Cuprins:

Introducere

Pentru a ne familiariza cu tema sa dam mai intii niste noțiuni, pentru a face deosebire dintre planul Euclidian şi cel Hiperbolic:

Geometria euclidiană este cea mai veche formalizare a geometriei, □i în acela□i timp cea mai familiară □i mai folosită în viața de zi cu zi. A□a după cum indică □i adjectivul euclidiană, aceasta a fost enunțată prima dată de către gânditorul Euclid.

Aceasta se bazeaza pe un set de axiome, mai numite şi sistemul de axiome Hilbert. Axiomatica lui Hilbert contine 20 de axiome grupate in urmatoarelecinci grupe. În matematică, geometria hiperbolică (numită □i geometria lobacevskiană sau geometria Bolyai-Lobacevskiană) este o geometrie non-euclidiană, adică axioma (postulatul) paralelelor din geometria euclidiană este înlocuită. Axioma paralelelor din geometria euclidiană este echivalentă cu faptul că, într-un spațiu bidimensional, pentru orice dreaptă d □i orice punct P care nu aparține dreptei d, există o unică dreaptă care trece prin P □i care nu intersectează dreapta d, adică este paralelă cu d. În geometria hiperbolică există cel puțin două drepte care trec prin P □i nu se intersectează cu d, astfel încât această axiomă nu mai ramâne valabilă.

Diverse modele au fost construite cu ajutorul geometriei euclidiene, prin excluderea axiomelor din geometria hiperbolică, demonstrând astfel că axioma paralelelor este independentă de celelalte axiome ale lui Euclid. O proprietate caracteristică geometriei hiperbolice atestă faptul că suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decât doua unghiuri drepte. În cazul în care vârfurile tind la infinit, există triunghi hiperbolic ideal, în care toate cele trei unghiuri au măsurile egale cu 0°.

1. De la geometria absolută la geometria hiperbolică

Vom formula axiomele geometriei absolute, ca apoi sa inlocuim axioma lui Euclid despre paralele (numita si postulatul V) cu axioma Lobacevskii. In primul paragraf vom demonstra unele teoreme ale geometriei hiperbolice in plan.

I. Axiome de incidență:

- Oricare ar fi 2 puncte A,B ale spatiului exista o dreapta a care trece prin ele.
- Prin orice 2 puncte diferite A,B din spatiul dat trece cel mult o dreapta a.
  Notație: a = AB.

Figura 1

- Pe orice dreapta a sint situate cel putin 2 puncte. Exista cel putin 3 puncte necoliniare.
- Oricare ar fi 3 puncte necoliniare A,B,C exista cel mult un plan α care trece prin ele. Astfel, 3 puncte necoliniare determina un plan α si numai unul singur.
  Notație: α = (ABC)

- Dacă 2 puncte distincte A , B ale dreptei a sînt situate pe planul α, atunci fiecare punct al dreptei a este situat pe planul α . Adica, dacă o dreaptă are 2 puncte comune cu un plan, atunci dreapta este conținută în întregime în acest plan.

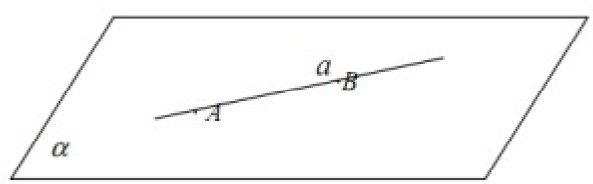


Figura 2

- Dacă două plane α şi β au un punct comun A , atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun B . (Planele se reprezintă pe foaie de caiet prinparalelograme).

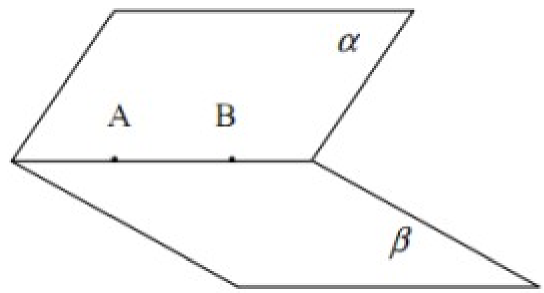


Figura 3

- Exista cel putin patru puncte necoliniare.

Utilizind aceste axiome pot fi demonstrate urmatoarele teoreme:

Teorema 1. Două drepte distincte au cel mult un punct comun.

Teorema 2. Dacă 2 plane au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună pe care sînt situate toate punctele comune acestor plane.

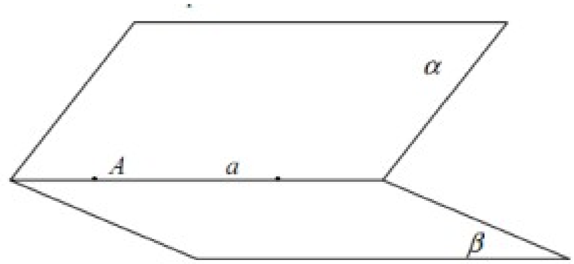


Figura 4

Teorema 4. Prin 2 drepte concurente trece un plan şi numai unul singur.

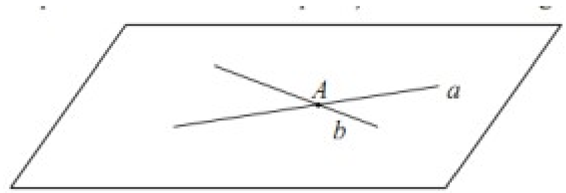


Figura 5

Teorema 5. Orice plan conține 3 puncte necoliniare.

II. Axiomele de ordine:

- Pentru orice 2 puncte A,b, exista un punct C (colinear) astfel incit B este intre A si C.

- Oricare ar fi 2 puncte distincte A , B există cel puțin un punct C astfel încât A − B − C (B se afla intre A si C).

- Oricare ar fi 3 puncte distincte coliniare A , B , C , unul şi numai unul este situat între celelalte două.

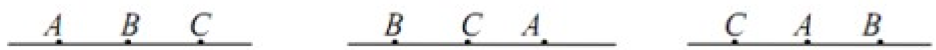


Figura 6

- (Axioma lui Pasch) Dacă o dreapta intersecteaza o latura a Δ- lui şi nu trece prin vîrfuri atunci mai intersecteaza încă cel puțin o latura.

III. Axiomele de congruență:

- Fiind date segmentul AB şi semidreapta cu originea în A' , există un punct B' situat pe această semidreaptă astfel încât [AB] ≡[A' B'].

- Dacă [AB] ≡ [A'B'] şi [AB] ≡ [A"B"] , atunci [A' B'] ≡ [A"B"] .

- Dacă A - B - C , A'- B - C' , [AB] ≡ [A' B'] şi [BC] ≡ [B'C'] , atunci [AC] ≡ [A'C'] .

IV. Axiomele de continuitate:

- (Axioma lui Arhimede). Fie segmentele AB şi CD astfel încât (AB)>(CD). Atunci pe dreapta AB există un număr finit de puncte A1, A2, ... , An astfel încât au loc relațiile:

a) $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, ... , $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$;

b) $(AA_1) = (A_1A_2) = \ldots = (A_{n-1}A_n) = (CD)$;

c) $A - B - A_n$

- Fie pe o dreaptă oarecare a un şir infinit de segmente (A_1B_1), (A_2B_2), ... , (A_nB_n), ...cu proprietățile:

a) (A_iB_i) este inlcus in $(A_{i+1}B_{i+1})$, pentru $\forall\, i \in N$.

b) nu există nici un segment inclus în toate segmentele şirului considerat.

Atunci pe dreapta a există un singur punct M care aparține fiecărui segment din acest şir.

V_E: Prin punctul ce nu aparține dreptei în planul determinat de punct şi dreaptă, trece nu mai mult de o dreaptă care nu intersectează dreapta dată.

$V_L(\sim \overline{V_E})$: Prin punctul care nu aparține dreptei, în planul determinat de punct şi dreaptă, Trec cel puțin 2 drepte diferite care nu intersestează dreapta dată.(Axioma lui Lobacevskii).

Fie că are loc:

$b_1 \cap b_{2=}\, Q$

$b_1 \cap a = \varnothing$

$b_2 \cap a = \varnothing$.

Fie $b_1 \neq b_2 \rightarrow$ cel putin unul din unghiurile drepte dintre [QP] si unica perpendiculara existenta in semiplanul care contine contine [QP]si perpendiculara, avem semidreapta interioara b_1, care nu intersecteaza a.

Totalitatea semidreptelor interioare unghiului drept μo impartim in 2 clase diferite:

I- semidrepte interioare ce intersecteaza a;

II- semidrepte interioare ce nu intersecteaza a; ambele clase fiind nevide.

$\exists ! \perp \ell$

$\exists ! \perp d$

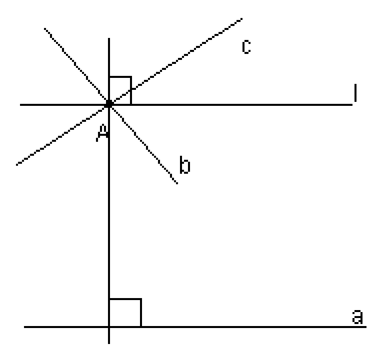


Figura 7

Avem ca orice element din clasa I precede oricarui element din clasa II. Deci in I nu exista ultimul $\rightarrow$in II exista primul element, adica semidreapa ce nu intersecteaza a, fie acesta b_1.

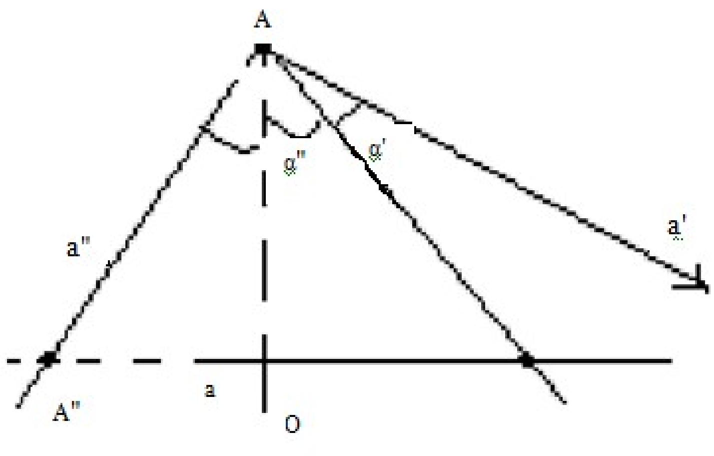


Figura 8

<u>Remarca:</u> Daca micsoram unghiul α' cu orice $\varepsilon > 0$ atunci dreapta va intersecta dreapta initiala.

<u>Def:</u> Unghiul dintre perpendiculara si paralela in sens Lobacevski se numeste unghi de paralelism.

In geometria absoluta (I- IV)+V_L, unghiul de paralelism este ascutit.

Am obtinut ca prin orice punct $A \notin a$ trece exact o paralela de dreapta si de exact o paralela de stinga, in sens Lobacevski.

<u>Def:</u> Dreptele ce trec prin A, nu sunt de frontiera si nu intersecteaza dreapta initiala le vom numi drepte divergente cu a(divergenta in sens Lobacevski).

Directia de paralelism o vom marca prin sageti.

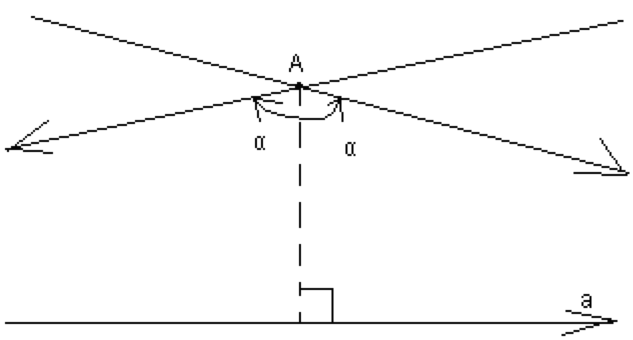


Figura 9

Geometria absoluta afirma ca suma unghiurilor unui Δ este $\leq 2d$, iar in cea hiperbolica: din postulatul V_L rezulta: $\Sigma_{\Delta} < 2d$.

Def: Marimea $2d - \alpha - \beta - \gamma$ pentru ΔABC cu unghiurile interne α , β, γ, se numeste defect.
Notam: $D_{\Delta ABC}$

In geometria Euclidiana defectul oricarui Δ este zero, iar in geometria Lobacevski defectul este strict pozitiv.
Remarca: In geometria Lobacevski (hiperbolica) defectul oricarui Δ este strict pozitiv, dar marginit superior D_{Δ}.

Def: Vom numi patrulater Sacchery acel patrulater cu 2 unghiuri drepte la latura numita baza si cu laturile laterale congurente.
Teorema: Suma unghiurilor interioare ale oricarui patrulatereste strict mai mica ca 4d.

$\Sigma_{ABCD} = \Sigma_{ABD} + \Sigma_{BDC} < 2d + 2d$

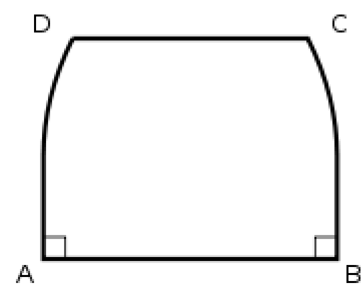


Figura 10

In planul hiperbolic oricarui segment putem sa- i punem in corespondenta univoca o marime unghiulara numita unghi de paralelism pentru acest segment.

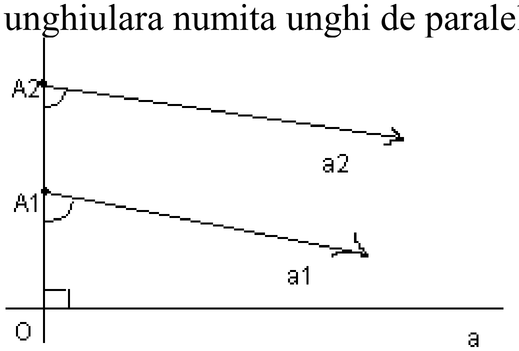


Figura 11

Fie segmentul $[OA_1] \Rightarrow \exists$!paralela de dreapta $\Rightarrow \exists$! unghi α_1;

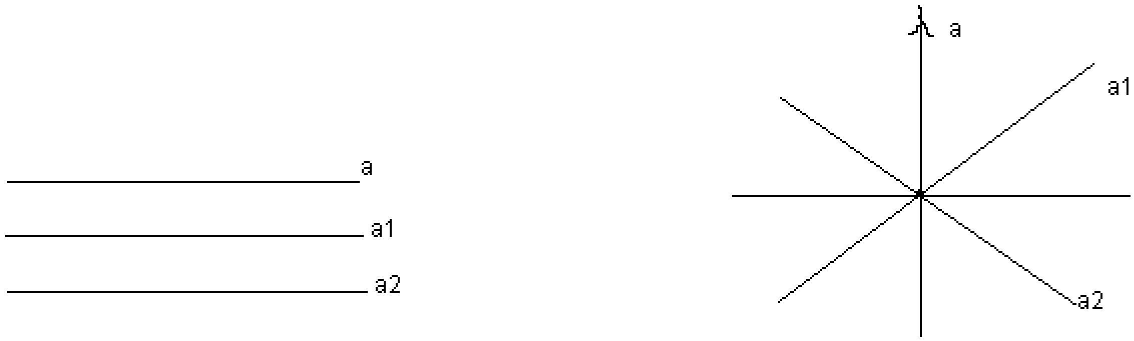
Fie ca in figura avem A_1 intre O si A_2 deci

$[OA_2] > [OA_1] \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$.

Definim functia Lobacevski, pentru $\forall$ segment ea pune in corespondentasegmentului, unghiul de paralelism ce- i corespunde.Notam: $\Pi(p) = \alpha$.

Teorema: Functia lui Lobacevski este monoton descrescatoare. Daca $p_2 < p_1 \Rightarrow \Pi(p_2) < \Pi(p_1)$.
Pentru moment putem afirma ca functia lui Lobacevski este definita pe R^+ si ia valori pe $[0, \pi/2]$, fiind monoton descrescatoare.

In E^2 cunoastem: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$;
$A_2x + B_2y + C_2 = 0$; unde dreptele sunt diferite
Ecuatia oricarei drepte dintr- un fascicul de drepte: $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$



fascicul de drepte paralele

fascicul eliptic

Fascicule de drepte in E^2

Def: Vom numi fascicul eliptic, totalitatea dreptelor planului H^2 incidente unui anumit punct, numit focarul fascicolului.

Def: Vom numi fascicul parabolic in planul H^2, totalitatea dreptelor paralele in sens Lobacevskii unei drepte in directie fixata. Are loc tranzitivitatea relatiei de a fi paralel.

fascicul parabolic

fascicul hiperbolic

Fascicule de drepte in H^2

Def: Vom numi fascicul hiperbolic in H^2, totalitatea dreptelor divergente care poseda una si aceeasi comuna. Are loc tranzitivitatea relatiei de a fi divergenta.

2. Izometrii în planul hiperbolic, grupuri de izometrii

Def: O funcție surjectivă $F : V \to V$ care păstrează distanța euclidiană, adică

$$d(F(x), F(y)) = d(x,y),\ \forall\, x,y \in V$$

se numeşte izometrie.

Proprietati:
1)Orice izometrie este o aplicatie injectivă
2)O izometrie conservă relatia "a fi intre"
3)O izometrie transformă un segment intr-un segment
4)O izometrie transformă o semidreaptă intr-o semidreaptă si o dreptă intr-o dreaptă
5)Orice izometrie este o aplicatie surjectivă.

Observații
1. Orice izometrie este bijectivă.
2. Transformările ortogonale şi translațiile sunt izometrii.
3. Compunerea a două izometrii este o izometrie.

Ca si in planul spatiului E^2 vom numi izometrie aplicatia planului pe sine insusi, care pastreaza distanta.
Multimea tuturor izometriilor formeaza grup, unde rolul unitatii ii revine transformarii identice.
Pentru $\forall A$ $id(A)=A$, $A \in$ oricarui spatiu metric.
Prin compozitie a 2 izometrii vom intelege efectuarea consecutiva a acestor transformari asupra punctelor planului.

Def: Izometria a carei patrat este izometria identica se mai numeste involutie.

Simetria

Se numeste transformare de simetrie a figurii date F, $\forall$ aplicatie izometrica a ei pe ea insesi, adica transformarea de simetrie s a figurii F se defineste prin conditiile:
a) pentru $\forall$ punct $M \in F$ si imaginea sa $s(M) = M'$, unde $M' \in F$ (s aplica F in sine $s(F) \subseteq F$);
b)pentru $\forall$ $M' \in F$ exista asa un punct $M \in F$, incit $M'=s(M)$, adica s aplica F pe sine: $s(F)= F$
c) pentru $\forall$ $M,N \in F$ intotdeauna $MN= M'N'$, pentru $M'= s(M)$ si $N'=s(N)$, adica s pastreaza neschimbata distanta dintre puncte.

<u>Teorema:</u> Multimea tuturor transformarilor de simetrie ale unei figuri formeaza un grup.
<u>Dem:</u> Se da o figura oarecare F cu multimea S a tutoror transformarilor de simetrie. Conform observatiei despre totalitatea S a tutror transformarilor de simetrie a figurii F este o submultime nevida a acestui subgrup, e suficienta aplicarea aplicarea criteriului subgrupului, adica verificarea conditiilor:

1) $s_1, s_2 \in S$, atunci si $s_2\, s_1 = s_3 \in S$
2) daca $s \in S$, atunci $s^{-1} \in S$.

Intr-adevar, deoarece s_1, s_2 sunt transformari biunivoce ale figurii F, atunci si $s_3 = s_2\, s_1$ va fi o transformare biunivoca a fgurii F, adica $s_3(F)=F$. Pentru arata ca s_3 e izometrica vom lua 2 puncte arbitrare $M,N \in F$ si vom nota $M'=s_1(M)$, iar $N'=s_1(N)$, $M''=s_2(M')$, si $N''=s_2(N')$. Fiindca $s_3 = s_2\, s_1$, atunci $M''=s_3(M)$ si $N''=s_3(N)$.Deoarece $s_1$si s_2 sunt izometrice, atunci $MN= M'N'$ si $M'N'= M''N''$. Prin urmare, $MN= M''N''$, deci s_3 e izometrica. Vom controla conditia 2), deoarece s e o trasnformare biunivoca a figurii F, atunci exista si s^{-1} care este tot o transformare biunivoca a figurii F. Vom verifica izometricitatea tranformarii s^{-1}: fie M, N – 2 puncte arbitrare ale figurii F, iar $M' =s^{-1}(M)$, $N'= s^{-1}(N)$, adica $M=s(M')$, $N=s(N')$; $M'N' = MN$ (deoarece s e izometrica) si atunci $MN= M'N'$, ceea ce inseamna ca s^{-1} e izometrica .CTD.

Grupul S al tuturor transformarilor de simetrie ale unei figuri se numeste grupul simplu al simetriei figurii date.

Fie $a \neq b$ si $a \subset H^2$, $b \subset H^2 \Rightarrow$ (a,b- coplanare).
Pentru aceste drepte avem posibiliatile:

1. se intersecteaza, genereaza un fascicul eliptic.
2. sunt paralele in sens Lobacevski, genereaza un fascicul parabolic
3. sunt divergente, genereaza un fascicul hiperbolic.

Tipurile de transformări ale simetrie în plan

Reflexia de la o dreapta, rotatia eliptica, inversia fata de un punct in geometriile euclidiana si hiperbolica se definesc in acelasi mod deoarece se bazeaza pe geometria absoluta.Vom descrie putin mai detaliat aceste transformari de simetrie. Sigur ca cea mai simpla transformare este cea identica

<u>Reflexia de la o dreapta (axa de simetrie)</u>

Reflexia (reflectarea) m de la dreapta u (Notam: M~O) se defineste ca trasnformare a planului ce aplica punctul arbitrar M pe punctul M' simetric lui fata de axa u. Cu alte cuvinte, formula $M'=m(M)$ inseamna, ca $M=M'$ pentru $M\in u$, iar pentru $M\notin u$ – axa u este mnediatoarea segmentului MM'($MM'\perp u$, $MM_1=M_1M'$ unde $M_1=MM'\cap u$).
Reflectarea de la o dreapta (simetria axiala) este o transformare reciproca, adica $m=m^{-1}$ sau $m^2=id$.
Izometricitatea: se da m~u, doua puncte arbitrare M si N ale planului, $M'=m(M)$ si $N'=m(N)$. Vom arata, ca mereu $MN=M'N'$. Cazul cind $M,N\in u$ este evident. Vom examina 2 cazuri netriviale: a) $M\in u$, $N\notin u$ (sau $M\notin u$,$N\in u$);
b) ambele puncte $M,N\notin u$
Cazul a) devine trivial pentru $MN\perp u$. Daca MN este oblic fata de u, atunci $\Delta MN_1N=\Delta MN_1N'$ (dupa 2 catete), deci $MN=M'N'$ (vezi Figura 12 a). Mentionam, ca in acest caz $\angle N_1MN= -\angle N_1MN'$ deoarece unghiurile sint orientate. In cazul b) pentru $MN\not\perp u$ prin cercetarea ΔM_1N_1N si $\Delta M_1N_1N'$ capatam ca $M_1N=M_1N'$ si $\angle N_1M_1N= -\angle N_1M_1N'$(vezi Figura 12. b.).Mai departe, $\angle N_1M_1M= -\angle N_1M_1M'$ din insesi conditia $M'=m(M)$, asa ca $\angle NM_1M=\angle N_1M_1M-\angle N_1M_1N=(-\angle N_1M_1M')-(-\angle N_1M_1N')= -\angle N'M_1M'$. Prin urmare, $\Delta MM_1N=\Delta MM_1N'$ (conform crt. 1), deci $MN=M'N'$.
In consecinta am capatat, ca reflectarea de la o dreapta este o trasnformare de simetrie a planului.

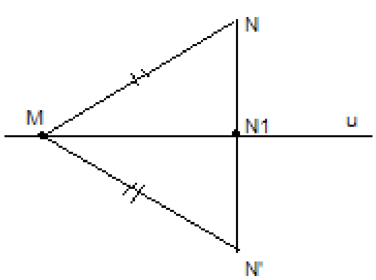


Figura 12 a

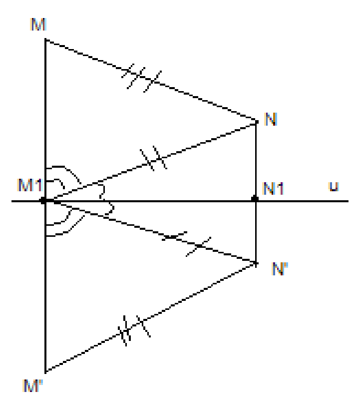


Figura 12 b

Reflexia de la un punct (centru de simetrie)

Reflexia (reflectarea) c de la punctul O (Notam: c~O) poate fi definita ca un caz particular al rotatiei: c=V~O, π.Cu alte cuvinte, c(O)=O, iar pentru M$\neq$0 formula M'=c(M) e echivalenta conditiei: punctul O e mijlocul segmentului MM'.
Usor se vede, ca daca M'=c(M), atunci si M=c(M'), adica $c=c^{-1}$ sau c^2=id. Aceasta proprietate a transformarii c se numeste reciprocitate.

Rotatia elitica cu unghiul dat in jurul punctului dat:

Rotatia V cu unghiul φ in jurul punctului O, numit centru (se noteaza: V~ O, φ) este acea transformare a planului, care pune in corespondenta fiecarui punct M punctul M'=V(M) conform legii: a) OM=OM' si deci V(O)= O

b) pentru M$\neq$0 intotdeauna $\angle MOM'$ = φ (φ – marimea algebrica a unghiului orientat, data in radiani).

Din definitie se vede ca rotatiile V~O, φ si V'~O, φ' coincid daca $\varphi' = \varphi + 2\pi$. De aceea, cu toate ca fiecarui numar real φ univoc ii corespunde relatia V~O, φ cu centrul O fixat, corespondenta aceasta nu e biunivoca. Vom remarca, ca rotatia cu unghiul $2k\pi$ ($k \in Z$) in jurul oricarui centru este nu altceva decit trasnformarea identica, iar rotatile cu unghiurile φ si – φ in jurul aceluasi centru sint reciproc inverse.

Proprietate algebrica: Produsul a 2 rotatii in jurul unui centru este o rotatie in jurul aceluasi centru cu unghiulsuma a unghiurilor rotatiilor ce se inmultesc**.**

Intr- adevar: fie V_i ~O, φ_i (i=1,2), $V_3 = V_2V_1$ si $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$, e clar ca V_3(O)=O. Vom lua punct arbitrar M $\neq$0 si vom nota: M'=V_1(M) si M''=V_2(M'), atunci M''=V_3(M.).Deoarece OM=OM' si OM'=OM'', atunci OM=OM''. In continuare, $\angle$MOM'=φ_1 si $\angle$M'OM''=φ_2, deci $\angle$ MOM''=φ_3. Asadar avem, ca V_3~O, φ_3.

Din proprietatea algebrica urmeaza, ca daca V~O, φ, atunci pentru $\forall$ numar intreg k, transformarea V_k este rotatie in jurul punctului O cu ughiul kφ (in special, daca $\varphi = \frac{2\pi}{k}$, atunci V_k=e). Daca vom alege pe plan un punct arbitrar O si fiecarui numar real φ ii vom pune in corespondenta rotatia V ~O, φ , atunci vom capata omomorfismul grupului aditiv al numerelor reale pe multimea rotatiilor in jurul punctului O. Prin urmare, multimea tuturor rotatiilor in jurul aceluiasi centru formeaza un grup comutativ.

Izometricitatea: se da rotatia V~O, φ si doua puncte arbitrare M, N ale planului, M'=V(M) si N'=V(N).In cazul netrivial, cind ambele puncte M si N sunt diferite de centrul O, avem ca OM=OM', ON=ON' si $\angle$MOM'= NON'. Adunind $\angle$M'ON la ambele parti ale ultimei egalitati si folosind comutativitatea adunarii, vom capata ca $\angle$MON=$\angle$M'ON'. Daca semidreptele OM si ON coincid, atunci si semidreptele OM' si ON' coincid, si deci MN=$|OM-ON|$=$|OM'-ON'|$ =M'N'. Daca semidreptele OM si ON sunt complementare, atunci si semidreptele OM' si ON' la fel sunt complementare, de aceea MN=OM+ ON=OM'+ ON'=M'N'.Daca $\angle$MON≠kπ, atunci ΔMON= ΔM'ON' (conform criteriului I), si deci MN=M'N'. Totalizind rezultatele, concludem ca rotatia este o trasnformare de simetrie a planului.

Dar in cazul altor tipuri de transformari de simetrie ale planului apar diferentele dintre geometria euclidiana si geometria hiperbolica.

Daca m_1 si m_2 sunt divergente, atunci compozitia $m_1 \bullet m_2$ am numit-o translatie hiperbolica. Translatia hiperbolica pastreaza perpendiculara comuna, care aluneca pe sine si, in care putem spune, ca efectuam translatia de- a lungul ei. Mai ramin invariante (luneca pe sine) si liniile echidistante pentru care dreapta de translare este baza lor.

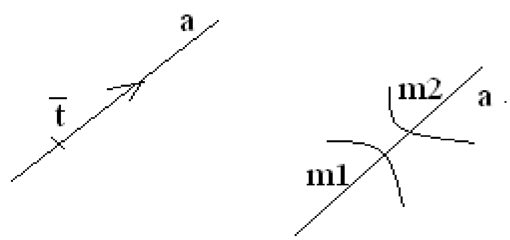


Figura 13

Prop: Compozitia a 2 reflectiiin drepte ce se intersecteaza reprezinta geometric o rotatie in jurul punctului de intersectie la un unghi dublu, unghi dintre drepte si cu directia de la prima la a 2-a dreapta.

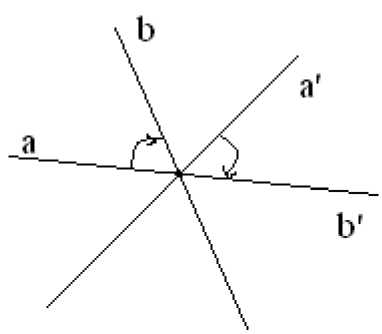


Figura 14

Pe de alta parte, transformarile de simetrie (deci izometriile) pot fi reprezentate drept compozitie a cel mult 3 reflectii in drepte (pentru plan).

Def: Compozitia a doua reflectii in drepte diferite se numeste rotatie eliptica, rotatie oriciclica (translatie oriciclica) sau translatie hiperbolica, daca dreptele sunt respectiv dintr- un fascicul eliptic, parabolic sau hiperbolic.

Prop: Compozitia a 2 reflectii ce se intersecteaza reprezinta geometric o rotatie in jurul punctulu de intersectie la un unghi dublu, unghi dintre drepte si cu directia de la prima la a doua dreapta (are loc si afirmatia inversa).

3. Grup discret de izometrii în plan, exemple

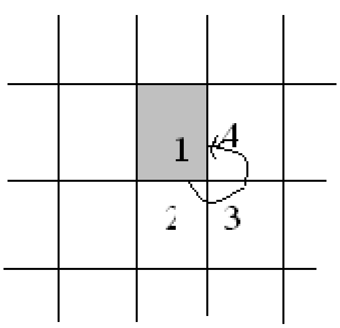
Se da o figura F cu grupul de simetrie S. Transformarile din grupul S sunt numite S- omologice. Punctul M'al figurii F se numeste S- omologic cu punctul M, daca exista asa o transformare s∈ S, astfel incit M'=s(M). Deoarece S este un grup, atunci relatia “punctul este S- omologic punctului” este reflexiva, simetrica si tranzitiva, adica este o relatie de echivalenta. Prin urmare, figura F se descompune in clase de puncte S- omologice, unde fiecare clasa e formata din din punctele S- omologice cu un punct oarecare dat.

Def: Grupul de simetrie S se numeste discret, daca ∀ punct al figurii F (pe care o transforma grupul S) este izolat in clasa punctelor S- omologice cu el, adica daca el are o ε- vecinatate, in care nu- s puncte S- omologice cu dinsul.
Daca se poate alege un ε comun pentru toate punctele S- omologice ale diferitelor clase de acest fel, atunci grupul se numeste foarte discret.

Lema: Orice subgrup al unui grup discret, el insusi este discret.
Intr- adevar: vom considera un subgrup H al unui grup discret de simetrie S. Atunci orice clasa de puncte H- omologice reprezinta o subclasa a unei clase oarecare de puncte S- omologice. Deoarece orice punct din clasa punctelor S- omologice este izolat, apoi cu atit mai mult este izolat orice punct din clasa punctelor H- omologice. Prin urmare, H e un subgrup discret.

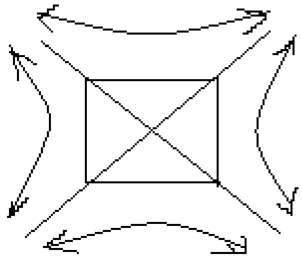
Sensul geometric al discretiei unui grup consta in aceea, ca rotatiile grupului se efectueaza cu unghiuri nu oricit de mici, translatiile grupului sunt determinate de vectori nu oricit de mici si asa mai departe.

Exemple de izometrii in planul E^2:



{4,4}- patratul

In planul H^2 vom avea posibilitatile de izometrii:



$\leq$ $\frac{2\pi}{4}$

0 φ< φ=90º= ,deci: {4,5}; {4,6}; {4,7};...{4,∞}