integralei (1.34) să fie pozitivă. Acest lucru se întâmplă când vectorul $\overline{D}$ şi versorii $\overline{n}$ şi $\overline{\mathrm{d}l} \subset \Gamma$ (v. fig. 1.16) formează un triedru drept. Pentru o suprafață Σ închisă, sensul versorului $\overline{n}$ se alege, pentru toate punctele $P \in \Sigma$, spre exteriorul suprafeței Σ.

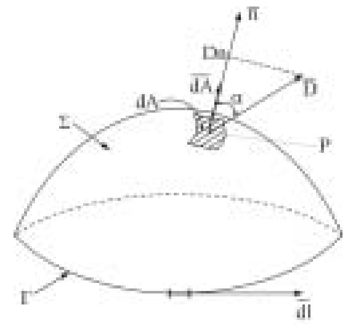

Fig. 1.16

Unitatea de măsură SI pentru fluxul electric este *coulomb*-ul, cu simbolul C, deoarece ecuația dimensională a lui ψ, aşa cum rezultă din definițiile (1.34) si (1.65') din paragraful 1.3.1 (v. „Legea fluxului electric"), precum şi din unitatea de măsură a lui $\overline{D}$ (v. subparagraful „Inducția electrică") este:

$$[\psi] = [D][L]^2 = \frac{[Q]}{[L]^2}[L]^2 = [Q]\,. \qquad (1.35)$$

Mărimea „flux electric" a fost introdusă ca mărime derivată în teoria macroscopică clasică deoarece –în multe situații– modelarea câmpului electric şi calculul lui (a se vedea, pentru exemplificare, „Teorema lui Coulomb" din paragraful 2.2.2), se face mult mai simplu la nivel global prin utilizarea lui ψ.

Fluxul magnetic

Fluxul magnetic, notat generic cu φ, *este o mărime derivată* care a fost introdusă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic *pentru a determina global* (relativ la o suprafață Σ din câmpul Ω) *starea magnetică* a câmpului electromagnetic.

Fluxul magnetic se defineşte ca fiind fluxul vectorului inducție magnetică $\overline{B}$ (v. § 9.1.2), adica:

$$\varphi \overset{D}{=} \int_{\Sigma} \overline{B}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \int_{\Sigma} \overline{B}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}A = \int_{\Sigma} B\;1\cos\alpha\;\mathrm{d}A = \int_{\Sigma} B_n\,\mathrm{d}A \quad \Leftarrow \forall\,\Sigma \subset \Omega\,, \qquad (1.36)$$

în care B_n este componenta pe direcția normalei locale la suprafața Σ (în punctul $P \in \Sigma$) a vectorului inducției magnetice $\overline{B}$ din punctul *P* considerat: $\overline{B} = \overline{B}(P)$.

Rezultă că fluxul magnetic φ este o mărime scalară, pozitivă sau negativă în funcție de sensul ales pentru elementul de arie orientat $\overline{\mathrm{d}A} = \overline{n}\,\mathrm{d}A$, adică de sensul versorului normalei locale $\overline{n}$ la suprafața Σ în punctul $P \in \Sigma$ considerat (numit *sens de referință*). Dacă, la un sens de referință $\overline{n}$ dat, sensul vectorului $\overline{B}$ este astfel încât valoarea fluxului magnetic φ, calculat cu integrala (1.36), rezultă pozitiv, atunci sensul lui $\overline{n}$ este şi aşa-numitul *sens al fluxului magnetic*.

Unitatea de măsură SI a fluxului magnetic poartă convențional numele de *weber* şi are simbolul Wb.

Ecuația dimensională a fluxului magnetic rezultă din definiția (1.36) fiind:

$$[\varphi] = [B]\cdot[L]^2 \qquad (1.37)$$

Mărimea derivată flux magnetic a fost introdusă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic datorită facilităților pe care le introduce în modelarea globală a câmpului magnetic şi în numeroase aplicații (ca, de exemplu, calculul circuitelor magnetice – v. cap.6).

Potențialul electric

Pentru simplificarea unor modele ale câmpului electric şi –în special– pentru efectuarea mai uşoară a unor aplicaţii practice (în tehnică) ale fenomenelor electromagnetice, în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic s-a introdus o *mărime derivată* denumită *potențialul electric* rezervată *descrierii locale a stării electrice* a câmpului electromagnetic.

Potențialul electric reprezintă un câmp scalar, cu valori în funcție de punctul P din domeniul Ω de existență, notate cu $V(P)$, şi definite prin expresia:

(1.38) $$V(P) \overset{D}{=} V(P_0) - \int_{\Gamma: P_0 \to P} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}l}, \quad \{P, P_0\} \in \Gamma, \quad \Gamma \subset \Omega,$$

sau mai simplu:

(1.38') $$V = V_0 - \int_{\Gamma: 0 \to P} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}l},$$

în care: $V(P_0) \equiv V_0$ este potențialul electric al unui punct de referință $P_0 \in \Omega$ sau potențialul electric de referință (în cele mai multe aplicații se consideră $V_0=0$); Γ este un traseu finit din câmpul Ω, ce conține punctele P şi P_0; P este orice punct din câmpul Ω căruia se doreşte a i se ataşa, cu relația (1.38), o valoare scalară $V(P)$=V, denumită *potențialul electric* al punctului *P;* $\int_\Gamma$ este integrala curbilinie (v.§9.1.2) efectuată în lungul curbei Γ; $\bar{E}$ este intensitatea câmpului electric în puncte situate pe "parcursul" Γ; $\overline{\mathrm{d}l}$ este elementul de curbă orientat (v.§9.1.2) luat de-a lungul lui Γ şi $\overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}l}$ sunt produsele scalare ale vectorilor $\overline{\mathrm{d}l}$ şi $\bar{E}$ din ~~pu~~nctele lui dl (v.fig.9.7).

Derivând în raport cu direcția $\overline{\mathrm{d}l}$ fiecare membru al definiției (1.38) rezultă (ştiind că $V_0 = \underset{dl}{\text{const}}$), în acest caz local:

(1.39) $$\frac{\mathrm{d}V(P)}{\overline{\mathrm{d}l}} = -\overline{E}(P) \text{ sau (mai simplu) } \frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}l}} = -\overline{E} \Leftarrow \forall P \in \Omega,$$

unde $\frac{\mathrm{d}V(P)}{\overline{\mathrm{d}l}} \equiv \frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}l}}$ reprezintă derivata unei funcții scalare în raport cu o direcție (v.§9.1.2 şi fig.9.6). În teoria matematică a câmpului, conform celor arătate în paragraful 9.1.2., derivata din relația (1.39) se scrie şi sub forma $\frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}l}} = \bar{l}_0 \nabla V$, unde $\bar{l}_0$ este versorul direcției după care se efectuează derivata în punctul $P \in \Omega$ considerat, iar ∇ este operatorul diferențial – vectorial "nabla" (se reaminteşte că în coordonate carteziene $\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$). Pe de altă parte, $\nabla V = \mathrm{grad} V = n_0 \frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}n}}$; adică derivata potențialului electric scalar după o direcție normală ($\bar{n}$) la o suprafață echipotențială Σ_V (v.§ 9.1.2) reprezintă valoarea gradientului potențialului electric (orientat după versorul normalei n_0 la suprafață echipotențială).

Din relația (1.39) şi cele prezentate anterior rezultă:

(1.40) $$\frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}l}} = -\overline{E} \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}l}} = \bar{l}_0 \nabla V = \bar{l}_0 (\overline{n_0} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}) \therefore \overline{E} = -\bar{n}\frac{\mathrm{d}V}{\overline{\mathrm{d}n}} = -\mathrm{grad}V,$$

prin urmare, într-un câmp electromagnetic a cărui stare locală este descrisă simultan de câmpul scalar al potențialelor electrice V şi câmpul vectorial al intensităților câmpului electric $\bar{E}$ există următoarea relație:

(1.41) $$\overline{E} \overset{D}{=} -\,\mathrm{grad}V \Leftarrow \forall P \in \Omega \quad \text{sau} \quad \overline{E} = -\nabla V \,|_{\forall P \in \Omega},$$

considerată ca o definiție locală (de punct) a potențialului electric V (ca mărime derivată) în funcție de intensitatea câmpului electric $\bar{E}$ (ca mărime primitivă).

Relațiile (1.39) şi (1.41) justifică afirmația că intensitatea câmpului electric derivă din potențialul electric sau, mai pe scurt: *câmpul electric derivă dintr-un potențial*, ceea ce a impus şi folosirea mărimii derivate "potențial electric" pentru descrierea locală a stării electrice a câmpului electromagnetic.

Definiția $\overline{E} = -\mathrm{grad}V\,|_{\forall P\in\Omega}$ arată că vectorul câmp electric $\overline{E}$, *reprezintă direcția şi sensul după care variază (creşte) cel mai mult potențialul electric pornind dintr-un punct al câmpului*. Conform relației (1.40), direcția vectorului grad V, adică direcția lui $\bar{E}$, este normală pe suprafețele echipotențiale $\Sigma_V = \{P|V(P) = \text{const.}\}$adică pe suprafețele din câmpul Ω ale căror puncte au toate acelaşi potențial electric. Sensul lui $\bar{E}$, care conform relației (1.41) este contrar variației locale a lui V (căci $\overline{E} = -\mathrm{grad}V$), este către potențialele electrice descrescătoare, iar valoarea absolută $|\bar{E}|$ este direct proporțională cu viteză de variație după o direcție dată $\bar{l}$ a lui V, conform relației (1.39), adică depinde de derivata $|\nabla V|$.

Unitatea de măsură S.I. a potențialului electric poartă denumirea de *volt* (la plural volți), are simbolul V şi –conform relației de definiție (1.38)– reprezintă potențialul unui punct $V(P)$ care –față de potențialul de referință $V(P_0)$– creşte, pe direcția dreptei P_0-P, cu o unitate de măsură a intensității câmpului electric (1V/m), pe o unitate de măsură a lungimii (1m) luată pe direcția $P_0 - P$.

Relațiile (1.38), (1.39) şi (1.41) explică şi denumirea unității de măsură S.I. a intensității câmpului electric, de volt pe metru, aleasă în funcție de denumirea unității de măsură a potențialului electric, care este mult mai utilizat în practică. Aceleaşi relații, explică şi ecuațiile dimensionale pe care le au mărimile de stare locală a câmpului electric:

$$[V] = [E]\,[L], \quad [E] = [V]\,[L]^{-1}. \tag{1.42}$$

Tensiunea electrică

Tensiunea electrică este o mărime fizică derivată, notată cu u, introdusă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic pentru a descrie global starea electrică a acestui câmp de-a lungul oricărei curbe Γ din câmp, între două puncte ale ei, fiind definită prin integrala curbilinie (v.§9.1.2. şi fig.9.7) a intensității câmpului electric $\bar{E}$ de-a lungul curbei Γ, între două puncte $\{A,B\}\in\Gamma$:

$$u \overset{\mathrm{D}}{=} \int_{\Gamma:A\to B} \overline{E}\cdot\overline{\mathrm{d}l} = \int_{\Gamma:A\to B} \overline{E}\,\bar{t}\,\mathrm{d}l = \int_{\Gamma:A\to B} E1\cos\alpha\cdot\mathrm{d}l = \int_{\Gamma:A\to B} E\mathrm{d}l\cos\alpha = u_{AB} \Leftarrow \forall\Gamma\subset\Omega, \tag{1.43}$$

în care $\overline{\mathrm{d}l}$ este elementul de curbă orientat $\overline{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}l\bar{t}$, unde $\bar{t}$ este versorul tangentei la Γ în dreptul elementului $\mathrm{d}l$ (v. fig.9.7). Prin urmare, aşa cum rezultă din definiția (1.43), tensiunea electrică (în lungul unei curbe) este o *mărime scalară, pozitivă* sau *negativă* în funcție de sensul de integrare ales (de sensul lui $\overline{\mathrm{d}l}$, adică a versorului $\bar{t}$), de la $A\to B$ sau de la $B\to A$:

$$u_{AB} = \int_{\Gamma:A\to B} \overline{E}\cdot\overline{\mathrm{d}l} = -\int_{\Gamma:B\to A} \overline{E}\cdot\overline{\mathrm{d}l} = -u_{BA},$$

rezultând, deci, că $u_{AB} = -u_{BA}$.

Sensul de integrare ales (a lui $\overline{\mathrm{d}l}$, sau a lui $\bar{t}$) se numeşte *sensul de referință al tensiunii*, care se indică printr-o săgeată desenată pe arcul Γ între cele două puncte, sau printr-o liniuță ($A\to B$ sau $B\to A$) între puncte sau, încă, prin ordinea în care sunt scrişi indicii simbolului u (u_{AB} sau u_{BA}). *Sensul tensiunii* electrice (în lungul curbei Γ) este –prin definiție– acel sens de referință pentru care evaluarea integralei (1.43) dă un scalar pozitiv.

Pentru studiul numeroaselor aplicații legate de circuitele electrice se introduc, legat de componentele câmpului electric exprimate de relația (1.28E), următoarele două mărimi de stare electrică cu denumirea tensiune electrică:

– **tensiunea electrică în lungul firului**, notată cu u_f şi definită ca integrală curbilinie în lungul unei curbe Γ_{cond} aleasă prin interiorul unui conductor (de exemplu un "fir" electric) a câmpului electric coulombian:

(1.43')
$$u_f = \oint_{\Gamma_{cond}:A\to B} \overline{E_C} \cdot \mathrm{d}\overline{l} = u_{fAB};$$

– **tensiunea electrică la borne** notată cu simbolul u_b sau numai cu u. Această mărime se defineşte ca integrală curbilinie a câmpului electric cu componentele $\overline{E_c} + \overline{E_s}$ (coulombiană şi solenoidală) după o curbă Γ_{iz} considerată prin izolant (în afara conductorului, între două puncte – "borne" ale acestuia):

(1.43'')
$$u_b = \int_{\Gamma:A\to B} \left(\overline{E_c} + \overline{E_s}\right) \cdot \mathrm{d}\overline{l} = u_{bAB}.$$

Unitatea de masură S.I. pentru tensiunea electrică este *volt*-ul, cu simbolul V, iar ecuația dimensională a acestei mărimi este:

(1.44)
$$[u] = [E]\,[L].$$

Tensiunea electromotoare

Pentru *caracterizarea stării electrocinetice globale* a câmpului electromagnetic din medii conductoare, în aplicațiile practice (mai ales în legătură cu sursele electrice –v.subcap.4.3), a fost necesară introducerea unei noi mărimi, derivate, numită *tensiune electromotoare*, scrisă frecvent sub forma de siglă t.e.m. şi notată cu e, *definită pe orice contur închis* Γ din câmpul Ω *prin circulația vectorului* (v.§ 9.1.2) *intensității câmpului electric* $\bar{E}$, adică:

(1.45)
$$e = \oint_{\Gamma}^{D} \overline{E} \cdot \mathrm{d}\overline{l} \Leftarrow \forall \Gamma \subset \Omega,$$

motiv pentru care mai este denumită uneori şi *tensiune electromotoare de contur*.

Dimensional, t.e.m. este de natura unei tensiuni, căci conform definiției (1.45):

(1.46)
$$[e] = [E\,[L],$$

ca şi ecuația dimensională (1.44). De aceea, **unitatea de măsură S.I. a tensiunii electromotoare** este aceeaşi cu unitatea de măsură a lui u, adica *volt*-ul, cu simbolul V.

Definiția (1.45) arată că t.e.m. este o mărime scalară, pozitivă sau negativă în funcție de sensul circulației lui $\bar{E}$ pe conturul Γ (sensul lui $\overline{\mathrm{d}l}$ - numit *sensul de referință al t.e.m.*). Dacă prin evaluarea integralei (1.45) e rezultă pozitivă, atunci sensul de referință al t.e.m. este chiar *sensul tensiunii electromotoare.*

În aplicațiile practice (ca –de exemplu– în cazul circuitelor electrice), t.e.m. se reprezintă prin simbolul general arătat în figura 1.17.

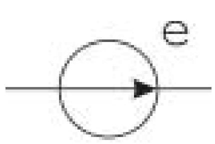

Fig. 1.17

Având în vedere expresia (1.28E), care precizează componentele intensității câmpului electric în cazul general, definiția t.e.m. (1.45) poate fi scrisă şi în forma:

$$e = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \oint_{\Gamma} \left(\overline{E_c} + \overline{E_i} + \overline{E_s}\right) \cdot \overline{\mathrm{d}l}$$

şi –deoarece operatorul integrală curbilinie este liniar– el poate fi distribuit pentru fiecare termen în parte, rezultând:

(1.47)
$$e = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \oint_{\Gamma} \overline{E_c} \cdot \overline{\mathrm{d}l} + \oint_{\Gamma} \overline{E_i} \cdot \overline{\mathrm{d}l} + \oint_{\Gamma} \overline{E_s} \cdot \overline{\mathrm{d}l}.$$

Deoarece, după cum se va arata în paragraful 2.2.3 circulația câmpului coulombian $\overline{E}_C$ este întotdeauna nulă (adică $\oint_\Gamma \overline{E}_c \cdot \overline{\mathrm{d}l} = 0$) prin definiția sa, expresia lui *e* din (1.47) devine:

$$e = \oint_\Gamma \overline{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}l} + \oint_\Gamma \overline{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}l}. = \oint_\Gamma \left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right) \cdot \overline{\mathrm{d}l}\,, \tag{1.48}$$

ceea ce arată că numai componentele câmp imprimat $\bar{E}_i$ (v.subcapitolul 4.3) şi câmp solenoidal $\bar{E}_s$ (v.§1.3.7), ale intensității câmpului electric $\bar{E}$ dau tensiune electromotoare, t.e.m. e.

Câteodată, componența $\oint_\Gamma \overline{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}l}$ a t.e.m. se numeşte *tensiune electromotoare imprimată*, iar componenta $\oint_\Gamma \overline{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}l}$ se numeşte *tensiune electromotoare indusă* (sau *t.e.m. de inducție*), aşa cum se va arata în paragraful 1.3.7.

Folosindu-se descompunerea (1.28E) a câmpului electric, expresia lui *e* din (1.48) se poate generaliza, ştiindu-se că $\overline{E}_i \neq 0 \Rightarrow \oint_\Gamma \overline{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}l} \neq 0$ şi $\oint_\Gamma \overline{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}l} \neq 0$ (v.§1.3.7.), numindu-se tensiune electromotoare integrala curbilinie pentru o porțiune oarecare –în general deschisă Γ_d– de curbă pentru care $\overline{E}_i \neq 0$ sau/şi $\overline{E}_s \neq 0$, adică:

$$e = \int_{\Gamma_d} \left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right) \cdot \overline{\mathrm{d}l}. \tag{1.49}$$

Tensiunea magnetică

Este o mărime derivată, notată cu u_m, care a fost introdusă în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic pentru înlesnirea efectuării unor aplicații tehnice, în special în domeniul circuitelor magnetice (v. cap. 6).

Tensiunea magnetică u_m este definită pentru orice curbă Γ din câmpul Ω prin integrala curbilinie a intensității câmpului magnetic $\overline{H}$ între două puncte, *A* şi *B*, ale curbei Γ (v. fig. 9.7):

$$u_{mAB} \overset{D}{=} \int_{\Gamma:A\to B} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \int_{\Gamma:A\to B} \overline{H} \cdot \bar{t}\,\mathrm{d}l = \int_{\Gamma:A\to B} H \cos\alpha\,\mathrm{d}l = \int_{\Gamma:A\to B} H\mathrm{d}l \cos\alpha \Leftarrow \forall\Gamma \subset \Omega \tag{1.50}$$

Aşa cum rezultă din definiția sa (1.50), tensiunea magnetică u_{mAB} (între două puncte $\{A,B\} \in \Gamma$ este o mărime scalară ce caracterizează global (relativ la o curbă Γ) starea magnetică a câmpului electromagnetic. În funcție de sensul de integrare ($\overline{\mathrm{d}l}$ sau $\bar{t}$) considerat de-a lungul curbei Γ (de la *A* la *B* sau invers), sens numit *sens de referință* al tensiunii magnetice, $u_{mAB} = -u_{mBA}$ poate rezulta, prin calculul integralei (1.50), pozitiv – caz în care sensul de referință este chiar *sensul tensiunii magnetice* scalare – sau negativ.

Din motive care vor fi arătate în paragraful 1.3.8, **unitatea de măsură SI a tensiunii magnetice** este *amper*-ul, cu simbolul A.

Tensiunea magnetomotoare

Tot din necesitatea de a simplifica modelele şi aplicațiile în tehnică, în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic a fost introdusă şi mărimea derivată numită *tensiunea magnetomotoare*, cu sigla t.m.m. şi simbolul F_m (simbol justificat de faptul că inițial această mărime a fost numită „forța" magnetomotoare), care este un *scalar ce defineşte global (relativ la orice curbă închisă* Γ din câmpul Ω) *starea magnetică* a câmpului electromagnetic, definit ca circulație (v. § 9.1.2) a vectorului intensitatea câmpului magnetic:

$$F_m = \oint_\Gamma \overline{H} \cdot \mathrm{d}\overline{l} \Leftarrow \forall \Gamma \subset \Omega \qquad (1.51)$$,

pozitivă sau negativă în funcție de sensul circulației lui $\overline{H}$ de-a lungul curbei închise Γ. Sensul ales pentru $\mathrm{d}\overline{l}$ este *sensul de referință* al lui F_m, iar dacă prin calculul integralei (1.51) rezultatul este un scalar pozitiv, acel sens devine *sensul tensiunii magnetomotoare*.

Din motive ce vor fi arătate in paragraful 1.3.8 (v. „Legea circuitului magnetic"), **unitatea de măsură SI a tensiunii magnetomotoare** este *amper*-ul, cu simbolul A.

Tot în paragraful 1.3.8 se va arăta că dacă în câmpul electromagnetic există corpuri în stare electrocinetică înconjurate de conturul Γ sau/şi dacă prin suprafața Σ cu $\Gamma = \mathrm{Fr}\Sigma$ există un flux electric variabil în timp, atunci $\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \mathrm{d}\overline{l} \neq 0$ sau, local, $\mathrm{rot}\overline{H} \neq 0$ (v. § 9.1.2) ceea ce face ca să se spună despre câmpul magnetic că este un câmp rotațional.

1.2.3. Mărimi de material electrice şi magnetice

Pentru anumite sisteme fizice şi pentru anumite regimuri particulare, efectele fenomenelor electromagnetice sunt uneori puternic influențate de natura materialelor: de substanța corpurilor şi a mediului sistemului fizic în care se manifestă acțiunile electromagnetice. În aceste cazuri, modelele teoriei macroscopice (unele legi – cum ar fi aşa-numitele *legi de material*, unele teoreme, relații de calcul etc.) conțin termeni de tip mărimi fizice, care –pentru a generaliza modelul elaborat la orice situație în care intervine influența materialelor– iau valori specifice fiecărui material întâlnit în aplicațiile practice. Acestui tip de mărimi le vom da denumirea de **mărimi de material**, electrice sau magnetice în funcție de aspectul câmpului electromagnetic modelat.

Mărimile de material ar trebui să aibă nişte valori constante determinate experimental, pentru fiecare material în parte, astfel încât un model al teoriei să se aplice întocmai (eventual cu unele restricții şi aproximări) în orice situație, însă utilizând valoarea specifică materialului. Aceasta ar fi posibil dacă diversele sisteme fizice analizate prin modelele ce conțin mărimi de material ar fi identice cu sistemele fizice (corpuri, obiecte, mediu etc.) asupra cărora s-au făcut experimentările şi s-au indicat valorile (constantele) mărimilor de material. De aceea, modelele de material sunt astefel elaborate sau/şi restricționate încât să aproximeze dependența reală între mărimile caracteristice în funcție de un material de referință pentru care modelul este exact.

Acest material de referință este considerat *uniform* (adică *omogen* şi *izotrop*) şi *liniar* (adică un corp sau material sau mediu ale cărui valori de material nu depind de mărimile de stare ale câmpului electromagnetic sau de mărimile de stare electrică şi magnetică a corpurilor, ca –de exemplu– $\overline{E}, \overline{H}, i, u$ etc.).

În principiu, nici un corp nu este „strict" liniar şi atunci modelele care se referă la descrierea comportării lor în câmp electromagnetic sunt –în fapt– nişte ecuații cu coeficienți variabili, coeficienți care reprezintă tocmai mărimile de material cu valori care depind de variabilele modelului (de exemplu mărimile de stare ale câmpului). „Manipularea" acestor modele neliniare necesită metode de calcul speciale, pachete de programe specifice şi o modalitate de redare a dependenței mărimilor de material de valorile mărimilor de stare (prin curbe – ca, de exemplu, curba de magnetizare –v. subcap. 6.2–, tabelele, funcții matematice, fişiere etc.). În anumite cazuri particulare, mediul poate fi considerat liniar „pe porțiuni" sau în domeniul de valori posibile în cadrul aplicației. Neliniaritatea materialelor este cauzată de diferite fenomene tipice ca: saturația, pragul de insensibilitate, histerezisul, remanența ş.a.

În cele ce urmează, vor fi prezentate câteva dintre mărimile de material specifice câmpului electromagnetic, pentru materiale omogene, izotrope şi liniare, care –în fond– sunt nişte constante fizice ale căror valori depind de sistemul de unități de măsură în care se lucrează (în cazul acestui manual în Sistemul Internațional, SI). Ca mediu de referință în ceea ce privește uniformitatea și liniaritatea va fi considerat vidul, pentru care mărimile de material sunt constante universale.

Permitivitatea vidului

Este o constantă universală pentru aspectul electric al câmpului electromagnetic radiat în vid. Ea mai poartă și denumirea de permitivitate dielectrică a vidului (dar se preferă denumirea simplificată, ce nu produce confuzii, de *permitivitate a vidului*), se notează cu ε_0 și are o valoare care depinde de sistemul de unități de măsură.

În sistemul SI valoarea permitivității vidului se exprimă în *farad pe metru* și are valoarea:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \;\; [\text{F/m}], \tag{1.52}$$

unde F este simbolul faradului, care este unitatea de măsură a capacității electrice (v. subcap. 2.5).

Permeabilitatea vidului

Este o constantă universală pentru aspectul magnetic al câmpului electromagnetic radiat în vid. *Permeabilitatea vidului* se notează consacrat μ_0 și are o valoare ce depinde de sistemul de unități de măsură.

În sistemul SI valoarea permeabilității vidului se exprimă în *henry pe metru* și are valoarea:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m} \tag{1.53}$$

unde H este simbolul henry-ului, care este unitatea de măsură pentru inductivități (v. subcap. 5.4) și permeanțe (v. subcap. 6.3).

În teoria radiației electromagnetice, a propagării undelor electromagnetice în vid (v. subcap. 7.1) se demonstrează că viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid este egală cu viteza luminii în vid c_0 (o constantă universală), care se exprimă prin dependența de constantele universale ε_0 și μ_0 prin relația:

$$c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \;\; , \tag{1.54}$$

care în SI conduce la:

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 9^{-7}}}} = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \left(= 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right) = c_0 \, .$$

Permitivitatea

Permitivitatea absolută descrie comportarea unui material în câmp electric din punctul de vedere al polarizării electrice. Se notează cu ε și pentru un material omogen plasat într-un câmp electric uniform se determină prin raportul dintre valoarea absolută a inducției electrice $\left|\overline{D}\right|$ determinată în material și valoarea absolută a intensității câmpului electric $\left|\overline{E}\right|$ în care se află materialul:

$$\varepsilon \overset{D}{=} \frac{\left|\overline{D}\right|}{\left|\overline{E}\right|} \;\; , \tag{1.55}$$

cu condiția ca materialul să nu aibă polarizație permanentă. Permitivitatea absolută ε se exprimă numeric în *farad pe metru* F/m.

Aşa definită, *permitivitatea* absolută *este o mărime specifică materialelor dielectrice*. Dacă un dielectric are $\varepsilon = f(E)$ se spune despre el că este neliniar, iar dacă $\varepsilon = \text{const.}$, dielectricul este liniar.

În practică, permitivitatea se exprimă în raport cu permitivitatea vidului, ε_0 luată ca unitate de măsură, numindu-se astfel **permitivitatea relativă**, notată cu ε_r şi definită prin:

$$\varepsilon_r \overset{D}{=} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\ , \tag{1.56}$$

care este un număr real, adimensional.

Se constată, experimental, că permitivitatea unui material este influențată de mediu, depinzând de: temperatură (θ), presiunea (p), frecvența câmpului electric (dacă acesta variază alternativ în timp) ş.a.

În tabelul 1.1 sunt indicate permitivitățile relative ale unor materiale (majoritatea utilizate în Electrotehnică şi Electronică), preluate din cartea: *Cătuneanu, V., Iancu, O. şi Drăgulinescu, M., „Materiale şi componente electronice”*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

Tabelul 1.1

Permitivități relative, la $\theta = 20^0$C şi p = 101.308 Pa

Materialul	ε_r	Materialul	ε_r
Aer uscat	1,00059	Hârtie	1,5…2
Aer umed	1,00064	Hârtie uleiată	3...4,3
Argon	1,00056	Marmură	8...10
Azot	1,00053	Mică	4,5…7,5
Dioxid de carbon	1,00095	Parafină	1,9...2,3
Etenă	1,00183	Polietilenă	2,1…2,4
Heliu	1,000066	Polipropilenă	2,2…2,3
Hidrogen	1,00025	Polistiren	2,5…2,6
Acetonă	21,2	Policlorură de vinil	3…5
Apă distilată (pură)	81	Policarbonat	3
Dibutilsebacat	4,25	Polimetacrilat de metil	3,5
Ulei de condensator	2,1…2,3	Răşini	3,5…5
Uleiuri siliconice	2,4…2,8	Răşină melamoniformaldehidică	9
Ulei de transformator	2,2		
		Porțelan pentru izolatori	6
Cuarț topit	3,2…4,2	Rutil	100
Etil celuloză	3,5	Sarea Seignette (feroelectrică)[3]	500…600
		Sticlă	3…6

Permeabilitatea

Permeabilitatea absolută descrie comportarea unui material anume în câmp magnetic din punctul de vedere al magnetizării acelui material. Se notează cu μ şi pentru un material omogen

[3] Substanța „sarea Seignette” are o comportare în câmpul electric asemănătoare celei pe care o au materialele feromagnetice (v. subcap. 6.2) în câmp magnetic; astfel, diagrama $D = f(E)$ a dependenței inducției electrice din material în funcție de intensitatea câmpului electric în care se află materialul are: saturație, remanență, histerezis etc. (v. subcap. 3.5). Prin analogie cu materialele feromagnetice, dielectricii de tipul sării Seignette se numesc *feroelectrici*.

plasat într-un câmp magnetic uniform se determină prin raportul dintre valoarea absolută a inducției magnetice $\left|\overline{B}\right|$ produsă în material şi valoarea absolută a intensității câmpului magnetic $\left|\overline{H}\right|$ în care se află materialul:

$$\mu = \frac{\left|\overline{B}\right|}{\left|\overline{H}\right|}, \tag{1.57}$$

cu condiția ca materialul să nu aibă magnetizație permanentă. Permeabilitatea absolută μ se exprimă numeric în *henry pe metru* [H/m].

Dacă un material are permeabilitatea absolută constantă, independentă de intensitatea câmpului magnetic ($\mu = \underset{H}{\text{const.}}$), se spune despre el că este liniar. În caz contrar, când $\mu = f(H)$, materialul este neliniar şi funcția $\left|\overline{B}\right| = f\left(\left|\overline{H}\right|\right)$ poartă numele de *curbă de magnetizare* (v. subcap. 6.2).

În practică, permeabilitatea se exprimă în raport cu permeabilitatea vidului, μ_0, luată ca unitate de măsură, numindu-se din această cauză **permeabilitate relativă**, notată cu μ_0 şi definită prin:

$$\mu_r \overset{D}{=} \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{1.58}$$

care este un număr real, adimensional.

Se constată, experimental, că permeabilitatea unui material este influențată de mediu, depinzând de: temperatură (θ), presiune (p), frecvența câmpului magnetic (dacă acesta variază alternativ în timp), tensiunile mecanice şi deformațiile interioare (ce se produc atunci când materialul –corpul confecționat din acel material– este supus unor solicitări mecanice exterioare: încovoiere, întindere, compresiune etc.).

Din punctul de vedere al comportării în câmp magnetic, caracterizată de valorile tipice ale permeabilității relative, diversele materiale se împart (v. subcap. 6.2) în:*diamagnetice* (care au μ_r < 1), *paramagnetice* (care au $\mu_r > 1$), *feromagnetice* (care au o curbă de magnetizare neliniară, prezintă un pronunțat histerezis şi o dependență $\mu_r = f(H)$ caracterizată de mai multe valori ale permeabilității relative dintre care –în tabelul 1.2– sunt prezentate numai două: valoarea inițială μ_i –pentru $H = 0$ şi $B = 0$– şi valoarea maximă posibilă μ_{max}), *antiferomagnetice* (la care magnetizația $\overline{M}$ are o valoare absolută ce variază puternic cu temperatura) şi *ferimagnetice* (v. subcap. 6.2).

În tabelul 1.2 sunt prezentate valorile permeabilității relative ale câtorva materiale, aşa cum au fost indicate în lucrarea: *Cătuneanu, V. ş.a., „Materiale şi componente electronice”*, E.D.P., Bucureşti, 1972.

Tabelul 1.2

Permeabilități relative ale unor materiale, la $\theta = 20\ ^0$C şi p = 101.308 P

Categoria de material	Numele materialului	μ_r		χ_m*
		μ_i	μ_{max}	
Dia-magnetice	Aur	-	0.999663	$-33{,}7\cdot10^{-6}$
	Argint	-	0.999752	$-24{,}8\cdot10^{-6}$
	Cupru	-	0.9999926	$-7{,}4\cdot10^{-6}$
	Germaniu	-	0.9999923	$-7{,}7\cdot10^{-6}$
	Azot	-	0.999994	$-0{,}006\cdot10^{-6}$
	Hidrogen	-	0.999998	$-0{,}002\cdot10^{-6}$

Categoria de material	Numele materialului	μ_r		χ_m*
		μ_i	μ_{max}	
Para-magnetice	Aluminiu	-	1.000264	$+264 \cdot 10^{-6}$
	Platină	-	1.0000212	$+21{,}2 \cdot 10^{-6}$
	Oxigen	-	1.00000186	$+1{,}86 \cdot 10^{-6}$
Fero-magnetice	Fier pur	25.000	250.000	-
	Fier electrolitic	500	15.000	-
	Fontă	-	180 … 186	-
	Aliaje fier – siliciu laminate la cald	400 … 500	1000 … 2000	-
	Aliaje fier – siliciu laminate la rece	500 … 800	20.000 … 30.000	-
	Aliajul cu 5,5 % Al, 9,5 % Si şi 85 % Fe (Alsifer)	18.000	84.000	-
	Permalloy (78.5 % Ni şi 21.5 % Fe)	10.000	70.000	-
	Supermalloy (Ni, Mo, Fe, Mn+Si)	125.000	1.000.000	-
	Dynamax	-	1.530.000	-

* χ_m, reprezintă *susceptivitatea magnetică,* ce va fi prezentată în subparagraful ce urmează.

Susceptivitatea

Este o mărime de material adimensională care exprimă „disponibilitatea” unui material de a se polariza electric atunci când este introdus în câmp electric sau de a se magnetiza atunci când este plasat într-un câmp magnetic. De aceea se definesc două feluri de susceptivitate: electrică şi magnetică.

Susceptivitatea electrică. Se notează cu χ_e şi este un coeficient (un număr real) adimensional, care exprimă proporționalitatea dintre polarizația electrică $\overline{P}$ a materialului şi intensitatea câmpului electric $\overline{E}$ în care se află materialul. Se poate defini, fiind o constantă specifică naturii unui material, numai pentru substanțele omogene, izotrope, liniare şi fără polarizație electrică permanentă prin raportul:

(1.59) $$\chi_e = \frac{|\overline{P}|}{\varepsilon_0 |\overline{E}|} \quad ,$$

unde $|\overline{P}|$ şi $|\overline{E}|$ sunt valorile absolute ale polarizației electrice şi –respectiv– intensității câmpului electric existente într-un material anume. Materialele care au $\chi_e = 0$ nu sunt susceptibile de a se polariza electric.

Valorile lui χ_e sunt semnificative în special pentru dielectrici.

Susceptivitatea magnetică. Se notează cu χ_m şi este un coeficient (un număr real) adimensional, care exprimă factorul de proporționalitate dintre magnetizația $\overline{M}$ a materialului şi intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ în care se află materialul. Se poate defini, fiind o constantă specifică naturii unui material, numai pentru substanțele omogene, izotrope, liniare şi fără magnetizație permanentă prin raportul:

(1.60) $$\chi_m = \frac{|\overline{M}|}{|\overline{H}|} \quad ,$$

în care $\left|\overline{M}\right|$ şi $\left|\overline{H}\right|$ sunt valorile absolute ale magnetizaţiei şi – respectiv – intensităţii câmpului magnetic existente într-un anume material.

În tabelul 1.2 au fost indicate valorile lui χ_m, pentru exemplificare, ale câtorva substanţe. Materialele cu $\chi_m = 0$ sau foarte mic $\chi_m < \pm 10^{-6}$ nu sunt susceptibile de a se magnetiza.

Conductivitatea electrică. Rezistivitatea

Comportarea unui material în ceea ce priveşte starea sa electrocinetică, de conducţie electrică, depinde de natura substanţei şi starea ei, fizică şi chimică, putând fi evaluată cantitativ prin mărimile specifice de material denumite *conductivitate electrică* şi / sau *rezistivitate* care calitativ (ca noţiune) şi cantitativ (numeric) sunt mărimi inverse.

Conductivitatea electrică a unui **material uniform**, mărime ce se notează cu γ, se poate defini prin raportul:

$$\gamma = \frac{\left|\overline{J}\right|}{\left|\overline{E}\right|} \quad , \tag{1.61}$$

unde $\left|\overline{E}\right|$ şi $\left|\overline{J}\right|$ sunt valorile absolute ale intensităţii câmpului electric dintr-un punct al materialului şi –respectiv– densităţii de curent existente în acelaşi punct. În fapt, numai la materialele uniforme, conductivitatea electrică reprezintă coeficientul de proporţionalitate dintre mărimea de stare electrocinetică a corpului (materialului) $\overline{J}$ şi mărimea de stare a câmpului electric $\left|\overline{E}\right|$, existente în acelaşi punct.

Experienţa a arătat că, introduse într-un câmp electric, corpurile dobândesc o stare electrocinetică care depinde de materialul corpului, fapt exprimat cantitativ de mărimea de material conductivitate electrică γ (notată uneori şi cu σ). Conform definiţiei (1.61), ecuaţia dimensională a conductivităţii electrice este, având în vedere ecuaţiile (1.10) şi (1.42`):

$$[\gamma] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{[I][L]^{-2}}{[V][L]^{-1}} = \frac{[I]}{[V]}[L]^{-1}. \tag{1.62}$$

Unitatea de măsură SI a conductivităţii electrice este *siemens pe metru*, cu simbolul S/m, care se poate explica cu ajutorul ecuaţiei dimensionale (1.62) ştiind că în SI raportul amper pe volt (A/V) i se dă –convenţional– denumirea de siemens.

În funcţie de valorile pe care le are conductivitatea lor electrică γ, materialele se clasifică în:

- conductori, dacă $\gamma > 10^6$ S/m (de exemplu cuprul electrolitic are are $\gamma_{Cu} = 5{,}8\cdot 10^7$ S/m),
- izolanţi, dacă $\gamma < 10^{-16}$ S/m şi
- semiconductori, dacă $\gamma = 10^{-3} \ldots 10^5$.

Rezistivitatea materialului, notată cu ρ, se defineşte prin relaţia:

$$\rho \overset{D}{=} \frac{1}{\gamma}, \tag{1.63}$$

adică este „inversa” conductivităţii şi –ca urmare– unitatea sa de măsură în SI este $\frac{1}{\mathrm{S/m}} = \frac{1}{\mathrm{S}}\mathrm{m}$, adică „unu pe siemens-metru”. Deoarece convenţional, denumirii de „unu pe siemens” i s-a dat numele de „ohm”, cu simbolul Ω, unitatea de măsură în SI a rezistivităţii materialului este *ohm metru,* cu simbolul Ωm. Dimensional: $[\rho] = [\gamma]^{-1} = [V][I]^{-1}[L]$.

Rezistivitatea materialelor este influenţată de acţiunile exterioare în special ale căldurii şi solicitărilor exterioare. Astfel, variaţia cu temperatura a rezistivităţii materialelor se poate determina cu expresia polinomială:

(1.64) $$\rho_T = \rho_{T_0}\left(1 + \alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot \Delta T^2 + \gamma \cdot \Delta T^3 + ...\right),$$

care, pentru domenii relativ mici de temperatură $\Delta T = T - T_0$, poate fi aproximată printr-o variație liniară:

(1.64`) $$\rho_T = \rho_{T_0}\left(1 + \alpha \cdot \Delta T\right).$$

În relațiile (1.64) şi (1.64`), ρ_{T_0} este rezistivitatea materialului determinată la o temperatură de referință T_0, ρ_T – rezistivitatea materialului la temperatura de „lucru" şi α, β, γ, ... sunt coeficienții variației cu temperatura a rezistivității materialului (care sunt coeficienți numerici specifici fiecărui material) ce se determină prin măsurări.

Variația rezistivității materialului în funcție de solicitările mecanice, dacă acestea duc la deformații ce se mențin în domeniul elastic, se poate determina cu expresia:

$$\rho_{def} = \rho\left(1 \pm \varphi \cdot \sigma_n\right),$$

unde: ρ este rezistivitatea materialului nesolicitat mecanic, σ_n – tensiunea mecanică interioară, φ – coeficientul mecanic al rezistivității (care se determină prin măsurări, semnul + corespunzând solicitării la întindere, iar cel – compresiunii) şi ρ_{def} este rezistivitatea materialului deformat sub acțiunea tensiunii interne σ_n.

Despre un material se spune că este un *conductor perfect* dacă are ρ = 0 (ceea ce înseamnă $\gamma \to \infty$); dacă un material are γ = o (deci $\rho \to \infty$) atunci el este un *izolant perfect*. Acestea sunt, însă, limite extreme ideale.

În tabelul 1.3 sunt prezentate, preluate din *Cătuneanu, V. ş.a., „Materiale şi componente electronice"*, E.D.P, Bucureşti, 1972, valorile mărimilor ρ şi α pentru câteva materiale conductoare metalice.

Tabelul 1.3

Rezistivitatea şi coeficientul de temperatură al unor metale

Metalul conductor	Rezistivitatea la 20 ^{0}C [Ωm]	Coeficientul de temperatură α [1/K]
Aluminiul	$0{,}0273 \cdot 10^{-6}$	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Argint	$0{,}16 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-3}$
Aur	$0{,}022 \cdot 10^{-6}$	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$
Cadmiu	$0{,}076 \cdot 10^{-6}$	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Cupru	$0{,}0168 \cdot 10^{-6}$	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$
Fier	$0{,}098 \cdot 10^{-6}$	6,
Molibden	$0{,}057 \cdot 10^{-6}$	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$
Nichel	$0{,}073 \cdot 10^{-6}$	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$
Plumb	$0{,}21 \cdot 10^{-6}$	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$
Platină	$0{,}105 \cdot 10^{-6}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Staniu	$0{,}12 \cdot 10^{-6}$	$4{,}4 \cdot 10^{-3}$
Wolfram	$0{,}054 \cdot 10^{-6}$	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$
Zinc	$0{,}061 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-3}$

Câmpul electric imprimat

Caracterizează din punctul de vedere electrocinetic materialele neomogene şi / sau cu neuniformitate a unor mărimi fizice ca accelerație, temperatură, concentrație chimică, deformare internă, iradiere etc.

Ea este o mărime vectorială $\overline{E}_i$ (v. § 1.2.2 şi definiția 1.28 i), care în regim electrostatic ($\overline{J} = 0$) este „echilibrată" de componenta coulombiană $\overline{E}_c$ a câmpului electric, adică:

$$\overline{E}_i = \left(-E_c\right)_{\overline{J}=0}$$

Asupra ecestei mărimi se va reveni pe larg în subcapitolul 4.3.

1.3. Legile teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic

În cadrul acestui subcapitol vor fi prezentate **principalele legi ale teoriei macroscopice** clasice (a lui Maxwell şi Hertz) a câmpului electromagnetic.

În cele ce urmează, *legea va fi considerată un model, adică o reprezentare matematică a relaţiilor existente între mărimile fizice specifice câmpului electromagnetic,* deci o determinare cantitativă, *stabilită strict pe cale experimentală şi apoi redată într-un mod unitar şi într-o formă teoretică – abstarctă de maximă generalitate.*

Prin urmare, legile sunt modele obţinute printr-un proces logic inductiv bazat pe experiment, ce exprimă interconectările esenţiale dintr-un sistem fizic electromagnetic, cu dependenţe cauzale şi funcţionale ce se verifică întotdeauna în orice manifestare fenomenologică naturală, având caracter de axiome fundamentale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic, care nu pot şi nu trebuie demonstrate deoarece ele sunt verificate prin experienţă.

Orice alte modele, în afara acestor legi, care se pot deduce –printr-un demers logic şi demonstraţii pe modele (adică matematice) plecând fie direct de la legi fie de la alte modele deduse la rândul lor tot din legile generale– se pot demonstra riguros şi pot fi verificabile şi experimental (sau prin manifestările naturale), sunt denumite teoreme sau expresii de calcul cantitativ („formule”). Aceste *teoreme –ca modele demonstrabile, împreună cu legile–* ca modele utilizate drept ipoteze primare în demonstrarea diferitelor teoreme şi care au fost stabilite printr-un proces inductiv din experimente, alcătuiesc într-o formă sistemică şi coerentă, care dă soluţii unice în orice situaţie concretă,– teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, în viziunea sa fenomenologică a efectelor produse prin câmp de corpurile electrizate, cu polarizare electrică, magnetizate şi în stare electrocinetică.

Legile generale ale teoriei macroscopice clasice stabilesc toate condiţiile producerii câmpului electric şi magnetic, al interacţiunii dintre aceste două aspecte ale câmpului unic electromagnetic, al stării electrocinetice şi ale efectelor ce se produc în câmpul electromagnetic.

Unele dintre legi sunt general valabile (în orice situaţie), iar altele impun (au) anumite restricţii. Unele se exprimă numai prin modele locale (în orice punct al câmpului), dar majoritatea au şi o exprimare globală şi una locală.

1.3.1. Legea fluxului electric

Se poate exprima –ca model– atât într-o formă globală cât şi în una locală.

Forma globală a legii fluxului electric

Narativ, această lege se prezintă astfel: *fluxul electric* Ψ_Σ (adică fluxul vectorului inducţie electrice $\overline{D}$) *prin orice suprafaţă închisă* Σ*, ce delimitează un volum* v_Σ*, este egal cu sarcina electrică totală* q_{v_Σ} *existentă în volumul* v_Σ (în interiorul suprafeţei închise Σ).

Această exprimare se poate sintetiza prin modelul:

$$\Psi_\Sigma = q_{v_\Sigma}\,, \tag{1.65}$$

sau, deoarece prin definiţia (v. § 1.2.2) $\Psi_\Sigma = \oint_\Sigma \overline{D}\cdot \overline{\mathrm{d}A}$, prin modelul:

$$\oint_\Sigma \overline{D}\cdot \overline{\mathrm{d}A} = q_{v_\Sigma} \Leftarrow \forall\Sigma \subset \Omega \,, \tag{1.65'}$$

în care Ω este domeniul de existență al câmpului electric, iar elementul de arie orientat $\overline{\mathrm{d}A} \in \Omega$, definit prin $\overline{\mathrm{d}A} = \overline{n} \cdot \mathrm{d}A$, are orientarea pe direcția normalei la Σ în punctul corespunzător lui $\mathrm{d}A$ cu sensul considerat în $\forall \mathrm{d}A \in \Sigma$ spre exteriorul suprafeței Σ. În această situație, dacă $\overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = D\mathrm{d}A\cos\alpha > 0$ înseamnă că unghiul $\left(\overline{n}, \overline{D}\right) = \left(\overline{\mathrm{d}A}, \overline{D}\right) = \alpha$ este cuprins între 0 şi π/2, iar dacă $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ fluxul electric elementar $\overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A}$ este un scalar negativ.

Legea (1.65) nu are nici un fel de restricții.

Legea fluxului electric, scrisă sub forma (1.65') explică de ce unitatea de măsură SI a inducției electrice este coulomb pe metru la pătrat (C/m^2).

Forma locală a legii fluxului electric

Deoarece suprafața $\Sigma \in \Omega$ trebuie, de fiecare dată, să fie complet definită (geometric şi dimensional), în unele aplicații este mai comod să se utilizeze o formă locală, valabilă în orice punct $P \in \Omega$, modelul local având avantajul că descrie mai „amănunțit“ efectul sarcină electrică$\rightarrow$ inducție electrică din câmpul electromagnetic, cu condiția să se cunoască distribuția de volum a sarcinii electrice.

Pentru determinarea modelului local al legii fluxului electric, se pleacă de la definiția (1.4) a densității de volum $q_v(P)$, dintr-un punct P al câmpului Ω şi de la relația (1.6), potrivit cărora sarcina electrică totală dintr-un volum este:

$$q_{v_\Sigma} = \int_{v_\Sigma} q_v(P)\mathrm{d}v \,,$$

şi ştiind că fluxul unui vector printr-o suprafață închisă Σ este egal cu integrala de volum extinsă la v_Σ a divergenței acelui vector, adică formula Gauss-Ostrogradski (v.§ 9.1.2), ceea ce permite ca în cazul fluxului electric să se scrie:

$$\oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{dA} = \int_{v_\Sigma} \mathrm{div}\overline{D}(P)\mathrm{d}v \;,$$

ajungându-se la scrierea legii (1.65') în forma:

$$\int_{v_\Sigma} \mathrm{div}\overline{D}(P)\mathrm{d}v = \int_{v_\Sigma} q_v(P)\mathrm{d}v \Leftarrow \forall\, v_\Sigma \subset \Omega \,,$$

De aici, deoarece v_Σ este un volum oricare din câmpul Ω, rezultă imediat forma locală a legii fluxului electric şi anume:

(1.66)
$$\mathrm{div}\overline{D}(P) = q_v(P) \Leftarrow \forall P \in \Omega \;,$$

care arată că, pentru o distribuție de volum a sarcinii electrice pe Ω *în fiecare punct dintr-un câmp electric divergența vectorului inducție electrică este egală cu densitatea de volum a sarcinii electrice din acel punct*. Deci, mai simplu:

(1.66')
$$\mathrm{div}\overline{D} = q_v \;,$$

lege care nu are nici o restricție (este valabilă oricând, în orice punct al unui câmp electric).

Liniile de câmp electric

Liniile de câmp (ale unui câmp vectorial), definite ca fiind axul tuburilor de flux unitar ale vectorului considerat (v. § 9.1.2), sunt –în cazul câmpului electric– liniile câmpului inducție electrică, adică axele tuburilor în lungul cărora fluxul electric (fluxul vectorului $\overline{D}$) este egal cu 1C sau o fracțiune de coulomb.

Aşa definite şi avându-se în vedere legea (1.65') împreună cu convenția de semn pentru elementele de arie orientată, totdeauna spre exteriorul suprafeței închise Σ, rezultă că *liniile de câmp electric sunt linii deschise, care „ pornesc”* (*au sensul*) *dinspre corpurile delimitate de suprafețe închise* Σ *cu sarcină electrică pozitivă şi se „opresc” în corpurile cu sarcină electrică* *negativă.* Conform legii fluxului electric (1.66) –sub forma locală– *liniile de flux electric converg* (*au sensul spre*) *punctele* $P \in \Omega$ *în care densitatea de volum a sarcinii electrice,* $q_v(P)$*, este negativă şi diverg („izvorăsc") din punctele* $P \in \Omega$ *în care densitatea de volum a sarcinii electrice,* $q_v(P)$*, este pozitivă.*

Prin urmare punctele din câmp în care $q_v > 0$ sunt surse („izvoare") de câmp electric, iar punctele în care $q_v < 0$ sunt puţuri de câmp electric, liniile de câmp electric fiind linii deschise.

Într-un câmp (domeniu) Ω, *liniile de câmp electric* (*pentru un flux* $\Delta\Psi = \underset{\Gamma}{\text{const.}}$ convenabil ales), *împreună cu suprafeţele de echipotenţial electric* ($V_k = V_0 + k\Delta V = \underset{\Sigma}{\text{const.}}$, $k = 0,1,2,3,\ldots$ şi ΔV un „ pas " dat, convenabil ales, de variaţie a potenţialului electric) *alcătuiesc ceea ce se cheamă spectrul câmpului electric* care dau nu numai o reprezentare calitativă grafică, ci şi una cantitativă (mai ales dacă sunt trasate cu un produs informatic de tipul MATLAB – v. § 9.3.1 şi § 2.7.1).

1.3.2. Legea fluxului magnetic

Modelele acestei legi au două forme de exprimare: una globală, relativă la orice suprafaţă închisă dintr-un câmp electromagnetic şi alta locală relativă la orice punct *P* din câmp.

Forma globală a legii fluxului magnetic

Sub această formă, *legea fluxului magnetic* (*adică fluxul vectorului inducţie magnetică* $\overline{B}$) *se referă la orice suprafaţă închisă* Σ *dintr-un câmp magnetic* Ω *prin care întotdeauna fluxul magnetic* φ_Σ *este egal cu zero*, ceea ce se reprezintă prin modelul:

$$\varphi_\Sigma = 0\,, \tag{1.67}$$

sau –exprimându-se fluxul magnetic prin definiţia sa (1.36)– prin modelul:

$$\oint_\Sigma \overline{B}\cdot \mathrm{d}\overline{A} = 0 \Leftarrow \forall \Sigma \in \Omega\ , \tag{1.67'}$$

în care sensul elementului de arie orientat, $\mathrm{d}\overline{A} = \overline{n}\,\mathrm{d}A \in \Sigma$ este ales convenţional spre exteriorul suprafeţei închise Σ, pe direcţia normalei locale.

Legea (1.67) este general valabilă, fără restricţii.

Legea (1.67') arată că liniile de câmp magnetic, adică axele unor tuburi de flux magnetic unitar (de 1Wb) sunt linii închise. Într-adevăr, considerându-se pe o suprafaţă închisă Σ din câmpul Ω un contur închis Γ (fig. 1.18), care separă suprafaţa Σ în două suprafeţe Σ_1 şi Σ_2 cu $\Gamma = Fr\Sigma_1 = Fr\Sigma_2$, astfel că $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$, legea (1.67') va deveni:

$$\oint_{\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2} \overline{B}\cdot \mathrm{d}\overline{A} = \int_{\Sigma_1} \overline{B_1}\cdot \mathrm{d}\overline{A} + \int_{\Sigma_2} \overline{B_2}\cdot \mathrm{d}\overline{A} = 0\ ,$$

de unde rezultă:

$$\int_{\Sigma_1} \overline{B_1}\cdot \mathrm{d}\overline{A} = -\int_{\Sigma_2} \overline{B_2}\cdot \mathrm{d}\overline{A} \text{ sau } \int_{\Sigma_1} \overline{B_1}\overline{n_1}\mathrm{d}A = -\int_{\Sigma_2} \overline{B_2}\overline{n_2}\mathrm{d}A\ , \tag{1.68}$$

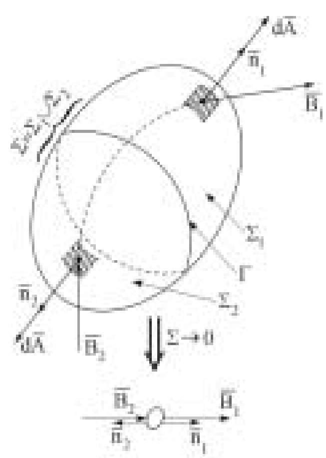

Fig. 1.18

care arată că, la acelaşi sens al orientări lui $\overline{dA}$, oricare ar fi ea pe Σ_1 sau Σ_2 (spre exteriorul suprafeţei Σ): $\overline{B_1}\cdot\overline{n_1} = -\overline{B_2}\cdot(-\overline{n_1})$ căci $\overline{n_2} = -\overline{n_1}$ (v. fig. 1.18) şi –la limită când Σ, care poate fi oricare, tinde către zero ($\Sigma \to 0$)– rezultă că $\overline{B_1}\cdot\overline{n_1} = \overline{B_2}\cdot\overline{n_1}$, ceea ce indică continuitatea liniilor de câmp, fără puncte de convergenţă sau divergenţă (v. fig. 1.18), fapt exprimat –mai evident– de forma locală a fluxului magnetic.

Egalitatea (1.68) arată şi faptul că fluxul magnetic prin orice suprafaţă deschisă Σ_k ce se sprijină pe acelaşi contur $\Gamma = \mathrm{Fr}\Sigma_1 = \mathrm{Fr}\Sigma_2 = ... = \mathrm{Fr}\Sigma_k = ...$ are aceeaşi valoare absolută, adică $\varphi_{\Sigma_1} = \varphi_{\Sigma_2} = ... = \varphi_{\Sigma_k} = ...$.

Legea (1.67) mai arată că, dacă $\varphi_\Sigma = 0$, în interiorul suprafeţei Σ nu mai există elemente care să modifice fluxul magnetic, deci nu există „sarcini" („mase") magnetice separate (de un anumit semn, de exemplu numai Nord sau numai Sud, separate – v. Fizica).

Forma locală a legii fluxului magnetic

Aplicându-se formula lui Gauss-Ostrogradski (v. § 9.1.2) legii (1.67'), rezultă:

$$\oint_\Sigma \overline{B} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = \int_{v_\Sigma} \mathrm{div}\overline{B}(P)\mathrm{d}V = 0 \Leftarrow \forall\Sigma \subset \Omega \ ,$$

şi, deoarece Σ şi volumul v_Σ închis de această suprafaţă sunt oricare din câmp, iar $\mathrm{d}v \neq 0$, mai reiese că în orice punct din câmpul Ω:

(1.69) $$\mathrm{div}\overline{B}(P) = 0 \Leftarrow \forall P \in \Omega \ ,$$

sau (mai simplu scris):

(1.69') $$\mathrm{div}\overline{B} = 0 \ ,$$

care constituie modelul general al formei locale a legii fluxului magnetic. Ea arată că, în orice situaţie, câmpul de inducţie magnetică (şi mai general, câmpul magnetic) este un câmp de divergenţă nulă, care nu are puncte de izvor sau puncte de puţuri magnetice.

Inducţia magnetică pe suprafeţele de discontinuitate

Dacă o suprafaţă deschisă Σ_d separă un domeniu Ω în două domenii omogene, în care inducţia magnetică are valorile diferite $\overline{B}_1$ şi $\overline{B}_2$ atunci în orice punct P al lui Σ_d, la trecerea dintr-un mediu în celălalt, componentele normale la Σ_d ale lui $\overline{B}_1$ şi $\overline{B}_2$ sunt egale, adică:

(1.70) $$B_{1n} = B_{2n} \Leftarrow \forall P \in \Sigma_d \ ,$$

ceea ce înseamnă că *pe suprafeţele de discontinuitate ale inducţiei magnetice componentele sale normale se conservă.*

Această situaţie rezultă din legea fluxului magnetic (1.67') scrisă pentru o suprafaţă închisă foarte mică Σ_c în formă de disc cilindric, cu feţele frontale ΔA_1 şi ΔA_2 (fig. 1.19) situate de o parte şi de alta a suprafeţei de discontinuitate Σ_d în imediata ei apropiere, paralele la Σ_d şi cu suprafaţa laterală S_d normală pe Σ_d închizând punctul $P \in \Sigma$ considerat. „Grosimea" discului d este extrem de mică: $d << \sqrt{\Delta A}$, unde $\Delta A = \Delta A_1 = \Delta A_2$, astfel că idealizat feţele discului ΔA_1 şi ΔA_2 sunt „ lipite " de Σ_d de-o parte şi de alta a sa.

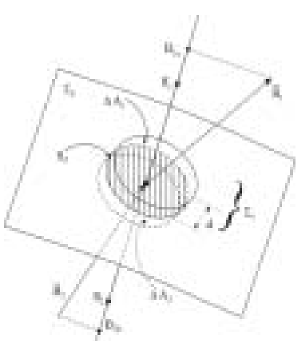

Fig. 1.19

Aplicarea legii (1.67') suprafeţei închise $\Sigma_c = \Delta A_1 + \Delta A_2 + S_d$ duce la:

$$\oint_{\Sigma_c} \overline{B} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = \int_{\Delta A_1} \overline{B}_1 \cdot \overline{n}_1 \mathrm{d}A + \int_{\Delta A_2} \overline{B}_2 \cdot \overline{n}_2 \mathrm{d}A + \int_{S_d} \overline{B} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = 0$$

sau, deoarece la limită (dacă $S_d \to 0$, $\Delta A_1 \to \Delta A$ şi $\Delta A_2 \to \Delta A$) $\int_{S_d} \overline{B} \cdot \mathrm{d}\overline{A} \to 0$, rezultă:

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{n}_1 = -\overline{B}_2 \cdot \overline{n}_2 \quad .$$

Pentru că în conformitate cu convenția de semn a normalei la Σ din legea (1.67'), $\overline{n_1} = -\overline{n_2} = \overline{n}$, iar $\overline{B} \cdot \overline{n} = B 1 \cos\alpha = B_n$ (adică componenta lui $\overline{B}$ după direcția normalei la Σ în punctul P, deci componenta normală a inducției B_n), ultima egalitate devine:

$$\overline{B_1} \cdot \overline{n} = \overline{B_2} \cdot \overline{n} \text{ sau } B_{1n} = B_{2n} ,$$

care este egalitatea (1.70) de conservare a componentelor normale ale inducției magnetice pe suprafețele de discontinuitate.

1.3.3. Legea legăturii între inducția electrică, intensitatea câmpului electric şi polarizația electrică

Este o axiomă care se exprimă numai în formă locală, stabilind că în orice punct *P* dintr-un câmp electric există, în orice moment *t* următoarea relație de legătură:

$$\overline{D}(P,t) = \varepsilon_0 \overline{E}(P,t) + \overline{P}(P,t) \Leftarrow \forall P \in \Omega ,$$

unde $\overline{D}(P,t)$, $\overline{E}(P,t)$, $\overline{P}(P,t)$ sunt vectorii inducției electrice, intensității câmpului electric şi – respectiv– polarizației electrice exprimate ca funcții locale de punct, prin valoarea instantanee, iar ε_0 este permitivitatea vidului (v. § 1.2.3).

Legea legăturii între $\overline{D}, \overline{E}$ şi $\overline{P}$ se exprimă mai simplu prin modelul:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} , \tag{1.71}$$

valabilă fără nici o restricție şi în orice regim de variație în timp a fenomenelor electromagnetice.

1.3.4. Legea legăturii între inducția magnetică, intensitatea câmpului magnetic şi magnetizație.

În orice punct P al unui câmp electromagnetic şi indiferent de regimul lui de variație în timp, între vectorii locali inducție magnetică $\overline{B}$, intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ şi magnetizația $\overline{M}$, exprimate ca valori instantanee, există următoarea relație de legătură:

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H} + \mu_0 \overline{M} , \tag{1.72}$$

unde μ_0 este permeabilitatea vidului (v. § 1.2.3).

Legea (1.72) are caracter general, fiind valabilă fără nici un fel de restricții.

1.3.5. Legea polarizației electrice temporare

Această lege este o lege de material în sensul că ea exprimă axiomatic modul de comportare al diverselor materiale, şi în special al materialelor dielectrice, la introducerea lor într-un câmp electric în ceea ce priveşte polarizarea electrică ca stare ce depinde de valoarea instantanee a intensității câmpului electric, stare cunoscută sub numele de *polarizare electrică temporară.*

Se constată experimental că materialele au o stare de polarizare care depinde esențial de natura (substanța) lor, fizică şi chimică. Astfel, unele materiale au o polarizare electrică existentă în mod natural (intrinsec), independentă de câmpul electric. Altele, deşi în mod natural nu au polarizare electrică, prin introducerea lor într-un câmp electric se polarizează şi –după îndepărtarea lor din câmpul electric– rămân polarizate (ceea ce se cheamă polarizatie electrică remanentă). Sunt şi materiale (ca, de exemplu, cele numite piezoelectrice -v. cap.3) care –în lipsa unui câmp electric exterior şi independent de acesta– se polarizează electric prin deformație mecanică. Despre toate aceste materiale, la care există o polarizatie electrică independentă de existența lor într-un câmp electric exterior, se spune că au *polarizare electrică permanentă.*

Polarizarea electrică permanentă –datorată unor cauze neelectrice– este caracterizată de mărimea *polarizație electrică permanentă* $\overline{P}_p$ (v. § 1. 2.1) care –pentru fiecare material– poate fi determinată prin măsurare (experimental), astfel că în problemele de câmp în dielectrici (v. cap.3) $|\overline{P}_p|$ intervine ca o constantă a materialului, cunoscută în anumite condiții date.

Polarizarea electrică temporară, care se exprimă cantitativ prin mărimea de starea corpurilor denumită *polarizatie electrică temporară* $\overline{P}_t$ (v. § 1.2.1), depinde de intensitatea câmpului electric exterior $\bar{E}$ şi –de aceea– pentru rezolvarea problemelor de câmp electric este necesară cunoaşterea explicită a acestei dependențe $\overline{P}_t = f(\overline{E})$ pentru fiecare material în parte, fapt pe care caută să-1 stabilească această lege a polarizației electrice temporare prin determinarea funcției :

$$\overline{P}_t = f(\overline{E}),$$

care dacă este scrisă pentru valorile absolute, adică $P_t = f(E)$, reprezintă *curba de polarizare electrică* a materialului considerat. După forma acestei curbe, materialele dielectrice se împart în: *liniare,* dacă f(E) = kE unde k este o constantă specifică materialului, şi *neliniare,* precum şi în izotrope şi anizotrope.

Experimental se constată că există materiale la care dependența între polarizația electrică temporară P_t şi intensitatea câmpului electric E poate fi exprimată printr-o relație de proporționalitate directă de forma:

(1.73) $$\overline{P}_t = \chi_e \varepsilon_0 \overline{E},$$

care reprezintă, de fapt, forma clasică a *legii polarizației temporare.* Această lege, în forma (l.73), este puternic restrictivă, fiind valabilă numai pentru materialele dielectrice liniare (căci termenul $\chi_e\varepsilon_0$, de proporționalitate, este strict constant, adică nu depinde de $\overline{E}$, ci numai de natura materialului prin factorul χ_e, cunoscut din paragraful l.2.3, şi numit −după cum ne reamintim− *susceptivitate electrică)* şi izotrope (la care susceptivitatea electrică χ_e, este reprezentabilă printr-o singură valoare reală).

Legea (l.73) mai prezintă restricția că este valabilă în regim static, adică la $E(t)$ = const. (sau $d\bar{E}/dt=0$), şi −în unele cazuri relativ rare− şi în regim aproape staționar (zis şi cvasistaționar) cu $\bar{E}(t)$ având o variație destul de lentă (vocabula "destul" arătând că dE/dt trebuie să fie atât de mică încât legea 1.73 să fie încă respectată).

Exprimându-se acum legea (l.71) a legăturii între vectorii de stare $\overline{D}$, $\overline{E}$ şi $\overline{P}$, în asociere cu legea (l.73), a polarizației electrice temporare, se obține (pentru dielectricii liniari şi izotropi în regim static:

(1.74) $$\overline{D} = \varepsilon_0\overline{E} + \overline{P} = \varepsilon_0\overline{E} + \overline{P}_t + \overline{P}_p = \varepsilon_0\overline{E} + \chi_e\varepsilon_0\overline{E} + \overline{P}_p$$

sau:

$$\overline{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\overline{E} + \overline{P}_p,$$

în care termenul:

(1.75) $$1+\chi_e = \varepsilon_r$$

adică reprezintă *permitivitatea relativă* a materialului, considerat liniar şi izotrop (v. § 1.2.3 şi tabelul 1.1).

Introducându-se în relația (1.74) expresia (1.75) rezultă:

(1.76) $$\overline{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon\overline{E} + \overline{P}_p,$$

deoarece, conform definiției (1.56), $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r = \varepsilon$ (adică *permitivitatea absolută* a materialului liniar şi izotrop).

În sfârşit, pentru corpurile fără polarizație permanentă, $\overline{P}_p = 0$ (un caz întâlnit uzual în aplicațiile practice obişnuite), relația (1.76) devine:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \ . \qquad (1.77)$$

1.3.6. Legea magnetizației temporare

Este o lege de material, destul de restrictivă în raport cu majoritatea materialelor utilizate în tehnică pentru aşa-numitele circuite magnetice (v.cap.6), care stabileşte dependența funcțională $\overline{M}_t = f(\overline{H})$ dintre magnetizația magnetică temporară $\overline{M}_t$ şi intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ exterior, în care a fost introdus materialul.

Din punctul de vedere al magnetizării, materialele se comportă foarte diferit, putând avea sau nu magnetizație permanentă $\overline{M}_p$ şi putând avea o magnetizație temporară $\overline{M}_t$ astfel încât, față de intensitatea câmpului magnetic exterior, materialul să fie liniar sau nu şi izotrop sau anizotrop.

"Ab initio", legea magnetizației temporare a fost elaborată pentru materialele considerate ideal, ca liniare şi izotrope, la care magnetizația temporară este direct proporțională, printr-un factor constant (notat cu χ_m şi numit *susceptivitate magnetică* a materialului – v. § l.2.3 şi tabelul l.2), cu intensitatea câmpului magnetic şi are modelul:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H} \ , \qquad (1.78)$$

lege care are şi restricția de a fi valabilă numai în regim static (cu $\mathrm{d}\overline{H} / \mathrm{d}t = 0$) sau la valori ale variației în timp a câmpului magnetic $\mathrm{d}\overline{H} / \mathrm{d}t = 0$ suficient de lente.

Marea majoritate a elementelor chimice sau a substanțelor naturale sunt liniare şi izotrope din punctul de vedere al magnetizării; mai mult, majoritatea materialelor au susceptivitatea magnetică χ_m foarte mică (de ordinul $l0^{-6}$), negativă la substanțele diamagnetice şi pozitivă la cele paramagnetice (v. tabelul 1.2).

În aplicațiile practice, din electrotehnică (ca de exemplu în cazul circuitelor magnetice –v. cap.6– al maşinilor electrice, transformatoarelor, unor relee şi servomecanisme etc.) se folosesc materiale cu χ_m (deci şi μ_r) foarte mari, de ordinul $10^3...10^7$, care sunt materiale magnetice de tip feromagnetic (v. subcap. 6.2), marea majoritate fiind aliaje pe bază de fier, nichel, cobalt ş.a. ce constituie materiale neliniare din punctul de vedere al magnetizării, adică au o *curbă de magnetizare* $M = \mathrm{f}(H)$ puternic neliniară (cu saturație, histerezis, remanență etc. –v. subcap. 6.2).

Unele substanțe, în special cristaline, prezintă anizotropie magnetică, deşi sunt liniare în ceea ce priveşte dependența magnetizației temporare $\overline{M}_t$ de $\overline{H}$. În acest caz susceptivitatea magnetică este un tensor ce se exprimă printr-o matrice cu nouă componente, toate valori scalare constante în funcție de $\overline{H}$, însă diferite în raport cu componentele H_v $(v = x, y, z)$ ale intensității câmpului magnetic şi față de componentele $M_u$$(u = x, y, z)$ ale magnetizației temporare $\overline{M}_t$ (v. subcap. 6.2).

Dacă se exprimă legea (1.72), a legăturii între vectorii $\overline{B}$, $\overline{H}$ în asociere cu legea (1.78), a magnetizației temporare, se va obține (pentru materialele liniare şi izotrope din punctul de vedere al magnetizării, aflate în câmp magnetic static sau cvasistaționar) următoarele modele:

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H} + \mu_0 \overline{M} = \mu_0 \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_t + \mu_0 \overline{M}_p$$

deoarece, în principiu, $\overline{M} = \overline{M}_t + \overline{M}_p$;

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H} + \mu_0 \chi_m \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p \, .$$

Dacă notăm $1 + \chi_m = \mu_r$, adică *permeabilitatea relativă* a materialului, relația precedentă devine:

$$\overline{B} = \mu_0 \mu_r \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p \ ,$$

în care, conform relației (1.58), $\mu_0\mu_r = \mu$ (permeabilitatea absolută a materialului considerat), rezultând în continuare:

(1.79) $$\overline{B} = \mu\overline{H} + \mu_0\overline{M}_P \ ,$$

care, atunci când materialele liniare şi anizotropic magnetic nu au magnetizaţie permanentă ia forma:

(1.80) $$\overline{B} = \mu\overline{H}$$

1.3.7. Legea inducţiei electromagnetice

Experienţa arată că variaţia în timp a unui câmp magnetic are ca efect apariţia unui câmp electric şi invers, variaţia în timp a unui câmp electric duce la apariţia unui câmp magnetic.

Legea inducţiei electromagnetice, stabilită experimental, determină cantitativ efectul electric al câmpului magnetic şi condiţiile în care un câmp magnetic produce câmp electric. Legea inducţiei electromagnetice este o lege general valabilă, fără restricţii. Ea se poate exprima prin două modele identice ca rezultat, dar formal diferite: un model integral (global, relativ la orice contur închis Γ dintr-un câmp Ω) şi altul local (relativ la orice punct P din câmpul Ω).

Modelul global al legii inducţiei electromagnetice

Fie Γ un contur închis, oricare, din domeniul Ω de existenţă a unui câmp electromagnetic. Se numeşte **inducţie electromagnetică** fenomenul producerii unei tensiuni electromotoare e_Γ –într-un circuit (conductor) în care a fost ales conturul Γ, sau a unei tensiuni electrice u_Γ – în cazul general al unui contur închis Γ aflat indiferent în ce mediu (conductor, izolant sau/şi vid), datorită variaţiei în timp a fluxului magnetic prin orice suprafaţă Σ_Γ ce se "sprijină" pe conturul Γ (adică cu $\mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma = \Gamma$). Sensul t.e.m. e_Γ , sau a tensiunii electrice în lungul curbei u_Γ , este astfel încât efectele lor să se opună cauzei care le-a produs, aceasta în virtutea unui principiu universal al echilibrului natural (care nu admite creşteri paroxistice), cunoscut şi sub forma unităţii dialectice dintre contrarii (enunţată de Hegel), adică dintre acţiune şi reacţiune sau dintre cauză şi efect. Acesta este aspectul calitativ al fenomenului inducţiei electromagnetice.

Legea inducţiei electromagnetice exprimă cantitativ acest fenomen determinând că: *tensiunea electromotoare* e_Γ *produsă prin inducţie electromagnetică în lungul unui contur închis* Γ *este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic* φ_{Σ_Γ} *prin orice suprafaţă* Σ_Γ *mărginită de conturul* Γ, ceea ce se exprimă prin modelul:

(1.81) $$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{\Sigma_\Gamma}}{\mathrm{d}t} \Leftarrow \forall\, \Gamma \subset \Omega \quad \text{cu} \quad \Gamma = \mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma \ ,$$

care reprezintă forma globală a legii inducţiei electromagnetice şi în care $\mathrm{d}\varphi_{\Sigma_\Gamma}/\mathrm{d}t$ reprezintă derivata substanţială în raport cu timpul (v. § 9.1.2) a fluxului magnetic, semnul minus al acestei derivate modelând principiul acţiunii şi reacţiunii. (Se mai poate da şi următoarea explicaţie: dacă Γ este un contur închis într-un corp conductor –de pildă, o spiră conductoare închisă, adică o buclă de curent– atunci în spiră/buclă, t.e.m e_Γ determină o stare electrocinetică, descrisă de un curent electric i_Γ , care prin efectul ei magnetic –conform legii circuitului magnetic /v. § 1.3.8– va crea un câmp magnetic al cărui flux magnetic va acţiona ca element de reacţie faţă de fluxul primar φ_{Σ_Γ} prin a cărui variaţie, ca element de acţiune, s-a indus t.e.m e_Γ care a produs starea electrocinetică ce a dus la fluxul magnetic de reacţie etc.). Se pot da şi alte justificări aşa cum este cea energetică prezentată în cartea *Timotin, A.,Hartopan, V.(l964)*.

Legea (1.81) se scrie, mai simplu, şi în forma:

$$e = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t \ , \tag{1.81'}$$

o astfel de tensiune electromotoare numindu-se *tensiune electromotoare de inducție.*

Ținându-se seama de definiția t.e.m. (1.45), reiese că e_Γ este rezultatul circulației intensității unui câmp electric, produs de variația în timp a fluxului magnetic, care se notează cu $\bar{E}_s$ şi se numeşte *câmp electric de inducție* sau *câmp solenoidal* (de unde şi indicele s). Atunci, conform relației (1.49) şi în lipsa unui câmp electric imprimat $\left(\overline{E}_i = 0\right)$, t.e.m. de inducție electromagnetică e_Γ se poate exprima prin circulația lui $\overline{E}_s$ de-a lungul conturului închis Γ:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \overline{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}l} \ . \tag{e}$$

Pe de altă parte, avându-se în vedere definiția (1 .36) a fluxului magnetic, rezultă că membrul din dreapta al legii (1.81) se poate scrie sub forma:

$$-\frac{\mathrm{d}\varphi_{\Sigma_\Gamma}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} \ . \tag{φ}$$

Atunci, înlocuindu-se în modelul (1.81) membrul din stânga cu expresia (e) şi cel din dreapta cu expresia (φ), rezultă o nouă formulă globală (integrală) a legii inducției electromagnetice şi anume:

$$\oint_\Gamma \overline{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} \ . \tag{1.81''}$$

În legătură cu aceste două modele, formal diferite (1.81) şi (1.81"), ale legii inducției electromagnetice sunt necesare câteva precizări:

- conturul închis Γ poate fi unul oarecare din domeniul Ω de existență al câmpului electromagnetic, însă în aplicațiile practice ale electrocineticii Γ se alege în lungul unui conductor electric filiform (de exemplu în lungul spirelor unei bobine electrice, care – în engleză numindu-se *solenoid* / cuvânt de proveniență latină / a făcut să se dea lui $\overline{\mathrm{E}}_\mathrm{s}$ denumirea de câmp solenoidal, având în vedere că primul fizician care a studiat fenomenul inducției electromagnetice a fost englezul Faraday, în anul 1831, experimentele facându-se în special pe bobine / solenoizi). în principiu, conturul închis Γ poate fi ales –ca un caz general– în orice fel de mediu (conductor, izolant sau/şi vid) şi poate avea orice formă;
- dacă mediul considerat este în mişcare, conturul Γ este ataşat corpurilor în mişcarea lor;
- sensul de integrare pe conturul Γ din relația (1.81"), adică sensul elementului de curbă orientat $\overline{\mathrm{d}l}$, şi sensul elementului de arie orientat $\overline{\mathrm{d}A} = \overline{n}\mathrm{d}A$ din expresia fluxului al relației (1.81"), mai precis sensul versorului normalei localei $\overline{n}$ la suprafața Σ_Γ prin care se determină fluxul magnetic, sunt asociate după regula sistemului drept (aşa-zisa "regulă a burghiului drept"). Semnul „minus” din modelul (1 .81") reflectă faptul că derivata lui φ_{Σ_Γ} şi e_Γ au sensurile asociate invers regulii sistemului drept, datorită necesității de modelare a principiului acțiunii şi reacțiunii ce intervine în acest fenomen.

Dacă, în continuare se efectuează derivata din membrul drept al formei (1.81") a legii inducției electromagnetice, care reprezintă –în fapt– derivata substanțială (materială) a fluxului magnetic în raport cu timpul (v.§ 9. 1 .2), deoarece vectorul inducției magnetice $\overline{B}$ este o funcție de timp şi de punct P (cu coordonatele x, y, z într-un sistem de referință cartezian), adică $\overline{B} = \overline{B}(t,P) = \overline{B}(t,x,y,z)$, atunci derivata din membrul drept al legii (1.81") este dată de relația (9.44) fiind:

$$-\frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = -\int_{\Sigma_\Gamma} \frac{\mathrm{d}_f \overline{B}(t,x,y,z)}{\mathrm{d}t} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = -\int_{\Sigma_\Gamma} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot \overline{\mathrm{d}A} - \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{w}\,\mathrm{div}\overline{B} \cdot \overline{dA} - \int_{\Sigma_\Gamma} \mathrm{rot}(\overline{B} \times \overline{w}) \cdot \overline{\mathrm{d}A} \ ,$$

indicele f ataşat operatorului de derivare indicând faptul că se referă la flux, astfel că forma integrală (1.81") a legii inducției electromagnetice ia forma, ştiind că în conformitate cu legea fluxului magnetic (1 .69') $\mathrm{div}\,\overline{B} = 0$:

$((1.81)''')$ $$\int_{\Gamma}\overline{E}_s\cdot\overline{\mathrm{d}l}=-\int_{\Sigma_\Gamma}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}\cdot\overline{\mathrm{d}A}-\int_{\Sigma_\Gamma}\mathrm{rot}(\overline{B}\times\overline{w})\cdot\overline{\mathrm{d}A}\ .$$

Modelul local al legii inducției electromagnetice

Dacă proprietățile fizice locale îndeplinesc condițiile de continuitate, atunci –aplicându-se formula lui Stokes (9.28), potrivit căreia circulația unui vector este egală cu fluxul rotorului acelui vector printr-o suprafață delimitată de conturul circulației (v. § 9.1.2)– membrul stâng al legii (1.81''') devine:

$$\int_{\Gamma}\overline{E}_s\cdot\overline{\mathrm{d}l}=\int_{\Sigma_\Gamma}\mathrm{rot}\overline{E}_s\cdot\overline{\mathrm{d}A},$$

astfel că legea $(1.81''')$ poate fi rescrisă sub forma următorul model:

(1.81^{IV}) $$\int_{\Sigma_\Gamma}\mathrm{rot}\overline{E}_s\cdot\overline{\mathrm{d}A}=\int_{\Sigma_\Gamma}-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}\cdot\overline{\mathrm{d}A}-\int_{\Sigma_\Gamma}\mathrm{rot}(\overline{B}\times\overline{w})\cdot\overline{\mathrm{d}A}.$$

Deoarece suprafața Σ_Γ se alege arbitrar, putând fi oricare suprafață ce îndeplineşte condiția $\mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma=\Gamma,$ rezultă că modelul (1.81^{IV}) poate fi scris şi sub forma:

(1.82) $$\mathrm{rot}\overline{E}_s=-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}-\mathrm{rot}\left(\overline{B}\times\overline{w}\right),\Leftarrow\forall P\in\Omega,$$

unde $\overline{w}$ este viteza de deplasare a conturului închis Γ în domeniul Ω al câmpului electromagmetic, asociată unor corpuri.

Modelul (1.82) reprezintă*, forma locală generală a legii inducției electromagnetice*. Pentru corpurile imobile, deci în punctele în care $\overline{w}=0$, legea (1.82) are forma:

$(1.82')$ $$\mathrm{rot}\overline{E}_s=-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}\cdot$$

Legea inducției electromagnetice sub forma locală (1.82) arată că în cazul câmpului electromagnetic variabil în timp poate apare, la orice variație a câmpului magnetic, un câmp electric a cărei intensitate (ce a fost notată cu $\overline{E}_s$) are rotorul diferit de zero, adică se produce un *câmp electric rotațional* $(\mathrm{rot}\overline{E}_s\neq 0)$. Deci câmpul electric indus (câmpul solenoidal) $\overline{E}_s$, condiționat de variația în timp a câmpului magnetic, are liniile de câmp închise sau aproape închise (adică închise la infinit) şi atunci $\int_{\Gamma:A\to B}\overline{E}_s\cdot\overline{\mathrm{d}l},$ adică *integrală curbilinie a intensității câmpului electric solenoidal* $\overline{E}_s$ între două puncte din câmpul, *A şi B, depinde de drum*, deci de curba Γ dintre *A şi B*, ceea ce înseamnă că în câmpul solenoidal nu se poate definii un potențial electric în sensul arătat în paragraful 1.2.2.

Câmpul solenoidal pe suprafețele de discontinuitate

În cazul suprafeței de discontinuitate Σ_d , legea inducției electromagnetice –sub forma $(1.81'')$ – se aplică unui contur închis foarte mic, în formă de dreptunghi (fig.1.20) cu $\Gamma=\Delta l_1+\Delta l_2+2d$, cu laturile Δl_1 şi Δl_2 paralele cu Σ_d, situate de o parte şi de alta lui Σ_d , şi având $\Delta l_1=\Delta l_2>>d$, cu d $\perp\Sigma_d$.

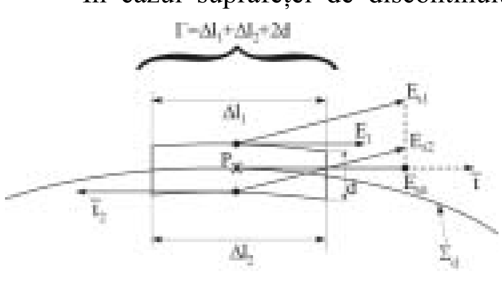

Fig. 1.20

Dacă $d\ \rightarrow\ 0$, atunci şi orice suprafață mărginită de Γ, Σ_Γ, va tinde către zero $\left(\Sigma_\Gamma\rightarrow 0\right)$ şi –în aceste condiții– fluxul magnetic prin Σ_Γ şi deci şi derivatele lui vor tinde către zero. În această situație idealizată de trecere la zero, conturul dreptunghiular Γ devine strâns alipit de suprafața de discontinuitate Σ_d în jurul unui punct $P \in \Sigma_\Gamma$ (v.fig.1.20), ceea ce permite ca legea (1.81") să se scrie sub forma:

$$\lim_{\substack{d \to 0 \\ P \in \Sigma_\Gamma}} \oint_{\Gamma = 2\Delta l + 2d} \overline{E_s}(P) \cdot \overline{\mathrm{d}l} = 0,$$

adică:

$$\oint_\Gamma \overline{E_s} \cdot \overline{\mathrm{d}l}\Big|_P = \int_{\Delta l_1} \overline{E_{s_1}} \cdot \overline{\mathrm{d}l} + \int_{\Delta l_2} \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{\mathrm{d}l} + \lim_{d \to 0} \int_{2d} \overline{E_s} \cdot \overline{\mathrm{d}l}\Big|_P = 0,$$

sau, deoarece la limită:

$$\int_{2d} \overline{E_s} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = 0$$

şi

$$\int_{\Delta l_1} \overline{E_{s_1}} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \overline{E_{s_1}} \cdot \overline{\Delta l} = \overline{E_{s_1}} \cdot \overline{t_1} \Delta l \ ,$$

iar

$$\int_{\Delta l_2} \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{\Delta l_2} = \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{t_2} \Delta l \,,$$

unde versorii tangentelor la Γ pe Δl_1 şi Δl_2 sunt $\overline{t_1} = -\overline{t_2} = \overline{t}$, astfel că:

$$\oint_\Gamma \overline{E_s} \cdot \overline{\mathrm{d}l}\Big|_P = \overline{E_{s_1}} \cdot \overline{t} \Delta l - \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{t} \Delta l = 0,$$

de unde rezultă:

$$\overline{E_{s_1}} \cdot \overline{t} - \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{t} = 0 \ \text{ sau } \ \overline{E_{s_1}} \cdot \overline{t} = \overline{E_{s_2}} \cdot \overline{t}$$

Însă $\overline{E_{s_1}} \cdot \overline{t} = \overline{E_{s_1}}\, 1 \cos\left(\overline{E_{s_1}}, \overline{t}\right) = \left(E_s\right)_{t_1}$ şi $\left(\hat{E}_{s_1}, \overline{t}\right) = \left(E_s\right)_{t_2}$, care sunt componentele tangențiale la suprafața Σ_d ale intensităţi câmpului electric solenoidal în $\forall P \in \Sigma_d$, rezultând în final:

$$\left(E_s\right)_{t_1} = \left(E_s\right)_{t_2},$$

ceea ce arată că, la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, *componenta tangențială a câmpului electric solenoidal se conservă.* În consecință liniile de câmp electric solenoidal (şi în general liniile de câmp electric – v. cap.2) se refractă la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate.

1.3.8. Legea circuitului magnetic

Această lege stabileşte sub aspect cantitativ efectul magnetic al câmpului electric (variabil în timp) şi al corpurilor aflate în stare electrocinetică. În Fizică ea este denumită adesea „legea inducției magnetoelectrice “, însă denumirea uzuală de „lege a circuitului magnetic” se datorează aplicației pe care îl are modelul acestei legi în practică, la calculul circuitelor magnetice (v.cap.6).

Experiența arată că în jurul corpurilor conductoare aflate în regim electrocinetic, caracterizate de intensitățile curenților de conducție *i*, se produce un câmp magnetic atâta timp cât $i \neq 0$, acest fenomen reprezentând efectul magnetic al electrocineticii. Tot experiența arată că dacă printr-o suprafață oarecare deschisă există un flux electric ψ variabil în timp se produce un câmp magnetic, a cărui intensitate în punctele de pe conturul ce mărgineşte suprafața depind de viteza de variație a fluxului electric, astfel că dacă $\mathrm{d}\psi / \mathrm{d}t = 0$ câmpul magnetic dispare. Aceste fapte reprezintă aspectul fenomenologic-calitativ, al efectului magnetic al câmpului electric şi electrocinetic.

Legea circuitului magnetic stabileşte pe cale experimentală, fie printr-un model la scară globală (integral), fie prin unul local (de punct), legătura cantitativă dintre mărimile de stare: intensitate a câmpului magnetic $\overline{H}$ –pe de o parte– şi intensitatea curentului de conducție *i* (eventual densitatea de curent $\overline{J}$) şi fluxul electric ψ (eventual inducţia electrică $\overline{D}$) – pe de altă parte.

Modelul integral al legii circuitului magnetic

Dacă întru-un domeniu Ω, de existenţă a câmpului electromagnetic, se consideră un contur închis oarecare $\Gamma \subset \Omega$ şi o suprafaţă oarecare Σ_Γ mărginită de acest contur $\left(\mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma = \Gamma\right)$, astfel încât conturul Γ înlănţuie corpurile aflate în stare electrocinetică determinată de curenţi de conducţie cu intensităţile $i_k\left(k = 1,2,...,n\right)$ şi/sau prin suprafaţă Σ_Γ există un flux electric ψ_{Σ_Γ} variabil în timp cu viteza de variaţie $\mathrm{d}\psi_{\Sigma_\Gamma} / \mathrm{d}t$, atunci în fiecare punct $P \in \Gamma$ va exista un câmp magnetic cu intensitatea $\overline{H}(P)$ a cărui circulaţie pe conturul Γ, care reprezintă tensiunea magnetomotoare F_m, definită de relaţia (1.51), adică $F_m = \oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}l},$ este egală cu suma intensităţilor curenţilor de conducţie prin suprafaţa Σ_Γ, adică $\sum_{k=1}^{n} i_k = i_{\Sigma_\Gamma}$, plus viteza de variaţie în timp a fluxului electric ψ_{Σ_Γ} prin suprafaţa Σ_Γ, adică $\mathrm{d}\psi_{\Sigma_\Gamma} / \mathrm{d}t$ (fig.1.21).

Această formulare narativă se poate înlocui cu modelul:

(1.83) $$F_m = i_{\Sigma_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}\psi_{\Sigma_\Gamma}}{\mathrm{d}t} \Leftarrow \forall \Sigma_\Gamma \subset \Omega$$

unde:

$F_m = \oint_\Gamma \overline{H}(P) \cdot \overline{\mathrm{d}l}$ – tensiunea electromotoare (t.m.m.) $P \in \Gamma \subset \Omega$

$$i_{\Sigma_\Gamma} = \sum_k i_k \Big|_{\Sigma_\Gamma} = \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A},$$

în care $\overline{J}$ este densitatea curentului de conducţie determinată în punctele $P \in \Sigma_\Gamma$ de corpurile aflate în stare electrocinetică şi:

(1.84) $$\frac{\mathrm{d}\psi_{\Sigma_\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}t} \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A}.$$

Modelul (1.83) care reprezintă formula integrală (globală, relativă la conturul Γ din câmp) a legii circuitului magnetic se poate scrie, ţinând seama de expresiile precedente, şi în formlele:

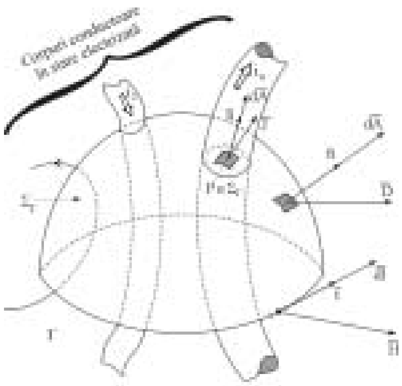

Fig.1.21

$(1.83')$ $$\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \Sigma_i \Big|_{\Sigma_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}\psi_{\Sigma_\Gamma}}{\mathrm{d}t} \Leftarrow \forall \Gamma \subset \Omega \text{ cu } \Gamma = \mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma,$$

sau, mai simplu:

$(1.83'')$ $$\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \left| \Sigma i + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \right|_{\Sigma_\Gamma},$$

precum şi:

$(1.83''')$

$$\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A} + \frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}t} \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} \Leftarrow \forall \Gamma \in \Omega \text{ cu } \Gamma = \mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma.$$

Sensul elementului de arie orientat $\overline{\mathrm{d}A} = \overline{n}\mathrm{d}A \subset \Sigma_\Gamma$, deci sensul normalei $\overline{n}$ la suprafaţa Σ_Γ, este corelat cu sensul elementului de curbă orientat $\overline{\mathrm{d}l} = \overline{t}\mathrm{d}t \subset \Gamma$, deci cu sensul tangentei $\overline{t}$ la curba Γ după regula sistemului drept (regula „burghiului drept”), conform schiţei din figura 1.21.

În cazul corpurilor în mişcare, conturul Γ şi suprafaţa Σ_Γ mărginită de acest contur, trebuie ataşate corpurilor şi antrenate cu viteza $\overline{w}$ de deplasarea corpurilor, ceea ce explică că în modelul $(1.83''')$ s-a considerat derivata substanţială (materială) $\mathrm{d}_f/\mathrm{d}t$ a fluxului electric în raport cu timpul (v.§ 9.1.2).

Termenii: i_{Σ_Γ} sau $\Sigma i\big|_{\Sigma_\Gamma}$ sau Σi, din modelele (1.83), $(1.83')$ şi $(1.83'')$, care reprezintă suma algebrică a curenţilor ce caracterizează starea electrocinetică a conductorilor ce străbat suprafaţa Σ_Γ, poartă denumirea de **solenaţie**, care se notează cu θ_{Σ_Γ} (sau în general cu θ) şi este în fapt o mărime de stare electrocinetică globală a corpurilor printr-o secţiune totală Σ_Γ, dusă prin corpuri dar mărginită pe conturul Γ (v.fig.1.21). În suma $\theta = \Sigma i$, curenţi au sensul + sau – după cum rezultă din asocierea lor cu semnul lui $\overline{H}$ de pe conturul Γ conform regulii burghiului drept (astfel, pentru figura 1.21, solenaţia este $\theta_{\Sigma_\Gamma} = i_1 - i_2 + i_n$).

Relaţia (1.84), a derivatei substanţiale a fluxului magnetic în raport cu timpul, are dimensiunile unui curent, căci:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[\mathrm{D}][L]^2}{[t]} = \frac{[Q][L]^{-2}[L]^2}{[t]} = \frac{[Q]}{[t]} = [I] \ , \tag{1.85}$$

căci, în conformitate cu legea fluxului electric $(1.65')$ şi ecuaţia dimensională (1.35) $[D] = [Q][L]^{-2}$ şi în conformitate cu legea conservării sarcinii electrice, prezentată în paragraful ce urma (v.§.1.3.9), aşa cum rezultă din modelul (1.91), termenul dimensional $[Q][t]^{-1}$ are dimensiunea $[I]$ a curentului electric. De aceea (precum şi din alte motive ce vor fi arătate în subcapitolul 4.2), derivata fluxului electric prin suprafaţa Σ_Γ este denumită **intensitatea curentului hertzian** prin Σ_Γ, notat cu $i_{Hz\Sigma_\Gamma}$, şi definit prin:

$$i_{Hz\Sigma_\Gamma} \overset{D}{=} \frac{\mathrm{d}\psi_{\Sigma_\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{D} \cdot \mathrm{d}\overline{A} \, . \tag{1.86}$$

Transcriindu-se, dimensional legea circuitului magnetic sub formula modelului $(1.83'')$, rezultă dimensiunea intensităţii câmpului magnetic [H], precum şi a t.m.m. $[F_m] = [H][L]$ sau tensiunii magnetice $[u_m] = [H][L]$:

$$[H][L] = [I] + [I] \quad \text{deci} \quad [H] = [I][L]^{-1} \quad , \tag{1.87}$$

ceea ce explică şi unitatea de măsură SI aleasă pentru intensitatea câmpului magnetic, de amper pe metru (A/m).

Modelul local al legii circuitului magnetic

Plecând de la formula integrală $(1.83''')$ a acestei legi în care membrul din stânga poate fi scris conform teoremei lui Stokes (9.28) ca flux al rotorului câmpului magnetic $\overline{H}$ prin suprafaţa Σ_Γ, adică:

$$\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \mathrm{d}\overline{l} = \int_{\Sigma_\Gamma} \mathrm{rot}\overline{H} \cdot \mathrm{d}\overline{A},$$

iar termenul din membrul drept, al derivatei substanţiale a fluxului electric în raport cu timpul cu dezvoltarea (9.44), adică:

$$\frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{D} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = \int_{\Sigma_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\overline{A} + \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{w}\,\mathrm{div}\overline{D} \cdot \mathrm{d}\overline{A} + \int_{\Sigma_\Gamma} \mathrm{rot}\left(\overline{D \times \overline{w}}\right) \cdot \mathrm{d}\overline{A},$$

rezultă că legea $(1.83''')$ devine:

$$\int_{\Sigma_\Gamma} \mathrm{rot}\overline{H}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{J}\cdot\overline{\mathrm{d}A} + \int_{\Sigma_\Gamma} \tfrac{\partial\overline{D}}{\partial t}\cdot\overline{\mathrm{d}A} + \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{w}\,\mathrm{div}\overline{D}\cdot\overline{\mathrm{d}A} + \int_{\Sigma_\Gamma} \mathrm{rot}\left(\overline{\mathrm{D}}\times\overline{\mathrm{w}}\right)\cdot\overline{\mathrm{d}A} \quad , \qquad (1.83^{\mathrm{IV}})$$

care este o nouă formă de exprimare integrală (global, relativ la orice suprafaţă Σ_Γ) a legii circuitului magnetic. Dimensiunile tuturor termenilor din membrul drept este aceea de curent electric şi ei au fost denumiţi, în ordine:

$\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{J}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = i_{\Sigma_\Gamma}$ - intensitatea curentului de conducţieprin suprafaţa Σ_Γ ,

$\int_{\Sigma_\Gamma} \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = i_{\mathrm{d}\Sigma_\Gamma}$ - *curentul de deplasare* prin suprafaţa Σ_Γ ,

$\int_{\Sigma_\Gamma} \overline{w}\,\mathrm{div}\overline{D}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \int_{\Sigma_\Gamma} \overline{w}q_v\cdot\overline{\mathrm{d}A} = i_{i\Sigma_\Gamma}$ - *curent de convecţie* prin suprafaţa Σ_Γ ,

deoarece conform legii fluxului electric (1.66) $div\,\overline{D} = q_v$;

$\int_{\Sigma_\Gamma} \mathrm{rot}\left(\overline{\mathrm{D}}\times\overline{\mathrm{w}}\right)\cdot\overline{\mathrm{d}A} = i_{R\Sigma_\Gamma}$ *– curentul Roentgen teoretic*,

$\overline{w}$ fiind viteza unui corp dielectric ce conţine conturul $\Gamma = \mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma$, care în teoria macroscopică clasică a câmpului electromagnetic nu poate fi justificat şi evidenţiat experimental, efectul acestui termen fiin practic neglijabil[4].

Cu aceste notaţii, legea circuitului magnetic are şi un alt model integral şi anume:

(1.83^V) $$F_{m_\Gamma} = i_{\Sigma_\Gamma} + i_{d\Sigma_\Gamma} + i_{c\Sigma_\Gamma} + i_{R\Sigma_\Gamma} \Leftarrow \forall\Gamma\subset\Omega \text{ cu } \mathrm{Fr}\Sigma_\Gamma = \Gamma .$$

Asupra curenţilor care intervin în această relaţie se va reveni pe larg în subcapitolul 4.2.

În domeniile de continuitate, forma locală a legii circuitului magnetic se obţine imediat din forma integrală (1.83^V), ştiindu-se că suprafaţa Σ_Γ este arbitrară (oricare din câmp), fiind:

(1.88) $$\mathrm{rot}\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} + \overline{w}q_v + \mathrm{rot}\left(\overline{D}\times\overline{w}\right) \Leftarrow P\in\Omega \ ,$$

în care q_v este densitatea de volum a sarcinii electrice din punctul P, $\overline{H}$, $\overline{J}$ şi $\overline{D}$ sunt vectorii de stare din acelaşi punct P, iar $\overline{w}$ este viteza pe care o are un corp în puctul P, unde există densitatea q_v.

Deoarece, după cum se va vedea şi în subcapitolul 4.2, ultimii trei termeni din membrul drept reprezintă densităţi de curent (ca şi $\overline{J}$ care este densitatea curentului de conducţie) şi anume: $\partial\overline{D}/\partial t = \overline{J}_d$ –densitatea (de suprafaţă) a curentului de deplasare, $\overline{w}q_v = \overline{J}_c$– densitatea curentului de convecţie şi $\mathrm{rot}\,(\overline{D}\times\overline{w}) = \overline{J}_R$ - densitatea curentului Roentgen teoretic, atunci legea locală a circuitului magnetic mai are o formă şi anume:

(1.88′) $$\mathrm{rot}\ \overline{H} = \overline{J} + \overline{J}_d + \overline{J}_c + \overline{J}_R .$$

care dimensional se verifică prin $\frac{1}{[L]}\frac{[I]}{[L]} = [J]$ sau $[I][L]^{-2} = \frac{[I]}{[L]^2}$.

Dacă în câmp nu sunt corpuri mobile (deci $\overline{w} = 0$), atunci legea circuitului magnetic locală, în medii continue, devine:

(1.88″) $$\mathrm{rot}\ \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t},$$

[4]Experienţele efectuate de fizicianul german Roentgen [Wilhelm Conrad Röntgen, 1845-1923], care a studiat în special fenomenul descărcărilor electrice în gaze, au arătat că expresia curentului i_R, care ar putea justifica efectele magnetice ale variaţiei în timp a fluxului electric, ar trebui să fie $i_R = \int_\Sigma \mathrm{rot}\left(\overline{P}\times\overline{w}\cdot\overline{\mathrm{d}A}\right)$ ceea ce nu rezultă din dezvoltarea derivatei $\mathrm{d}_f\psi/\mathrm{d}t$.

formă foarte frecventă în practică, ca şi $\text{rot}\overline{H} = \overline{J} \Rightarrow \overline{D} = \text{const.}$ (când $\partial\overline{D}/\partial t = 0$).

În cazul unor suprafeţe de discontinuitate Σ_d din câmpul Ω, se consideră ca şi în figura 1.20, un contur închis foarte mic dreptunghiular $\Gamma = \Delta l_1 + \Delta l_2 + 2d$, cu $d = \Delta l_1 = \Delta l_2$ ce delimitează o suprafaţă foarte mică Σ_Γ. Dacă $d \to 0$, atunci $\Sigma_\Gamma \to 0$ şi în punctul $P \in \Sigma_d$ către care se restrânge (la limită) Γ rezultă:

$$\lim_{\substack{d\to 0\\ P\in\Sigma_\Gamma}} \oint_{\Gamma=2\Delta l+2d} \overline{H}(P)\cdot \overline{\mathrm{d}l} = 0$$

adică:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\cdot\overline{\mathrm{d}l}\Big|_P = \int_{\Delta l_1}\overline{H}_1\cdot\overline{\mathrm{d}l} + \int_{\Delta l_2}\overline{H}_2\cdot\overline{\mathrm{d}l} + \lim_{d\to 0}\int_{2d}\overline{H}_1\cdot\overline{\mathrm{d}l} = 0 \quad ,$$

sau, deoarece la limită, $\int_{2d}\overline{H}_1\cdot\overline{\mathrm{d}l} \to 0$ şi $\int_{\Delta l_1}\overline{H}_1\cdot\overline{\mathrm{d}l} = \overline{H}_1\cdot\Delta\overline{\mathrm{d}l}_1 = \overline{H}_1\cdot\overline{t}\Delta l_1$, iar $\int_{\Delta l_2}\overline{H}_2\cdot\overline{\mathrm{d}l} = \overline{H}_2\cdot\Delta\overline{\mathrm{d}l}_2 =$ $= \overline{H}_2\cdot\overline{t}\Delta l_2$ unde versorii tangentelor la Γ pe Δl_1 şi Δl_2 sunt $\overline{t_1} = -\overline{t_2} = \overline{t}$, relaţia precedentă devine:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\cdot\overline{\mathrm{d}l}\Big|_P = \overline{H}_1\cdot\overline{t}\Delta l - \overline{H}_2\cdot\overline{t}\Delta l = 0$$

de unde rezultă:

$$(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)\cdot\overline{t} = 0$$

sau:

$$H_{1t} = H_{2t} \Leftarrow P \in \Sigma_d, \tag{1.89}$$

care modelează faptul că în câmpul magnetic, *în punctele unei suprafeţede discontinuitate componentele tangenţiale H_t ale intensităţii câmpului magnetic se conservă* la trecerea dintr-un mediu în altul prin suprafaţa de discontinuitate. Aceasta, împreună cu faptul că pe Σ_d componentele normale B_n ale inducţiei magnetice se conservă –conform relaţiei (1.70)– arată că la trecerea printr-o suprefaţă de discontinuitate liniile de câmp magnetic se refractă.

1.3.9. Legea conservării sarcinii electrice

Experienţa arată că un sistem de corpuri electrizate, dacă nu schimbă energie (lucru mecanic, căldură etc.) cu nici un alt sistem şi câmpul electric pe care îl produce nu variază în timp (adică în orice punct al acestui sistem $\mathrm{d}\overline{E}/\mathrm{d}t = 0$ ceea ce –de fapt– înseamnă că sistemul se află în regim electrostatic), suma sarcinilor electrice ale tuturor corpurilor sistemului considerat este constantă.

Dacă, global sau local, starea de electrizare a corpurilor variază în timp (adică atunci când $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t \neq 0$ sau/şi $\mathrm{d}q_v/\mathrm{d}t \neq 0$) sistemul de corpuri capătă o stare denumită electrocinetică, stare pusă în evidenţă de efecte cu totul specifice (care au fost descrise în § 1.2.1, aliniatul „Starea electrocinetică"). Pentru descrierea cantitativă a stării electrocinetice a corpurilor s-au introdus –în teoria macroscopică a câmpului electromagnetic– mărimile: intensitatea curentului electric de conducţie *i* (global) şi, local, densitatea de curent $\overline{J}$ (v. § 1.2.1).

Legea conservării sarcinii electrice exprimă legătura care există între mărimile de stare electrocinetică a corpurilor (*i* şi $\overline{J}$) şi mărimile de stare electrică a corpurilor (q şi q_v), lege care se verifică experimental în orice situaţie, fără excepţie, şi apare –formal identic– şi în alte teorii ale fenomenelor electromagnetice (cum ar fi cea relativistă şi cea cuantică, precum şi în teoria electronică). În fond, legea conservării sarcinii electrice nu numai că dă o formă cantitativă unui fapt calitativ (adică faptului că variaţia în timp a stării electrice a corpurilor duce la o nouă stare calitativă a corpului, cea electrocinetică), ci realizează şi o armonizare semantică relativă la mărimile de stare a corpurilor, definind că orice variație în timp a sarcinii electrice din interiorul unei suprafețe închise înseamnă existeța unui curent electric prin acea suprafață şi –mai precis– viteza de variație în timp a sarcinii electrice înseamnă, cantitativ, intensitatea curentului electric de conducție.

Legea conservării sarcinii electrice se poate exprima atât printr-un model global (relativ la orice suprafață închisă dintr-un câmp electromagnetic), cât şi prin unul local (referitor la orice punct din câmp).

Modelul global (integral) al legii conservării sarcinii electrice

Fie o suprafață închisă Σ, oricare dintr-un câmp electromagnetic Ω, în interiorul căreia se află o sarcină electrică q_Σ atunci viteza de variație în timp a acestei sarcini electrice rezultă din existența unui curent electric de conducție prin Σ, a cărui intensitate instantanee (adică în fiecare moment *t*): $i_\Sigma(t) = i_\Sigma$ este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice $\mathrm{d}q_\Sigma / \mathrm{d}t$ ceea ce se exprimă prin modelul:

(1.90) $$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_\Sigma}{\mathrm{d}t} \Leftarrow \Sigma \subset \Omega \, .$$

Conform definiției derivatei, se poate scrie:

(D) $$\frac{\mathrm{d}q_\Sigma}{\mathrm{d}t} = \lim \frac{\mathrm{d}q_\Sigma(t+\Delta t) - q_\Sigma(t)}{\Delta t}$$

în care $q_\Sigma(t+\Delta t) - q_\Sigma(t) = \Delta q_\Sigma(t),$ adică o variație în timpul Δt a sarcinii electrice, ca funcție de timp, *q*(*t*); dacă variația sarcinii este $q_\Sigma(t+\Delta t) - q_\Sigma(t) > 0,$ adică $\Delta q_\Sigma > 0,$ înseamnă că sarcina electrică din interiorul suprafeței Σ *creşte* şi atunci *curentul electric* relativ la suprafața Σ:

(I) $$i_\Sigma = \oint_\Sigma \overline{J} \cdot \overline{dA} \, ,$$

are sensul spre interiorul suprafeței Σ, cu alte cuvinte (v. fig. 1.22) la sensul de referință al versorului normalei locale $\overline{n}$ la Σ, *totdeauna spre exterior*, vectorul densității de curent $\overline{J}$ în $\forall P \in \Sigma,$ are sensul spre interiorul lui $\Sigma,$ ceea ce face ca integrala precedentă (I) să dea rezultatul

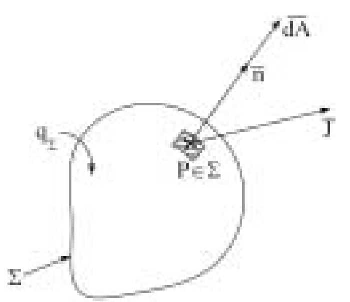

Fig. 1.22

$-i_\Sigma$ şi derivata (D) rezultă pozitivă. În caz contrar, dacă $q_\Sigma(t+\Delta t) - q_\Sigma(t) < 0,$ adică $\Delta q_\Sigma < 0,$ înseamnă că sarcina electrică q_Σ *scade*, deci derivata (D) are semnul minus, deci *curentul electric* relativ la Σ dat de integrala (I) *are sensul spre exteriorul lui* Σ, ceea ce înseamnă că în $\forall P \in \Sigma,$ produsul $\overline{J} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = \overline{J} \cdot \overline{n}\mathrm{d}A$ este pozitiv, sensul vectorului densității de curent $\overline{J}$ fiind de la punctul $P \in \Sigma$ spre exterior (fig. 1.22).

În acest fel se explică, numai prin utilizarea modelelor şi semnificației date de teoria macroscopică (fenomenologică) mărimilor de stare sarcină electrică, intensitatea curentului de conducție şi densitatea de curent, dintre care primele două sunt mărimi primitive, semnul minus din modelul (1.90) al legii conservării sarcinii electrice. (În teoria electronică, intensitatea curentului electric *i* este considerată ca limita raportului dintre suma algebrică a sarcinilor electrice Δq_{ml} ale particulelor *m*icroscopice *l*ibere – electroni negative, pozitroni+, ioni şi anioni, etc. – care trec prin secțiuni ale corpului conductor sau prin vid într-un interval de timp şi durată Δt a acestuia, adică $i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta q_{ml} / \Delta t = \mathrm{d}q_{ml} / \mathrm{d}t$. În acest caz este nevoie de alegerea unui sens de referință arbitrar pentru curentul *i* în funcție de sensul de deplasare al particulelor cu sarcină pozitivă sau cu sarcină negativă, de obicei alegându-se sensul de mişcare al sarcinilor pozitive, deci invers sensului de mişcare al electronilor. Astfel, dacă sensul + al lui *i* corespunde sensului de trecere prin suprafaţa Σ a particulelor cu sarcină +, sensul minus al legii 1.90 rezultă de la sine.)

Dimensional, legea (1.90) arată:

$$[I]=[Q][t]^{-1} \text{ sau } [Q]=[I][t], \tag{1.91}$$

ceea ce justifică ecuaţia dimensională (1.85).

Introducându-se expresia lui i_Σ, din relaţia (I), în membrul stâng al legii (1.90) şi expresia lui q_Σ în funcţie de densitatea de volum q_v a sarcinii electrice din relaţia (1.6), legea conservării electrice are şi forma:

$$\oint_\Sigma \bar{J}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v_\Sigma} q_v\cdot \mathrm{d}v \tag{1.90′}$$

care este tot o formă globală (integrală) a legii şi în care integrala de volum din membrul din dreapta egalităţii se extinde asupra volumului v_Σ delimitat de suprafaţa închisă Σ.

Modelul local (de punct) al legii conservării sarcinii electrice

Pentru determinarea acestui model, se pleacă de la forma integrală $(1.90')$ a legii conservării sarcinii electrice în care:

- membrul din stânga referitor la fluxul vectorului $\bar{J}$ prin Σ se înlocuieşte, pe baza formulei (9.20) a lui Gauss-Ostrogradski (v. § 9.1.2), cu integrala de volum extinsă la v_Σ a divergenţei lui $\bar{J}$, adică:

$$\oint_\Sigma \bar{J}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \int_{v_\Sigma} \mathrm{div}\bar{J}\mathrm{d}v \;\Leftarrow \forall P\in v_\Sigma \tag{GO}$$

- membrul din dreapta, presupunând –în cazul general– că particule prin suprafaţa Σ sau chiar Σ, se deplasează în câmpul electromagnetic cu o viteză de translaţie $\bar{w}$, ceea ce înseamnă că densitatea de volum a sarcinii electrice q_v este o funcţie de timp t şi de punct $P\in v_\Sigma$, adică este $q_v(t,P)$ sau –într-un sistem de referinţă cartezian ataşat corpurilor– este $q_v(t,x,y,z)$, se înlocuieşte cu derivata substanţială în raport cu timpul $\mathrm{d}_s/\mathrm{d}t$ a unui câmp scalar (v. § 9.1.2., relaţia 9.48) –numită şi derivata integralei de volum în raport cu timpul–, adică:

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v_\Sigma}\mathrm{d}v &= -\int_{v_\Sigma}\frac{\mathrm{d}_s q_v(t,x,y,z)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = -\int_{v_\Sigma}\frac{\partial q_v}{\partial t}\mathrm{d}v - \int_{v_\Sigma}\left(\frac{\partial \mathrm{q}_v}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \mathrm{q}_v}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \mathrm{q}_v}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}v = \\ &= \int_{v_\Sigma}\frac{\partial q_v}{\partial t}\mathrm{d}v - \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot\left(w_x\bar{i}+w_x\bar{j}+w_x\bar{k}\right)q_v\mathrm{d}v = \\ &= \int_{v_\Sigma}\frac{\partial q_v}{\partial t}\mathrm{d}v - \int_{v_\Sigma}\nabla\cdot\overline{\mathrm{w}}\mathrm{q}_\mathrm{v}\mathrm{d}v = -\int_{v_\Sigma}\frac{\partial \mathrm{d}_v}{\partial t}\mathrm{d}v - \int_{v_\Sigma}\mathrm{div}\left(\bar{w}q_v\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{DS}$$

Egalându-se, conform modelului $(1.90')$, expresiile din membrul drept al relaţiilor (GO) şi (DS) rezultă:

$$\int_{v_\Sigma}\mathrm{div}\bar{J}dv = -\int_{v_\Sigma}\left[\frac{\partial q_v}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\bar{w}q_v\right)\right]\mathrm{d}v \Leftarrow \forall v_\Sigma\subset\Omega \tag{1.90″}$$

care este o altă formă a modelului integral (global, relativ la un volum v_Σ, delimitat de o suprafaţă închisă Σ, oricare din câmpul Ω) al legii conservării sarcinii electrice. Ea pune în evidenţă faptul că variaţia sarcinii electrice locale în timp este datorată atât curentului de conducţie (prin $\bar{J}$) cât şi celui de convecţie local (prin $\bar{w}_q$).

Deoarece expresia (1.90″) este valabilă pentru orice volum v_Σ din domeniul Ω, se obţine imediat:

$$\text{div}\overline{J} = -\frac{\partial q_v}{\partial t} - \text{div}(\overline{w} q_v) \Leftarrow \forall P \in \Omega \ , \tag{1.92}$$

care este *modelul local al legii conservării sarcinii electrice*, scris adesea şi sub forma:

$$\text{div}\overline{J} + \text{div}(\overline{w} q_v) = -\frac{\partial q_v}{\partial t} \quad . \tag{1.92′}$$

Modelul (1.92) este valabil numai în domeniile de continuitate şi netezime (adică fără suprafeţe de discontinuitate).

În cazul **suprafeţelor de discontinuitate** Σ_d (fig. 1.23), se alege un punct oarecare $P \in \Sigma_d$ şi o suprafaţă elipsoidală (închisă) Σ cu centrul în *P*, împărţită în două suprafeţe semielipsoidale Σ_1 şi Σ_2, de o parte şi de alta a suprafeţei de discontinuitate Σ_d, astfel că $\Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma$ (v. fig. 1.23).

În condiţiile din figura 1.23, curentul i_Σ prin mica suprafaţă elipsoidală va fi:

$$i_\Sigma = \int_{\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2} \overline{J} \cdot \overline{\text{d}A} = \int_{\Sigma_1} \overline{J}_1 \cdot \overline{n}_1 \text{d}A + \int_{\Sigma_2} \overline{J}_2 \cdot \overline{n}_2 \text{d}A \ , \tag{ID}$$

iar dacă suprafaţa elipsoidală se restrânge la limită spre mica suprafaţă $\Delta A \subset \Sigma_d$, cu $P \in \Delta A$, „lipindu-şi” suprafeţele semielipsoidale de ΔA, dinspre o parte şi alta a suprafeţei de discontinuitate Σ_d (adică $\Sigma_1 \to \Delta A \leftarrow \Sigma_2$, cu $\Delta A \subset \Sigma_d$), integrala (ID) devine:

$$i_\Sigma = \overline{J}_1 \cdot \overline{n}_1 \Delta A + \overline{J}_2 \cdot \overline{n}_2 \Delta A \tag{IΔ}$$

şi deoarece conform convenţiei clasice, versorii normalei la Σ se iau cu sensul spre exterior: $\overline{n}_1 = -\overline{n}_2 = \overline{n}$, expresia lui i_Σ din (I Δ) devine:

$$i_\Sigma = \overline{J}_1 \cdot \overline{n} \Delta A - \overline{J}_2 \cdot \overline{n} \Delta A = (\overline{J}_1 - \overline{J}_2) \overline{n} \Delta A \ . \tag{IJ}$$

La limită, când $\Sigma \to \Delta A$ sarcina electrică q_{v_Σ}, din interiorul suprafeţei Σ este sarcina aflată chiar pe suprafaţa $\Delta A \subset \Sigma_d$, ce devine – dacă are densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice σ:

$$q_\Sigma = q_{v_\Sigma} = q_{\Delta A} = \sigma \Delta A \ , \tag{Q}$$

dacă ΔA este suficient de mică astfel încât $\sigma(P) = \text{const.}$ în $\forall P \in \Delta A$.

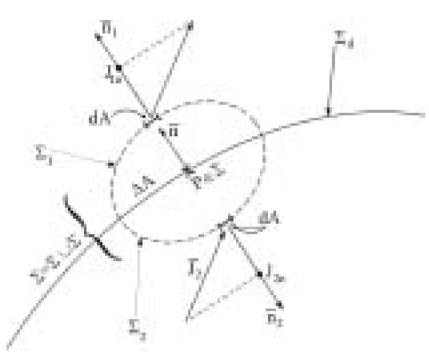

Fig. 1.23

Atunci, înlocuindu-se în (1.90) membrul din stânga cu expresia lui i_Σ dată de (IJ) şi q_Σ cu expresia lui (Q), legea conservării sarcinii electrice ia forma (în condiţiile arătate în figura 1.23):

$$(\overline{J}_1 - \overline{J}_2) \cdot \overline{n} \Delta A = -\frac{\partial}{\partial t} \sigma \Delta A$$

sau:

$$(\overline{J}_1 - \overline{J}_2) \cdot \overline{n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} , \tag{1.93}$$

care este forma locală a legii conservării sarcinii electrice într-un punct *P* de pe o suprafaţă de discontinuitate, punct în care densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice este σ.

Introducându-se noţiunea „divergenţă de suprafaţă a unui vector” (aici a lui $\overline{J}$) prin definiţia:

$$\text{div}_s \overline{J} \overset{D}{=} \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ P \in \Delta A}} \frac{\int_{\Delta A} \overline{J} \cdot \overline{\text{d}A}}{\Delta A} \ ,$$

astfel că cei doi membrii ai legii (1.90), în condițiile suprafeței de discontinuitate Σ_d din figura 1.23, se pot scrie în formele:

$$i_\Sigma = \int_{\Delta A} \mathrm{div}_s \overline{J}\, \mathrm{d}A \quad \text{şi} \quad q_\Sigma \equiv q_{\Delta A} = \int_{\Delta A} \sigma\, \mathrm{d}A.$$

Atunci legea (1.90) devine:

$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_{\Delta A}}{\mathrm{d}t} \quad \text{sau} \quad \int_{\Delta A} \mathrm{div}_s \overline{J} dA = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta A} \sigma\, \mathrm{d}A,$$

adică:

$$div_s \overline{J} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \nabla \cdot \overline{J} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \Leftarrow \forall P \in \sum\nolimits_d \tag{1.93'}$$

cu condiția ca suprafața de discontinuitate Σ_d să fie imobilă. Expresia (1.93') reprezintă o altă formă a legii conservării sarcinii electrice pe suprafețele de discontinuitate.

În cazul particular al unei suprafețe de discontinuitate fără sarcină electrică $(\sigma = 0)$ sau fără variația ei în timp ($\partial\sigma/\partial t = 0$) şi imobilă legea (1.93) devine:

$$(\overline{J}_1 - \overline{J}_2)\cdot \overline{n} = 0 \quad \text{sau} \quad \overline{J}_1 \cdot \overline{n} = \overline{J}_2 \cdot \overline{n} \quad \text{sau} \quad \overline{J}_{1n} = \overline{J}_{2n}\ , \tag{1.94}$$

ceea ce înseamnă că în acest caz (cu $\partial\sigma/\partial t = 0$), componentele normale $\overline{J}_{1n} = \overline{J}_1 \cdot \overline{n}$ şi $\overline{J}_{2n} = \overline{J}_2 \cdot \overline{n}$ se conservă prin suprafețele de discontinuitate neelectrizate sau în regim static.

1.3.10. Legea conducției electrice

Aceasta este o lege de material care exprimă un fapt experimental evident şi anume: conducția electrică dintr-un corp sau starea sa electrocinetică este determinată de câmpul electric în care se află corpul şi –în mod semnificativ– de natura materialului (substanței) corpului.

Constatarea aceasta experimentală reprezintă aspectul fenomenologic (calitativ) căruia legea conducției electrice caută să-i postuleze un model care să determine cantitativ dependența dintre „nivelul" conducției electrice, intensitatea câmpului electric şi „contribuția" de material a corpului, prin relația vectorială de punct şi de timp:

$$\overline{J} = f(\overline{E})\,.$$

Modelul aplicației vectoriale instantanee (de timp t): $f : \overline{E} \to \overline{J}$, în orice punct *P* aparținând corpului (Ω_c), depinde puternic de natura materialului şi de starea lui. Astfel, pentru unele materiale (denumite, generic, izolanți) practic, chiar la valori mari ale câmpului –care însă nu trebuie să depăşească aşa-numita „rigiditate dielectrică" E_d ce reprezintă tot o mărime de material (ea va fi prezentată în capitolul 2)– conducția electrică este practic inexistentă (deci $J \approx 0$); în schimb la alte materiale (denumite, generic, conductori) densitatea de curent $\overline{J}$ este practic direct proporțională cu intensitatea câmpului electric $\overline{E}$.

Legea conducției electrice poate fi exprimată local (ca funcție de punct) – cazul general şi sub formă integrală (globală) – relativ la o curbă Γ considerată în mod particular printr-un conductor filiform.

În unele lucrări, legea conducției este denumită *legea lui Ohm.*

Modelul local al legii conducției electrice

În cazul unui domeniu Ω_c format dintr-un **conductor uniform** (omogen şi izotrop) **şi liniar**, legea conducției electrice se exprimă prin modelul:

$$\overline{J} = \gamma \overline{E} \Leftarrow \forall P \in \Omega_c\,, \tag{1.95}$$

unde γ este **conductivitatea electrică**, o mărime de material (care este specifică fiecărei substanțe) ce a fost prezentată în paragraful 1.2.3 (v. tabelul 1.3).

Deoarece prin definiție $\frac{1}{\gamma} \overset{D}{=} \rho$, adică rezistivitatea electrică a materialului (v. § 1.2.3 şi tabelul 1.3), modelul (1.95) se poate scrie şi în forma:

(1.95') $$\overline{E} = \rho \overline{J},$$

care reprezintă tot legea conducției electrice locale în medii conductoare, uniforme şi liniare.

Dacă **mediul conductor nu este omogen şi/sau are neuniformități** de accelerație şi de temperatură, este iradiat etc., atunci în punctele de neuniformitate (chiar dacă materialul este liniar şi izotrop) se produce un câmp electric imprimat (v. § 1.2.2 şi subcap. 4.3), cu intensitatea $\overline{E_i}$, astfel că în aceste puncte câmpul electric are intensitatea, conform expresiei (1.28E): $\overline{E} = \overline{E_c} + \overline{E_i}$, şi legea conducției electrice sub formă locală devine:

(1.95") $$\overline{J} = \gamma(\overline{E_C} + \overline{E_i}) \Leftarrow \forall P \in \Omega_c,$$

în care γ – conductivitatea electrică şi $\overline{E_i}$ – intensitatea câmpului electric imprimat (ambele mărimi de material) iar $\overline{E_C}$ este intensitatea câmpului electric coulombian (v. § 1.2.2. şi subcap. 2.2).

În cazul în care **domeniul conductor neomogen, însă izotrop şi liniar,** Ω_c **se află într-un câmp electromagnetic variabil în timp** (cu $\partial \overline{B} / \partial t \neq 0$) sau/şi se deplasează în câmp cu o viteză locală $\overline{w}$– astfel că $\mathrm{rot}(\overline{B} \times \overline{w}) \neq 0$, atunci –conform legii inducției electromagnetice (1.82)– în conductor există şi un câmp magnetic solenoidal (cu intensitatea $\overline{E_s}$), ceea ce face ca într-un punct $P \in \Omega_c$ câmpul electric să aibă intensitatea – conform relației (1.28 E): $\overline{E} = \overline{E_C} + \overline{E_i} + \overline{E_s}$ şi legea conducției electrice (1.95) capătă forma:

(1.95"') $$\overline{J} = \gamma(\overline{E_c} + \overline{E_i} + \overline{E_s}) \Leftarrow \forall P \in \Omega_c$$

sau:

(1.95^{IV}) $$\overline{E_C} + \overline{E_i} + \overline{E_s} = \rho \overline{J}.$$

În cazul unor **conductoare anizotrope** (dar liniare), mărimea de material γ din legea (1.95) se înlocuieşte cu *tensorul conductivității electrice* $\boldsymbol{\gamma}$ care se exprimă printr-o matrice cu 9 (eventual 3) valori scalare specifice materialului (v. § 4.6.2).

Modelul global (integral) al legii conducției electrice

Considerându-se cazul particular al unui **domeniu conductor** $\Omega_c \equiv \Omega_f$ **filiform**, foarte lung în raport cu cea mai mare dimensiune a secțiunii transversale (fig. 1.24), adică având $\sqrt{A} <<< l$, în aşa fel ca în orice punct P al secțiunilor transversale de arie A de-a lungul firului conductor vectorii de punct $\overline{E}(P)$ şi $\overline{J}(P)$ şi vectorul elementului de curbă orientat $\mathrm{d}\overline{l}$, al axei Γ_c a firului conductor, precum şi elementul de arie transversală orientat $\mathrm{d}\overline{A}$ (v. fig. 1.24), sunt omoparalele, ceea ce înseamnă:

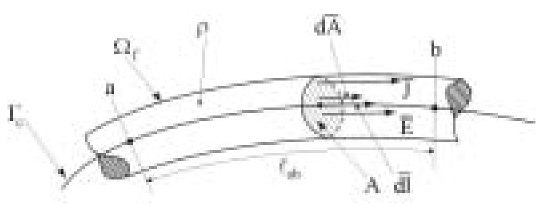

Fig. 1.24

(HP) $$\overline{E} \| \overline{J} \| \mathrm{d}\overline{l} \| \mathrm{d}\overline{A} \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega_f$$

şi efectuându-se, în fiecare memmbru al egalității (1.95^{IV}), integrala curbilinie după axa Γ_c a firului conductor Ω_f între două puncte oarecare

$\{a,b\} \in \Gamma_c$ (v. fig. 1.24) se obține:

$$\int\limits_{\Gamma_c} (\overline{E}_c + \overline{E}_i + \overline{E}_s) \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \rho \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}l} \quad . \tag{IC}$$

În condițiile (HP) de omoparalelism şi distribuind integrala (ca operator liniar) în membrul din stânga egalității (IC) în condițiile unui conductor filiform realizat dintr-un material uniform, deci cu $\forall P \in \Omega_f \Rightarrow \rho(P) = \text{const.}$, se obține:

$$\int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \overline{E}_c \cdot \overline{\mathrm{d}l} + \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} (\overline{E}_i + \overline{E}_s) \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \rho \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} J \mathrm{d}l \tag{RI}$$

în care:

- conform definiției (1.43'), $\int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \overline{E}_c \cdot \overline{\mathrm{d}l} = u_{fab}$, adică *tensiunea electrică în lungul firului*, între punctele a şi b (prin conductor);

-conform definiției (1.49), $\int\limits_{\Gamma_c : a \to b} (\overline{E}_i + \overline{E}_s) \cdot \overline{dl} = e_{ab}$, *adică tensiunea electromotoare pe porțiunea* $a \to b$ a conductorului;

- valoarea absolută a densității de curent, J, în condițiile unui conductor filiform, cu secțiunea transversală pe curba Γ_c cu aria foarte mică A (v. fig. 1.24), se poate considera constantă, adică în $\forall P \in A \Rightarrow J(P) = \text{const.} = \dfrac{i}{A}$, unde i este intensitatea curentului electric de conducție ce descrie starea electrocinetică a conductorului filiform. În aceste condiții, $\rho \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} J \mathrm{d}l = \rho \dfrac{i}{A} \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \mathrm{d}l = \rho \dfrac{l_{ab}}{A} i$, deoarece $\int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \mathrm{d}l = l_{ab}$, adică lungimea firului conductor între punctele a şi b considerate.

Termenul $\rho \dfrac{l_{ab}}{A} = R_{ab}$ este denumit *rezistența electrică* a unui conductor filiform, între două puncte ale sale a şi b, între care conductorul este omogen ($\rho = \underset{a \to b}{\text{const}}$), izotrop şi cu aria secțiunii transversale constantă ($A = \underset{a \to b}{\text{const}}$.).

Scriind integrala din membrul drept al relației (IC) sub forma:

$$\int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}l} = \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \rho \frac{i}{A} \mathrm{d}l = i \int\limits_{\Gamma_c : a \to b} \rho \frac{\mathrm{d}l}{A} = i R_{ab} \, , \tag{R'}$$

unde:

$$R_{ab} \overset{D}{=} \int\limits_{\Gamma_C : a \to b} \rho \frac{\mathrm{d}l}{A} \tag{R}$$

este rezistența electrică a conductorului filiform între două puncte ale sale, relația intermediară (RI), ținând seama de cele de mai sus, devine:

$$u_{fab} + e_{ab} = i R_{ab} \tag{1.96'}$$

sau:

$$u_f + e\big|_{a \to b} = iR\big|_{a \to b} \tag{1.96''}$$

şi (mai simplu) :

$$u_f + e = Ri \quad , \tag{1.96}$$

care constituie modelul integral (global, relativ la un conductor filiform din material liniar) al legii conducției electrice, care –dimensional– reprezintă, termen cu termen, tensiuni electrice.

Deoarece, prin definiție $\frac{1}{R} = G$, denumită conductanța conductorului filiform, legea (1.96) poate fi transcrisă și în forma:

(1.96''') $$G(u_f + e) = i \quad ,$$

care este –dimensional– o relație între curenți electrici.

Dacă un conductor filiform este omogen, izotrop și cu secțiunea constantă, rezistența lui electrică se determină cu relația:

(1.97) $$R = \rho\frac{l}{A} \quad ,$$

unde l este lungimea conductorului filiform și se exprimă, în sistemul internațional, SI, prin unitatea de măsură denumită *ohm*, cu simbolul Ω. Așa se explică faptul că rezistivitatea are unitatea de măsură SI ohm metru (Ωm) așa cum s-a arătat în paragraful 1.2.3. În aplicațiile tehnice ale rețelelor electrice, la care conexiunile se fac din conductoare filiforme, tabelele cu rezistivitatea unor materiale electrice îl exprimă pe ρ în $\Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$, care rezultă din (1.97) prin faptul că $\rho = R\frac{A}{l}$ (ca rezistență electrică specifică, pentru 1mm^2 de secțiune și o lungime de 1m), deoarece la conductoarele filiforme este mai simplu ca aria secțiunii lor să se exprime în mm^2 (și nu în m^2!) iar lungimea în metrii. Ca exemplu, cuprul are rezistivitatea $\rho_{Cu} = \frac{1}{57}\Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$.

Același conductor filiform, omogen, izotrop și cu $A = \underset{l}{\text{const}}$. (pe toată lungimea lui l considerată), are conductanța:

(1.97') $$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{A}{l} = \gamma\frac{A}{l} \quad ,$$

unde γ este conductivitatea materialului (v. § 1.2.3). Conductanța G în SI, are unitatea de măsură unu pe ohm ($1/\Omega$), denumită *siemens* (cu simbolul S).

Dimensional, din legea (1.96) rezultă:

(1.98) $$[u] = [R][I] \quad \text{sau} \quad [I] = [u][R]^{-1} = [u][G].$$

Din felul de exprimare (1.96') sau (1.96'') a legii conducției electrice rezultă că s-a ales același sens de integrare în lungul curbei Γ_c (v. fig. 1.24), atât pentru u_f și e cât și pentru i (prin $\int_A \overline{J}\cdot\overline{\text{d}A}$), adică $\overline{\text{d}A}\|\overline{\text{d}l}$, sau $\overline{n}\text{d}A\|\overline{t}\text{d}l$ (deci $\overline{n}\|\overline{t}$) ceea ce înseamnă că sensul de referință al versorului normalei $\overline{n}$ la secțiunea transversală prin conducor a fost ales același cu sensul de referință al versorului tangentei $\overline{t}$ la curba Γ_c (axul conductorului filiform). Dacă unul din sensurile de referință, $\overline{n}$ sau $\overline{t}$, se inversează, atunci în legea (1.96) $\overline{u_f}$ și e sau, respectiv, i vor primi semnul minus. Asupra sensurilor de referință și asocierea lor, în cazul mărimilor electrice de circuit: $\overline{u_f}, \overline{u_b}, e$ și i, se va reveni pe larg în subcapitolul 8.2.

În cazul unui conductor filiform din material liniar în care nu există câmpuri imprimate sau solenoidale (cu $E_i = 0$ și E_s =0), caz în care conductorul se numește pasiv, legea (1.96) ia forma:

(1.96^{IV}) $$u_f = Ri \quad \text{sau} \quad G\,u_f = i\,,$$

forme frecvent denumite „legea lui Ohm”.

1.3.11. Legea transformării de energie în conductori

Experiența arată că orice corp conductor aflat în stare electrocinetică degajă căldură în mediul înconjurător, fenomen care încetează atunci când starea electrocinetică dispare. Căldura degajată se produce în toată masa corpului, în orice punct al acestuia, şi fiind legată de existența procesului de conducție electrică (ca efect al electrocineticii, care este un fenomen strict electromagnetic) se consideră că ea provine din energia câmpului electromagnetic, ce poate fi numită energie electromagnetică. Prin urmare, există următorul fenomen, ca aspect calitativ: în procesul conducției electrice are loc o transformare a energiei electromagnetice în căldură (energie termică) şi uneori –în cazul electroliților– şi în transformări de substanță, deci în energie chimică (v. § 1.3.12), sediul acestei transformări fiind corpul conductor.

Legea transformării de energie în conductori determină cantitativ fenomenul natural al degajării de căldură în corpurile conductoare aflate în stare electrocinetică prin modele care implică mărimile de stare ale electrocineticii (i şi $\bar{J}$, ca mărimi fizice ce cuantifică procesul conducției) şi de stare electrică (prin mărimile u şi $\bar{E}$), precum şi mărimile de proces: energie (W), putere (P) şi densitate de volum a puterii (p).

Cronologic, în activitatea de cunoaştere şi cercetare a câmpului electromagnetic, legea aceasta a fost formulată la nivel global de către fizicianul englez James P. Joule pentru cazul particular al unui conductor electric, stabilindu-se apoi şi o formă generală locală.

Legea lui Joule

Dacă un corp conductor, având rezistența R, se află în stare de conducție electrică exprimată cantitativ de intensitatea curentului de conducție i, se constată că într-un interval de timp $t_2 - t_1$ (de la momentul t_1 la momentul t_2) conductorul va degaja ireversibil, în mediul înconjurător, energia W care –exprimată în unitatea de măsură SI a energiei juole (J) sau watt secundă (Ws)– se determină cu expresia:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 \mathrm{d}t, \tag{1.99}$$

care este o formă globală primitivă a legii transmiterii de energie în conductori.

Exprimată în calorii, energia degajată (căldura Q) se determină cu:

$$Q = 0{,}24 \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 \mathrm{d}t. \tag{1.99'}$$

În ambele relații, (1.99 şi (1.99'), R se exprimă în ohmi, i în amperi şi t în secunde.

Forma integrală a legii transformării de energie în conductori

Din expresia legii (1.96) a conducției electrice se poate explicita termenul R, obtinându-se: $R = (u_f + e)/i$, care introdusă în locul lui R din legea (1.99) conduce la:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u_f + e}{i} i^2 \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (u_f + e) i \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (u_f i + ei) \mathrm{d}t, \tag{1.100}$$

care este o nouă formă integrală (globală, relativă la un conductor filiform) a legii transformării de energie în conductori. Operatorul integrală se poate distribui (fiind liniar) între cei doi termeni, obținându-se o nouă formă a acestei legi:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u_f i \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} ei \mathrm{d}t = W_R + W_{is}; \tag{1.100'}$$

ea are doi termeni:

W_R, corespunzător integrării în intervalul de timp ($t_2 - t_1$) a produsului dintre tensiunea electrică în lungul firului u_f (determinată de câmpul coulombian $\bar{E}_C$ existent în conductor de-a lungul axului său) şi intensitatea curentului electric de conducție i;

W_{is}, corespunzător integrării în intervalul de timp $(t_2 - t_1)$ a produsului dintre t.e.m e (determinate de câmpurile: imprimat $\overline{E}_i$ şi solenoidal $\overline{E}_s$ existente în conductor de-a lungul axului său) şi intensitatea curentului electric de conducţie i.

Termenul W_R reprezintă energia disipată în conductor datorită câmpului coulombian, iar termenul W_{is} reprezintă energia datorită câmpurilor imprimat şi/sau solenoidal, ambele de provenienţă "exterioară" conductorului şi specifice aşa–numitelor "surse electrice" (v. cap.4 şi cap.8). Prezenţa, în acest proces de disipare termică, a câmpurilor coulombian şi solenoidal arată că energia termică degajată de conductor este de origine electromagnetică.

În cazul particular în care $\overline{E}_s = 0$ (ceea ce înseamnă că nu există o variaţie in timp a câmpului magnetic iar conductorul este imobil) şi $\overline{E}_i = 0$ (adică nu există neomogenităţi de material în cadrul conductorului şi nici neuniformităţi de acceleraţie etc.) expresia (1.100) devine:

(1.101) $$W = \int_{t_1}^{t_2} u_f i \mathrm{d}t,$$

din care se poate deduce şi puterea disipată de conductor:

(1.102) $$P \stackrel{D}{=} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = u_f i,$$

care este o altă formă globală (integrală) a legii transformării de energie în conductori potrivit căreia într-un conductor filiform puterea totală dezvoltată este egală cu produsul între tensiunea de-a lungul axei conductorului şi intensitatea curentului conductorului.

Deoarece această transformare de energie are loc în procesul de conducţie electrică, se poate apela din nou la legea conducţiei electrice sub forma (1.96) din care îl explicităm pe u_f:

$$u_f = Ri - e,$$

care introdusă în forma (1.102) a legii transformării de energie în conductori dă:

(1.102') $$\mathrm{P} = (Ri - e)i = Ri^2 - ei = P_R - P_{is},$$

care este o altă formă integrală a legii ce evidenţiază, prin cei doi termeni ai săi, că:

- o parte din puterea P transformată în procesul conducţiei electrice, termenul $P_R = Ri^2$, singurul diferit de zero (şi îmtotdeauna pozitiv) în conductoarele fără câmp imprimat ($E_i = 0$) şi fără câmp de inducţie ($E_s = 0$), este *puterea disipată*, adică puterea dezvoltată ireversibil sub formă de căldură în conductori (legea lui Joule);

- cealaltă parte a puterii P transformată în procesul conducţiei electrice, termenul $P_{is} = ei$ reprezintă *puterea generată* (ceea ce explică semantic denumirea dată lui e, de tensiune electromotoare) de eventualele surse electrice existente în lungul conductorului şi evidenţiate de mărimile $\overline{E}_i$ şi $\overline{E}_s$. Acest termen poate fi pozitiv sau negativ; când $ei > 0$ sursa produce energie, iar când $ei < 0$ sursa absoarbe energie (de exemplu, cazul unui acumulator electric "pus la încărcat" – v.cap.4).

Modelul local al transformării de energie în conductori

Prin forma locală se exprimă logic, transformarea de energie localizată în fiecare punct al conductorului, în funcţie de situaţia locală a câmpului electric caracterizat de $\overline{E}$ şi a celui electrocinetic caracterizat de $\overline{J}$, pe de o parte şi densitatea de volum a puterii transformate în acel punct, care se notează cu p şi se exprimă în waţi pe metru la cub (W/m^3), pe de altă parte.

Dacă s-ar cunoaşte distribuţia acestei densităţi de volum a puterii transformate, adică $p(P)$ în $\forall\ P \in \Omega_f$, unde Ω_f este domeniul ocupat de firul conductor, cu un volum v_c, atunci puterea P transformată în întregul domeniu Ω_f al conductorului, va fi:

(P) $$P = \int_{v_c} p \mathrm{d}v\ ,$$

în care volumul elementar dv fiind unul oarecare din firul conductor Ω_f, poate fi ales preferenţial sub forma unui cilindru elementar cu secţiunea de arie A şi cu lungimea elementară dl plasat pe direcția axei Γ_c a conductorului filiform şi orientat astfel ca $\overline{A} = \overline{n}A$ având versorul $\overline{n}$ perpendicular pe secțiunea de arie A şi cu lungimea $\mathrm{d}l \in \Gamma_c$ cu $\overline{\mathrm{d}l} = \overline{t}\mathrm{d}l$ având versorul t tangent la Γ_c, în acelaşi sens cu, aşa cum se arată în figura 1.25, astfel că $\overline{E} \| \overline{J} \| \overline{\mathrm{d}l} \| \overline{A}$, adică sunt omoparalelele.

În aceste condiții, redate în figura 1.25, relația (P) se poate scrie sub forma:

$$P = \int_{v_c} p\mathrm{d}v = \int_{v_c} p\overline{A}\,\overline{\mathrm{d}l} = \int_{v_c} pA\mathrm{d}l \qquad \text{(P')}$$

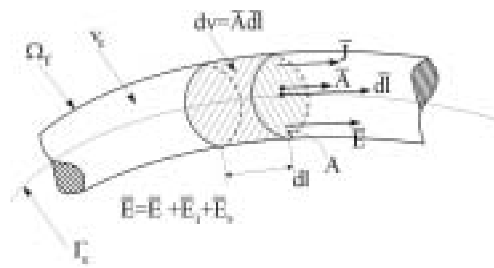

Fig. 1.25

şi dacă îl înlocuim pe P cu expresia lui din legea (1.102'), în condițiile din figura 1.25 se va obține:

$$P = Ri^2 - ei = \int_{\Gamma_c} i^2 \rho \tfrac{\mathrm{d}l}{A} - \int_{\Gamma_c} i\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right)\cdot \overline{\mathrm{d}l} = \int_{\Gamma_c} J^2 A^2 \rho \tfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{A}} - \int_{\Gamma_c} \overline{J}\,\overline{A}\cdot\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right)\mathrm{d}l =$$
$$= \int_{\Gamma_c} i^2 \rho A \mathrm{d}l - \int_{\Gamma_c} \overline{J}\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right) A\mathrm{d}l = \int_{\Gamma_c} \rho J^2 \mathrm{d}v - \int_{\Gamma_c} \overline{J}\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right)\mathrm{d}v. \qquad \text{(P'')}$$

În expresiile (P') şi (P'') s-a ținut cont de omoparalelismul vectorilor $\overline{E}, \overline{J}, \overline{\mathrm{d}l}$ şi $\overline{A}$, existente în condițiile unui conductor filiform omogen, precum şi de faptul că pentru o secțiune prin conductorul filiform cu aria foarte mică $i = \overline{J}\cdot\overline{A} = JA$ (dacă $\overline{J} \| \overline{A}$). Egalându-se între ele expresiile din membrul drept al ultimelor egalități (P') şi (P'') rezultă:

$$\int_{v_c} p\mathrm{d}v = \int_{v_c} \rho J^2 \mathrm{d}v - \int_{v_c} \overline{J}\cdot\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right)\mathrm{d}v \qquad (1.102'')$$

şi, deoarece dv este un element de volum oarecare rezultă în definitiv:

$$p = \rho\overline{J}^2 - \overline{J}.\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right) \Leftarrow \forall P \in \Omega_f\,; \qquad (1.103)$$

care este modelul local al legii transformării de energie în conductori. Primul termen poate fi scris şi în forma $\rho\overline{J}\cdot\overline{J} = \overline{E}_c \cdot \overline{J}$, deoarece –conform legii (1.95') $\rho\overline{J} = \overline{E}_c$– astfel că legea (1.103) se poate descrie astfel:

$$p = \overline{E}_c \cdot \overline{J} - \left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right)\cdot \overline{J} \quad . \qquad (1.103')$$

Primul termen din aceste expresii ale lui p reprezintă densitatea de volum a puterii disipate ireversibil sub formă calorică (fiind în orice situație pozitiv), iar al doilea $\left(\overline{E}_i + \overline{E}_s\right)\cdot\overline{J}$, este densitatea de volum a puterii transformate (primită sau cedată de conductor) în punctele în care există câmp imprimat şi/sau solenoidal (deci este densitatea de volum a puterii generate în conductori, cu semnul + ⇒ produsă şi cu – ⇒ absorbită).

În cazul în care într-un punct din conductor nu există câmp imprimat şi câmp solenoidal, legea transformării de energie în conductori, sub formă locală, este:

$$p\left[\frac{W}{\mathrm{m}^3}\right] = \overline{E}\cdot\overline{J}\left[\frac{V}{\mathrm{m}}\right]\left[\frac{A}{\mathrm{m}^2}\right] \quad . \qquad (1.103'')$$

1.3.12. Legea electrolizei

Această lege –cu aplicabilitatea directă ("ca atare") în tehnică– exprimă cantitativ efectul chimic al electrocineticii, efect care se manifestă numai în cazul unei categorii aparte de conductori numiți *electroliți* (v. subcap. 4.5), zişi şi conductori de speța a –ll-a. Spre deosebire de conductorii metalici şi de cărbune etc., numiți conductori de speța 1, care în stare electrocinetică nu sunt supuşi nici unei transformări chimice, electroliții (numiți încă şi conductori electrolitici) suportă reacții chimice şi transformări în structura chimică atunci când se află în regim electrocinetic.

Reacțiile chimice produse într-un electrolit, ca efect al electrocineticii în regim staționar (de "curent continuu – v. subcap. 8.3), şi utilizate într-un scop anume (aplicativ) poartă denumirea de *electroliză* (v. subcap. 4.5). Legea electrolizei reprezintă într-o formă cantitativă, acest proces calitativ (fenomenologic) numit electroliză.

Legea electrolizei descrie, printr-un model, relația cantitativă dintre masa m a unui element sau radical chimic, care se depune într-un interval de timp ($t_2 - t_1$) la unul dintre electrozii unei băi electrolitice (v. § 4.5.3) şi intensitatea curentului electric de conducție i ce caracterizează starea electrocinetică a electrolitului din baie, sub forma:

(1.104)
$$\mathrm{m} = k\int_{t_1}^{t_2} i\mathrm{d}t \quad ,$$

unde masa de substanță depusă se exprimă în kilograme, timpul în secunde şi curentul în amperi. Factorul de proporționalitate k se numeşte echivalentul chimic al substanței depuse pe electrozi şi are expresia:

$$k = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{A_M}{n}$$

unde: F_0 este o constantă universală, numită *constanta lui Faraday*, care are valuarea F_0 = 96.490 [As/mol] (amper secundă pe mol) şi nu depinde de natura electrolitului; A_M/n se numeşte *echivalentul chimic al substanței* depuse prin electroliză, fiind o mărime de material; A_M este masa unui mol de substanță (în kg/mol), numită *masa atomică* a substanței sau şi *masa molară* (după cum se ştie de la Chimia-Fizică, molul –cu simbolul mol– este unitatea de măsură SI a cantității de substanță, fiind cantitatea de substanță a cărui masă, exprimată în grame, este numeric egală cu masa moleculară relativă) şi n este valența substanței.

Legea electrolizei (1.104) este o lege generală.

* *
*

Încheindu-se aici subcapitolul referitor la legile generale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic, se impune sublinierea rolului pe care le au aceste legi în aplicațiile tehnice cu evidențierea principalelor dependențe pe care îl implică:

k) legile: polarizației temporare (1.73) şi (1.74) valabile pentru dielectrici liniari (§ 1.3.5), magnetizației temporare (1.78) şi (1.80) valabilă pentru materialele liniare (§ 1.3.6) şi conducției electrice (1.95) şi –în particular (1.96)– pentru conductorii liniari (§ 1.3.10), sunt principalele legi de material, dependente local de natura substanței, de starea de deformație a materialului, de temperatură etc.;

kk) legile: inducției electromagnetice (1.81) şi (1.82) de la § 1.3.7., fluxului electric (1.65) şi (1.66) de la § 1.3.1., a legăturii dintre $\overline{D}, \overline{E}$ şi $\overline{P}$ (1.71) de la § 1.3.3. şi polarizației electrice temporare (1.73) şi (1.74) de la § 1.3.5. precizează toate condițiile în care se produce câmpul electric (prin faptul că asigură calculul circulației vectorului $\overline{E}_s$, a rotorului său şi a fluxului vectorului $\overline{D}$ prin orice suprafață închisă, precum şi a divergenței lui $\overline{D}$);

kkk) legile: circuitului magnetic (1.67) şi (1.69) de la § 1.3.8., fluxului magnetic (1.67) şi (1.69) de la § 1.3.2., a legăturii dintre vectorii $\overline{B}, \overline{H}$ şi $\overline{M}$ (1.72) de la § 1.3.4. şi magnetizației temporare (1.78) şi (1.80) de la § 1.3.6. stabilesc toate condițiile producerii cămpului magnetic (deoarece ele permit calcularea circulației lui $\overline{H}$ şi a rotorului ei, precum şi calculul fluxului magnetic prin orice suprafață din câmp);

kw) legea conservării sarcinii electrice (1.90) şi (1.92) de la § 1.3.9. şi legea conducției electrice (1.95) şi (1.96) permit determinarea cantitativă a stării electrocinetice a corpurilor (şi în particular a circuitelor electrice);

w) legile: inducției electromagnetice (1.81) şi (1.82) şi circuitului magnetic (inducției magnetoelectrice) (1.83) şi (1.88) stabilesc interdependența celor două aspecte, electric şi magnetic, ale câmpului electromagnetic (permițând calculul efectului electric al câmpului magnetic şi a efectului magnetic al electrocineticii şi câmpului electric);

wk) legea transformării de energie în conductori (1.102) şi (1.103) de la § 1.3.11. şi legea electrolizei (1.104) de la § 1.3.12. stabilesc efectul termic (energetic) şi –respectiv– chimic al electrocineticii.

1.4. Ecuațiile lui Maxwell

Formele locale, de punct, ale legilor generale de structură şi evoluție a câmpului electromagnetic –adică ale legilor: circuitului magnetic (1.88), inducției electromagnetice (1.82), fluxului electric (1.66') şi fluxului magnetic (1.69')– constituind un sistem de ecuații cu derivate parțiale, poartă denumirea generică de *ecuațiile lui Maxwell*.

Aceste ecuații, exprimate în funcție de punct şi de timp, completate –în concordanță cu particularitățile sistemului fizic de tip electromagnetic analizat– şi cu alte ecuații în formă locală ale legilor câmpului electromagnetic, precum şi cu condițiile la limită şi inițiale, asigură rezolvarea –în condiții de unicitate (v. § 1.5.1)– a oricărei probleme de câmp electromagnetic, deoarece ecuațiile lui Maxwell reprezintă, datorită formei lor locale, modelele cele mai adecvate pentru determinarea –corespunzător concepției sistemice de localizare a tuturor acțiunilor şi proprietăților fizice– a oricărui sistem electromagnetic.

Există mai multe modele ale ecuațiilor lui Maxwell, în funcție de momentul istoric al formulării lor, de condițiile impuse sistemului fizic electromagnetic, de teoria adoptată pentru studiul câmpului electromagnetic, de sistemul de coordonate adoptat, de procedura de rezolvare matematică şi informatică aleasă şi de multe altele. În cadrul acestui subcapitol, ne vom limita la prezentarea acelor forme ale ecuațiilor lui Maxwell care sunt folosite în teoria macroscopică clasică a câmpului electromagnetic şi care permit soluționarea problemelor de câmp electromagnetic prin tehnici informatice (v. subcapitolele 9.2 si 9.3).

1.4.1. Ecuațiile de bază ale lui Maxwell

Sub forma lor inițială, aşa cum au fost elaborate de însuşi Maxwell, ecuațiile lui Maxwell se referă la electrodinamica macroscopică a mediilor continue, netede (în care funcțiile sunt continue şi derivabile) şi imobile, adică în cazul unor medii în repaus (cu viteza $\overline{w} = 0$), liniare, omogene şi izotrope, fără polarizație electrică permanentă ($\overline{P}_p = 0$), fără magnetizație permanentă ($\overline{M}_p = 0$) şi fără câmp imprimat ($\overline{E}_i = 0$); ele se prezintă astfel:

$$\operatorname{rot}\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}, \tag{1.105M1}$$

$$\operatorname{rot}\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \tag{1.105M2}$$

$$\operatorname{div}\overline{D} = q_v, \tag{1.105M3}$$

$$\operatorname{div}\overline{B} = 0, \tag{1.105M4}$$

în care: $\overline{E}$ şi $\overline{D}$ sunt vectorii intensității locale a câmpului electric şi inducției electrice locale; $\overline{H}$ şi $\overline{B}$ sunt vectorii intensității locale a câmpului magnetic şi inducției magnetice locale; $\overline{J}$ este vectorul densității curentului electric de conducție şi q_v este densitatea de volum a sarcinii electrice, ultimele două mărimi fiind şi ele funcții de punct (locale). Toate aceste mărimi pot fi (sunt) şi funcții de timp.

Prima ecuație –ecuația întâi a lui Maxwell (1.105M1)– reprezintă forma locală –în condițiile precizate anterior– a legii circuitului magnetic (1.83^{IV}) în care termenii $\overline{w}\,\mathrm{div}\overline{D} = 0$ şi $\mathrm{rot}(\overline{D}\times\overline{w}) = 0$, pentru că $\overline{w} = 0$; ea se mai numeşte şi *ecuația lui Maxwell-Ampere*. A doua ecuație (1.105M2) –denumită ecuația a doua a lui Maxwell sau, încă, *ecuația lui Maxwell-Faraday*– reprezintă forma locală a legii inducției electromagnetice (1.81^{III}) în care termenul $\mathrm{rot}(\overline{B}\times\overline{w}) = 0$ deoarece s-a considerat inițial $\overline{w} = 0$. A treia ecuație (1.105M3) este forma locală a legii fluxului electric (1.65), iar ecuația a patra (1.105M4) reprezintă forma locală a legii fluxului magnetic (1.67).

1.4.2. Ecuatiile generale ale lui Maxwell

Pentru determinarea câmpului electromagnetic, adică a celor patru mărimi de stare $\overline{E}$, $\overline{D}$, $\overline{H}$ şi $\overline{B}$ ale acestuia, cele patru ecuații ale lui Maxwell (1.105) se completează cu legile de material sub formele:(1.77) – a polarizației electrice temporare, (1.80) – a magnetizației temporare şi (1.95) – a conducției electrice, care sunt modele locale (de punct), valabile numai pentru materialele uniforme, liniare şi având $\overline{P}_p = 0$, $\overline{M}_p = 0$ şi $\overline{E}_i = 0$.

Astfel, la cele patru ecuații (1.105) din § 1.4.1 se mai adaugă ecuațiile:

(1.106 M5) $$\overline{D} = \varepsilon\,\overline{E},$$

(1.106 M6) $$\overline{B} = \mu\,\overline{H},$$

(1.106 M7) $$\overline{J} = \gamma\,\overline{E},$$

în care ε, μ şi γ sunt mărimile de material: permitivitatea absolută, permeabilitatea absolută şi conductivitatea electrică, toate indicate pentru materiale liniare, omogene şi izotrope.

Sistemul celor patru ecuații de bază ale lui Maxwell (1.105), în care $\overline{D}$ şi $\overline{B}$ se înlocuiesc cu expresiile lor din (1.106M5) şi (1.106M6), iar operatorii liniari –scrişi în coordonate carteziene, ca şi vectorii de stare $\overline{E}(P,t)$ şi $\overline{H}(P,t)$– se dezvoltă prin:

$$\mathrm{rot}\overline{H} = \nabla\times\overline{H} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \overline{i}\frac{\partial H_z}{\partial y} + \overline{j}\frac{\partial H_x}{\partial z} + \overline{k}\frac{\partial H_y}{\partial x} - \overline{i}\frac{\partial H_y}{\partial z} - \overline{j}\frac{\partial H_z}{\partial x} - \overline{k}\frac{\partial H_x}{\partial y} =$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right),$$

cu: $\overline{H} = \left(\overline{i}H_x + \overline{j}H_y + \overline{k}H_z\right)$,

$$\mathrm{rot}\overline{E} = \nabla\times\overline{E} = \overline{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right),$$

cu: $\overline{E} = \left(\overline{i}E_x + \overline{j}E_y + \overline{k}E_z\right)$,

$$\mathrm{div}\overline{D} = \nabla\cdot\varepsilon\overline{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\cdot\left(E_x\overline{i} + E_y\overline{j} + E_z\overline{k}\right)\varepsilon = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

şi:

$$\overline{J} = \left(\overline{i}J_x + \overline{j}J_y + \overline{k}J_z\right),$$

în care $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii celor trei axe ale sistemului de coordonate cartezian, iar E_x , H_x si J_x , E_y , H_y si J_y , E_z , H_z si J_z sunt componentele după direcțiile $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, ale vectorilor $\overline{E}, \overline{H}$ şi respectiv $\overline{J}$.

Înlocuind aceste dezvoltări în ecuațiile (1.105) şi identificând, membru cu membru, componentele de pe aceleaşi axe ale sistemului cartezian $\left(x, \bar{i};\ y, \bar{j} \text{ şi } z, \bar{k}\right)$, ecuațiile de bază ale lui Maxwell formează următorul model de opt ecuații scalare simultane cu derivate parțiale cu şase funcții necunoscute $\left(\overline{E}, \overline{H}, \overline{J}, \varepsilon, \mu \text{ şi } q_v\right)$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t},\\
&\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t},\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t},
\end{aligned}\right\} &&(1.105\text{M}1')\\
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t},\\
&\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t},\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t},
\end{aligned}\right\} &&(1.105\text{M}2')\\
&\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon}\, q_v\ , &&(1.105\text{M}3')\\
&\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. &&(1.105\text{M}4')
\end{aligned}\right.$$

Conform teoremei de unicitate a câmpului electromagnetic pentru medii liniare şi uniforme (v. § 1.5.1) şi teoriei sistemelor de ecuații cu derivate parțiale (din Matematică), sistemul de ecuații (1.105M1')…(1.105M4') precedent are o soluție unică ($\overline{E}$ şi $\overline{H}$) într-un domeniu dat (pentru care se cunosc ε, μ, γ şi $\overline{E_i}$), dacă se dau: sursele q_v şi J_x , J_y , J_z , condițiile la limită pe frontiera domeniului în care se determină câmpul electromagnetic (prin componentele tangențiale E_t sau H_t) şi condițiile inițiale.

1.4.3. Modele ale ecuațiilor lui Maxwell

Într-un caz mai general, ecuațiilor lui Maxwell (1.105) şi ecuațiilor (1.106) li se mai ataşează şi forma locală (1.92) a legii conservării sarcinii electrice (1.90), adică:

$$\mathrm{div}\overline{J} = -\frac{\partial q_v}{\partial t}\,, \tag{1.107}$$

în condițiile în care mediul este imobil ($\overline{w} = 0$), ceea ce se scrie şi prin:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial q_v}{\partial t} \tag{1.107'}$$

În ecuațiile lui Maxwell (1.105), precum şi în ecuațiile (1.106) şi (1.107), atât mărimile de stare macroscopică a câmpului electromagnetic (nestaționar) şi a corpurilor, cât şi coordonatele spațiale şi variabila temporară *t*, sunt raportate la un *sistem de referință inerțial fix*, care –în cazul considerat al unui mediu mobil– coincide cu *referențialul propriu* (adică sistemul de referință inerțial atașat fiecărui punct al mediului de câmp aflat în repaus, local și instantaneu, în raport cu substanța din vecinătatea punctului respectiv – v. § 1.1.1).

În lucrarea: *Mândru, Gh. , Rădulescu, M.M.* „Analiza numerică a câmpului electromagnetic”, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1986 se prezintă un model pentru ecuațiile lui Maxwell, complectate cu ecuațiile (1.106) și (1.107') scris într-un sistem general de coordonate curbilinii triortogonale, un model foarte indicat pentru calculele realizate cu sisteme informatice, pe care îl reproducem în continuare.

Sistemul general de coordonte curbilinii triortogonale este caracterizat de:

- *coordonatele* (x_1, x_2, x_3) definite în funcție de cele carteziene (x, y, z) prin relațiile:

$$x_1 = f_1(x, y, z)\,, \quad x_2 = f_2(x, y, z)\,, \quad x_3 = f_3(x, y, z)$$

sau invers:

$$x = g_1(x_1, x_2, x_3)\,, \quad y = g_2(x_1, x_2, x_3)\,, \quad z = g_3(x_1, x_2, x_3)\,;$$

- *coeficienții lui Lamé* (v. Matematica) h_1, h_2, h_3 care sunt unități locale de lungime, definiți prin expresia distanței elementare dl dintre două puncte elementar vecine $P(x_1, x_2, x_3)$ și $Q(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, x_3 + \mathrm{d}x_3)$ și anume:

$$\overline{P-Q} = \mathrm{d}l \quad \text{cu} \quad \mathrm{d}l^2 = h_1^2 \mathrm{d}x_1^2 + h_2^2 \mathrm{d}x_2^2 + h_3^2 \mathrm{d}x_3^2\,.$$

În acest sistem general de coordonate curbilinii, ecuațiile lui Maxwell (1.105M1')…(1.105M4') și ecuația (1.107') se transcriu printr-un model constând din nouă ecuații diferențiale scalare, cu derivate parțiale de ordinul întâi în raport cu timpul și cu coordonatele spațiale și anume:

(1.105M1'')
$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 H_2)\right] &= J_1 + \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t}\\
\frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 H_3)\right] &= J_2 + \varepsilon \frac{\partial E_2}{\partial t}\\
\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 H_1)\right] &= J_3 + \varepsilon \frac{\partial E_3}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

(1.105M2'')
$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 E_2)\right] &= -\mu \frac{\partial H_1}{\partial t}\\
\frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 E_3)\right] &= -\mu \frac{\partial H_2}{\partial t}\\
\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 E_1)\right] &= -\mu \frac{\partial H_3}{\partial t}
\end{aligned}\right\}$$

(1.105M3'')
$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 E_3)\right] = \frac{1}{\varepsilon} q_v$$

(1.105M4'')
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 H_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 H_3) = 0$$

(1.107'')
$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 J_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 J_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 J_3)\right] = -\frac{\partial q_v}{\partial t}$$

Expresiile coordonatelor și parametrilor Lamé și formulele de transformare pentru sistemele uzuale de coordonate curbilinii triortonormale sunt:

- *sistemul de coordonate carteziene*:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x,$$
$$h_1 = h_2 = h_3 = 1;$$

- *sistemul de coordonate cilindrice circulare*:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = z,$$
$$h_1 = h_3 = 1, \quad h_2 = r,$$
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = x_3 = z;$$

- *sistemul de coordonate sferice*:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi,$$
$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta,$$
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta;$$

- *sistemul de coordonate eliptice* (*ale cilindrului eliptic*):

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = z,$$
$$h_1 = h_2 = a\sqrt{ch^2\xi - \cos^2\eta}, \quad h_3 = 1,$$
$$x = a\,\mathrm{ch}\xi\cos\eta, \quad y = a\,\mathrm{sh}\xi\sin\eta, \quad z = x_3 = z;$$

- *sistemul de coordonate parabolice* (*ale cilindrului parabolic*):

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = z,$$
$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_3 = 1,$$
$$x = a\xi\eta, \quad y = a(\eta^2 - \xi^2)/2, \quad z = x_3 = z;$$

- *sistemul de coordonate ale elipsoidului alungit*:

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = \psi,$$
$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi}, \quad h_3 = a\,\mathrm{sh}\xi\sin\varphi,$$
$$x = a\,\mathrm{sh}\xi\sin\varphi\cos\psi, \quad y = a\mathrm{sh}\xi\sin\varphi\sin\psi, \quad z = a\,\mathrm{ch}\xi\cos\varphi;$$

- *sistemul de coordonate ale elipsoidului aplatisat*:

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = \psi,$$
$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \sin^2\varphi}, \quad h_3 = a\,\mathrm{ch}\xi\sin\varphi,$$
$$x = a\,\mathrm{ch}\xi\sin\varphi\cos\psi, \quad y = a\,\mathrm{ch}\xi\sin\varphi\sin\psi, \quad z = a\,\mathrm{sh}\xi\cos\varphi;$$

- *sistemul de coordonate paraboloidale*:

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \varphi,$$
$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_3 = \xi\eta,$$
$$x = \xi\eta\cos\varphi, \quad y = \xi\eta\sin\varphi, \quad z = (\xi^2 - \eta^2)/2\,;$$

- *sistemul de coordonte toroidal*:

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = \psi,$$
$$h_1 = h_2 = a/(\mathrm{ch}\xi + \cos\varphi), \quad h_3 = a\,\mathrm{sh}\xi/(\mathrm{ch}\xi + \cos\varphi),$$
$$x = a\,\frac{\mathrm{sh}\xi\cos\psi}{\mathrm{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad y = a\,\frac{\mathrm{sh}\xi\sin\psi}{\mathrm{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad z = -a\,\frac{\sin\varphi}{\mathrm{ch}\xi + \cos\varphi}\,;$$

- *sistemul de coordonate biaxiale*:

$$x_1 = \xi\,, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z,$$
$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\mathrm{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad h_3 = 1,$$

$$x = a\,\frac{sh\xi}{\text{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad y = a\,\frac{\sin\varphi}{\text{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad z = x_3 = z\,.$$

În relațiile de mai sus a este un număr real reprezentând semiaxe ale suprafețelor de revoluție, raze focale sau raza torului.

Modelul general (1.105M1"), (1.105M2"), (1.105M3"), (1.105M4") şi (1.107"), al ecuațiilor lui Maxwell, permite adaptarea lui la orice caz concret-practic, cu alegerea sistemului de coordonate cel mai potrivit topologiei mediului (corpului) la care se referă aplicația şi cu scrierea imediată a unor modele numerice pentru problemele de câmp electromagnetic, rezolvabile prin tehnicile informatice ale diferențelor finite şi variaționale prin metoda elementului finit (v. subcapitolele 9.2 şi 9.3).

1.4.4. Ecuațiile lui Maxwell – Hertz

Ecuațiile lui Maxwell (1.105M1)…(1.105M4) au fost generalizate de Hertz, prin includerea cazului general în care mediul (corpurile din câmp) sunt în mişcare, cu o viteză locală $\overline{w}$, rezultând modelul:

$$(1.108)\qquad \begin{cases} \text{rot}\overline{H} = \overline{J} + \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t} + q_v\,\overline{w} + \text{rot}\left(\overline{D}\times\overline{w}\right), \\ \text{rot}\overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} - \text{rot}\left(\overline{B}\times\overline{w}\right), \\ \text{div}\overline{D} = q_v\,, \\ \text{div}\overline{B} = 0, \end{cases}$$

cunoscut sub numele de ecuațiile lui Maxwell-Hertz.

Modelul (1.108) se obține din formele integrale ale legilor (circuitului magnetic şi inducției electromagnetice), presupunând –în acord cu ipoteza domeniului total antrenat– că liniile închise Γ în lungul cărora se calculează circulația câmpurilor şi suprafețelor deschise care se sprijină pe aceste contururi (Σ_Γ) şi prin care se calculează fluxurile câmpurilor sunt antrenate de corpuri cu viteza locală $\overline{w}$.

În ecuațiile Maxwell-Hertz (1.108) apar următorii termeni suplimentari față de ecuațiile de bază ale lui Maxwell (1.105):

- termenul $q_v\,\overline{w}$ care exprimă densitatea (de suprafață) a curentului electric de convecție, termen confirmat de experiență;

- termenul $\text{rot}\left(\overline{D}\times\overline{w}\right)$ ce reprezintă densitatea (de suprafață) a curentului Roentgen teoretic, termen infirmat parțial de experiență – care confirmă însă expresia $\text{rot}\left(\overline{P}\times\overline{w}\right)$ – v. § 1.3.8 / relația (1.83^{IV});

- termenul $-\text{rot}(\overline{B}\times\overline{w})$ ce corespunde inducției electromagnetice prin mişcare, fiind verificat întotdeauna de experiență.

Spre deosebire de ecuațiile lui Maxwell, care –aşa cum s-a văzut– nu sunt invariabile la schimbarea sistemelor de referință inerțiale, dacă se foloseşte (presupunându-se valabilă) transformarea Galilei (v. Mecanica solidelor), ecuațiile lui Maxwell-Hertz sunt invariante la această transformare, mărimile $\overline{E}$, $\overline{D}$, $\overline{H}$ şi $\overline{B}$ fiind definite în mod absolut. Deoarece experiența infirmă atât ecuațiile lui Maxwell-Hertz cât şi transformarea Galilei, rezultă că aceste ecuații au fost obținute printr-o generalizare doar teoretică, aproximativ corectă. Deoarece termenii din aceste ecuații infirmați de experiență, fiind vorba de $\text{rot}\left(\overline{D}\times\overline{w}\right)$, au o contribuție neglijabilă la determinarea (calculul) câmpului electromagnetic în raport cu ceilalți termeni corecți, aceste ecuații se utilizează în tehnică fiind deosebit de comode în aplicații şi furnizând soluții care aproximează destul de exact soluțiile corecte care s-ar obține pe baza electrodinamicii relativiste. În acest scop, al aplicațiilor corecte din tehnică, ecuațiile Maxwell-Hertz se completează cu relațiile de legatură şi cu cele de material (1.106) şi (1.107), ca şi în cazul ecuațiilor lui Maxwell.

1.4.5. Relația lui Maxwell

Această relație este un model care stabileşte legătura între constantele universale ale electromagnetismului (ε_0 şi μ_0 – v. § 1.2.3) şi viteza de propagare a luminii în vid c_0, având formă cunoscută (1.54), adică:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} ,$$

în care ε_0 este permitivitatea vidului, iar μ_0- permeabilitatea vidului. În forma aceasta, relația este scrisă în sistemele de unități CGSem, MKSA (v. Fizica) şi în SI, în care *constanta lui Gauss* γ_0 se ia egală cu unitatea. Într-o formă mai generală (care înglobează şi sistemul simetric de unități de măsură a lui Gauss), relația lui Maxwell se scrie:

$$c_0 = \frac{1}{\gamma_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} . \qquad (1.109)$$

Constanta lui Gauss γ_0 este o constantă universală, care în toate sistemele uzuale de unități de măsură este $\gamma_0 = 1$, în afară de sistemul CGS Gauss în care $\gamma_0 = 1/c_0$ (adică inversul vitezei de propagare a luminii în vid).

Membrul drept al relației lui Maxwell (1.109) este egal cu viteza de fază a undelor electromagnetice în spațiul vid, nelimitat, aşa cum rezultă din ecuațiile lui Maxwell (v.§ 7.4.4). Relația lui Maxwell, care exprimă identitatea dintre această viteză şi viteza de propagare a luminii în vid, poate fi considerată fie ca o lege experimentală (a cărei verificare a sugerat lui Maxwell natura electromagnetică a luminii), fie ca o condiție de invarianță a ecuațiilor lui Maxwell la schimbarea sistemului inerțial de referință cu transformarea Lorentz (în Fizica relativistă). Totuşi, ultima interpretare arată că această relație a lui Maxwell reflectă proprietățile fizice de structură, mult mai generale decât identitatea undelor luminoase cu a celor electromagnetice. Asupra acestei chestiuni se va reveni în capitolul 7, consacrat propagării câmpului electromagnetic.

1.5. Teoremele fundamentale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic

Teoremele sunt modele deductibile din altele, presupuse valabile, în particular dintr-un sistem de axiome sau din sistemul de legi al unui domeniu de cercetare (în cazul de față, din cele 12 legi generale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic). Cu alte cuvinte, teoremele sunt propoziții (exprimate prin modele matematice) care pot fi demonstrate deductiv pe baza unor axiome, legi, postulate şi alte teoreme (care au fost demonstrate).

Există anumite teoreme generale, care fie că se referă la un cadru mai larg al domeniului fizic cercetat (situația din prezentul subcapitol), fie că sunt echivalente cu anumite axiome sau legi – în sensul că aceste axiome ar putea fi înlocuite (în sistemul axiomelor sau al legilor unei ştiințe) cu aceste teoreme generale. Astfel de propoziții (modele) pot fi deci axiome sau legi în anumite sisteme, şi teoria în altele.

Pe măsură ce cunoaşterea ştiințifică a naturii înaintează, se descoperă legi din ce în ce mai generale, din care „vechile legi” rezultă ca simple teoreme. De exemplu „Legea” lui Coulomb (denumită încă aşa în multe manuale de Fizică) reprezintă cea mai generală legătură referitoare la sarcinile electrice şi intensitatea câmpului electric (denumit chiar câmp coulombian), cunoscută în timpul descoperii ei; în prezent, ea este o simplă teoremă sau chiar o „formulă” de calcul (v. subcap. 2.2., §2.2.2 „Teorema lui Coulomb”), cu caracter restrâns, care rezultă –în cazul câmpurilor electrostatice– din legea fluxului electric şi legea polarizaţiei electrice temporare sub forma $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$.

Acest subcapitol se va referi numai la câteva dintre teoremele fundamentale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic, şi anume: unicitatea câmpului electromagnetic, superpoziţia câmpurilor electromagnetice şi teorema energiei electromagnetice, care au o sferă mai largă de aplicabilitate.

1.5.1. Teorema unicităţii determinării câmpului electromagnetic

Ecuaţiile reprezentând legile generale ale câmpului electromagnetic macroscopic în medii fixe sau mobile şi în domenii de continuitate şi netezime a proprietăţilor fizice locale, *împreună cu ecuaţii de trecere* (de pe suprafeţele de discontinuitate electromagnetică şi, eventual, asimetrică, sau pe curbele şi în punctele singulare), *determină în mod univoc structura* (starea) *şi evoluţia câmpului electromagnetic macroscopic, adică permit determinarea univocă a vectorilor de stare –locală şi instantanee–* a câmpului electromagnetic în teoria macroscopică: $\overline{E}, \overline{H}, \overline{D}$ şi $\overline{B}$, *în oricare din regimurile sale, dacă sunt precizate următoarele condiţii* (numite *condiţii de unicitate*):

1) *condiţiile iniţiale* (numai în regimul nestaţionar), prin care se cunosc mărimile directe de stare a câmpului electromagnetic $\overline{E}(P,0)$ şi $\overline{H}(P,0)$, pentru orice punct P aparţinând domeniului de existenţă Ω, la momentul iniţial t = 0. Faţă de sistemul de referinţă ataşat corpurilor, $\forall P \in \Omega$ poate fi determinat prin *raza sa vector* $\overline{r}$ care reprezintă distanţa de la un punct de referinţă P_0 (originea) la punctul P considerat, cu orientarea $P_0 \rightarrow P$. În acest caz, condiţiile iniţiale sunt $\overline{E}(\overline{r},0)$ şi $\overline{H}(\overline{r},0)$ pentru $\forall \overline{r} \subset \Omega$ şi la $t = t_0 = 0$;

2) *condiţiile la limită* (pe suprafaţa $\Sigma = \mathrm{Fr}\Omega$), care cuprind condiţiile pe frontiera Σ a domeniului câmp Ω, înglobând şi condiţiile la infinit (dacă domeniul câmp Ω este infinit extins) în fiecare moment $t > t_0 = 0$, a componentelor tangenţiale $E_t(P,t)$ sau $H_t(P,t)$ pentru $\forall P \in \Sigma$ şi la $\forall t > t_0 = 0$, precum şi condiţiile la interfaţa subdomeniilor de câmp în medii neomogene;

3) *condiţiile de material* şi *starea corpurilor* din câmp, fixate prin ecuaţiile constitutive corespunzătoare: $\varepsilon = \varepsilon(\overline{r}), \mu = \mu(\overline{r}),\ \gamma = \gamma(\overline{r}),\ P_p = P_p(\overline{r},t),\ M_p = M_p(\overline{r},t)$ şi $\overline{E}_i = \overline{E}_i(\overline{r},t)$. În general se presupune mediul liniar, izotrop şi în repaus, deci caracterizat de mărimile de material ε, μ şi γ constante în timp;

4) *condiţiile de viteză* (care sunt necesare numai în cazul unor medii mobile în câmp) prin care se consideră câmpul de viteze $\overline{w}(\overline{r},t)$ ca o distribuţie vectorială cunoscută pe Ω şi într-un interval de timp $t = [0,T]$, cu derivatele parţiale ale vitezei în raport cu coordonatele spaţiale ca mărimi scalare mărginite;

5) *condiţiile de surse*, care cer ca funcţiile de punct şi de timp $q_v, \overline{J}, \overline{P}_p, \overline{M}_p$ şi $\overline{E}_i$ să fie cunoscute (date în domeniile de continuitate şi netezime din Ω), ca şi densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice q_Σ şi densitatea de curent $\overline{J}_\Sigma$ pe suprafeţele Σ_d de discontinuitate (electromagnetică şi, eventual, cinetică) existente în câmpul Ω.

Această formulare, evidenţiată în esenţa ei prin scrierea cursivă, reprezintă *teorema de unicitate a câmpului electromagnetic* în teoria sa macroscopică.

Teorema aceasta scoate în evidenţă caracterul complet al legilor fundamentale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic, precum şi caracterul obiectiv „cauză ⇆ efect” al câmpului electromagnetic (de a satisface principiul cauzabilităţii).

În formularea precedentă a teoremei de unicitate a câmpului electromagnetic s-a admis „a priori” existența soluției ecuațiilor fundamentale ale câmpului electromagnetic macroscopic – prin considerente matematice aplicate sistemului de ecuații cu derivate parțiale (1.105`) sau (1.105``). În tehnică, această existență a unicității este probată „a posteriori”, de elaborarea –prin aplicarea condițiilor de unicitate (formulate anterior)– a soluției căutate.

În tratatul *Preda, M., Cristea, P., Spinei, F., 1980* se prezintă o demonstarție elegantă –prin reducerea la absurd– a teoremei de unicitate a câmpului electromagnetic, considerându-se cazul particular –mai simplu– al unui mediu liniar, izotrop şi în repaus, ceea ce implică numai condițiile de unicitate 1), 2) şi 3) ale teoremei.

Se presupune, prin reducere la absurd, că ecuațiile generale ale legilor câmpului electromagnetic, în condițiile de unicitate 1), 2) şi 3), ar conduce la două soluții şi anume:

$$\overline{E}_1(\overline{r},t),\quad \overline{D}_1(\overline{r},t),\quad \overline{H}_1(\overline{r},t),\quad \overline{B}_1(\overline{r},t),\quad \overline{J}_1(\overline{r},t)$$

şi

$$\overline{E}_2(\overline{r},t),\quad \overline{D}_2(\overline{r},t),\quad \overline{H}_2(\overline{r},t),\quad \overline{B}_2(\overline{r},t),\quad \overline{J}_2(\overline{r},t). \tag{U1}$$

Fiind soluții, aceste mărimi satisfac –ambele– legile câmpului electromagnetic pentru medii izotrope, liniare şi în repaus, ceea ce înseamnă că se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\overline{E}_1 &= -\frac{\partial \overline{B}_1}{\partial t} \quad \text{şi} \quad \mathrm{rot}\overline{E}_2 = -\frac{\partial \overline{B}_2}{\partial t}\ , \\ \mathrm{rot}\overline{H}_1 &= \overline{J}_1 + \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial t} \quad \text{şi} \quad \mathrm{rot}\overline{H}_2 = \overline{J}_2 + \frac{\partial \overline{D}_2}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{U2}$$

adică primele două ecuații de bază ale lui Maxwell (1.105), precum şi legile de material (în aceleaşi condiții de material 3):

$$\left.\begin{aligned} \overline{J}_1 &= \gamma(\overline{E}_1 + \overline{E}_i) \quad \text{şi} \quad \overline{J}_2 = \gamma(\overline{E}_2 + \overline{E}_i)\ , \\ \overline{D}_1 &= \varepsilon\overline{E}_1 + \overline{P}_p \quad \text{şi} \quad \overline{D}_2 = \varepsilon\overline{E}_2 + \overline{P}_p\ , \\ \overline{B}_1 &= \mu\overline{H}_1 + \mu_0\overline{M}_p \quad \text{şi} \quad \overline{B}_2 = \mu\overline{H}_2 + \mu_0\overline{M}_p\ , \end{aligned}\right\} \tag{U3}$$

care îndeplinesc aceleaşi condiții inițiale 1), ceea ce înseamnă că se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_1(\overline{r},0) &= \overline{E}_2(\overline{r},0) = \overline{E}(\overline{r},0), \\ \overline{H}_1(\overline{r},0) &= \overline{H}_2(\overline{r},0) = \overline{H}(\overline{r},0) \end{aligned}\right\} \Leftarrow \forall\overline{r} \subset \Omega \tag{U4}$$

şi aceleaşi condiții la limită, componentele tangențiale la $\Sigma = \mathrm{Fr}\Omega$ fiind:

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_{t_1}(\overline{r},t) &= \overline{E}_{t_2}(\overline{r},t) = \overline{E}_t(\overline{r},t), \\ \overline{H}_{t_1}(\overline{r},t) &= \overline{H}_{t_2}(\overline{r},t) = \overline{H}_t(\overline{r},t). \end{aligned}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{aligned} &\forall\overline{P}(\overline{r}) \in \Sigma \\ &\forall t \in \{0,T\} \end{aligned}\right. \tag{U5}$$

Diferențele celor două soluții, adică:

$$\overline{E}_d = \overline{E}_1 - \overline{E}_2,\ \overline{D}_d = \overline{D}_1 - \overline{D}_2,\ \overline{H}_d = \overline{H}_1 - \overline{H}_2,\ \overline{B}_d = \overline{B}_1 - \overline{B}_2 \ \text{şi}\ \overline{J}_d = \overline{J}_1 - \overline{J}_2, \tag{U6}$$

trebuie să satisfacă şi ele sistemul de ecuații (1.105) şi (1.106), putându-se scrie:

$$\text{(U7)}\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\overline{E}_d = -\frac{\partial \overline{B}_d}{\partial t}\ , && (1) \\ &\mathrm{rot}\overline{H}_d = \overline{J}_d + \frac{\partial \overline{D}_d}{\partial t}\ , && (2) \\ &\overline{J}_d = \gamma\overline{E}_d\ , && (3) \\ &\overline{D}_d = \varepsilon\overline{E}_d\ , && (4) \\ &\overline{B}_d = \mu\overline{H}_d\ , && (5) \end{aligned}\right.$$

obținut prin scăderea, membru cu membru, a expresiilor (U2) şi (U3).

Având în vedere relațiile (U4) şi (U5), rezultă: condițiile inițiale (U4) şi cele pe frontieră (U5) ale mărimilor diferență sunt condiții de zero, adică:

$$\left.\begin{aligned}\overline{E}_d(\overline{r},0)=\overline{E}_1(\overline{r},0)-\overline{E}_2(\overline{r},0)=0\,,\\ \overline{H}_d(\overline{r},0)=\overline{H}_1(\overline{r},0)-\overline{H}_2(\overline{r},0)=0\end{aligned}\right\}\Leftarrow\forall\overline{r}\subset\Omega \tag{U8}$$

şi:

$$\left.\begin{aligned}E_{td}(\overline{r},t)=E_{t_1}(\overline{r},t)-E_{t_2}(\overline{r},t)=0\\ H_{td}(\overline{r},t)=H_{t_1}(\overline{r},t)-Ht_{_2}(\overline{r},t)=0\end{aligned}\right\}\Leftarrow\forall P(\overline{r})\in\Sigma \tag{U9}$$

Puterea disipată P_d în mediul din câmpul Ω, cu volumul v_Ω, de sistemul de mărimi diferenţă (U6) este – conform legii tarnsformării de energie (1.102``) şi (1.103``):

$$P_d=\int_{v_\Omega}\overline{E}_d\cdot\overline{J}_d\mathrm{d}v\,,$$

care prin înlocuirea lui $\overline{J}_d$ rezultat din relaţia (2) a sistemului (U7), devine:

(U10)

$$\begin{aligned}P_d&=\int_{v_\Omega}\overline{E}_d\left(\mathrm{rot}\overline{H}_d-\frac{\partial\overline{D}_d}{\partial t}\right)\mathrm{d}v==\int_{v_\Omega}\left(\overline{E}_d\nabla\overline{H}_d-\overline{E}_d\frac{\partial\overline{D}_d}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}v=\\&=\int_{v_\Omega}\left(\nabla\cdot\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)+\overline{H}_d\cdot\left(\nabla\times\overline{E}_d\right)-\overline{E}_d\frac{\partial\overline{D}_d}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}v=\\&=\int_{v_\Omega}\left[\mathrm{div}\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)+\overline{H}_d\mathrm{rot}\overline{E}_d-\overline{E}_d\frac{\partial\overline{D}_d}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}v=\\&=\int_{v_\Omega}\mathrm{div}\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)\mathrm{d}v+\int_{v_\Omega}\overline{H}_d\mathrm{rot}\overline{E}_d\mathrm{d}v-\int_{v_\Omega}\overline{E}_d\frac{\partial\overline{D}_d}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

În membrul drept al relaţiei (U10) se pot face următoarele înlocuiri:

- aplicându-se formula lui Gauss–Ostrogradski (9.20) – v.§ 9.1.2 primului termen rezultă:

$$\int_{v_\Omega}\mathrm{div}\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)\mathrm{d}v=\int_{\Sigma=\mathrm{Fr}\Omega}\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)\cdot\mathrm{d}\overline{A}\,;$$

- înlocuindu-se în termenul al doilea $\mathrm{rot}\,\overline{E}_d$ prin expresia sa (1) din sistemul (U7) şi înlocuindu-se $\overline{B}_d$ cu expresia sa (5) din (U7) rezultă:

$$\int_{v_\Omega}\overline{H}_d\mathrm{rot}\overline{E}_d\mathrm{d}v=\int-\overline{H}_d\frac{\partial\overline{B}_d}{\partial t}\mathrm{d}v=-\int_{v_\Omega}\overline{H}_d\frac{\partial\mu\overline{H}_d}{\partial t}\mathrm{d}v=-\int_{v_\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu\overline{H}_d^2}{2}\right)\mathrm{d}v\,;$$

- înlocuindu-se în ultimul termen $\overline{D}_d$ cu expresia sa (4) din sistemul (U7) rezultă:

$$\int_{v_\Omega}\overline{E}_d\frac{\partial\overline{D}_d}{\partial t}\mathrm{d}v=\int_{v_\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\overline{E}_d^2}{2}\right)\mathrm{d}v\,,$$

astfel că relaţia (U10) devine:

$$P_d=\int_\Sigma\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)\cdot\mathrm{d}\overline{A}-\int_{v_\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon\overline{E}_d^2}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu\overline{H}_d^2}{2}\right)\mathrm{d}v=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{v_\Omega}\left(\frac{\varepsilon\overline{E}_d^2}{2}+\frac{\mu\overline{H}_d^2}{2}\right)\mathrm{d}v\,, \tag{U11}$$

deoarece în condiţiile pe frontieră (U9) produsul vectorial $\left(\overline{H}_d\times\overline{E}_d\right)\big|_\Sigma=0$ şi atunci:

$$P_d=\int_{v_\Omega}\overline{E}_d\cdot\overline{J}_d\mathrm{d}v=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{v_\Omega}\left(\frac{\varepsilon\overline{E}_d^2}{2}+\frac{\mu\overline{H}_d^2}{2}\right)\mathrm{d}v\,,$$

care, prin înlocuirea lui $\overline{J}_d$ cu expresia sa (3) din sistemul (U7), devine:

$$\int_{v_\Omega}\gamma\overline{E}_d^2\mathrm{d}v=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{v_\Omega}\left(\frac{\varepsilon\overline{E}_d^2}{2}+\frac{\mu\overline{H}_d^2}{2}\right)\mathrm{d}v\,. \tag{U12}$$

Membrul stâng al egalității (U12) este, întotdeauna în intervalul [0, T] şi peste tot în Ω, nenegativ – deoarece $\gamma > 0$ şi $E_d^2 \geq 0$; aceasta are implicația: derivata integralei din membrul drept (U12) trebuie să fie (este) negativă, ceea ce înseamnă că integrala derivată este sau scăzătoare sau constantă. Dar, conform condițiilor inițiale (U8), la momentul inițial $t_0 = 0$, integrala din membrul drept al egalității (U12) fiind nulă, rezultă că la orice alt timp $t > 0$ această integrală este ori nenegativă ori nulă; însă cum fiecare termen al integralei este sigur nenegativ (deoarece simultan şi peste tot în Ω $\varepsilon > 0$ şi $\mu > 0$), atunci ea este nulă în $\forall t \in (0, T]$. Prin urmare:

$$\int_{v_\Omega} \left(\frac{\varepsilon \overline{E}_d^2}{2} + \frac{\mu \overline{H}_d^2}{2} \right) \mathrm{d}v = 0$$

şi, de aici:

$$\overline{E}_d(\bar{r}, t) = 0 \;\; \text{şi} \;\; \overline{H}_d(\bar{r}, t) = 0 \quad \Leftarrow \begin{cases} \forall \bar{r} \subset \Omega \\ \forall t \in [0, T] \end{cases},$$

iar –conform expresiilor (3), (4) şi (5) din (U7)– atunci şi celelalte mărimi vectoriale diferență sunt nule; adică:

$$\overline{J}_d(\bar{r}, t) = 0, \quad \overline{D}_d(\bar{r}, t) = 0 \;\; \text{şi} \;\; \overline{B}_d(\bar{r}, t) = 0 \quad \Leftarrow \begin{cases} \forall \bar{r} \subset \Omega \\ \forall t \in [0, T] \end{cases}.$$

În acest fel, toate ecuațiile (U6) sunt nule şi deci cele două soluții (U1), presupuse inițial ca fiind diferite, sunt identice: $\overline{E}_1 \equiv \overline{E}_2$, $\overline{D}_1 \equiv \overline{D}_2$, $\overline{H}_1 \equiv \overline{H}_2$, $\overline{B}_1 \equiv \overline{B}_2$, şi $\overline{J}_1 \equiv \overline{J}_2$, peste tot (în orice domeniu Ω) şi oricând în timp. În acest fel, teorema de unicitate a câmpului electromagnetic, formulată la începutul acestui paragraf, este demonstrată, cel puțin pentru cazul particular al unui mediu izotop şi liniar aflat în repaus, în condițiile de unicitate 1), 2) şi 3).

1.5.2. Teorema superpoziției câmpurilor electromagnetice

Această teoremă este valabilă numai pentru câmpul dintr-un *mediu liniar* şi izotrop în repaus, ale cărui mărimi de material (ε, μ, γ, $\overline{E}_i$ etc.) nu depind de valoarea instantanee a mărimilor de stare a câmpului electromagnetic ($\overline{E}, \overline{D}, \overline{H}, \overline{B}$ etc.) şi nici de mărimile de stare electrică ($q_v, \overline{J}, \overline{P}$ etc.) şi magnetică ($\overline{M}$ etc.) ale corpurilor. Ea afirmă că în condiții de unicitate (inițiale, la limită şi de material) care conduc la o soluție unică a câmpului electromagnetic – corespunzătoare condițiilor date– orice alte grupuri de condiții S_k, $k = 1,2,...,n$, conduce, fiecare în parte, la un grup de soluții C_k, $k = 1,2,...,n$ unic determinate, astfel că suma condițiilor $\sum_{k=1}^{n} C_k$ determină o soluție unică ce constă în suma soluțiilor S_k, $k = 1,2,...,n$ produs de fiecare grup de condiții existente independent.

Astfel, pentru un domeniu Ω cu un mediu caracterizat în $\forall \bar{r} \in \Omega$ de mărimile de materiale $\varepsilon = \varepsilon(\bar{r})$, $\mu = \mu(\bar{r})$ şi $\gamma = \gamma(\bar{r})$ constante în timp şi independente de valorile mărimilor de stare, condiții de unicitate diferite conduc la soluții unice diferite:

$$\left.\begin{matrix} \overline{E}_1(\bar{r}, 0),\, \overline{H}_1(\bar{r}, 0) \text{ în } \forall \bar{r} \subset \Omega \\ \overline{E}_{t_1}(\bar{r}, t),\, \overline{H}_{t_1}(\bar{r}, t) \text{ în } \forall t > 0 \\ \overline{P}_{p_1}(\bar{r}, t),\; \overline{M}_{p1}(\bar{r}, t),\, \overline{E}_{i_1}(\bar{r}, t) \text{ în } \forall \bar{r} \subset \Omega \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \overline{E}_1(\bar{r}, t),\, \overline{D}_1(\bar{r}, t) \\ \overline{H}_1(\bar{r}, t),\, \overline{B}_1(\bar{r}, t) \\ \overline{J}_1(\bar{r}, t) \end{matrix}\right\} \text{ în } \begin{cases} \forall \bar{r} \subset \Omega \\ \forall t > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{E}_2(\overline{r},0),\ \overline{H}_2(\overline{r},0)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\\ \overline{E}_{t_2}(\overline{r},t),\ \overline{H}_{t_2}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall t>0\\ \overline{P}_{p_2}(\overline{r},t),\ \overline{M}_{p2}(\overline{r},t),\ \overline{E}_{i_2}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\overline{E}_2(\overline{r},t),\ \overline{D}_2(\overline{r},t)\\ \overline{H}_2(\overline{r},t),\ \overline{B}_2(\overline{r},t)\\ \overline{J}_2(\overline{r},t)\end{array}\right\}\ \text{în}\ \begin{cases}\forall\overline{r}\subset\Omega\\ \forall t>0\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc}\cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{E}_n(\overline{r},0),\ H_n(\overline{r},0)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\\ \overline{E}_{t_n}(\overline{r},t),\ \overline{H}_{t_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall t>0\\ \overline{P}_{p_n}(\overline{r},t),\ \overline{M}_{p_n}(\overline{r},t),\ \overline{E}_{i_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\overline{E}_n(\overline{r},t),\ D_n(\overline{r},t)\\ \overline{H}_n(\overline{r},t),\ \overline{B}_n(\overline{r},t)\\ \overline{J}_n(\overline{r},t)\end{array}\right\}\ \text{în}\ \begin{cases}\forall\overline{r}\subset\Omega\\ \forall t>0\end{cases}$$

atunci suma condițiilor dă o soluție unică egală cu suma soluțiilor:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{E}_1(\overline{r},0)+\overline{E}_2(\overline{r},0)+\ldots+\overline{E}_n(\overline{r},0)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\\ \overline{H}_1(\overline{r},0)+\overline{H}_2(\overline{r},0)+\ldots+\overline{H}_n(\overline{r},0)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\\ \overline{E}_{t_1}(\overline{r},t)+\overline{E}_{t_2}(\overline{r},t)+\ldots+\overline{E}_{t_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall t>0\\ \overline{H}_{t_1}(\overline{r},t)+\overline{H}_{t_2}(\overline{r},t)+\ldots+\overline{H}_{t_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall t>0\\ \overline{P}_{p_1}(\overline{r},t)+\overline{P}_{p_2}(\overline{r},t)+\ldots+\overline{P}_{p_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\\ \overline{M}_{p_1}(\overline{r},t)+\overline{M}_{p_2}(\overline{r},t)+\ldots+\overline{M}_{p_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\\ \overline{E}_{i_1}(\overline{r},t)+\overline{E}_{i_2}(\overline{r},t)+\ldots+\overline{E}_{i_n}(\overline{r},t)\ \text{în}\ \forall\overline{r}\subset\Omega\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\overline{E}(\overline{r},t)=\overline{E}_1(\overline{r},t)+\overline{E}_2(\overline{r},t)+\ldots+\overline{E}_n(\overline{r},t)\\ \overline{D}(\overline{r},t)=\overline{D}_1(\overline{r},t)+\overline{D}_2(\overline{r},t)+\ldots+\overline{D}_n(\overline{r},t)\\ \overline{H}(\overline{r},t)=\overline{H}_1(\overline{r},t)+\overline{H}_2(\overline{r},t)+\ldots+\overline{H}_n(\overline{r},t)\\ \overline{B}(\overline{r},t)=\overline{B}_1(\overline{r},t)+\overline{B}_2(\overline{r},t)+\ldots+\overline{B}_n(\overline{r},t)\\ \overline{J}(\overline{r},t)=\overline{J}_1(\overline{r},t)+\overline{J}_2(\overline{r},t)+\ldots+\overline{J}_n(\overline{r},t).\end{array}\right.,$$

$$\text{în}\ \begin{cases}\forall\overline{r}\subset\Omega\\ \forall t>0\end{cases}\qquad(1.110)$$

În esență, teorema (1.110) a superpoziției câmpului electromagnetic afirmă că sumei cauzelor ce produc efecte specifice electromagnetice îi corespunde suma efectelor.

Această teoremă are, formal, o argumentație semantică, deoarece se spune că un mediu care satisface principiul superpoziției este un mediu liniar ceea ce –logic– implică şi reciproca, adică orice mediu liniar admite principiul superpoziției.

În fond, teorema are o justificare matematică precisă: în modelarea matematică orice sistem (funcție, ecuație, coeficient, operator etc.) liniar este –prin definiție– acela care admite superpoziția matematică, determinate de proprietățile de *asociativitate* şi distributivitate. Ori, toate ecuațiile ce reprezintă legile generale ale câmpului electromagnetic sunt liniare, astfel că folosind relația (U11), din paragraful precedent, pentru *n* câmpuri electromagnetice date în condițiile în care coeficienții ei sunt constanți şi însumând (membru cu membru) ecuațiile obținute, rezultă ecuația pentru câmpul sumă.

1.5.3. Teorema energiei electromagnetice

Această teoremă stabileşte, în anumite condiții de mediu şi pentru un sistem imobil de corpuri, *aspectul energetic cantitativ al interacțiunii corpurilor cu un câmp electromagnetic* determinând transformările de energie care au loc atunci când starea câmpului electromagnetic se modifică, sub forma localizării ei (ca densitate de volum a energiei electromagnetice) şi a propagării ei (sub forma densității de suprafață a puterii electromagnetice radiate de câmp).

În acest scop se consideră că într-un domeniu mărginit $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, unde $\Sigma = \mathrm{Fr}\,\Omega$ „închide” un volum v_Ω, se află un sistem de *corpuri imobile*, ce „umplu” domeniul Ω, şi un câmp electromagnetic (caracterizat de mărimile sale de stare $\overline{E}$, $\overline{D}$, $\overline{H}$ şi $\overline{B}$). Pentru simplificare, se mai consideră corpurile din Ω ca fiind izotrope şi liniare (având, deci, mărimile de material ε, **μ** şi ρ independente de câmp), lipsite de polarizaţie electrică permanentă ($\overline{P}_p = 0$) şi magnetizaţie permanentă ($\overline{M}_p = 0$), cu starea lor electrică şi magnetică descrisă, local, de mărimile $\overline{J}, q_v, \overline{P}$ şi $\overline{M}$. Starea acestui sistem –astfel precizat– este determinată de ecuaţiile lui Maxwell (1.105M1), (1.105M2) şi de ecuaţiile (1.106M5) şi (1.106M6), adică de :

$$\mathrm{rot}\overline{H} = \overline{J} + \partial\overline{D}/\partial t\,, \tag{E1}$$

$$\mathrm{rot}\overline{E} = -\partial\overline{B}/\partial t\,, \tag{E2}$$

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{E}\,, \tag{E3}$$

$$\overline{B} = \mu\overline{H}\,. \tag{E4}$$

Orice modificare procesuală de stare, survenită în sistemul electromagnetic precizat (de corpuri şi câmp electromagnetic în interacţiune) nu se poate face decât printr-o variaţie de energie a sistemului. În cazul unei modificări elementare a stării sistemului, variaţia de energie aferentă lui va fi în sensul: scăderea energiei câmpului electromagnetic din v_Ω este egală cu energia electromagnetică transformată în alte forme de energie $\mathrm{d}W_\Omega$ din v_Ω plus energia electromagnetică „radiată” $\mathrm{d}W_\Sigma$, adică cea care „iese” prin suprafaţa Σ ,ceea ce înseamnă:

$$-\,\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\Omega + \mathrm{d}W_\Sigma\,, \tag{E5}$$

care se produce într-un interval de timp elementar dt.

Sub formă de puteri, relaţia (E5) devine:

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_\Omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_\Sigma}{\mathrm{d}t} = P_\Omega + P_\Sigma\,, \tag{E6}$$

în care $P_\Omega = \mathrm{d}W_\Omega/\mathrm{d}t$ este puterea transformată sub formă neelectromagnetică în domeniul Ω, iar $p_\Sigma = \mathrm{d}W_\Sigma/\mathrm{d}t$ este puterea electromagnetică transmisă prin învelişul Σ al domeniului Ω.

În general, puterea P_Ω electromagnetică se poate transforma în formele: putere calorică (prin efectul electrocineticii), puterea datorită mişcării corpurilor din Ω („mecanică”), puterea necesară variaţiei cu efect de întârziere – histerezis a polarizării electrice şi magnetice, puterea necesară reacţiilor chimice etc. Deoarece s-a considerat, a priori, că sistemul de corpuri este imobil, cu ε şi μ constante (deci fără histerezis şi fără schimbări structurale chimice), rezultă că puterea P_Ω se transformă numai în căldură, prin efect Joule, cu densitatea de volum $p = \overline{E}\cdot\overline{J}$, conform legii (1.103``), în orice punct $P \in \Omega$, ceea ce permite să se scrie:

$$P_\Omega = \int_{v_\Omega} p\mathrm{d}v = \oint_{v_\Omega} \overline{E}\cdot\overline{J}\mathrm{d}v\,. \tag{E7}$$

Analizându-se local procesele transformărilor energiei, pentru $\forall P \in \Omega$ va trebui să se determine densitatea de volum *w* (în Ws / m^3) a energiei transformate, astfel că pe ansamblul Ω energia transformată va fi:

(E8) $$W = \int_{v_\Omega} w \mathrm{d}v ,$$

iar iradierea, în $\forall P \in \Sigma$, a puterii electromagnetice P_Σ prin densitatea de suprafață a acestei puteri $\mathrm{d}P_\Sigma / \mathrm{d}A$ (în W / m^2), care se poate exprima printr-un vector $\overline{S}$, astfel încât fluxul lui prin suprafața de iradiere Σ este chiar scalarul P_Σ:

(E9) $$P_\Sigma \overset{D}{=} \oint_\Sigma \overline{S} \cdot \overline{\mathrm{d}A} ,$$

unde lui $\overline{S}$ i se dă numele de *vectorul Poyting*.

În aceste condiții, lucrându-se cu distribuțiile p, w pe Ω și $\overline{S}$ pe Σ, date de relațiile (E7), (E8) și definiția (E9), ecuația de bilanț (E6) a puterilor, în cazul unor tranformări de stare a sistemului electromagnetic considerat, ia forma:

(E10) $$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{v_\Omega} w \mathrm{d}v = \int_{v_\Omega} \overline{E} \cdot \overline{J} \mathrm{d}v + \oint_\Sigma \overline{S} \cdot \mathrm{d}A$$

al cărui prim termen din membrul drept se poate scrie și astfel:

(E11) $$p = \overline{E} \cdot \overline{J} = \overline{E}\left(\mathrm{rot}\overline{H} - \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right) = \overline{E}\, \mathrm{rot}\overline{H} - \overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} ,$$

în care $\overline{J}$ a fost înlocuit prin expresia lui rezultată din ecuația (E1).

Conform relației (9.32) din paragraful 9.1.2 (v. „Operatorul diferențial – vectorial”), termenul $E\, \mathrm{rot}\overline{H} = \overline{E} \cdot \left(\nabla \times \overline{H} \right)$ are expresia:

$$E\, \mathrm{rot}\overline{H} = \mathrm{div}\left(\overline{H} \times \overline{E} \right) + \overline{H}\, \mathrm{rot}\overline{E} ,$$

care, introdusă în relația (E11), conduce la:

$$p = \mathrm{div}\left(\overline{H} \times \overline{E} \right) + \overline{H}\, \mathrm{rot}\overline{E} - \overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} .$$

Înlocuindu-se în această ultimă relație, rot $\overline{E}$ cu expresia sa (E2) și –apoi– $\overline{B}$ cu $\mu\overline{H}$, conform ecuației (E4), iar $\overline{D}$ cu $\varepsilon\overline{E}$, conform ecuației (E3), se obține:

$$p = \mathrm{div}\left(\overline{H} \times \overline{E} \right) - \left(\overline{H} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right) = \mathrm{div}\left(\overline{H} \times \overline{E} \right) - \left(\overline{H} \frac{\overline{\partial}}{\partial t} \mu\overline{H} + \overline{E} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon\overline{E} \right)$$

și –deoarece $\varepsilon = \underset{t,\overline{E}}{\mathrm{const.}}$ și $\mu = \underset{t,\overline{H}}{\mathrm{const.}}$ (mediul fiind considerat liniar)– se mai poate scrie în continuare:

$$p = \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \left(\mu\overline{H}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} + \varepsilon\overline{E}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \left(\mu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{H}^2}{2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{D}^2}{2}\right) =$$
$$= \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu\overline{H}\cdot\overline{H}}{2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon\overline{E}\cdot\overline{E}}{2}\right) = \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{H}\cdot\overline{B}}{2} + \frac{\overline{E}\cdot\overline{D}}{2}\right)\ .$$

Calculându-se, cu această ultimă expresia a lui p, puterea totală transformată în procesul de conducție în întreg volumul v_Ω ocupat de domeniul Ω rezultă:

$$\int_{v_\Omega} p\mathrm{d}v = \int_{v_\Omega}\operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right)\mathrm{d}v - \int_{v_\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{H}\cdot\overline{B}}{2} + \frac{\overline{E}\cdot\overline{D}}{2}\right)\mathrm{d}v$$

şi, aplicându-se formula lui Gauss-Ostrogradski (9.20), potrivit căreia fluxul unui vector –aici $\overline{H}\times\overline{E}$ – printr-o suprafață închisă Σ este egală cu integrala de volum a divergenței acelui vector extins la volumul v_Ω închis de Σ = Fr Ω, se obține în definitiv (prin transferarea termenului $\int_{v_\Omega}\operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right)\mathrm{d}v = \int_\Sigma\left(\overline{H}\times\overline{E}\right)\cdot\overline{\mathrm{dA}} = -\oint_\Sigma\left(\overline{\mathrm{E}}\times\overline{H}\right)\cdot\mathrm{d}\overline{\mathrm{A}}$ în membrul stâng şi inversarea, apoi, a membrilor între ei):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{v_\Omega}\left(\frac{\overline{E}\cdot\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\cdot\overline{B}}{2}\right)\mathrm{d}v = \int_{v_\Omega}p\mathrm{d}v + \oint_\Sigma\left(\overline{E}\times\overline{H}\right)\cdot\mathrm{d}\overline{A}\ .$$

Comparându-se această relație finală cu relația (E10), de la care s-a plecat, în condițiile în care v_Ω şi Σ sunt oarecari şi identificându-se termenii rezultă:

- expresia *densității de volum a energiei electromagnetice* din câmp este:

$$w = \frac{\overline{E}\cdot\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\cdot\overline{B}}{2}\ , \qquad (1.111)$$

care are două componente:

$$w_e = \frac{\overline{E}\cdot\overline{D}}{2}\ , \qquad (1.111`)$$

ce reprezintă *densitatea de volum a energiei electrice* şi:

$$w_m = \frac{\overline{H}\cdot\overline{B}}{2}\ , \qquad (1.111``)$$

care este *densitatea de volum a energiei magnetice*;

- expresia *densității de suprafață a puterii transmise (propagate) de câmpul electromagnetic*, adică *vectorul Poyting*, este:

$$\overline{S} = \overline{E}\times\overline{H}\ , \qquad (1.112)$$

puterea transmisă prin suprafața închisă Σ de câmpul electromagnetic fiind –deci– fluxul acestui vector; $P_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \overline{S} \cdot \mathrm{d}\overline{A}$. Dacă, teoretic, câmpul se extinde la infinit, atunci suprafața Σ (care se închide la infinit) poate fi o suprafață cvasiînchisă, deci –generalizând– Σ poate fi orice suprafață prin care se propagă câmpul electromagnetic, transportând energie.

Expresiile (1.111) şi (1.112) reprezintă modele ale teoremei energiei electromagnetice.