COMPLEMENTE DE TEORIA ŞIRURILOR ŞI SERIILOR NUMERICE

4.1. Noţiuni introductive

DEFINIŢIA 4.1.1. : Se numeşte şir de numere reale o funcţie $f : N^* \to R, \quad f(n) = a_n$. Notăm $(a_n)_{n \in N^*}$.

DEFINIŢIA 4.1.2. : Fie $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ un şir de numere naturale strict crescator. Atunci $(a_{n_k}),\ k \in N^*$ se numeşte subsir al şirului $(a_n)_{n \in N^*}$.

OBSERVAŢIA 1 : Un subşir al unui şir are o infinitate de termeni.

EXEMPLE : $a_n = n$ *1, 2, ..., n , ...* Atunci :

a_{2k} $\quad a_2, a_4, \ldots, a_{2k}, \ldots$ este subşirul termenilor pari.

a_{2k-1} $\quad a_1, a_3, \ldots a_{2k-1}, \ldots$ este subşirul termenilor impari.

DEFINIŢIA 4.1.3. : Fie $a \in R$. Se numeşte vecinătate a lui *“a”* orice interval deschis care îl conţine pe *“a”*.

Fie $\varepsilon > 0, \quad \varepsilon \in R$. Se numeşte ε vecinătate centrată a numărului *“a”* intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Notăm $V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

DEFINIŢIA 4.1.4. : Se numeşte vecinătate a lui $+\infty$, orice interval de forma $(a, \infty), \quad a \in R$.

DEFINIŢIA 4.1.5. : Se numeşte vecinătate a lui $-\infty$, orice interval de forma $(-\infty, a), \quad a \in R$.

DEFINIŢIA 4.1.6. : Şirul $(a_n)_{n \in N^*}$ este convergent către *“ a “* (finit) dacă oricare ar fi vecinătatea *V(a)* , aceasta lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

DEFINIȚIA 4.1.7. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este convergent către *"a"* (finit) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural (un rang) *N(ε)*, astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

OBSERVAȚIA 2 : Definițiile 4.1.6. şi 4.1.7. sunt echivalente.

DEFINIȚIA 4.1.8. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ are limita $+\infty$ dacă oricare ar fi o vecinătate $V(+\infty)$, aceasta lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

DEFINIȚIA 4.1.9. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ are limita $+\infty$ dacă oricare ar fi $a \in R$, există un prag *N(a)*, astfel încât oricare ar fi $n \geq N(a)$ rezultă că $a_n > a$.

OBSERVAȚIA 3 : Definițiile 4.1.8. şi 4.1.9. sunt echivalente.

DEFINIȚIA 4.1.10. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ are limita $-\infty$ dacă oricare ar fi o vecinătate $V(-\infty)$, aceasta lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

DEFINIȚIA 4.1.11. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ are limita $-\infty$ dacă oricare ar fi $a \in R$, există un prag *N(a)*, astfel încât oricare ar fi $n \geq N(a)$ rezultă că $a_n < a$.

OBSERVAȚIA 4 : Definițiile 4.1.10. şi 4.1.11. sunt echivalente.

Un şir este convergent dacă are limita finită şi este divergent dacă are limita $+\infty$ sau $-\infty$ sau nu are limită.

EXEMPLE :

1. Şirul constant $a_n = a$. Se demonstrează că $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Şirul $a_n = \frac{1}{n}$. Se demonstrează că $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Într-adevăr, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un prag $N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ rezultă că $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < n\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

OBSERVAŢIA 5 : În definiţiile anterioare (de convergenţă a unui şir către un număr) , limita şirului , "*a*" , este aprioric cunoscută.

4.2. Şir fundamental

Cauchy introduce noţiunea de şir fundamental (şir Cauchy).

DEFINIŢIA 4.2.1. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este şir fundamental (Cauchy) dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un prag $N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $m \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ vom avea $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

DEFINIŢIA 4.2.2. : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este un şir fundamental (Cauchy) dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un prag $N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$, avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

OBSERVAŢIA 1 : Definiţiile 4.2.1. şi 4.2.2. sunt echivalente.

DEMONSTRAŢIE :

(a) Presupunem că $(a_n)_{n\in N^*}$ este fundamental conform definiţiei 4.2.1.
Putem presupune fără îngrădirea generalităţii că $m>n$.
Vom nota $p=m-n$. De aici rezultă că $m=n+p$. Înlocuind pe $m=n+p$ în definiţia 4.2.1. vom obţine definiţia 4.2.2.

(b) Presupunem că $(a_n)_{n\in N^*}$ este fundamental conform definiţiei 4.2.2.
Vom nota $m=n+p$, $m > N(\varepsilon)$. Rezultă astfel că este verificată definiţia 4.2.1.

OBSERVAȚIA 2 : Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este fundamental dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ rezultă că $|a_N - a_n| < \varepsilon$.

DEMONSTRAȚIE :

(i) Presupunem că $(a_n)_{n\in N^*}$ este un şir fundamental. Conform definiției 1.2.1. rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $m \geq N(\varepsilon), n \geq N(\varepsilon), |a_m - a_n| < \varepsilon$. Dacă N=m, atunci $|a_N - a_m| < \varepsilon$.

(ii) Presupunem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ rezultă că $|a_N - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Fie $m \geq N = N(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - a_N + a_N - a_n| \leq |a_m - a_N| + |a_N - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

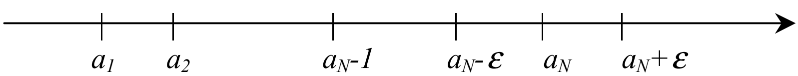
Observația anterioară poate fi considerată ca a treia definiție a unui şir fundamental.

PROPOZIȚIA 4.2.1. : Orice şir fundamental este mărginit.

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză ştim că şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este fundamental. Conform observației 2 , oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ rezultă că $|a_N - a_n| < \varepsilon$.

$$|a_n - a_N| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a_N < \varepsilon \Rightarrow a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon \ .$$



Notăm $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N - 1, a_N - \varepsilon\}$ şi $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N - 1, a_N + \varepsilon\}$.
Rezultă că $m \leq a_n \leq M, \forall n \in N^*$.

PROPOZIȚIA 4.2.2. : Dacă şirul fundamental $(a_n)_{n\in N^*}$ conține un subşir $(a_{n_k})_{k\in N^*}$ convergent către *"a"*, atunci şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este convergent către *"a"*.

DEMONSTRAȚIE :

Subşirul $(a_{n_k})_{k\in N^*}$ converge către "a".

$(\forall)\varepsilon>0 \Rightarrow (\exists)N_1(\varepsilon)$ astfel încât : $(\forall)n_k \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k}-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este fundamental.

$(\forall)\varepsilon>0\Rightarrow(\exists)N_2(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)m \geq N_2(\varepsilon)$ şi $(\forall)n\geq N_2(\varepsilon)\Rightarrow|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Fie $N(\varepsilon)=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$. Alegem $k\in N^*$ astfel încât $n_k \geq N(\varepsilon)$.

Din (1) rezultă : dacă $m=n_k$, atunci $|a_{n_k}-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ sau $|a_n-a_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Din (2) rezultă : dacă $m=n_k$, atunci $|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Oricare ar fi $\varepsilon>0$, şi $n\geq N(\varepsilon)$, obținem :

$$|a_n-a|=|a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-a|\leq\underbrace{|a_n-a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{|a_{n_k}-a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}<\varepsilon \Rightarrow a_n\to a .$$

CRITERIU DE CONVERGENȚĂ :

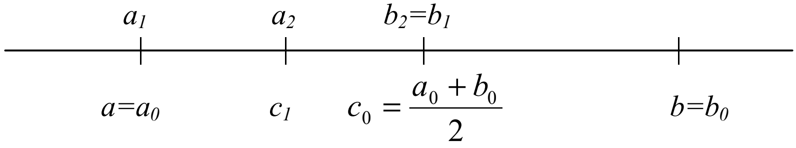
Fie $(b_n)_{n\in N^*}$, $b_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Fie $(a_n)_{n\in N}$. Dacă există un prag N astfel încât oricare ar fi $n\geq N \Rightarrow |a_n-l|<b_n \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\to} l$.

LEMA LUI CESARO:

Din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent.

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză ştim că $(a_n)_{n\in N^*}$ este mărginit, deci există $a,b\in Q$ astfel încât $a\leq a_n\leq b$, oricare ar fi $n\in N^*$.



Lungimea intervalului *[a , b]* este *b-a*. Calculăm $c_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$ şi obţinem două intervale *[a_0 , c_0]* şi *[c_0 , b_0]*.

Notăm cu *[a_1 , b_1]* un interval ce conţine o infinitate de termeni ai şirului. Dacă ambele intervale obţinute mai sus conţin o infinitate de termeni, vom considera drept *[a_1 , b_1]* intervalul din stânga.

Lungimea intervalului *[a_1 , b_1]* este $\dfrac{b-a}{2}$. Alegem $a_{n_1}\in[a_1,b_1]$

Notăm cu $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$. Notăm cu *[a_2 , b_2]* intervalul care conţine o infinitate de termeni ai şirului. Dacă ambele intervale conţin o infinitate de termeni , aleg drept *[a_2 , b_2]* pe cel din stânga.

Lungimea intervalului *[a_2 , b_2]* este $\dfrac{b-a}{2^2}$.

Alegem $a_{n_2}\in[a_2,b_2]$, $n_2 > n_1$.

Repetând procedeul de mai sus, după k paşi vom avea intervalul *[a_k , b_k]* cu lungimea $\dfrac{b-a}{2^k}$ şi care conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Alegem $a_{n_k}\in[a_k,b_k]$, $n_k > n_{k-1}$.

Împărţim intervalul *[a_k , b_k]* în două intervale egale şi alegem drept interval *[a_{k+1} , b_{k+1}]* intervalul care conţine o infinitate de termeni ai şirului. Dacă ambele intervale conţin o infinitate de termeni, alegem drept *[a_{k+1} , b_{k+1}]* pe cel din stânga.

Alegem $a_{n_{k+1}}\in[a_{k+1},b_{k+1}]$, $n_{k+1} > n_k$.

Am demonstrat astfel prin inducţie după “*k*” , faptul că putem alege un subşir $\left(a_{n_k}\right)_{k\in N^*}$ astfel încât $a_{n_k}\in[a_k,b_k]$, interval de lungime $\dfrac{b-a}{2^k}$.

$$a=a_0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_k\le\ldots\le\alpha\le\ldots\le b_k\le\ldots\le b_1\le b_0=b$$

pentru oricare $k\in N^*$.

Rezultă că există şi este unic numărul real $\alpha\in[a_k,b_k],(\forall)k\in N^*$.

Dar $a_{n_k} \in [a_k, b_k]$ pentru oricare $k \in N^*$, şi deci $|a_{n_k} - \alpha| = \frac{b-a}{2^k}$.

Notând $b_k = \frac{b-a}{2^k}$ avem $b_k > 0$ şi $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Conform criteriului de convergență enunțat anterior rezultă că $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

TEOREMA DE CONVERGENȚĂ A LUI CAUCHY

Un şir de numere reale $(a_n)_{n\in N^*}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

DEMONSTRAȚIE :

(i) Presupunem că $(a_n)_{n\in N^*}$ este convergent . Aceasta înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$(\forall)m \geq N(\varepsilon),(\forall)n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon .$$

Deci şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este şir fundamental.

(ii) Presupunem că $(a_n)_{n\in N^*}$ este şir fundamental. Dacă a_n este şir fundamental, atunci, conform propoziției 4.2.1. şirul a_n este mărginit. Din lema lui Cesaro rezultă că şirul mărginit a_n conține un subşir a_{n_k} convergent. Conform propoziției 4.2.2. orice şir fundamental care conține un subşir convergent este convergent. Teorema este astfel demonstrată.

4.3. Puncte limită ale unui şir

Fie $(a_n)_{n\in N^*}$ un şir de numere reale.

DEFINIȚIA 4.3.1. *: Numărul real "a"* este punct limită al şirului $(a_n)_{n\in N^*}$, dacă orice vecinătate a lui *"a"* (*V(a)*) conține o infinitate de termeni ai şirului.

EXEMPLU : Fie şirul $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

$a_1 = 0$, $a_3 = 0$, ... , $a_{2k-1} = 0$, ...
$a_2 = 1$, $a_4 = 1$, ... , $a_{2k} = 1$, ...

Putem spune că "*0*" şi "*1*" sunt puncte limită ale lui a_n pentru că oricare ar fi vecinătăţile *V(0)* şi *V(1)*, în ele există o infinitate de termeni ai şirului.

OBSERVAŢIE :

1) Dacă şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este convergent către "*a*" , atunci "*a*" este singurul punct limită.
2) Un punct limită al unui şir poate fi un număr finit sau $\pm\infty$.

EXEMPLU : fie şirul *1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...*
Puncte limită sunt : *1, 2, 3, ...*
Deci există şiruri cu o infinitate de puncte limită.

PROPOZIŢIA 4.3.1. : Fie şirul $(a_n)_{n\in N^*}$. Punctul *"a"* este punct limită pentru acest şir dacă şi numai dacă există un subşir $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

DEMONSTRAŢIE :

(i) Presupunem că $(a_n)_{n\in N^*}$ conţine un subşir (a_{n_k}) astfel încât $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$, deci "*a*" este punct limită al şirului a_n .

Oricare ar fi vecinătatea *V(a)* , în afara ei există cel mult un număr finit de termeni ai subşirului a_{n_k} . Deci oricare ar fi vecinătatea *V(a)* , în interiorul ei există o infinitate de termeni ai şirului a_n . Rezultă astfel că "*a*" este punct limită al şirului a_n .

(ii) Fie "*a*" un punct limită al şirului a_n . Trebuie să arătăm că există un subşir a_{n_k} astfel încât $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Vom studia trei situaţii : 1) "*a*" este finit , 2) "*a*" este $+\infty$, 3) "*a*" este $-\infty$.

1) Fie $V_1(a) = (a-1\ ,\ a+1)$. Deoarece “a” este punct limită al şirului a_n , în această vecinătate există o infinitate de termeni ai şirului a_n . Alegem un termen al şirului a_n astfel încât $a_{n_1} \in V_1(a)$.

Fie $V_2(a) = \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$. Şi în această vecinătate există o infinitate de termeni ai şirului a_n . Alegem $a_{n_2} \in V_2(a), n_2 > n_1$.

…………………………………………………………………………………

Fie $V_k(a) = \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$. Alegem $a_{n_k} \in V_k(a), n_k > n_{k-1}$.

Demonstrăm prin inducţie că această relaţie este adevărată.

Oricare ar fi $V_k(a) = \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$, oricare ar fi $k \in N^*$, alegem $a_{n_k} \in V_k(a), n_k > n_{k-1}$. Deci $a_{n_k} \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{k} < a_{n_k} - a < \frac{1}{k} \Rightarrow \left|a_{n_k} - a\right| < \frac{1}{k}$. Din criteriul de convergenţă enunţat mai sus, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a \quad \left(b_k = \frac{1}{k} > 0; b_k \underset{k\to\infty}{\to} 0\right)$.

2) $a = +\infty$

Fie $V_1(\infty) = (\,1,\ \infty\,)$. Alegem $a_{n_1} \in V_1(\infty)$.

Fie $V_2(\infty) = (\,2,\ \infty\,)$. Alegem $a_{n_2} \in V_2(\infty), n_2 > n_1$.

………………………………………………………

Fie $V_k(\infty) = (\,k,\ \infty\,)$. Alegem $a_{n_k} \in V_k(\infty), n_k > n_{k-1}$, etc.

$$a_{n_k} \in (k,\infty) \Rightarrow a_{n_k} > k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} > \lim_{k\to\infty} k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty \ .$$

3) $a = -\infty$

Fie $V_1(-\infty) = (-\infty\,,\ 1\,)$.

Fie $V_2(-\infty) = (-\infty\,,\ 2\,)$.

………………………………

Fie $V_k(-\infty) = (-\infty\,,\ k\,)$, etc.

În continuare se procedează la fel ca la punctul 2) .

DEFINIȚIA 1.3.2. : Fie $(a_n)_{n\in N^*}$ un şir de numere reale. Se numeşte limită inferioară a şirului a_n , cel mai mic punct limită al lui a_n . Se notează : $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \quad a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

DEFINITIA 1.3.3. : Fie $(a_n)_{n\in N^*}$ un şir de numere reale. Se numeşte limită superioară a şirului a_n , cel mai mare punct limită al lui a_n . Se notează : $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \quad a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

EXEMPLU : Fie şirul $(a_n)_{n\in N^*}$, $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1}$

$$a_{2k-1} = -\frac{2(2k-1)}{2k-1+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} -2 \qquad \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -2$$

$$a_{2k} = \frac{2(2k)}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} +2 \qquad \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +2$$

4.4. Serii de numere reale

Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\in N^*}$, $a_1 , a_2 , \ldots , a_n , a_{n+1} , \ldots$

Notăm :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

……………………….

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

……………………….

$(S_n)_{n\in N^*}$ se numeşte **şirul sumelor parţiale**. Dacă $(S_n)_{n\in N^*}$ este convergent către limita “S” (deci “S” este finit!) , atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \ . \qquad (1)$$

DEFINIȚIA 4.4.1. : Membrul drept al relației (1) se numeşte serie.

DEFINIȚIA 4.4.2. : $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ se numesc termenii seriei.

DEFINIȚIA 4.4.3. : $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se numeşte suma parțială de ordinul n .

DEFINIȚIA 4.4.4. : Dacă există, S este suma seriei .

OBSERVAȚIE : Dacă se cunosc termenii seriei, putem obține sumele parțiale şi reciproc.

Fie şirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in N^*}$.

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{array}\right| \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \text{ , } a_1 = S_1 \text{ , } n \geq 2 \text{ .}$$

DEFINIȚIA 4.4.5. : Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şirul sumelor parțiale S_n este convergent.

DEFINIȚIA 4.4.6. : Dacă şirul sumelor parțiale are limita $+\infty$ sau $-\infty$ sau nu are limită, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă .

A cerceta natura unei serii înseamnă a determina dacă seria este convergentă sau divergentă.

EXEMPLE :

A. Folosind definiția convergenței unei serii, să se stabilească natura seriei cu termenul general :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 4n + 3}, \quad n \geq 1$$

$$n^2 + 4n + 3 = (n+3)(n+1)$$

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 4n + 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right), \quad n \geq 1$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{5}{12} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}\right) = \frac{5}{12}$$

B. Să se cerceteze natura seriilor următoare :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \mathrm{K} + a_{n-1} + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \mathrm{K} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă şi are suma $S = 1$.

2) <u>Seria geometrică :</u>

Fie $r>0$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \mathrm{K} + r^n + \mathrm{K}$

$$S_n = 1 + r + r^2 + \mathrm{K} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

- $r \in (0,1)$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$
- $r \in (1,\infty)$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = +\infty$
- $r = 1$: $S_n = n+1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Deci seria geometrică este convergentă pentru $r \in (0,1)$ şi divergentă pentru $r \in [1,\infty)$.

3) <u>Seria oscilantă :</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$S_0 = 1$	$S_1 = 0$
$S_2 = 1$	$S_3 = 0$
………	………
$S_{2k} = 1$	$S_{2k+1} = 0$
………	……….

Observăm că S_n nu are limită , deci $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ este divergentă .

PROPRIETĂȚI ALE SERIILOR :

Aceste proprietăți rezultă din proprietățile şirurilor.

P1) Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, se obține o serie de aceeaşi natură ca şi prima.

P2) Dacă într-o serie adăugăm sau scădem un număr finit de termeni, obținem o serie de aceeaşi natură ca şi prima.

P3) Resturile unei serii convergente formează un şir convergent către zero.

DEMONSTRAȚIE :

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots}_{R_n}$

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, unde cu R_n am notat restul de ordinul n al seriei.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n \Rightarrow R_n = S - S_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

P4) Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor parțiale este mărginit.

P5) Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză ştim că $\sum a_n$ este convergentă, deci $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, unde S este finit.

$$a_n = S_n - S_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

OBSERVAȚIA 1 :

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată. Adică, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, nu rezultă că $\sum a_n$ este convergentă. Pentru a demonstra această afirmație, vom da un exemplu:

Seria armonică :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad , \quad a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad .$$

$$S_{2^n} = \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\mathrm{K}+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\mathrm{K}+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$1+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\mathrm{K}+\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}$$

Deci $S_{2^n} > \dfrac{n}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$

Din şirul S_n am extras şirul S_{2^n} care este divergent. De aici rezultă faptul că S_n este divergent, deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \sum\dfrac{1}{n}$ este divergentă .

OBSERVAȚIA 2 :

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ este divergentă . Această observație reprezintă un criteriu de divergență a seriilor.

P6) Fie $\sum a_n$ o serie convergentă cu suma A . Fie $\sum b_n$ o serie convergentă cu suma B . Atunci, $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) \xrightarrow{conv} \alpha A + \beta B$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in R$.

OBSERVAȚIE : Mulțimea seriilor convergente formează un spațiu vectorial.

EXEMPLU :

Să se arate că seria cu termenul general $u_n = \frac{3^n - 5^n}{15^n}, \quad n \geq 1$ este convergentă şi să i se calculeze suma .

$$u_n = \frac{3^n}{15^n} - \frac{5^n}{15^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Fie seriile cu termenii generali $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ şi $t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 1$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă şi are suma $\frac{1}{4}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ este convergentă şi are suma $\frac{1}{2}$. Din proprietățile seriilor convergente rezultă că, dacă două serii, respectiv $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ sunt convergente şi au sumele V şi T , atunci seria diferență $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - t_n)$ este o serie convergentă şi are suma V-T .

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 5^n}{15^n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

CRITERIUL GENERAL DE CONVERGENȚĂ AL LUI CAUCHY (CGCC)

Seria $\sum a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă , oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$ avem :

$$| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} | < \varepsilon$$

DEMONSTRAȚIE :

(i) Presupunem că seria $\sum a_n$ este convergentă, deci (S_n) este convergent şi conform teoremei de convergență a lui Cauchy, (S_n) este un şir fundamental. Rezultă astfel că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$ avem : $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$

$S_{n+p} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$
$S_n = a_1 + \ldots + a_n$
Deci $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

(ii) Presupunem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$ rezultă că $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, adică $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$. De aici rezultă că S_n este un şir fundamental şi conform teoremei de convergenţă a lui Cauchy, S_n este un şir convergent. Astfel am demonstrat că seria $\sum a_n$ este convergentă.

4.5. Serii cu termeni pozitivi

DEFINIŢIA 4.5.1. : Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este o serie cu termeni pozitivi (stp) , dacă $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

<u>CRITERII DE COMPARAŢIE PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI</u>

În acest paragraf vom prezenta câteva criterii de convergenţă a unei serii cu termeni pozitivi.

Se compară seria a cărei natură este necunoscută cu o serie a cărei natură o cunoaştem şi astfel putem obţine informaţii despre natura seriei considerate. De aici denumirea de criterii de comparaţie.

I. Primul criteriu de comparaţie :

Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există N astfel încât oricare ar fi $n \geq N \Rightarrow a_n \leq b_n$ atunci :

1. dacă $\sum b_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum a_n$ este convergentă.

2. dacă $\sum a_n$ este divergentă, atunci că şi seria $\sum b_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE :

1. Din ipoteză ştim că $\sum b_n$ este convergentă şi, conform criteriului general de convergență al lui Cauchy, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$ rezultă că $|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| < \varepsilon$. Deoarece $b_n > 0$, avem $b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon$.

Deoarece şi $a_n > 0$, $\left(n \in N^*\right)$, avem :

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \leq b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon$$

şi prin urmare seria $\sum a_n$ este convergentă.

2. Presupunem contrariul, adică $\sum b_n$ este convergentă, atunci, conform 1. rezultă că şi $\sum a_n$ este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza că $\sum a_n$ este divergentă.

II. Al doilea criteriu de comparaţie :

Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există N astfel încât oricare ar fi $n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, atunci :

1. dacă $\sum b_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum a_n$ este convergentă.
2. dacă $\sum a_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum b_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE :

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ oricare ar fi $n \geq N$

Obținem astfel : $c = \frac{a_N}{b_N} \geq \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \geq \ldots \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \ldots$, unde "*c*" este o constantă.

Deci $c \le \frac{a_n}{b_n}$, oricare ar fi $n \ge N \Rightarrow a_n \le cb_n$.

Din ipoteză ştim că $\sum b_n$ este convergentă şi conform proprietății *P6* rezultă că şi $\sum cb_n$ este convergentă.

Din aceste ultime două afirmații rezultă, conform primului criteriu că seria $\sum a_n$ este convergentă.

2. Presupunem contrariul, adică $\sum b_n$ este convergentă şi $\sum a_n$ este divergentă, lucru care este in contradicție cu primul criteriu. Rezultă astfel că seria $\sum b_n$ este divergentă.

III. **Al treilea criteriu de comparaţie:** (fără demonstrație)

Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (c fiind finit şi diferit de zero), atunci seriile $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ au aceeaşi natură.

SERII UTILIZATE ÎN CRITERII DE COMPARAȚIE

1. Seria armonică : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Aceasta este o serie divergentă.

2. Seria geometrică : $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, $r>0$, $\begin{cases} 0 < r < 1 \Rightarrow serie \quad convergenta \\ r \ge 1 \Rightarrow serie \quad divergenta \end{cases}$

3. Seria armonică generalizată : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in R$. Există mai multe situații :

a) $\alpha \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n} \Rightarrow$ conform criteriului I , seria armonică generalizată este divergentă.

b) $\alpha = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ este seria armonică şi este divergentă.

c) $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} + \mathrm{K}$

$$\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} < \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} = \frac{2}{2^{\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} < \frac{4}{4^{\alpha}} = \frac{1}{4^{\alpha-1}} = \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^2} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \Lambda$. Dar membrul drept al inegalităţii reprezintă o serie geometrică cu raţia $r = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, $0 < r < 1$,deci este o serie convergentă.

Conform criteriului I , seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $,\alpha > 1$ este convergentă .

În concluzie, seria armonică generalizată este :

$$\begin{cases} convergenta \quad pentru \quad \alpha > 1 \\ \\ divergenta \quad pentru \quad \alpha \le 1 \end{cases}$$

EXEMPLU : Să se studieze natura seriilor :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

Vom nota cu $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ unde vom nota $b_n = \frac{1}{n}$.

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ conform criteriului III , seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ este divergentă .

2. $a_n = \frac{1}{2n^3 + 5n + 7}$; $\frac{1}{2n^3 + 5n + 7} < \frac{1}{n^3}$

Notăm $b_n = \frac{1}{n^3}$. Observăm că seria $\sum \frac{1}{n^3}$ este o serie armonică generalizată convergentă, întrucât $\alpha = 3$.

Conform criterului I , seria $\sum a_n$ este convergentă.

3. $a_n = \left(n^3 - n\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 - n}} > \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$

Notăm $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$. Observăm că $\sum b_n$ este o serie armonică generalizată divergentă, întrucât $\alpha = \frac{3}{4}$.

Conform criteriului I , seria $\sum a_n$ este divergentă.

CRITERII SUFICIENTE DE CONVERGENȚĂ A SERIILOR CU TERMENI POZITIVI

I. Criteriul rădăcinii (Cauchy) :

Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă pentru oricare $n \geq N$, există 0 < k < 1 astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq k$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.
2. Dacă pentru o infinitate de termeni $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, atunci $\sum a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE :

1. Oricare ar fi $n \geq N$, există *0 < k < 1* astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq k$.

$\Rightarrow a_n \leq k^n \Rightarrow \sum a_n \leq \sum k^n$, iar $\sum k^n$ este o serie geometrică cu rația *r = k<1.*

Conform criteriului I , seria $\sum a_n$ este convergentă.

2. Dacă pentru o infinitate de termeni $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$, deci şirul nu poate fi convergent, iar seria este divergentă.

COROLAR :

Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$, atunci:

1) pentru k < 1 , seria $\sum a_n$ este convergentă
2) pentru k > 1 , seria $\sum a_n$ este divergentă
3) pentru k = 1 este neconcludent.

EXEMPLU :

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-10}\right)^n$, $a_n=\left(\frac{2n+5}{3n-10}\right)^n$

Aplicând criteriul rădăcinii, rezultă că $\sqrt[n]{a_n}=\frac{2n+5}{3n-10}\to\frac{2}{3}<1$, deci seria este convergentă.

OBSERVAȚIE : Nu putem studia convergența seriei geometrie cu ajutorul criteriului raportului pentru că în demonstrația criteriului raportului am folosit seria geometrică.

EXEMPLU :

Fie seria $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\text{K}+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\text{K}$

Această serie este convergentă , fapt care rezultă din criteriul rădăcinii, dar nu putem aplica criteriul raportului.

II. Criteriul raportului (D'Alembert) :

Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă pentru oricare $n\geq N$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq k<1$, atunci seria este convergentă.
2. Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq k>1$, atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE :

1. Oricare ar fi $n\geq N$ avem :

$$a_{n+1} \le k a_n$$
$$a_{N+1} \le k a_N$$
$$a_{N+2} \le k a_{N+1} \le k^2 a_N$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{N+p} \le k^p a_N \quad \sum_{p=1}^{\infty} a_N k^p = a_N \sum_{p=1}^{\infty} k^p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Seria pe care o obținem este o serie geometrică de rație “*r*” : $\sum_{p=1}^{\infty} a_N k^p = a_N \sum_{p=1}^{\infty} k^p$. Această serie este convergentă. Rezultă astfel, conform criterului I de comparație că seria $\sum a_n$ este convergentă.

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge k > 1$

$$a_{N+1} \ge a_N$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$a_{n+1} \ge a_n$, oricare ar fi $n \ge N$.

Rezultă că șirul a_n este un șir crescător de numere pozitive $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$. Deci $\sum a_n$ este divergentă.

COROLAR :

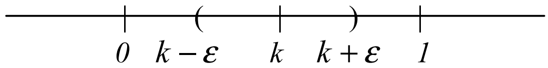
Fie $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Atunci :

1) pentru k < 1 , seria $\sum a_n$ este convergentă.
2) pentru k > 1 , seria $\sum a_n$ este divergentă.
3) pentru k = 1 este neconcludent.

DEMONSTRAȚIE :

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$

Există $\varepsilon > 0$ astfel încât $k + \varepsilon < 1$



$V_{\varepsilon}(k) = (k - \varepsilon, k + \varepsilon)$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, înseamnă că oricare ar fi vecinătatea $V_{\varepsilon}(k)$, în afara ei există cel mult un număr finit de termeni ai şirului, iar în interiorul ei există o infinitate de termeni.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \in V_{\varepsilon}(k) \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ conform părţii întâi a criteriului raportului.

Deci seria $\sum a_n$ este convergentă.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k > 1$

V(k) = $(1, \infty)$. Repetând raţionamentul de mai sus, demonstrăm că seria $\sum a_n$ este divergentă.

3) În cazul în care *k = 1* , nu putem trage nici o concluzie, deoarece există situaţii în care seria este convergentă şi situaţii în care seria este divergentă. De exemplu :

- $\sum a_n = \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, dar ştim că seria este divergentă.
- $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad (\alpha > 1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = 1$, iar seria este convergntă.

EXEMPLE :

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!+(n+3)!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!+(n+4)!} \cdot \frac{(n+1)!+(n+3)!}{2^n} =$$

$$= \frac{2((n+1)!)(1+(n+2)(n+3))}{(n+2)!(1+(n+3)(n+4))} = \frac{2(1+n^2+5n+6)}{(n+2)(1+(n+3)(n+4))} \to 0$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$ şi conform criteriului raportului, seria este convergentă.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n\cdot n!}{n^n}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{\alpha^n\cdot n!}=\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{\alpha}{e}$

Dacă $\dfrac{\alpha}{e}>1\Rightarrow\alpha>e$, seria este divergentă.

Dacă $\dfrac{\alpha}{e}<1\Rightarrow\alpha<e$, seria este convergentă.

Dacă $\displaystyle\frac{\alpha}{e}=1\Rightarrow\alpha=e\Rightarrow a_n=e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e\frac{\frac{1}{\frac{1}{n^n}}}{(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,$

deci (a_n) este şir strict crescător, iar seria este divergentă.

Rezultă că seria dată este divergentă.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!},\quad a>0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$, deci seria este convergentă conform criteriului raportului.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{a}{n}\right)^n,\quad a>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{n!\dfrac{a^n}{n^n}}=a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{a}{e}$$

Dacă $\dfrac{a}{e}<1\Rightarrow a<e$, seria este convergentă.

Dacă $\dfrac{a}{e}>1\Rightarrow a>e$, seria este divergentă.

Dacă $\dfrac{a}{e} = 1 \Rightarrow a = e \Rightarrow u_n = n!\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$. Atunci $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} > 1$,

oricare ar fi n, deci seria este divergentă.

III. Criteriul Raabe – Duhamel :

Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă oricare ar fi $n \geq N$, $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq k > 1 \Rightarrow$ seria este convergentă.
2. Dacă oricare ar fi $n \geq N$, $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq k < 1 \Rightarrow$ seria este divergentă.

COROLAR :

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = k$, atunci :

1) pentru k > 1 , seria $\sum a_n$ este convergentă
2) pentru k < 1 , seria $\sum a_n$ este divergentă
3) pentru k = 1 este neconcludent.

EXEMPLU :

Fie seria : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}$ $(\alpha > 0)$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{n!\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(n+1)!(n+1)} - 1 = \frac{\alpha+n}{n+1} - 1 = \frac{\alpha-1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha-1)}{n+1} = \alpha - 1$$

1) pentru $\alpha - 1 > 1 \Rightarrow \alpha > 2$, seria este convergentă
2) pentru $\alpha - 1 < 1 \Rightarrow \alpha < 2$, seria este divergentă
3) pentru $\alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2$, criteriul este neconcludent.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$, aceasta fiind serie armonică, este divergentă.

4.6. Serii alternate

DEFINIȚIA 1.6.1. : Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte alternată dacă produsul a doi termeni consecutivi este negativ , adică $a_n \cdot a_{n+1} < 0, \ (\forall) n \in N^*$

Seria altenată poate avea forma :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + \ldots , \quad (a_n > 0)$$
$$- a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots - a_{2n-1} + a_{2n} - \ldots , \quad (a_n > 0)$$

În general putem scrie seria astfel : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n , \quad (a_n > 0)$.

CRITERIUL LUI LEIBNITZ

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ o serie altrenată. Dacă sunt îndeplinite condițiile :

1. $a_n > a_{n+1}$ (adică şirul termenilor fără semn este descrescător)
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ este o serie convergentă.

DEMONSTRAȚIE :

Presupunem că avem $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + \ldots$

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + \ldots$$
$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$$

Deoarece $a_{2n+1} > a_{2n+2} \Rightarrow S_{2n+2} > S_{2n} \Rightarrow S_{2n}$ este un subşir strict crescător. Arătăm în continuare că S_{2n} este un subşir mărginit superior.

$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{>0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0} \Rightarrow S_{2n} < a_1$, deci S_{2n} este mărginit superior.

Fie $\left.\begin{array}{l} S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} \\ S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}}_{=S} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}}_{=S} - \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}}_{=0} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow$ seria este convergentă.

EXEMPLU : Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, \quad a > 1$.

Fie funcţia $f(x) = \frac{\log_a x}{x}, \quad x \in [1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x \ln a} - \log_a x}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln a} - \log_a x}{x^2} = \frac{\log_a e - \log_a x}{x^2}$$

Ştim că *a>1* , deci funcţia $\log_a x$ este crescătoare. Din relaţia de mai sus, rezultă că $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x > e$. Deci $f(x)$ este descrescătoare pe intervalul (e, ∞) şi $\frac{\log_a n}{n}$ este descrescătoare pentru orice $n > e, \quad n \in N$. De asemenea, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$. Conform criteriului lui Leibnitz, seria este convergentă.

4.7. Serii absolut convergente

Fie $\sum a_n$ o serie numerică.

DEFINIŢIA 4.7.1. : Seria $\sum a_n$ este abslut convergentă dacă seria valorilor absolute $\sum |a_n|$ este convergentă.

TEOREMA 4.7.1. : Orice serie absolut convergentă este convergentă.

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză ştim că seria $\sum a_n$ este absolut convergentă. Conform criteriului general de convergență al lui Cauchy, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$ rezultă că $\left\| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Seria $\sum a_n$ este convergentă deoarece :

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N^*$.

OBSERVAȚIE : Reciproca, în general, nu este adevărată (nu orice serie convergentă este şi absolut convergentă) .

EXEMPLU :

- Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este convergentă .
- Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este seria armonică şi este divergentă.

DEFINIȚIA 4.7.2. : O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte semiconvergentă.

OBSERVAȚIE : Într-o serie cu termeni pozitivi, notiunile de convergență şi absolut convergență coincid.

<u>CRITERIU DE ABSOLUT CONVERGENȚĂ</u>

Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$, două serii numerice. Dacă există N astfel încât oricare ar fi $n \geq N$, să avem $|a_n| \leq |b_n|$ (*) , atunci dacă $\sum b_n$ este absolut convergentă şi seria $\sum a_n$ este absolut convergentă.

DEMONSTRAȚIE :

Dacă $\sum b_n$ este o serie absolut convergentă, din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât, oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $p \in N^*$, există relația : $\left\| b_{n+1} \right| + \left| b_{n+2} \right| + \ldots + \left| b_{n+p} \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| b_{n+1} \right| + \left| b_{n+2} \right| + \ldots + \left| b_{n+p} \right| < \varepsilon$.

$$\left\| a_{n+1} \right| + \left| a_{n+2} \right| + \ldots + \left| a_{n+p} \right\| = \left| a_{n+1} \right| + \left| a_{n+2} \right| + \ldots + \left| a_{n+p} \right| \overset{(*)}{\leq} \left| b_{n+1} \right| + \left| b_{n+2} \right| + \ldots + \left| b_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $p \in N^*$. Rezultă astfel că seria $\sum a_n$ este abslut convergentă.

TEOREMA LUI ABEL (pentru serii numerice) :

Fie $\sum a_n$ o serie numerică și fie (S_n) șirul sumelor parțiale care este mărginit. Fie șirul de numere α_n, $(\alpha_n > 0)$, (α_n) fiind convergent către zero și descrescător. Atunci seria $\sum \alpha_n a_n$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză știm că *(S_n)* este un șir mărginit.
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$|S_n| \leq M \quad (M > 0)$, $(\forall) n \in N^*$

Tot din ipoteză știm că $(\alpha_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0$, $\alpha_n > 0, \alpha_n$ descrescător $\Rightarrow$ că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$, $|\alpha_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow \alpha_n < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

În continuare vom aplica seriei $\sum \alpha_n a_n$ criteriul general de convergență al lui Cauchy:

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât , oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $p \in N^*$, există relația :

$$\left| \alpha_{n+1} a_{n+1} + \alpha_{n+2} a_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p-1} a_{n+p-1} + \alpha_{n+p} a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

$$\left|\alpha_{n+1}a_{n+1}+\alpha_{n+2}a_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p-1}a_{n+p-1}+\alpha_{n+p}a_{n+p}\right|=$$
$$=\left|\alpha_{n+1}\left(S_{n+1}-S_{n}\right)+\alpha_{n+2}\left(S_{n+2}-S_{n+1}\right)+\ldots+\alpha_{n+p-1}\left(S_{n+p-1}-S_{n+p-2}\right)+\alpha_{n+p}\left(S_{n+p}-S_{n+p-1}\right)\right|=$$
$$=\left|-\alpha_{n+1}S_{n}+\left(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}\right)S_{n+1}+\ldots+\left(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}\right)S_{n+p-1}+\alpha_{n+p}S_{n+p}\right|\le$$
$$\le\left|S_{n}\right|\alpha_{n+1}+\left|S_{n+1}\right|\left(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}\right)+\ldots+\left|S_{n+p-1}\right|\left(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}\right)+\left|S_{n+p}\right|\alpha_{n+p}\le$$
$$\le M\left(\alpha_{n+1}+\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}+\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}+\ldots+\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}+\alpha_{n+p}\right)=$$
$$=2\alpha_{n+1}M\le\frac{2\varepsilon M}{2M}=\varepsilon$$

Rezultă că seria $\sum\alpha_{n}a_{n}$ este convergentă.

4.8.Şiruri de funcţii

Fie $f_{n}:A\to B$, $n\in N^{*}$, funcţii reale definite pe mulţimea $A\in R$.

DEFINIŢIA 4.8.1. : Şirul f_1 , f_2 , ... , f_n , ... se numeşte şir de funcţii şi se notează cu $\left(f_{n}\right)_{n\in N^{*}}$ (1) .

OBSERVAŢIE : Oricare ar fi $a\in A$, obţinem şirul de numere $f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a)$ pe care-l notăm : $\left(f_{n}(a)\right)_{n\in N^{*}}$ (2) .

DEFINIŢIA 4.8.2. : Punctul $x\in A$ se numeşte punct de convergenţă al şirului de funcţii (1) , dacă şirul $\left(f_{n}(x)\right)_{n\in N^{*}}$ este convergent.

Fie $B\subset A,\quad B=\left\{x\in A\mid\left(f_{n}(x)\right)_{n\in N^{*}}\quad este\quad convergent\right\}$ (3)

DEFINIŢIA 4.8.3. : Mulţimea B se numeşte mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii (1) .

Fie $x\in B$. Notăm $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_{n}(x)$ (4) .

DEFINIȚIA 1.8.4. : Funcția $f : B \rightarrow R$ care verifică relatia de mai sus se numeşte funcția limită a şirului de funcții (1) .

EXEMPLU :

Fie funcția $f_n : R \rightarrow R$, $f_n(x) = x^n$. Evident, $B = (-1, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-1,1) \\ 1, x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow f : B \rightarrow R \text{ este funcția limită.}$$

Fie $f_n : A \rightarrow B$, $n \in N^*$ un şir de funcții. Fie mulțimea $B \subset A$.

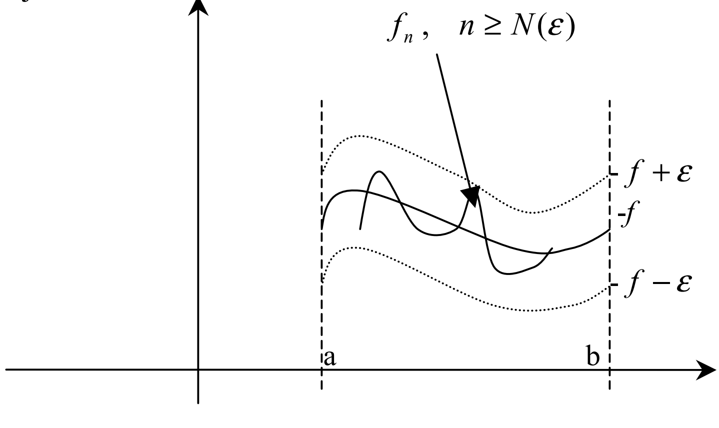
DEFINIȚIA 4.8.5. : Şirul de funcții $(f_n)_{n \in N^*}$ converge simplu către funcția f pe mulțimea B, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $x \in B$, rezultă că există $N(\varepsilon, x)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon, x)$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (1) .

Vom nota cu $f_n \xrightarrow[B]{cs} f$, unde "cs" înseamnă "converge simplu" .

DEFINIȚIA 4.8.6. : Şirul de funcții $(f_n)_{n \in N^*}$ converge uniform către funcția f pe mulțimea B, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon, x)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon, x)$ şi oricare ar fi $x \in B$, rezultă că $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (1') .

Vom nota cu $f_n \xrightarrow[B]{cu} f$, unde "cu" înseamnă "converge uniform" .

Interpretarea geometrică a convergenței uniforme este prezentată în figura de mai jos :



OBSERVAȚIE : Dacă $f_n \xrightarrow[B]{cu} f$, atunci $f_n \xrightarrow[B]{cs} f$. Reciproca nu este adevărată.

EXEMPLUL 1 :

$f_n : (-1,1] \to R$, $f_n(x) = x^n$ $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-1,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Observăm că $f_n \xrightarrow[(-1,1]]{cs} f$, dar nu este uniform convergent.

EXEMPLUL 2 :

$f_n : [0,2\pi] \to R$, $f_n(x) = \dfrac{\sin \quad nx}{n}$, $(\forall) n \in N^*$ $B = [0,2\pi]$

$f(x) = 0$, $(\forall) x \in B$. Fie şirul :

$x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow (\forall)\varepsilon > 0, (\exists) N(\varepsilon)\, astfel \ incat (\forall) n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

$(\forall) n \ge N(\varepsilon)$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{\sin nx}{n} - 0\right| \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, $(\forall) x \in B$.

OBSERVAȚIE : Pentru convergența simplă se aplică criteriile obişnuite de convergență a şirurilor de numere.

CRITERII DE CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

I. Primul criteriu de convergență uniformă (criteriul lui Cauchy):

Fie $f_n : A \to B$, $n \in N^*$ un şir de funcții. Fie mulțimea $B \subset A$.

Şirul $f_n \xrightarrow[B]{cu} f$ dacă şi numai dacă , oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \ge N(\varepsilon)$, oricare ar fi $m \ge N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in B$, rezultă :

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

DEMONSTRAȚIE :

1) **<u>Necesitatea :</u>**

Presupunem că $f_n \xrightarrow[B]{cu} f \Rightarrow (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$, astfel încât, $(\forall)n \geq N(\varepsilon), (\forall)x \in B$, $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

Pentru $m \geq N(\varepsilon)$, avem relația $\left|f_m(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2')

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| = \left|f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)\right| \leq \left|f_m(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$, oricare ar fi $m \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in B$.

2) **<u>Suficiența :</u>**

Presupunem că $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$, astfel încât, $(\forall)n \geq N(\varepsilon), (\forall)x \in B \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ Prin urmare şirul de numere $f_n(x)$ este un şir fundamental şi deci şirul $(f_n)_{n \in N^*}$ este convergent.

Fie $f : B \to R$ limita şirului $(f_n)_{n \in N^*}$, $f_n \xrightarrow[B]{cs} f$. Vom demonstra în continuare că această convergență este uniformă.

Fie $\overline{n} \geq N(\varepsilon)$, fixat, <u>ales arbitrar</u> . Deoarece $f_n \xrightarrow[B]{cs} f$, înseamnă că este adevărată relația :

$$f_n - f_{\overline{n}} \xrightarrow[B]{cs} f - f_{\overline{n}} \Rightarrow (\forall)n \geq N(\varepsilon), (\forall)x \in B, \left|f_m(x) - f_{\overline{n}}(x)\right| < \varepsilon \; .$$

Trecem la limită când $n \to \infty$. Vom avea : $|\, f(x) - f_{\overline{n}}(x)\, | < \varepsilon$. Deoarece $\overline{n}$ este ales arbitrar, îl putem înlocui cu "*n* " şi obținem :

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon, (\forall)x \in B \Rightarrow f_n \xrightarrow[B]{cu} f$$

II. Al doilea criteriu de convergență uniformă:

Fie $f_n : A \to R$. Fie şirul numeric $(a_n)_{n \in N^*}$, de numere pozitive, convergent către zero. Fie $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Dacă există $f : B \to R$ astfel încât $\left|f_n(x) - f(x)\right| \le a_n$, oricare ar fi $n \in N^* \Rightarrow f_n \xrightarrow[B]{cu} f$.

DEMONSTRAȚIE :

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow (\exists)N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)n \ge N(\varepsilon), \left|a_n - 0\right| < \varepsilon$. Dar $a_n > 0$, deci $a_n < \varepsilon$.

Pentru $(\forall)n \ge N(\varepsilon), (\forall)x \in B \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \le a_n < \varepsilon$. Aceasta demonstrează faptul că $f_n \xrightarrow[B]{cu} f$.

CONTINUITATEA ŞI CONVERGENȚA UNIFORMĂ

Fie funcția $f : A \to R$.

DEFINIȚIA 4.8.7. : Funcția f este continuă în punctul $a \in A$ dacă :

1) există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

DEFINIȚIA 4.8.8. : Funcția *f* este continuă în punctul $a \in A$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există o vecinătate *V(a)* astfel încât oricare ar fi $x \in V(a) \cap A \Rightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$.

Cele două definiții sunt echivalente.

TEOREMA 4.8.1. : Fie şirul $f_n \xrightarrow[B]{cu} f$ (mulțimea *B* fiind inclusă în mulțimea *A*) . Dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul $a \in B$, atunci şi funcția limită *f* este continuă în punctul “*a*” .

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză ştim că $f_n \xrightarrow[B]{cu} f \Rightarrow (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$, astfel încât, $(\forall)n \geq N(\varepsilon), (\forall)x \in B$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. (1)

În cazul particular $x = a$, obținem relația $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. (2)

Tot din ipoteză ştim faptul că funcțiile f_n sunt continue în $x = a$, deci şi funcția f_N este continuă în punctul $x = a$, şi prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există vecinătatea $V(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in V(a) \cap B \Rightarrow$

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad . \quad (3)$$

$$(\forall)x \in V(a) \cap B, (\forall)\varepsilon > 0, |f(x) - f(a)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{=\frac{\varepsilon}{3}(1)} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{=\frac{\varepsilon}{3}(3)} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{=\frac{\varepsilon}{3}(2)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

DERIVABILITATE ŞI CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

TEOREMA 4.8.2. : Fie I un interval mărginit şi fie şirul de funcții $f_n : I \to R$ derivabile pe intervalul I $(n \in N^*)$. Dacă sunt îndeplinite condițiile :

1) există $x_0 \in I$ astfel încât şirul $(f_n(x_0))_{n \in N^*}$ este convergent

2) există $g : I \to R$ astfel încât $f_n' \xrightarrow[I]{cu} g$

atunci : 1) există funcția $f : I \to R$ astfel încât $f_n \xrightarrow[I]{cu} f$

2) $f'(x) = g(x), (\forall)x \in I$.

OBSERVAȚIE : Convergența uniformă a şirului f_n nu atrage după sine convergența uniformă a şirului derivatelor.

EXEMPLU :

Fie intervalul $I = [0, 2\pi]$. Fie $f_n : I \to R$, $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $(n \in N^*)$.

Vom arăta că f_n este un şir convergent uniform pe acest interval.

$f(x) = 0 , \quad x \in I$.

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n} \right| \le \frac{1}{n}$. Conform criteriului II de convergență uniformă, rezultă că $f_n \overset{cu}{\underset{I}{\longrightarrow}} f$.

$f_n^{'}(x) = -\sin nx$. Fie $x = \frac{\pi}{2} \in I$.

$n = 1 \Rightarrow f_1^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ $\qquad$ $n = 3 \Rightarrow f_3^{'}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$

$n = 2 \Rightarrow f_2^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\pi = 0$ $\qquad$ $n = 4 \Rightarrow f_4^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{4\pi}{2} = 0$

Obținem şirul *-1, 0, 1, 0 , -1, ...* , deci nu este un şir convergent.

TEOREMA 4.8.3. : Fie $f_n [a,b] \to R, \quad n \in N^*$ un şir de funcții, $f_n \overset{cu}{\underset{[a,b]}{\longrightarrow}} f$. Dacă f_n sunt integrabile pe intervalul *[a, b],* atunci :

1) funcția limită f este integrabilă pe intervalul [a, b]
2) $\int_a^b f_n(x)dx$ este convergentă
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

OBSERVAȚIE : Teorema 4.8.2. se mai numeşte şi "teorema de derivare termen cu termen a unui şir de funcții" , iar teorema 4.8.3. se mai numeşte şi "teorema de integrare termen cu termen a unui şir de funcții" .

4.9. Serii de funcții

Fie $f_n : A \to R$, $\left(n \in N^*\right)$, un şir de funcții.

DEFINIȚIA 4.9.1. : Suma (1) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ se numeşte serie de funcții.

OBSERVAȚII :

1) Oricare ar fi $a \in A$, seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ îi corespunde o serie de numere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$ (2) .

Dacă seria numerică (2) este convergentă, atunci spunem că punctul "*a*" este un punct de convergență a seriei de funcții (1) .

1) O serie de funcții este echivalentă cu o familie de serii de numere (fiecărui $a \in A$ îi corespunde o serie de numere) .

2) Unei serii de funcții îi putem aplica rezultatele de la serii de numere şi de la şiruri de funcții. Astfel, notăm :

$$
\begin{aligned}
&S_1 = f_1 \\
&S_2 = f_1 + f_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n \qquad (3)
\end{aligned}
$$

unde S_n reprezintă suma parțială de ordinul n a seriei de funcții (1) $(S_n)_{n \in N^*}$

DEFINIȚIA 4.9.2. : Seria de funcții (1) , $\sum f_n$, este convergentă pe $B \subset A$ dacă şirul de funcții (S_n) este convergent pe multimea *B* .

DEFINIȚIA 4.9.3. : Seria de funcții $\sum f_n$ este absolut convergentă în punctul $a \in A$ dacă $\sum f_n(a)$ este absolut convergentă.

DEFINIȚIA 4.9.4. : Mulțimea de convergență $B \subset A$ a unei serii de funcții este $B = \left\{ a \in A \mid \sum f_n(a) \quad este \quad convergenta \right\}$.

EXEMPLE :

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, $f_n(x) = e^{-nx}$, $f_n : R \to R$

<u>*x < 0 :*</u> $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = +\infty$, $\sum f_n$ este divergentă .

$\underline{x = 0:}$ $f_n(0) = 1$, $S_n(0) = n + 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(0) = +\infty$, $\sum f_n$ este divergentă .

$\underline{x > 0:}$ $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx}} = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^n$, $\sum\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^n$ este serie geometrică cu rația $r = \dfrac{1}{e^x} < 1$, deci este o serie convergentă.

Rezultă că mulțimea de convergență este $B = (0, \infty)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$, $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$, $f_n : R \to R$

Din criteriul raportului, obținem :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(x+1)^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(x+1)}{2(n+1)} = \frac{x+1}{2}$$

- $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \dfrac{x+1}{2} < 1 \Rightarrow x \in (-3,1)$, seria este convergentă.
- $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| > 1 \Rightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$, seria este divergentă.
- $x = 1 \Rightarrow f_n = \dfrac{1}{n}$, serie armonică, divergentă.
- $x = 3 \Rightarrow f_n = \dfrac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = (-1)^n \dfrac{1}{n}$, serie armonică alternată, care este convergentă.

Rezultă că mulțimea de convergență este $[-3,1)$.

DEFINIȚIA 4.9.5. : Seria $\sum f_n$ converge simplu pe mulțimea B către funcția S dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, oricare ar fi $x \in B$, există $N(\varepsilon, x)$ astfel încât, oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon, x)$, avem $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

DEFINIȚIA 4.9.6. : Seria $\sum f_n$ converge uniform pe mulțimea B către funcția S dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât, oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$, oricare ar fi $x \in B$, avem $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$.

DEFINIȚIA 4.9.7. : Funcția S se numeşte suma seriei de funcții.

CRITERII DE UNIFORM CONVERGENTA A SERIILOR DE FUNCTII

Criteriul Cauchy de convergență uniformă:

Fie $f_n : A \to R, \quad n \in N^*$. Fie $B \subset A$. Seria $\sum f_n$ converge uniform pe mulțimea B dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât, oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$, oricare ar fi $p \in N^*$, avem :

$\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in B$.

DEMONSTRAȚIE :

Fie $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$.

Şirul $S_n \underset{B}{\overset{cu}{\longrightarrow}} S \Leftrightarrow (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$ astfel încât : $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$ şi $(\forall)x \in B \Rightarrow$

$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$ şi $\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

Criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă:

Fie $f_n : A \to R, \quad n \in N^*$. Fie $\sum f_n$. Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi convergentă. Dacă oricare ar fi $x \in B \subset A$ şi oricare ar fi $n \in N^*$, $\left|f_n(x)\right| \leq a_n$, atunci $\sum f_n$ converge uniform pe mulțimea B.

DEMONSTRAȚIE :

Din ipoteză ştim că $\sum a_n$ este convergentă şi $a_n > 0$. Din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$, $(\forall)p \in N^*$, avem :

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<\varepsilon \Rightarrow a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}<\varepsilon .$$

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)\right| \le \left|f_{n+1}(x)\right|+\left|f_{n+2}(x)\right|+\ldots+\left|f_{n+p}(x)\right| \le a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}<\varepsilon$$

şi conform criteriului de convergenţă uniformă al lui Cauchy rezultă că $\sum f_n$ converge uniform pe mulţimea B .

EXEMPLE :

1. $\sum f_n$, $f_n : R \to R$, $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{n^2}$.

$$(\forall)n \in N^*, (\forall)x \in R \Rightarrow \left|f_n(x)\right| = \left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum a_n = \dfrac{1}{n^2}$ este seria armonică generalizată, $\alpha = 2$, deci seria este convergentă.

Conform criteriului lui Weierstrass, f_n converge uniform pe *R*.

2. $\sum f_n$, $f_n : R \to R$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$.
   - pentru $x > 1 \Rightarrow f_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$ este seria armonică generalizată (convergentă)
   - pentru $x \le 1 \Rightarrow$ seria este divergentă.

4.10. Serii de puteri

Fie $f_n : R \to R$, $f_n(x)=a_n x^n$, $n \in N$.

DEFINIŢIA 4.10.1. : Seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ se numeşte serie de puteri.

OBSERVAŢII :

- Orice serie de puteri este o serie de funcții, deci rezultatele obținute la seriile de funcții se aplică seriilor de puteri.

- $S_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ este un polinom de gradul n .

PROPOZIȚIA 4.10.1. : Mulțimea de convergență a unei serii de puteri este nevidă.

DEMONSTRAȚIE :

Fie şirul $(S_n(x))_{n\in N}$. Pentru $x = 0$, $S_n(0) = a_0$;

$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = a_0 \Rightarrow x = 0 \in B$. Deci mulțimea B este nevidă.

OBSERVAȚIE : Există serii de puteri pentru care mulțimea de convergență este formată doar din numărul zero. ($B = \{0\}$)

EXEMPLU : Fie seria: $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Notăm $a_n = n^n$.

Fie $x_0 \in R$, $x_0 \neq 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = x_0 + 2^2 x_0^2 + 3^3 x_0^3 + \ldots + n^n x_0^n + \ldots$

De asemenea, $n^n x_0^n \leq (n|x_0|)^n$.

Pentru $n > \left[\frac{1}{|x_0|}\right] \Rightarrow n \cdot x_0 > 1$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} n^n x_0^n \neq 0$. Deci seria este divergentă pentru orice $x \neq 0$ (vezi criteriile de convergență)

<u>TEOREMA LUI ABEL PENTRU SERII DE PUTERI</u>

Pentru orice serie de puteri $\sum a_n x^n$, există un număr $R \geq 0$ astfel încât :

1. Oricare ar fi $x \in (-R, R)$, seria este absolut convergentă.
2. Oricare ar fi $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$, seria este divergentă.
3. Oricare ar fi $0 < r < R$, seria este uniform convergentă pentru orice $x \in [-r, r]$.

Numărul $R \geq 0$ cu proprietățile 1. şi 2. se numeşte raza de convergență a seriei de puteri.

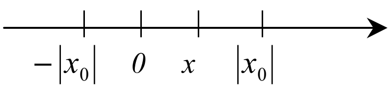
DEMONSTRAȚIE :

Fie B multimea de convergență a seriei $\sum a_n x^n$.
Dacă $B = \{0\} \Rightarrow R = 0$, atunci teorema este demonstrată.
Dacă $B \neq \{0\}$, atunci :

(*) Fie $x_0 \in B$, $x_0 \neq 0 \Rightarrow \sum a_n x_0^n$ este convergentă, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ de unde rezultă că şirul $\left(a_n x_0^n\right)_{n\in N^*}$ este mărginit.

Dacă şirul $\left(a_n x_0^n\right)_{n\in N^*}$ este mărginit, atunci există $M > 0$ astfel încât $\left|a_n x_0^n\right| \leq M$.

Consierăm $x \in \left(-\left|x_0\right|, \left|x_0\right|\right) \Rightarrow |x| < \left|x_0\right|$



$$\left|a_n x_0^n\right| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

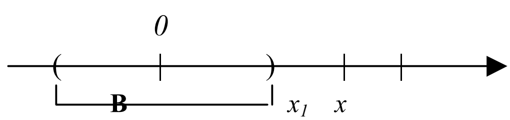
$$\sum \left|a_n x_0^n\right| \leq \sum M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Dar $\sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este o serie geometrică convergentă $\left(r = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1\right)$, şi conform primului criteriu de comparație, seria $\sum a_n x^n$ este absolut convergentă.

Prin urmare, oricare ar fi $x \in \left(-\left|x_0\right|, \left|x_0\right|\right)$, seria este absolut convergentă, deci convergentă.

Am arătat deci că dacă $x_0 \in B$, atunci oricare ar fi $x \in \left(-\left|x_0\right|, \left|x_0\right|\right)$, seria este absolut convergentă.

(**) Fie $x_1 \notin B$



Dacă $x_1 \notin B$, atunci seria $\sum a_n x_1^n$ este divergentă.

Vom demonstra că oricare ar fi x astfel încât $|x| > |x_1|$, seria $\sum a_n x_1^n$ este divergentă.

Presupunem contrariul, adică $\sum a_n x^n$ este convergentă. Rezultă conform (*) că seria $\sum a_n x_1^n$ este convergentă. Aceasta este o contradicție cu ipoteza, deci seria este divergentă pentru orice punct mai mare decât x_1 .

Fie $I = (a,b) \in R$. Oricare ar fi M cu proprietatea $x \in (a,b),\quad x < M$ se numeşte majorant al intervalului *(a,b)* .

Observație : Un interval *(a,b)* are o infinitate de majoranți.
Se numeşte supremul lui *I* , notat "*supI* " , cel mai mic majorant.

Fie R=supB . Vom arăta că R este raza de convergență a seriei.

1. Oricare ar fi $|x_0| < |R|$, rezultă conform *(*)* :
   $(-|x_0|, |x_0|) \in B \Rightarrow (\forall) x \in (-R, R)$, seria este absolut convergentă.

2. Dacă *R* este infinit $(R = \infty)$, atunci punctul 2. din teorema lui Abel nu are sens. Presupunem că *R* este finit. Atunci :
   $(\forall)|x| > |R| \overset{(**)}{\Rightarrow} (\forall) x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$, seria este divergentă.
   Din 1. şi 2. rezultă faptul că *R* este raza de convergență a seriei.

3. Fie $0 < r < R$
   Vom arăta că oricare ar fi $x \in (-R, R)$, seria este convergentă .

Dacă $0 < r < R$, atunci r face parte din intrevalul de convergență , deci seria $\sum |a_n r^n|$ este convergentă. Dar $\sum |a_n r^n| = \sum |a_n| r^n$, aceasta din urmă fiind o serie numerică cu termeni pozitivi, convergentă.

Oricare ar fi $x \in [-r, r]$, rezultă că $\sum |a_n x^n| = \sum |a_n| r^n$ şi conform criteriului lui Weierstrass de convergență uniformă, seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

OBSERVAȚII :

- Teorema lui Abel nu afirmă nimic despre natura seriei atunci când *x=R* sau când *x= -R*. În aceste puncte seria poate fi convergentă sau divergentă.

- Teorema lui Abel afirmă existența seriei de puteri, dar nu arată cum poate fi calculată raza de convergență.

EXEMPLU : $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n , \quad (\forall) x \in (-1,1)$

- Pentru orice $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, seria este divergentă.
- Pentru $x = 1$, $S_n = \infty$, deci seria este divergentă.
- Pentru $x = -1$, S_n este o serie oscilantă, deci divergentă.

În concluzie, $B = (-1,1)$.

TEOREMA CAUCHY – HADAMARD

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri. Fie $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci :

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & 0 < \omega < \infty \\ \infty, & \omega = 0 \\ 0, & \omega = \infty \end{cases}$$

DEMONSTRAȚIE :

Fie $x_0 \in R$ oarecare . (x_0 fixat)

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum |a_n x_0^n| = \sum |a_n| |x_0|^n$. Notăm $u_n = |a_n| |x_0|^n$. Pentru seria $\sum u_n$ aplicăm criteriul rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(|x_0| \sqrt[n]{a_n} \right) = |x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \omega |x_0|$$

Există mai multe cazuri :

1) $0 < \omega < \infty \Rightarrow (\forall) x_0 < \frac{1}{\omega} \Rightarrow |x_0| < \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega |x_0| < 1$. Din criteriul lui Cauchy rezultă că seria este convergentă şi $R = \frac{1}{\omega}$.

2) $\omega = 0 \Rightarrow 0 \cdot |x_0| < 1, \quad (\forall) x_0 \in R \Rightarrow R = \infty$.

3) $\omega = \infty \Rightarrow (\forall) x_0$, $\omega|x_0| > 1 \Rightarrow (\forall)|x_0|$, $x_0 \neq 0$, seria este divergentă şi *R=0* .

Observaţie : $\omega = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dacă nu există această limită, atunci $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$ sau $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

EXEMPLE :

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n^n}\right|$, $a_n = \frac{1}{n^n}$ $\Rightarrow \omega = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \infty$

2) $\sum \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n}x^n \Rightarrow \omega = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n \cdot n}\right|} = \frac{1}{2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{\omega} = 2$

Oricare ar fi $x \in (-2,2)$, seria este absolut convergentă.
Oricare ar fi $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, seria este divergentă.

CONTINUITATEA UNEI SERII DE PUTERI

Fie seria $\sum a_n x^n$ şi fie B mulţimea de convergenţă a seriei, $(-R,R) \subset B \subset [-R,R]$.

Oricare ar fi $x \in B$, notăm $S(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$. Obţinem astfel funcţia $S : B \to R$ (suma seriei).

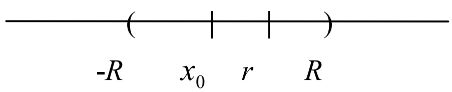
EXEMPLU : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

$B = (-1,1)$, $S : B \to R$, $S(x) = \frac{1}{1-x}$

PROPOZIŢIA 4.10.2. : Suma *S* a unei serii de puteri $\sum a_n x^n$ este continuă pentru oricare $x \in (-R,R)$.

DEMONSTRAȚIE :

Fie $x_0 \in (-R, R)$



Deoarece x_0 aparține acestui interval, rezultă că există $r > 0$ astfel încât $x_0 < r < R$. Conform teoremei lui Abel, seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul *[-r,r]* .

Dar funcțiile $a_n x^n$ sunt nişte polinoame, deci sunt continue pentru orice $x \in R \Rightarrow S(x)$ este continuă, deci $S(x)$ este continuă pe intervalul *(-R,R)* .

TEOREMĂ : Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri şi fie S suma acestei serii.

1. Seria derivatelor $\sum n a_n x^{n-1}$ are aceeaşi rază de convergență ca şi seria inițială.
2. Funcția S este derivabilă în intervalul de convergență şi suma seriei $\sum n a_n x^{n-1}$ este S' .

EXEMPLE :

1) Să se determine mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

Dacă $x \in (-1,1)$, seria este absolut convergentă.

Dacă $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, seria este divergentă.

Oricare ar fi r astfel încât $0 < r < 1$, seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Dacă $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Dacă $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. Acestea sunt serii alternate care verifică condițiile criteriului lui Leibnitz, deci sunt convergente.

Rezultă că mulțimea de convergență este $B = [-1,1]$.

2) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

Notăm $x+1=y$ şi obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{n+1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}\Rightarrow R=\frac{1}{3}$$

Dacă $y\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$, seria este absolut convergentă.

Dacă $y=\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{1}{3^n}$ este o serie cu termeni pozitivi pe care o comparăm cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Astfel, $\lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+(-2)^n)n}{n\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^n}=1$. Observăm că seriile au aceeaşi natură, deci seria dată este divergentă.

Dacă $y=-\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}$ este o serie alternată. Şirul $\left(\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}\right)_{n\in N}$ este monoton descrescător şi tinde la zero. Conform criteriului lui Leibnitz, seria dată este convergentă.

Dacă $x\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},\infty\right)$, seria este divergentă.

3) Să se determine mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot x^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{n^{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

Dacă $x\in(-1,1)$, seria este absolut convergentă.

Dacă $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, seria este divergentă.

Dacă $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. Dacă $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}(-1)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

, deci seria este divergentă.

4) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția $f:(-1,\infty)\to R$, unde $f(x) = \ln(1+x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots\right)dt = \int_0^x 1dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2 dt -$$

$$- \int_0^x t^3 dt + \ldots + \int_0^x (-1)^n t^n dt + \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

4.11. Serii Taylor şi serii MacLaurin

Fie I un interval din R şi fie $f: I \to R$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $a \in I$.

DEFINIȚIA 4.11.1. : Se numeşte serie Taylor ataşată funcției *f* în punctul "*a*", seria :

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Evident, seria (1) este o serie de puteri , căci notând $x - a = y$, obținem :

$$(1') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} f^{(n)}(a) = f(a) + \frac{y}{1!} f'(a) + \frac{y^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{y^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Raza de convergență a seriei (1) se studiază cu ajutorul teoremei Cauchy – Hadamard.

OBSERVAȚIE : Deoarece raza de convergență este $0 \leq R \leq \infty$, seria Taylor are mulțimea de convergență $B \neq \emptyset$ deoarece $a \in B$.

Suma parțială de ordinul n a seriei (1) , pentru orice $x \in B$ (mulțimea de convergență) o vom nota :

(2) $$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \text{K} + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

şi se numeşte polinomul lui Taylor de ordinul n.

DEFINIȚIA 4.11.2. : Se numeşte rest al lui Taylor de ordinul n, funcția $R_n : I \to R$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ (3). Deci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ (4) , oricare ar fi $x \in I$.

TEOREMA 4.11.1. : Seria Taylor ataşată funcției f în punctul "*a*" este convergentă în punctul $x \in I$ dacă şi numai dacă şirul $(R_n(x))_{n \in N^*}$ este convergent către zero.

DEMONSTRAȚIE :

Din relația (4) obținem relația (5) $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$. Prin urmare, dacă şirul sumelor parțiale de ordinul n , $T_n(x)$, converge către *f(x)*, trecând la limită când $n \to \infty$ în relatia (5), rezultă că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Invers, dacă $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ atunci din relatia (5) avem $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$ şi deci seria Taylor ataşată funcției *f* în punctul "*a*" este convergentă pentru orice $x \in I$, către *f(x)* .

OBSERVAȚII :

1) Dacă $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, avem :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \text{K} + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \text{K} \qquad (6)$$

Formula (6) se numeşte formula de dezvoltare în serie Taylor a funcției f în jurul punctului $x = a$.

2) Mulțimea $B=\left\{x\in I \mid \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\ este \quad convergenta\right\}$ nu coincide, în general cu *I*.

<u>Caz particular</u> : Dacă $0\in I$, atunci seria următoare se numeşte serie MacLaurin ataşată funcției *f* .

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots \qquad (7)$$

Evident, dacă $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$ converge către zero când n tinde spre infinit, avem:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots \qquad (8)$$

Formula (8) se numeşte formula de dezvoltare în serie MacLaurin a funcției *f* .

EXEMPLE :

1) Să se dezvolte în serie MacLaurin funcția $f:R\to R,\quad f(x)=e^x$.

$f(x)=e^x,\quad f(0)=1$
$f'(x)=e^x,\quad f(0)=1$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=1$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Şi deci $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ (formula de dezvoltare în serie MacLaurin)

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \Rightarrow a_n=\frac{1}{n!}$$

Pentru determinarea razei de convergență, conform teoremei Cauchy – Hadamard, avem:

$$\omega = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

2) Să se dezvolte în serie MacLaurin şi să se determine raza de convergență a funcției $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = -1$$

....

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (formulă ce se demonstrează uşor prin inducție)

....

Prin urmare, $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} + \ldots$

Pentru determinarea razei de convergență, avem :

$$\omega = \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

5) Să se scrie seria McLaurin pentru funcția : $f : R \to R$, $f(x) = \cos x$

$$f^{(n)}(x) = (\cos x)^n = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, n = 2k \\ 0, n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n$$

RESTUL ÎN FORMULA LUI TAYLOR

TEOREMA 4.11.2. : Fie $f : I \to R$ de *n+1* ori derivabilă pe intervalul *I*. Atunci pentru orice $p \in N^*$, există un număr "α" cuprins între "*a*" şi "*x*" astfel încât :

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\alpha)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\alpha) \qquad (1)$$

DEMONSTRAȚIE :

Vom considera restul $R_n(x)$ de forma $\qquad R_n(x)=(x-a)^p\cdot k \qquad (2)$

şi vom determina pe "*k*" în funcţie de "*x*" şi de "*a*". Din formula lui Taylor avem:
$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^p\cdot k \quad (3)$$

Vom defini funcţia $\varphi: I\to R$, derivabilă pe *I* astfel :
$$\varphi(t)=f(t)+\frac{x-t}{1!}f'(t)+\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)+\ldots+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)+(x-t)^p\cdot k \quad (4)$$

Evident $\varphi(x)=f(x)$ şi $f(x)=\varphi(a)$ de unde obţinem $\varphi(x)=\varphi(a)$.

Presupunând că, de exemplu, $a<x$, avem:

- φ este continuă pe intervalul *[a , x]*
- φ este derivabilă pe intervalul *(a , x)* $\quad \Rightarrow (\exists)\alpha\in(a,x),\quad \varphi'(\alpha)=0 \quad (5)$
- $\varphi(a)=\varphi(x)$ $\quad$ (conform teoremei lui Rolle)

Pe de altă parte, derivând funcţia φ dată de (4) obţinem :
$$\varphi'(t)=f'(t)+\frac{x-t}{1!}+f''(t)-f'(t)+\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)-\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)+\frac{(x-t)^3}{3!}f^{IV}(t)-$$
$$-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+\ldots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)-$$
$$-p(x-t)^{p-1}\cdot k$$

Reducând termenii asemenea, se obţine :
$$\varphi'(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)-p\cdot(x-t)^{p-1}\cdot k$$

Deci : $\varphi'(\alpha)=\dfrac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n+1)}(\alpha)-p\cdot(x-\alpha)^{p-1}\cdot k=0$, de unde
$$k=\frac{(x-\alpha)^n f^{(n+1)}(\alpha)}{n!\,p\cdot(x-\alpha)^{p-1}},\quad sau \quad k=\frac{(x-\alpha)^{n-p+1}}{p\cdot n!}f^{(n+1)}(\alpha)$$
şi rezultă astfel :
$$R_n(x)=\frac{(x-a)^p(x-\alpha)^{n-p+1}}{p\cdot n!}f^{(n+1)}(\alpha)$$
, unde $"\alpha"$ este cuprins între "*a*" şi "*x*".

Teorema este astfel demonstrată . Cazul când $x<a$ se tratează analog.

Cazuri particulare ale expresiei restului :

(1) Pentru $p = 1$ se obține $R_n(x) = \dfrac{(x-a)(x-\alpha)^n}{n!} f^{(n+1)}(\alpha)$ şi se numeşte *restul lui Cauchy.*

(2) Pentru $p = n+1$ se obține $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha)$ şi se numeşte *restul lui Lagrange.*

RESTUL IN FORMULA LUI MACLAURIN

Aşa cum am mai văzut, o serie Taylor pentru $a = 0$ se numeşte serie MacLaurin.

Prin urmare, dezvoltarea unei funcții $f : I \to R$ ($0 \in I$) în serie MacLaurin este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

Restul în formula lui Cauchy are forma : $R_n(x) = \dfrac{x(x-\alpha)^n}{n!} f^{(n+1)}(\alpha)$, unde "$\alpha$" este cuprins între "*a*" şi "*x*".

Restul în formula lui Lagrange are forma : $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha)$, unde "$\alpha$" este cuprins între "*a*" şi "*x*".

EXEMPLU :

1) Să se calculeze $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ cu trei zecimale exacte.

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = T_n\left(-\frac{1}{2}\right) + R_n\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Pentru $R_n\left(-\frac{1}{2}\right)$ utilizăm formula restului lui Lagrange :

$$\left|R_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\alpha}\right| \le \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot 1 \text{ deoarece } \frac{1}{\sqrt{e}} < e^{\alpha} < e^{0} = 1$$

Punând condiția $\left|R_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < 0{,}001$, adică $\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ sau $2^{n+1}(n+1)! > 1000$ rezultă $n = 4$ (prima valoare naturală).

$$T\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1!} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{3!} + \left(-\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\cdot 2} - \frac{1}{2^3\cdot 6} + \frac{1}{2^4\cdot 24} =$$

$= \frac{233}{284} \approx 0{,}606$. Deci $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}606$.