GEOMETRIE ANALITICĂ

Gheorghe MUNTEANU, Adelina MANEA

Cuprins

Prefaţă **7**

I Consideraţii teoretice 9

1 Spaţii vectoriale **11**
1.1 Definiţie, exemple 12
1.2 Subspaţii 13
1.3 Liniară independenţă, bază şi dimensiune 15
1.3.1 Schimbarea bazei 18
1.3.2 Lema substituţiei 20
1.3.3 Complexificarea unui spaţiu vectorial real 23
1.4 Spaţii euclidiene 24
1.4.1 Ortogonalitate într-un spaţiu euclidian 26
1.4.2 Proiecţia ortogonală 30

2 Spaţii afine **33**
2.1 Spaţiu afin. Definiţie, exemple 33
2.1.1 Exemple de spaţii afine 35
2.1.2 Sisteme de coordonate în planul şi spaţiul euclidian . . 40
2.1.3 Repere într-un spaţiu afin. Schimbarea reperelor. . . . 42
2.2 Produse cu vectori geometrici 44
2.2.1 Produsul scalar a doi vectori 44
2.2.2 Produsul vectorial a doi vectori geoemetrici liberi . . . 46
2.2.3 Produsul mixt (exterior) a trei vectori geometrici . . . 48
2.2.4 Dublul produs vectorial 49
2.2.5 Extinderi ale produsului mixt şi vectorial 50
2.3 Subspaţii afine. Varietăţi liniare afine 53
2.3.1 Poziţii relative, unghiuri şi distanţe 59
2.4 Semispaţii 64

2.4.1 Mulţimi convexe 65
2.4.2 Simplex 67
2.5 Raport simplu. Paralelism şi asemănare 70

3 Transformări în spaţii afine 73
3.1 Transformări liniare 73
3.1.1 Transformări liniare 75
3.1.2 Vectori şi valori proprii 76
3.1.3 Forma diagonală a unei matrice 80
3.2 Transformări în spaţii euclidiene 81
3.2.1 Transformări hermitiene 81
3.2.2 Transformări ortogonale 83
3.3 Transformări afine 86
3.3.1 Izometriile planului şi spaţiului euclidian 88
3.3.2 Grupul asemănărilor 93

4 Forme liniare, multiliniare şi pătratice 95
4.1 Forme liniare 95
4.2 Forme p-liniare 96
4.3 Tensori afini 98
4.4 Forme pătratice 100
4.4.1 Forme pătratice în spaţii euclidiene. 106

5 Conice 109
5.1 Clasificarea conicelor 109
5.2 Proprietăţi geometrice ale conicelor 117
5.2.1 Centrul unei conice 117
5.2.2 Axe de simetrie la o conică 118
5.2.3 Intersecţia unei conice cu o dreaptă. 120
5.2.4 Diametrul conjugat unei direcţii. 121
5.2.5 Pol şi polară la o conică. 122
5.2.6 Conice prin condiţii iniţiale. Fascicole de conice. 124

6 Cuadrice 129
6.1 Cuadrice. Exemple de cuadrice 129
6.1.1 Sfera 129
6.1.2 Elipsoidul 134
6.1.3 Hiperbolidul cu o pânză 135
6.1.4 Hiperbolidul cu două pânze 136
6.1.5 Paraboloidul eliptic 137
6.1.6 Paraboloidul hiperbolic 138

6.1.7 Conul 139
6.1.8 Cilindrul 139
6.1.9 Punctul dublu 140
6.1.10 Perechi de plane 140
6.1.11 Dreaptă dublă 140
6.1.12 Cuadrică vidă 140
6.2 Clasificarea cuadricelor 141
6.3 Generări de suprafeţe 144
6.3.1 Subvarietăţi într-un spaţiu afin 145
6.3.2 Suprafeţe cilindrice 147
6.3.3 Suprafeţe conice 149
6.3.4 Suprafeţe conoide cu plan director 151
6.3.5 Suprafeţe de rotaţie. 152
6.3.6 Suprafeţe riglate şi desfăşurabile 154

II Aplicaţii 157

7 Probleme rezolvate la Capitolul 1 159
7.1 Spaţii vectoriale 159
7.2 Subspaţii vectoriale. Operaţii cu subspaţii 161
7.3 Schimbarea bazei. Lema substituţiei 167
7.4 Spaţii euclidiene 171

8 Probleme rezolvate la Capitolul 2 177
8.1 Calcul vectorial 177
8.2 Vectori liberi. Produsul scalar, vectorial, mixt şi dublul produs vectorial 183
8.3 Subspaţii afine ale spaţiului $\mathbf{R^n}$ 191
8.4 Mulţimi convexe. Semispaţii. Raport simplu 209

9 Probleme rezolvate la Capitolul 3 215
9.1 Transformări liniare 215
9.2 Vectori şi valori proprii 221
9.3 Transformări ortogonale 224
9.4 Transformări afine 228

10 Probleme rezolvate la Capitolul 4 235
10.1 Forme biliniare şi pătratice 235

11 Probleme rezolvate la Capitolul 5 **243**
11.1 Conice 243

12 Probleme rezolvate la Capitolul 6 **263**
12.1 Sfera 263
12.2 Cuadrice pe formă generală 266
12.3 Generări de suprafeţe 268

Prefaţă

Disciplina Geometrie Analitică este considerată disciplină fundamentală în planul de învaţământ al oricărei facultăţi de matematică. Motivaţia este firească având în vedere că noţiunile studiate aici sunt cu implicaţii în multe alte discipline studiate ulterior.

Cartea de faţă reprezintă o variantă ceva mai extinsă a notelor de curs şi seminar ţinute de autorii ei la Facultatea de Matematică şi Informatică din Braşov pe parcursul a mai multor ani de colaborare. Desigur, de la an la an autorii au căutat variante de predare şi seminarizare potrivite structurii facultaţii şi nivelului de pregătire a studenţilor respectivi. Trecerea la ciclul de trei ani cu licenţă a determinat reducerea timpului alocat disciplinei, fapt ce poate prejudicia o predare în condiţii bune a unor noţiuni atât de importante pentru formarea matematică a unui student. Soluţia găsită de noi este să publicăm această variantă extinsă a notelor de curs şi seminar, oferind astfel posibilitatea studentului cu dragoste de carte să poată pătrunde dincolo de elementele schematice la care se rezumă notele de curs.

Conţinutul cărţii este unul clasic pentru disciplina Geometrie Analitică şi se poate regăsi în majoritatea cursurilor similare predate în ţară sau străinătate. Ce o deosebeşte de alte cărţi similare tipărite este faptul că pune la îndemâna studentului atât noţiunile teoretice cât şi aplicaţiile. Am putea adăuga aici poate şi experinţa profesională a autorilor.

Sperăm că materialul propus să reprezinte un sprijin real pentru studenţii de la Matematică în înţelegerea discipliei şi să-i ajute pe cei ce din anumite motive nu au putut lua unele din notele de curs să depăşească un eventual eşec.

Braşov, 2007.

Partea I

Consideraţii teoretice

Capitolul 1

Spaţii vectoriale

Noţiunea pe care o prezentăm este cunoscută din manualul de algebră , clasa a XII-a, şi dezvoltată la cursul de Algebră liniară, semestrul I. Geometria analitică are un suport algebric în noţiunea de spaţiu vectorial, sau spaţiu liniar cum mai este cunoscut. Pregătirea anterioară ne permite ca aici să trecem doar în revistă noţiunile necesare în notaţiile specifice cursului nostru. Ca să justificăm necesitatea introducerii acestor noţiuni amintim din liceu că adunarea a doi vectori geometrici $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ se face cu regula paralelogramului. Dacă ei sunt fixaţi în originea unui sistem de axe şi extremităţile lor au coordonatele $M_1(x_1, y_1)$ respectiv $M_2(x_2, y_2)$ atunci vectorul $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, fixat în origine, va avea extremitatea de coordonate $M(x_1+x_2, y_1+y_2)$. Analog, dacă $\alpha \in R$ şi $\vec{v}$ fixat în origine are extremitatea de coordonate $P(x, y)$, atunci αv va avea extremitatea $Q(\alpha x, \alpha y)$.

Apare astfel natural ca imaginea geometrică să fie abstractizată şi să tratăm algebric operaţiile geometrice din desenul de mai sus. Până atunci câteva întrebări se ridică. Una ar fi ce înţeleg prin sistem de axe. Apoi ce fel de axe?. Rectangulare?. Şi dacă da, ce sunt acelea. Cum definesc coordonatele extremităţilor vectorilor?. Sunt întrebări la care răspunsul îl găsim fundamentând algebric noţiunile geometrice prezentate.

1.1 Definiţie, exemple

Să considerăm V o mulţime ale cărei elemente le notăm cu $x, y, z...$ şi le numim vectori (având legătură şi cu geometria vectorilor). Fie $(K, +, .)$ un corp comutativ de elemente $\alpha, \beta, \gamma..$, numiţi scalari.

Numim *spaţiu vectorial peste corpul* K o structură algebrică definită pe V de două legi de compoziţie ce verifică axiomele:

I) $+ : V \times V \to V$, adunarea vectorilor, ce satisface axiomele unui grup abelian:

I)1. $x + (y + z) = (x + y) + z$, asociativă $\forall x, y, z \in V$

I)2. $x + y = y + x$, comutativă, $\forall x, y \in V$

I)3. Există un vector 0 astfel $x + 0 = x$, $\forall x \in V$

I)4. $\forall x \in V$ există $-x \in V$ astfel încât $x + (-x) = 0$.

II) $. : K \times V \to V$, amplificarea cu scalari a vectorilor, ce satisface:

II)1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ pentru $\forall \alpha, \beta \in K$ şi $\forall x \in V$

II)2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pentru $\forall \alpha \in K$ şi $\forall x, y \in V$

II)3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ pentru $\forall \alpha, \beta \in K$ şi $\forall x \in V$

II)4. $1x = x$, unde $1 \in K$ şi $\forall x \in V$.

Consecinţe imediate ale definiţiei sunt:

1. $0x = 0$
2. $1(-x) = -x = (-1)x$
3. $\alpha x = 0$ dacă şi numai dacă $\alpha = 0$ sau $x = 0$.
4. $(\alpha_1 + ... + \alpha_n)x = \alpha_1 x + ... + \alpha_n x$
5. $\alpha(x_1 + ... + x_n) = \alpha x_1 + ... + \alpha x_n$.

Exemple remarcabile de spaţii vectoriale sunt:

1. $(K, +, .K)$, orice corp este spaţiu vectorial peste el însuşi, în particular discutăm de spaţiul real sau complex.

2. Fie $K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ / \ x_i \in K\}$, produsul cartezian al lui K de n

ori. Definim operaţiile:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\\ \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)\ \ \forall \alpha \in K\end{aligned}$$

$(K^n, +, .K)$ devine spaţiu vectorial peste K.

În particular putem discuta de $(R^n, +, .R)$ spaţiul real n dimensional, sau $(C^n, +, .C)$ spaţiul complex n dimensional. Regăsim aici operaţiile prezentate în introducere pentru spaţiul real $(R^2, +, .R)$.

Calculaţi: $x = 3(1, 4, -1) + 2(0, 2, 1) - (2, 1, 1)$. După operaţiile de mai sus înseamnă că fiecare element din prima paranteză să-l înmulţim cu 3, analog la celelalte cu 2 respectiv -1 şi să adunăm pe fiecare poziţie elementele obţinute. Răspunsul final este $x = (1, 15, -2)$.

3. Vectorii din plan sau spaţiu de care discutăm mai sus. Introducerea geometrică a lor o vom face într-un capitol separat.

4. $(\mathcal{M}_{m\times n}(K), +, .K)$, spaţiul matricelor cu elemente din corpul K (real sau complex).

5. $(F_{[a,b]}, +, .R)$ spaţiul funcţiilor reale definite pe $[a, b] \to R$.

6. Mulţimea tuturor polinoamelor în nedeterminata X, cu coeficienţi din corpul $K, (\mathcal{P}[X], +, .K)$.

Putem continua cu multe alte exemple ce dovedesc importanţa noţiunii ce o studiem.

1.2 Subspaţii

Fie $(V, +, .K)$ un spaţiu vectorial şi $S \subset V$ o mulţime nevidă.

Spunem că S este *subspaţiu* în V dacă restricţia operaţiilor din V la S defineşte pe acesta o structură de spaţiu vectorial. Pentru aceasta este suficient ca:

$$x + y \in S\ \ ,\ \ \forall x, y \in S\ \text{ şi } \alpha x \in S,\ ,\forall \alpha \in K,\ x \in S$$

sau echivalent

$$\alpha x + \beta y \in S\ \ ,\ \ \forall x, y \in S,\ \forall \alpha, \beta \in K\ .$$

Se pot da multe exemple de subspaţii: matricele simetrice sau cele antisimetrice, funcţiile pare sau impare, funcţiile polinomiale până la un anumit grad, etc.

Faptul că S este subspaţiu în V îl vom nota de regulă cu $S \prec V$.

Principalele *operaţii* cu subspaţii sunt:

Fie S_1 şi S_2 două subspaţii în spaţiul vectorial $(V, +, .K)$. Atunci:

1. Intersecţia $S_1 \cap S_2$ a două subspaţii este un subspaţiu.

2. Suma $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2/\ x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$ este un subspaţiu. Dacă $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, atunci suma se numeşte directă şi se notează cu $S_1 \oplus S_2$.

3. Fie $M = \{x_1, x_2, .., x_n\} \subset V$ o mulţime oarecare. Numim *combinaţie liniară* de elementele lui M un vector de forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_n x_n$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elementele lui M împreună cu adunarea şi amplificarea lor cu scalari formează un subspaţiu în V, numit *subspaţiul generat de* M, şi notat $[M]$.

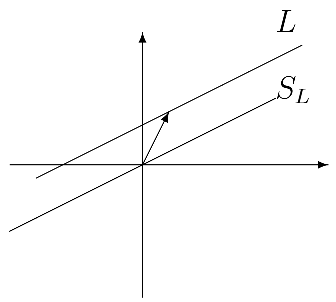
De observat că reuniunea a două subspaţii nu este un subspaţiu în general dar se demonstrează că $[S_1 \cup S_2] = S_1 + S_2$, adică subspaţiul generat de reuniune este subspaţiul sumă. Diferenţa a două subspaţii nu este un subspaţiu deoarece nu conţine pe 0.

Fie $v_0 \in V$ fixat şi $S_L \prec V$ un subspaţiu. Definim mulţimea de vectori

$$L = v_0 + S_L = \{v_0 + v/\ \forall v \in S_L\}.$$

L se numeşte *varietatea liniară* ce trece prin v_0 şi are pe S_L ca subspaţiu director. În general L nu este subspaţiu în V, dar orice subspaţiu este varietate liniară (spre exemplu luăm $v_0 = 0$).

Intuitiv dacă S_L îl privim ca mulţimea vectorilor legaţi în origine ce se află pe o dreaptă (ce trece prin origine), putem privi o varietate liniară ca fiind o dreaptă paralelă cu ea translată cu vectorul v_0.



Aplicaţie. Fie $S_1 = \{(x_1, x_2)\ /x_1 = x_2\}$ şi $S_2 = \{(y_1, y_2)\ /y_1 = -y_2\}$ din $(R^2.+, R)$. Arătaţi că sunt subspaţii, calculaţi $S_1 \cap S_2$ şi $S_1 + S_2$.

Soluţie: $S_1 = \{(x, x)\ /x \in R\}$ şi $(x, x) + (y, y) = (x + y, x + y) \in S_1$, iar $\alpha(x, x) = (\alpha x, \alpha x) \in S_1$. Deci S_1 este subspaţiu în R^2. Analog $S_2 =$

$\{(x,-x)\ /x \in R\}$ şi $(x,-x)+(y,-y) = (x+y,-(x+y)) \in S_2$, iar $\alpha(x,-x) = (\alpha x, -\alpha x) \in S_2$, adică S_2 este subspaţiu în R^2.

Pentru $S_1 \cap S_2$ vedem când un element se găseşte în ambele mulţimi. Fie $(x,x) \in S_1$ şi $(y,-y) \in S_2$. Ele vor coincide dacă $x = y$ şi $x = -y$ adică $x = y = 0$, deci $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$.

$S_1 + S_2$ este suma dintre un element din S_1 şi un element din S_2, adică $S_1 + S_2 = \{(x,x) + (y,-y)\} = \{(x+y, x-y)\}$. Să observăm că această mulţime acoperă toate perechile de numere reale, adică $S_1 \oplus S_2 = R^2$.

Intuitiv, din punct de vedere geometric, acest exerciţiu ne spune că în plan S_1 şi S_2 sunt două drepte (prima şi a doua bisectoare), intersecţia lor se face evident în origine, iar suma dintre un vector de pe prima dreaptă cu un vector de pe a doua dreaptă ne dă un vector din plan; întreg planul putând fi acoperit de sume de vectori, unul de pe prima dreaptă şi celălalt de pe a doua dreaptă.

Exerciţii propuse. Verificaţi care din următoarele mulţimi sunt subspaţii în $(R^3,+,R)$:

a) $S_1 = \{(x_1,x_2,x_3)\ /x_3 = 0\}$

b) $S_2 = \{(x_1,x_2,x_3)\ /x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$

c) $S_3 = \{(x_1,x_2,x_3)\ /x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3\}$

d) $S_4 = \{(x_1,x_2,x_3)\ /x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$.

Răspuns: a) da, b) da; c) nu, d) nu.

1.3 Liniară independenţă, bază şi dimensiune

Fie $(V,+,.K)$ un spaţiu vectorial şi $M = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ o mulţime (sistem) de vectori.

Spunem că M este *liniar independentă* dacă oricare ar fi combinaţia liniară $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + .. + \alpha_n v_n = 0$ aceasta este posibil dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

În caz contrar spunem că ei sunt *liniar dependenţi.* Asta înseamnă că există cel puţin un $\alpha_k \neq 0$ şi totuşi suma să fie $= 0$. În acest caz putem scoate pe v_k din combinaţie funcţie de ceilalţi vectori. Deci, un sistem de vectori este liniar dependent dacă şi numai dacă unul din vectori este o combinaţie liniară de ceilalţi.

Mai general, o mulţime infinită de vectori din V este liniar independentă dacă orice parte finită din ea este liniar independentă.

-dacă $M_1 \subset M_2$ şi M_1 este liniar dependentă atunci M_2 este liniar dependentă,

-dacă $M_1 \subset M_2$ şi M_2 este liniar independentă atunci M_1 este liniar independentă.

Definiţie. Un sistem de vectori $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$ se spune că formează *bază* în V dacă:

1. B este liniar independent;
2. Orice vector $x \in V$ este o combinaţie liniară de elementele lui B,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + .. + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{1.3.1}$$

Definiţia se poate extinde la sisteme infinite de vectori, a doua condiţie ne spune că subspaţiul generat de B coincide cu V, adică $[B] = V$.

Scalarii $x_1, x_2, ..x_n$ din descompunerea lui x se numesc *componentele* vectorului x în baza B.

Observaţie. În cele ce urmează, din motive geometrice pe care o să le vedem mai încolo, indicii componentelor unui vector se vor pune sus, fară a înţelege cumva că aceştia sunt puteri. Deci $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + .. + x^n e_n = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$. În multe manuale universitare în scrierea aceasta se omite semnul de sumă, adică $x = x^i e_i$, aceasta fiind o convenţie datorată lui A. Einstein. Noi în cursul de faţă, pentru a nu crea dificultăţi de înţelegere vom menţine acest semn de sumare.

Propoziţia 1. Descompunerea (1.3.1) a unui vector într-o bază este unică.

Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ sunt două baze în V atunci $n = m$.

Prima afirmaţie se demonstrează imediat, dacă $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) e_i = 0$ şi din liniara independenţă rezultă $x^i = y^i$. A doua afirmaţie nu este chiar imediată, dar ea ne spune că numărul vectorilor oricărei baze din V este acelaşi şi se numeşte *dimensiunea* spaţiului, scriem $\dim V = n$.

Este posibil ca V să fie generat de un sistem infinit de vectori şi atunci spunem că $\dim V = \infty$. Ca exemplu putem lua cazul spaţiului tuturor polinoamelor în nedeterminata x, peste corpul real sau complex. Un sistem de generatori este $\{1, x, x^2, ...x^n, ...\}$, deci infinit. Prin definiţie $\dim\{0\} = 0$.

Propoziţia 2. (Grassmann) Dacă S_1 şi S_2 sunt două subspaţii în V, $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$ atunci $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1+S_2) + \dim(S_1 \cap S_2)$.

De observat că dimensiunea unui subspaţiu este $\leq$ decât dimensiunea spaţiului.

Aplicaţie: Care din următoarele sisteme de vectori sunt liniar independente, şi care formează bază în R^3 ?

a) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 2), v_3 = (1, 4, 4)$

b) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$

c) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $v_4 = (1, 2, 3)$

d) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 2), v_3 = (1, 1, 1)$

Soluţie: a) verificăm liniara independenţă, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ implică, $\alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(-1, 0, 2) + \alpha_3(1, 4, 4) = (0, 0, 0)$, adică

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$, sistem liniar omogen cu determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ şi rangul este doi, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, $\alpha_3 = \lambda$ necunoscută secundară. Rezolvăm şi găsim $\alpha_1 = -2\lambda$, $\alpha_2 = -\lambda$. Deci sistemul are o infinitate de soluţii, adică vectorii sunt liniar dependenţi, $v_3 = 2v_1 + v_2$. Bază nu formează.

b) Se obţine sistemul $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$ care are doar soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; vectorii sunt liniar independenţi. Matricea sistemului are rangul 2. Pentru a forma bază luăm un vector $x = (a, b, c)$ arbitrar şi încercăm să îl scriem $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Obţinem un sistem ca mai sus dar în loc de 0 avem pe coloana termenilor liberi a, b, c, deci neomogen cu rangul 2 şi $\Delta_{car} \neq 0$ în general. Adică sistemul este incompatibil în general. Deci nu formează bază. De observat că la fiecare sistem coloanele sunt tocmai vectorii daţi. Astfel matricea se poate scrie cu uşurinţă întodeauna.

c) vectorii sunt liniar dependenţi , $v_4 = v_1 + 2v_2 + 3v_3$, nu formează bază.

d) Sistemul este $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ liniar omogen cu $\Delta \neq 0$, deci avem doar soluţia nulă. Vectorii sunt liniar independenţi. Luăm un vector $x = (a, b, c)$ arbitrar şi încercăm să îl scriem $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

Obţinem un sistem ca mai sus dar în loc de 0 avem pe coloana din dreapta a, b, c; sistem neomogen cu rangul 3 adică Cramer, cu soluţie unică pentru (a, b, c) daţi. Formează bază.

Orice trei vectori liniar independenţi în R^3 vor forma o bază. Ea nu este unică. Spre exemplu $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ este bază numită *canonică* şi orice $x = (a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3$.

În general în R^n baza canonică este

$B = \{e_1 = (1, 0, .., 0), e_2 = (0, 1, .., 0), ..., e_n = (0, 0, .., 1)\}$ şi orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + .. + x_ne_n$. Deci este baza cea mai simplă.

1.3.1 Schimbarea bazei

Am văzut că într-un spaţiu pot exista mai multe baze. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ două baze în V şi $x = x^1e_1 + x^2e_2 + .. + x^ne_n = \sum x^ie_i$. Ne interesează cum se scrie acelaşi x dar în baza B', adică cine ar fi $x = x'^1e'_1 + x'^2e'_2 + .. + x'^ne'_n = \sum x'^ie'_i$?.

Pentru a da un răspuns la problemă ar trebui să ştim cum se leagă B de B'. Descompunem fiecare vector din B' după cei din B,

$$e'_j = s^1_je_1 + s^2_je_2 + ... + s^n_je_n = \sum_{i=1}^{n} s^i_je_i \tag{1.3.2}$$

pentru fiecare $j = 1, 2.., n$.

Înlocuind mai sus rezultă $x = \sum x'^ie'_i = \sum(\sum s^i_jx'^j)e_i$. Cum scrierea într-o bază este unică, rezultă

$$x^i = \sum_{i=1}^{n} s^i_jx'^j \tag{1.3.3}$$

Dar nouă ne trebuie scrierea inversă, x'^j funcţie de x^i. Pentru aceasta scriem matricial sistemul de deasupra astfel, fie:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ : \\ x^n \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s^1_1 & s^1_2 & .. & s^1_n \\ s^2_1 & s^2_2 & .. & s^2_n \\ . & . & .. & . \\ s^n_1 & s^n_2 & .. & s^n_n \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ : \\ x'^n \end{pmatrix}$$

Notăm că în matricea S indicii de sus sunt de linie iar cei de jos sunt de coloană.

Sistemul (1.3.3) se scrie $X = S.X'$, sau prin inversare $X' = S^{-1}.X$.

Se demonstrează că matricea S, numită *matricea schimbării de baze*, este inversabilă întotdeauna. Notăm $B \xrightarrow{S} B'$.

Aplicaţie: În R^3 se consideră sistemele de vectori

$$\begin{aligned} B &= \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (1,0,0), e_3 = (1,2,3)\} \\ B' &= \{e'_1 = (1,3,3), e'_2 = (2,2,3), e'_3 = (6,7,9)\} \end{aligned}$$

a) Arătaţi că B şi B' sunt baze şi găsiţi matricea S a schimbării bazelor.

b) Găsiţi expresia vectorului $x = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$ în baza B'.

Soluţie. Determinantul cu componentele lui B pe coloane este $\neq 0$ şi cum sunt 3 vectori din R^3, B formează bază. Analog B'. Pentru a găsi S descompunem e'_j după B':

$$e'_1 = s_1^1 e_1 + s_1^2 e_2 + s_1^3 e_3 \Longrightarrow \begin{cases} s_1^1 + s_1^2 + s_1^3 = 1 \\ s_1^1 + 2s_1^3 = 3 \\ 3s_1^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_1^1 = 1 \\ s_1^2 = -1 \\ s_1^3 = 1 \end{cases}$$

Analog $e'_2 = s_2^1 e_1 + s_2^2 e_2 + s_2^3 e_3 \Longrightarrow s_2^1 = 0,\ s_2^2 = 1,\ s_2^3 = 1$ şi

$e'_3 = s_3^1 e_1 + s_3^2 e_2 + s_3^3 e_3 \Longrightarrow s_3^1 = 1,\ s_3^2 = 2,\ s_3^3 = 3.$

Astfel că

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad cu\ S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

X este matricea coloană de elemente $(2,5,7)$, astfel că

$$X' = S^{-1}.X = \begin{pmatrix} -1 & \text{-1} & 1 \\ -5 & \text{-2} & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

adică $x = 0e'_1 + 1e'_2 + 2e'_3$, scrierea lui x în baza B'.

Exerciţii propuse:

1. Găsiţi dimensiunea subspaţiului generat de vectorii din R^3

a) $S_1 = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,3), v_3 = (1,1,0)\}$

b) $S_2 = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,3,0), v_3 = (1,1,3)\}$

Calculaţi dimensiunile subspaţiilor intersecţie şi sumă ale lor.

2. Găsiţi expresia vectorului $x = (0, 4, 2)$ în baza
$B = \{e_1 = (1, 2, 3), e_2 = (2, 3, 1), e_3 = (3, 1, 2)\}$.

3. Arătaţi că

$$\begin{aligned} B' &= \{e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (1,0,1), e'_3 = (0,1,1)\} \\ B'' &= \{e''_1 = (0,1,-1), e''_2 = (1,0,-1), e''_3 = (1,-1,0)\} \end{aligned}$$

sunt baze şi găsiţi matricea S a schimbării bazelor şi expresia vectorului $x = (1, 1, 1)$ în bazele B' şi B''.

4. Să se determine dimensiunea sumei şi a intersecţiei subspaţiilor generate de vectorii
$U = \{u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (3, 4, -2), u_3 = (2, 2, -1)\}$ şi
$V = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 2, 0)\}$.

5. Găsiţi dimensiunea subspaţiului din R^3 a soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

1.3.2 Lema substituţiei

Există o metodă algoritmică (de aplicat şi pe calculator) pentru a găsi expresia unui vector într-o bază, matricea schimbării de baze şi alte aplicaţii. Este vorba de lema substituţiei. Pe scurt ea constă în:

Să presupunem că $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ două baze şi $B \xrightarrow{S} B'$ matricea de trecere, $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ un vector scris în baza B. Întocmim un tabel de forma

	e'_1 e'_2 $...e'_j$ .. e'_n	x
e_1	s^1_1 s^1_2 $..s^1_j$ .. s^1_n	x_1
e_2	s^2_1 s^2_2 $..s^2_j$ .. s^2_n	x_2
.	. . ..	.
e_i	s^i_1 s^i_2 $..\mathbf{s}^i_j$ .. s^i_n	x_i
.	. . ..	.
e_n	s^n_1 s^n_2 $..s^n_j$ .. s^n_n	x_n

Dacă dorim să scoatem din baza B doar vectorul e_i şi să-l înlocuim cu vectorul e'_j atunci trebuie să ne asigurăm că $s^i_j \neq 0$, şi putem face următorul calcul

$e'_j = s^1_j e_1 + ... + s^i_j e_i + ... + s^n_j e_n$. Scoatem de aici pe $e_i = \frac{1}{s^i_j}(e'_j$ -$s^1_j e_1 - ... - s^{i-1}_j e_{i-1} - s^{i+1}_j e_{i+1} - ... - s^n_j e_n)$. Înlocuind pe e_i în fiecare e'_k şi grupând după $e_1,.., e_{i-1}, e'_j, e_{i+1}, ..., e_n$, obţinem următorul tabel:

	e'_1 e'_2 $...e'_j$ .. e'_n	x
e_1	s^{*1}_1 s^{*1}_2 ..0 .. s^{*1}_n	x^*_1
e_2	s^{*2}_1 s^{*2}_2 ..0 .. s^{*2}_n	x^*_2
.	. . ..	.
e'_j	s^{*i}_1 s^{*i}_2 ..**1** .. s^{*i}_n	x^*_i
.	. . ..	.
e_n	s^{*n}_1 s^{*n}_2 ..0 .. s^{*n}_n	x^*_n

unde $s^{*i}_k = \dfrac{s^i_k}{s^i_j}$ iar $s^{*i}_k = \dfrac{1}{s^i_j}(s^i_j s^h_k - s^i_k s^h_j)$ pentru $h \neq i$, adică o regulă a dreptunghiului. Analog, $x^*_i = \dfrac{x_i}{s^i_j}$ iar $x^*_h = \dfrac{1}{s^i_j}(s^i_j x_h - x_i s^h_j)$ pentru $h \neq i$.

Eliminând pe rând toate elementele bazei B, pentru fiecare j înlocuindu-le cu cele ale bazei B', după n paşi se obţine x în baza B'.

Exemplificăm prin câteva exerciţii acest lucru.

Aplicaţie: 1. Găsiţi cu lema substituţiei expresia vectorului $x = (0, 4, 2)$, în baza $B' = \{e'_1 = (1, 2, 3), e'_2 = (2, 3, 1), e'_3 = (3, 1, 2)\}$.

Considerăm $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ baza canonică şi întocmim tabelul

	e'_1	e'_2	e'_3	x
e_1	1	2	3	0
e_2	2	3	1	4
e_3	3	1	2	2

Scoatem din bază pe e_1 şi îl înlocuim cu e'_1. Tabelul devine

	e'_1	e'_2	e'_3	x
e'_1	1	2	3	0
e_2	0	-1	-5	4
e_3	0	-5	-7	2

Scoatem din bază pe e_2 şi îl înlocuim cu e_2'. Tabelul devine

	e_1'	e_2'	e_3'	x
e_1'	1	0	-7	8
e_2'	0	1	5	-4
e_3	0	0	18	-18

Scoatem din bază pe e_3 şi îl înlocuim cu e_3'. Tabelul devine

	e_1'	e_2'	e_3'	x
e_1'	1	0	0	1
e_2'	0	1	0	1
e_3'	0	0	1	-1

Deci de pe ultima coloană citim $x = 1e_1' + 1e_2' - 1e_3' = e_1' + e_2' - e_3'$.

2. Găsiţi matricea de trecere de la baza

$B' = \{e_1' = (1,1,0), e_2' = (1,0,0), e_3' = (1,2,3)\}$ la baza

$B'' = \{e_1'' = (1,3,3), e_2'' = (2,2,3), e_3'' = (6,7,9)\}$ şi expresia vectorului $x = (14,16,21)$ în cele două baze.

Considerăm B baza canonică şi întocmim un tabel dublu

	e_1'	e_2'	e_3'	e_1''	e_2''	e_3''	x
e_1	1	1	1	1	2	6	14
e_2	1	0	2	3	2	7	16
e_3	0	0	3	3	3	9	21

Scoatem pe rând e_1, e_2, e_3 şi le înlocuim cu e_1', e_2', e_3' ,

	e_1'	e_2'	e_3'	e_1''	e_2''	e_3''	x
e_1'	1	1	1	1	2	6	14
e_2	0	-1	1	2	0	1	2
e_3	0	0	3	3	3	9	21

	e_1'	e_2'	e_3'	e_1''	e_2''	e_3''	x
e_1'	1	0	2	3	2	7	16
e_2'	0	1	-1	-2	0	-1	-2
e_3	0	0	3	3	3	9	21

	e_1'	e_2'	e_3'	e_1''	e_2''	e_3''	x
e_1'	1	0	0	1	0	1	2
e_2'	0	1	0	-1	1	2	5
e_3'	0	0	1	1	1	3	7

Observăm că matricea de trecere de la B' la B'' este $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi expresia lui x în B' este $x = 2e'_1 + 5e'_2 + 7e'_3$. Pentru a găsi expresia lui x în B'' scoatem pe rând e'_1, e'_2, e'_3 şi le înlocuim cu e''_1, e''_2, e''_3.

	e'_1	e'_2	e'_3	e''_1	e''_2	e''_3	x
e''_1	1	0	0	1	0	1	2
e'_2	1	1	0	0	1	3	7
e'_3	-1	0	1	0	1	2	5
e''_1	1	0	0	1	0	1	2
e''_2	1	1	0	0	1	3	7
e'_3	-2	-1	1	0	0	-1	-2
e''_1	-1	-1	1	1	0	0	0
e''_2	-5	-2	3	0	1	0	1
e''_3	2	1	-1	0	0	1	2

Astfel că $x = 0e''_1+1e''_2+2e''_3$ şi în plus citim că $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \text{-1} & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, deci iată o metodă de a găsi inversa unei matrice pe această cale. De observat că am folosit aceleaşi date ca în aplicaţia de la schimbări de baze, rezultatele fiind aceleaşi.

*Exerciţii.*1. Găsiţi expresia vectorului $x = (3, 3, 4)$ în baza $B' = \{e'_1 = (1, 2, 3), e'_2 = (1, 1, 1), e'_3 = (1, -1, 0)\}$

2. Se dau $B' = \{e'_1 = (1, 2, 0), e'_2 = (2, 3, 0), e'_3 = (1, 1, 1)\}$ şi $B'' = \{e''_1 = (0, 1, 1), e''_2 = (3, 5, 0), e''_3 = (1, 1, 1)\}$. Arătaţi că sunt baze, găsiţi matricea de trecere şi expresia vectorului $x = (1, , 2, 1)$ în cele două baze.

3. Găsiţi inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ cu lema substituţiei.

1.3.3 Complexificarea unui spaţiu vectorial real

Fie $(V, +, .R)$ un spaţiu vectorial real şi $V \times V = \{(x, y)/\ x, y \in V\}$ produsul cartezian al său pe care definim operaţiile:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ şi pentru $z = \alpha + i\beta \in C$,

$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$.

Se verifică uşor că $V \times V$ capătă o structură de spaţiu vectorial complex faţă de aceste operaţii, numit *complexificatul* spaţiului real V şi notat cu V^C.

Fie $V' = \{(x, 0)/\ x \in V\}$ şi $V' = \{(0, y)/\ y \in V\}$. Observăm că $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ şi că $V' \cap V'' = \{0\}$. Deci $V^C = V' \oplus V''$.

Deasemenea, $(0, y) = i(y, 0)$, adică $V'' = iV'$, astfel că $V^C = V' \oplus iV'$, adică $V^C = \{x + iy/\ x, y \in V\}$.

Putem spune astfel că $V \subset V^C$. Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază în V atunci se verifică cu uşurinţă că ea rămâne bază în V^C, aici scalarii fiind numere complexe. Deci $\dim V^C = n$. Operaţia astfel definită se mai numeşte complexificarea spaţiului real V.

Exemplu: complexificatul lui R^n este $(R^n)^C = \{(x_1, ..., x_n) + i(y_1, ..., y_n)\}$, o bază fiind baza canonică din R^n. În particular complexificatul spaţiului real $(R)^C$ este corpul numerelor complexe privit ca spaţiu vectorial complex.

Există şi operaţia inversă de decomplexificare a unui spaţiu vectorial complex V prin înlocuirea scalarilor complecsi cu scalari reali

$(\alpha, x) \in R \times V \to \alpha x = (\alpha + i0)x$.

Spaţiul real obţinut se notează cu V^R şi se numeşte *decomplexificatul* lui V.

Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază în V ca spaţiu complex, atunci $\{e_1, ie_1, ..., e_n, ie_n\}$ se verifică că este o bază în V^R, astfel că $\dim V^r = 2n$.

1.4 Spaţii euclidiene

Am văzut că un exemplu important de spaţiu vectorial cu care am lucrat mai mult este R^n. Un element al său poate fi privit şi drept coordonate ale unui punct în raport cu un reper din geometria analitică cunoscută din liceu. În acelaşi timp el este un vector. Noţiunea aceasta de reper este geometrică şi se referă la un sistem de vectori ce formează o bază a spaţiului, fixaţi într-un punct. În geometrie această noţiune capătă semnificaţie dacă putem măsura distanţele şi unghiurile, noţiuni introduse axiomatic la cursul de Geometrie sintetică. Definirea intuitivă a noţiunii de perpendicularitate, distanţe şi unghiuri are un corespondent algebric în noţiunea de produs scalar.

Definiţie. Fie $(V+, .R)$ un spaţiu vectorial real.

Numim *produs scalar* pe V o aplicaţie notată $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to R$ cu proprietăţile:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
3. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ şi $\langle x, x\rangle = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.

Noţiunea pare abstractă dar imediat ne lămurim ce semnificaţie geometrică are.

Perechea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ se numeşte *spaţiu euclidian.*

Mai general, dacă $(V+, .C)$ un spaţiu vectorial complex, iar axioma 1. o înlocuim cu $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, adică cu conjugatul respectiv, iar axiomele 2., 3., 4., le menţinem la fel, atunci spaţiul $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ se numeşte *spaţiu unitar.* Deşi diferenţa pare minoră lucrurile sunt mult schimbate, spre exemplu $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ şi de aici o seamă de complicaţii. În continuare ne vom referi numai la spaţii euclidiene, cu menţiunea că o parte din afirmaţiile de mai jos se menţin şi în spaţii unitare.

Definim *norma* (sau lungimea unui vector) ca fiind $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Din 4. observăm că are sens această noţiune.

Propoziţia 1. Are loc următoarea inegalitate a lui Cauchy

$$| \langle x, y\rangle | \leq \| x \| \| y \| \tag{1.4.1}$$

Demonstraţia e simplă şi o facem aici. Considerăm vectorul $x + \lambda y$. Evident $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$ oricare ar fi $\lambda \in R$. Dar aceasta se mai scrie, $\lambda^2\langle y, y\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall\lambda \in R$. Un polinom de grad 2 în λ este peste tot pozitiv dacă şi numai dacă $\Delta = 4(\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle) \leq 0$, adică $\langle x, y\rangle^2 \leq \| x \|^2 \| y \|^2$. Din aceasta rezultă inegalitatea lui Cauchy.

Propoziţia 2. Avem:

1. $\| x \| \geq 0$ şi $= 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$
2. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Ultima afirmaţie se demonstrează pe seama inegalitatii lui Cauchy,

$\| x + y \|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2 \mid \langle x, y\rangle \mid$ $+\langle y, y\rangle \leq$

$\| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$.

Un spaţiu pe care s-a definit o aplicaţie cu proprietăţile din Propoziţia 2 se numeşte *spaţiu normat*. Norma aici provine dintr-un produs scalar, dar nu este obligatoriu acest lucru.

Numim distanţa de la x la y mărimea $d(x,y) = \| x - y \|$.

Propoziţia 3. Avem

1. $d(x,y) \geq 0$ şi $= 0$ dacă şi numai dacă $x = y$

2. $d(x,y) = d(y,x)$

3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Demonstraţiile sunt imediate, pentru 3. ţinem seama că

$d(x,z) = \| x - z \| = \| (x-y) + (y-z) \| \leq \| x - y \| + \| y - z \| = d(x,y) + d(y,z)$.

1.4.1 Ortogonalitate într-un spaţiu euclidian

Fie $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un spaţiu euclidian.

Definim *unghiul* a doi vectori ca fiind $\alpha \in [0,\pi]$ din relaţia

$$\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\| x \| \| y \|}.$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ atunci vectorii se zic *perpendiculari* şi aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă $\langle x,y\rangle = 0$.

Două mulţimi se spune că sunt *ortogonale* (perpendiculare) dacă orice vector din prima este perpendicular pe orice vector din a doua. În particular putem discuta de subspaţii ortogonale, $S_1 \perp S_2$.

Dacă $\dim V = n$ şi S este un subspaţiu în V, $\dim S = k$, atunci se arată că există un subspaţiu ortogonal lui S notat $S^\perp$, $\dim S^\perp = n - k$, astfel ca $V = S \oplus S^\perp$.

Vectorii unei mulţimi din V se numesc *ortogonali* dacă oricare doi sunt perpendiculari. Dacă în plus ei sunt şi de lungime unitate atunci mulţimea se numeşte *ortonormată*. În particular discutăm de bază ortonormată în care vectorii sunt 2 câte 2 perpendiculari şi de lungime unitate.

Să notăm că o bază $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este ortonormată dacă

$\langle e_i, e_j\rangle = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \textit{dacă} & i = j \\ 0 & \textit{dacă} & i \neq j \end{array} \right. = \delta_{ij}$, numit simbolul lui Kroneker.

Exemple: 1. În $(R^n, +, R)$, dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

atunci un produs scalar convenabil este:

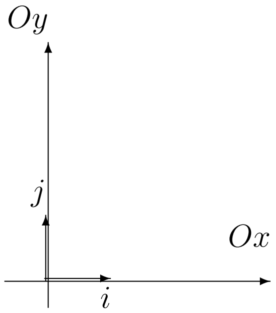
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{1.4.2}$$

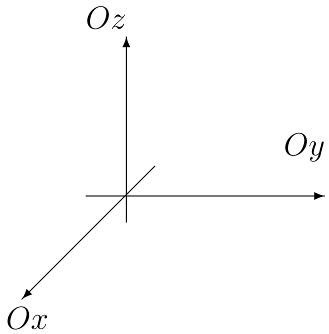
numit şi *produsul scalar uzual.* Avem

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \;\; ; \;\; d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

În R^n o bază ortonormată este chiar baza canonică, $B = \{e_1 = (1, 0, .., 0), e_2 = (0, 1, .., 0), ..., e_n = (0, 0, .., 1)\}$. Ea este ortonormată, deoarece spre exemplu $\langle e_1, e_2 \rangle = 1.0+0.1+0.0+...0.0 = 0$, deci e_1 şi e_2 sunt perpendiculari, analog ceilalţi. Iar $\| e_1 \| = \sqrt{1^2 + 0^2 + ... + 0^2} = 1$, analog ceilalţi.

În R^2 vectorii $e_1 = (1, 0) = i, e_2 = (0, 1) = j$ fixaţi într-un punct O formează un reper ortonormat şi se reprezintă ca mai jos. Analog în spaţiu, $e_1 = (1, 0, 0) = i$, $e_2 = (0, 1, 0) = j$, $e_3 = (0, 0, 1) = k$.





Pe R^n produsul scalar uzual nu este singurul produs scalar dar este cel ce intuitiv ne dă imaginea geometrică cunoscută. Noi vom folosi în mod curent produsul scalar uzual pe R^n.

În spaţiul funcţiilor continue pe $[a, b]$ un produs scalar des folosit este $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Pe $(C^n, +, C)$ un produs scalar (hermitian) este $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + ... + x_n \bar{y}_n$, astfel că $(C^n, \langle , \rangle)$ devine spaţiu unitar.

Propoziţia 1. Fie $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un spaţiu euclidian, $\dim V = n$. Atunci:

a) Orice sistem ortogonal de vectori nenuli din V este liniar independent.

b) Orice sistem de n vectori ortonormaţi din V formează o bază ortonormată.

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_p\} \subset V$ ortogonali şi $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p = 0$ o combinaţie liniară nulă. Făcând produsul scalar al acestui vector nul cu v_1 obţinem,

$\alpha_1 \langle v_1, v_1\rangle + \alpha_2 \langle v_1, v_2\rangle + ... + \alpha_p \langle v_1, v_p\rangle = 0$. Dar $\langle v_1, v_2\rangle = ... = \langle v_1, v_p\rangle = 0$ deoarece vectorii erau consideraţi ortogonali, iar $\langle v_1, v_1\rangle \neq 0$, astfel că $\alpha_1 = 0$. Analog făcând produsul scalar cu $v_2, .., v_p$ obţinem pe rând că $\alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$. Deci vectorii sunt liniar independenţi. Punctul b) este o consecinţă a lui a).

Propoziţia 2. Fie $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un spaţiu euclidian, $\dim V = n$. În orice bază ortonormată expresia produsului scalar a doi vectori coincide cu produsul lor scalar uzual.

Demonstraţie. Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ şi $y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j$ scrişi în baza ortonormată $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Atunci $< x, y >= \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j < e_i, e_j >= \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, adică tocmai expresia prescurtată a produsului scalar uzual.

Propoziţia 3. Fie $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un spaţiu euclidian, $\dim V = n$, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bază ortonormată şi $v \in V$. Atunci $v = \sum_{i=1}^{n} < v, e_i > e_i$.

Demonstraţie. Fie $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$. Să observăm că $< v, e_j >= \sum_{i=1}^{n} v^i < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n} v^i \delta_{ij} = v_j$. Înlocuind în scrierea iniţială a lui v obţinem răspunsul cerut.

Propoziţia 4. Fie $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un spaţiu euclidian, $\dim V = n$ şi $S \prec V$ un subspaţiu, $\dim S = k$. Atunci există un unic subspaţiu $S^\perp \prec V$, numit complement ortogonal al lui S, astfel încât $V = S \oplus S^\perp$ şi $\dim S^\perp = n - k$.

Demonstraţie. Definim $S^\perp = \{v \in V\ /\ < v, u >= 0,\ \forall u \in S\}$. Verificăm cu uşurinţă că $S \prec V$.

Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bază ortonormată în V, din care $B_S = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ este bază în S (lucru posibil datorită teoremei completării de la spaţii vectoriale), şi $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ descompunerea sa după baza B. Să observăm că $v \in S^\perp$ dacă este ortogonal pe toţi vectorii lui S iar pentru aceasta e suficient să fie ortogonali pe fiecare vector din B_S, adică $< v, e_a >= 0,\ \forall a = 1, 2, ..k$. De aici rezultă că $v^a = 0, \forall a = 1, 2, ..k$, astfel că $v \in S^\perp$ dacă şi numai dacă este generat de vectorii $\{e_{k+1}, e_{k+2}, ..., e_n\}$, deci $\dim S^\perp = n - k$.

Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Fie $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un sistem liniar independent (nu neapărat bază) de vectori din spaţiul euclidian $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Se pune problema obţinerii din acest sistem a altuia $S' = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormat şi care să genereze acelaşi subspaţiu.

Soluţia este dată de Procedeul Gram-Schmidt, care inductiv construieşte acest sistem.

Întâi calculăm $e_1 = \dfrac{v_1}{\| v_1 \|}$.

Presupunem prin inducţie că am găsit $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$, ortonormaţi. Atunci pentru e_{k+1} căutăm într-o primă fază un vector f_{k+1} nu neapărat de lugime 1 dar care să fie perpendicular pe toţi $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$. Fie

$f_{k+1} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}$. Observăm că subspaţiul generat de $\{f_1, f_2, ..., f_{k+1}\}$ coincide cu cel generat de $\{v_1, v_2, ..., v_{k+1}\}$. Impunem condiţiile de ortogonalitate $f_{k+1} \perp e_1, f_{k+1} \perp e_2, ..., f_{k+1} \perp e_k$, şi obţinem

$\alpha_1 + \alpha_{k+1} < v_{k+1}, e_1 >= 0$ adică $\alpha_1 = -\alpha_{k+1} < v_{k+1}, e_1 >$

$\alpha_2 + \alpha_{k+1} < v_{k+1}, e_2 >= 0$ adică $\alpha_2 = -\alpha_{k+1} < v_{k+1}, e_2 >$

....

$\alpha_k + \alpha_{k+1} < v_{k+1}, e_k >= 0$ adică $\alpha_k = -\alpha_{k+1} < v_{k+1}, e_k >$.

Înlocuind pe aceştia în scrierea lui f_{k+1}, obţinem că

$f_{k+1} = \alpha_{k+1}\left(v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle v_{k+1}, e_i\rangle e_i\right)$. Cum lungimea lui f_{k+1} nu ne interesează la acest moment putem lua $\alpha_{k+1} = 1$ şi deci

$$e_{k+1} = \frac{f_{k+1}}{\| f_{k+1} \|} \text{ unde } f_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle v_{k+1}, e_i\rangle e_i. \tag{1.4.3}$$

pentru fiecare k până la n.

Aplicaţie: 1. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ sunt ortogonali, să se ortonormeze şi să se completeze la o bază ortonormată a spaţiului.

Soluţie. Calculăm $\langle v_1, v_2\rangle = 1.0 + 2.1 - 1.2 = 0$, deci v_1 şi v_2 sunt perpendiculari. Îi ortonormăm, $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ şi $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$. Pentru a-i completa la o bază ortonormată avem nevoie de încă un vector e_3 care să satisfacă: $\langle e_1, e_3\rangle = 0$, $\langle e_2, e_3\rangle = 0$, $\| e_3 \|= 1$. Luând $e_3 = (x, y, z)$ aceste condiţii se scriu: $x + 2y - z = 0$, $y + 2z = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sistemul admite următoarele două soluţii $e_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}(5, -2, 1)$.

2. Să se ortonormeze sistemul de vectori $S = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)\}$ în raport cu produsul scalar uzual.

Soluţie. $\| v_1 \|= \sqrt{3}$ şi deci $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Calculăm $f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,-2,1)$, din care rezultă $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

Calculăm $f_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-2,1) = \frac{1}{6}(-3,0,3) = \frac{1}{3}(-1,0,1)$, din care rezultă $e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.

Sistemul $S' = \{e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$ este ortonormat şi generează acelaşi subspaţiu ca şi S.

1.4.2 Proiecţia ortogonală

Fie $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un spaţiu euclidian (nu neapărat de dimensiune finită) şi $S \prec V$, $\dim S = k$.

Propoziţia 1. Fie $v \in V$ un vector fixat. Există un unic vector $w \in S$, numit *proiecţia* lui v pe subspaţiul S, astfel ca vectorul $w^\perp = v - w$ să fie ortogonal lui S. Notăm atunci $w = pr_S\, v$.

Demonstraţie. Fie $B_S = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ bază ortonormată în S (ea există comform procedeului G-S). Căutăm $w = \sum_{i=1}^k w^i e_i$ astfel ca $w^\perp = v - w$ să fie ortogonal lui S. Pentru aceasta este suficient să fie ortogonal vectorilor bazei, adică $< v - \sum_{i=1}^k w^i e_i, e_j >= 0, \forall j = 1,2,...,k$. Din faptul că baza este ortonormată rezultă că $< v, e_j >= \sum_{i=1}^k w^i < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^k w^i \delta_{ij} = w_j$. Astfel că

$$pr_S\, v = w = \sum_{i=1}^k < v, e_i > e_i \tag{1.4.4}$$

în baza ortonormată B_S. Subliniem că baza trebuie să fie ortonormată pentru a avea acestă expresie.

Consecinţă. Fie $S \prec V$, $\dim S = 1$, $B_S = \{e\}$ cu $\| e \| = 1$. Atunci $pr_S\, v = w =< v, e > e$.

Dacă e nu este unitar atunci $pr_S\, v = w = \frac{1}{\|e\|^2} < v, e > e$.

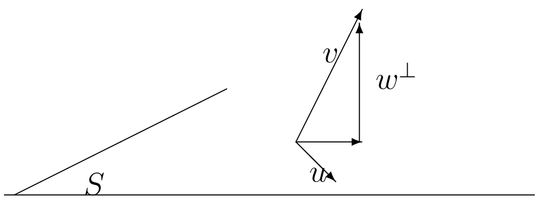
Teorema Pitagora. În notaţiile din Propoziţia de mai sus avem

$\| v \|^2 = \| w \|^2 + \| w^\perp \|^2$.

Demonstraţie. Avem, $\| v \|^2 =< w + w^\perp, w + w^\perp >=< w, w > +2 < w, w^\perp > + < w^\perp, w^\perp >= \| w \|^2 + \| w^\perp \|^2$, deoarece $< w, w^\perp >= 0$.

Propoziţia 2. Fie $v \in V$, $w = pr_S v$ si $w^\perp = v - w$. Dintre toţi vectorii de forma $v - u$ cu $u \in S$, vectorul $w^\perp$ are norma cea mai mică.

Demonstraţie. Vectorul $v - u = (v - w) + (w - u) = w^{\perp} + (w - u)$. Dar $w - u \in S$ deoarece ambii sunt din S. Deducem că $pr_S(v - u) = w - u$ şi aplicăm Th. Pitagora obţinem $\| v - u \|^2 = \| w^{\perp} \|^2 + \| w - u \|^2$, adică $\| v - u \| \geq \| w^{\perp} \|$. Intuitiv avem desenul de mai jos.



Exerciţii propuse.

1. Să se ortonormeze sistemul $\{v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 2)\}$ şi să se completeze la o bază ortonormată a spaţiului.

2. Să se ortonormeze cu Gram-Schmidt $\{v_1 = (-1, 1, 1), v_2 = (1, 2, -1), v_3 = (1, 2, 3)\}$

3. Să se găsească un complement ortogonal subspaţiului

a) $S = \{(x_1, x_2, x_3)/x_3 = 0\}$. b) $S = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = x_2 = x_3\}$.

4. Să se determine proiecţia vectorului $v = (1, 1, 1)$ pe subspaţiul generat de vectorii

a) $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, -1, 0)\}$ b) $S_2 = \{\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = x_2 = x_3\}$

O aplicatie importantă privind spaţiile euclidiene se referă la metoda celor mai mici pătrate, dar aceasta implică şi cunoştinţe de analiză matematică.

Capitolul 2

Spaţii afine

În capitolele anterioare am studiat vectorii din punct de vedere algebric, eventual luând în discuţie probleme geometrice privind lungimile (norma) lor, unghiuri, perpendicularitate, etc.

Fiecare din noi ştim că geometria se ocupă cu puncte, drepte, plane, figuri geometrice, curbe, suprafeţe ş.a. De o parte din aceste probleme ne vom ocupa în capitolul de faţă, asociind bijectiv componentelor unui vector într-o bază coordonatele unui punct. Această corespondenţă face trecerea de la noţiunile algebrice studiate anterior la geometrie şi este fundamentul geometriei analitice. În particular vom studia în acest capitol un spaţiu vectorial care constituie tocmai modelul pentru structura geometrică pe care o analizăm, este vorba despre spaţiul vectorilor liberi geometrici.

2.1 Spaţiu afin. Definiţie, exemple

Fie $(V, +, K)$ un spaţiu vectorial şi $\mathcal{M}$ o mulţime oarecare. Vectorii lui V o să îi notăm de data aceasta cu $\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}, ...$(fără a le da deocamdată altă semnificaţie decât în capitolele anterioare), iar elementele lui $\mathcal{M}$ cu $A, B, C, ...$, şi le vom numi puncte.

Definiţie. Numim *spaţiu afin,* ataşat spaţiului vectorial V, tripletul $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \varphi, V)$, unde $\varphi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to V$ este o aplicaţie ce satisface axiomele:

A1. Fiecărui $A \in \mathcal{M}$ şi $\vec{v} \in V$ îi ataşăm în mod unic punctul $B \in \mathcal{M}$ astfel încât $\varphi(A, B) = \vec{v}$.

A2. Pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}$, avem $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ (axioma adunării).

Mulţimea $\mathcal{M}$ se numeşte mulţime suport, iar V se numeşte spaţiul director al spaţiului afin. Perechea (A, B) se mai numeşte segment orientat sau bipunct. După cum $K = R$ sau C spaţiul afin $\mathcal{A}$ se numeşte real sau complex. Dimensiunea lui V defineşte dimensiunea lui $\mathcal{A}$, şi notăm $\dim \mathcal{A} = n$ dacă $\dim V = n$

Consecinţe:

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}$ şi $\alpha \in K$, există un singur punct $B' \in \mathcal{M}$ astfel încât $\varphi(A, B') = \alpha\varphi(A, B)$, (axioma amplificării cu scalari).

2. Dacă $B \equiv A$, din A2. rezultă că $\varphi(A, A) = \vec{0} \in V$.

3. Dacă $A \equiv C$, din A2. rezultă că $\varphi(B, A) = -\varphi(A, B)$.

4. Fixând un punct $O \in \mathcal{M}$, aplicaţia $\varphi_O : \mathcal{M} \to V$, $\varphi_O(A) = \varphi(O, A)$, defineşte o bijecţie.

Definiţie. Tripletul $\mathcal{A}_O = (\mathcal{M}, \varphi_O, V)$ se numeşte *spaţiul punctual afin* legat punctului O. $\mathcal{A}_O$ se poate identifica atât cu $\mathcal{M}$ ca mulţime, cât şi cu V ca spaţiu vectorial prin aplicaţia φ_O. Vectorul $\varphi(O, A)$ se numeşte *vectorul de poziţie* al lui A şi se mai notează cu $\overrightarrow{OA}$. Elementele lui $\mathcal{A}_O$, ca vectori privite, se numesc *vectori legaţi* în O.

Dacă V are o structură de spaţiu euclidian cu produsul scalar notat pentru cele ce urmează cu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, atunci acesta induce în spaţiul punctual afin $\mathcal{A}_O$ produsul scalar notat $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

5. Pe mulţimea bipunctelor unui spaţiu afin $\mathcal{A}$ introducem o relaţie prin:

$$(A, B) \sim (C, D) \ \Leftrightarrow \varphi(A, B) = \varphi(C, D). \qquad (2.1.1)$$

Se verifică cu uşurinţă că relaţia este de echivalenţă (numită echipolenţă) şi descompune pe $\mathcal{M} \times \mathcal{M}/\sim$ în clase de echivalenţă.

Definiţie. Clasa lui (A, B) o notăm cu $\overrightarrow{AB}$ şi o numim *vector liber* .

Mulţimea vectorilor liberi (spaţiul cât) este în corespondenţă bijectivă cu V, prin aplicaţia $\vec{v} \in V \to \overrightarrow{AB} = \{(A, B) \ / \ \varphi(A, B) = \vec{v}\}$.

În baza acestei bijecţii putem extinde φ de la mulţimea bipunctelor la mulţimea vectorilor liberi, iar axiomele A1. şi A2. nu vor depinde de reprezentanţi şi se scriu:

A'1. $\forall A \in \mathcal{M}$ şi $\vec{v} \in V$, există un singur punct $B \in \mathcal{M}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

A'2. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}$ avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2.1.1 Exemple de spaţii afine

1. Orice *varietate liniară* $L = v_0 + S_L$, cu $v_0 \in V$ şi S_L subspaţiu într-un spaţiu vectorial $(V, +, K)$, are structură de spaţiu afin.

Într-adevăr, considerăm $\mathcal{M} = L$ şi $A = v_0 + v_1, B = v_0 + v_2 \in \mathcal{M}$, cu $v_1, v_2 \in S_L$.

Definim aplicaţia $\varphi : (A, B) \to B - A = (v_0 + v_2) - (v_0 + v_1) = v_2 - v_1 \in S_L$.

Obţinem că $\mathcal{A} = (L, \varphi, S_L)$ verifică axiomele de spaţiu afin.

În particular, orice subspaţiu vectorial (deci chiar întreg spaţiu V) are structură de spaţiu afin.

Următoarele exemple pot fi considerate cazuri particulare de varietăţi liniare afine.

2. *Spaţiul afin standard.* Am văzut că spaţiul $(K^n, +, K)$ este un spaţiu vectorial, numit şi aritmetic, K fiind un corp. Deci el are o structură de spaţiu afin $\mathcal{A} = (K^n, \varphi, K^n)$. Pentru $A = (a^1, ..., a^n)$ şi $B = (b^1, ..., b^n)$ definim $\varphi(A, B) = B - A = (b^1 - a^1, ..., b^n - a^n) \in K^n$.

Dacă $O = (0, 0, ..., 0)$ şi $A = (a^1, a^2 ..., a^n)$ atunci vectorul de poziţie al punctului A este $\overrightarrow{OA} = (a^1, a^2 ..., a^n)$. Putem considera relaţia de echivalenţă de mai înainte $(A, B) \sim (C, D)$ dacă $b^i - a^i = d^i - c^i$, pentru orice $i = 1, 2.., n$. Obţinem vectorul liber $\overrightarrow{AB}$ ca fiind clasa de echivalenţă a lui (A, B).

Să observăm că vectorii $\overrightarrow{OO}, \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, ..,$ definesc aceeaşi clasă, numită vectorul nul şi notat cu $\vec{0}$.

Pentru $n = 1, 2, 3$ şi $K = R$ recunoaştem aici cunoştinţe de geometrie analitică din liceu, pe dreaptă, în plan, în spaţiu.

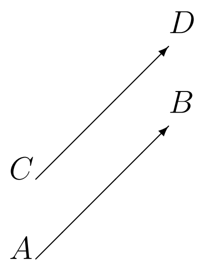
Până a clarifica lucrurile mai avem de introdus un exemplu şi apoi această generalizare pentru un n natural oarecare.

3. *Spaţiul afin al vectorilor geometrici.* Acest exemplu a condus prin generalizare de-a lungul timpului la noţiunea de spaţiu afin. Este vorba de un spaţiu vectorial care poate fi privit cu structura afină descrisă mai sus la varietăţile liniare afine.

Presupunem cunoscută introducerea axiomatică (a lui Hilbert, spre exemplu) a planului sau spaţiului euclidian. Notăm cu $\mathcal{M} = \{A, B, ..\}$ punctele planului sau spaţiului euclidian (mediul ambiant).

Pentru orice A, B distincte putem discuta de *dreapta suport* (direcţie) determinată de ele şi de *segmentul orientat* (A, B), *lungimea* sa notându-se cu $\| AB \|$ şi se face cu o unitate de masură. A se numeşte originea segmentului orientat iar B extremitatea sa, *sensul* fiind de la origine spre extremitate.

Definiţie. Două segmente orientate (A, B) şi (C, D) se numesc *echipolente* dacă au aceeaşi direcţie (sunt pe aceeaşi dreaptă sau pe drepte paralele), aceeaşi lugime şi acelaşi sens (extremităţile lor se găsesc în acelaşi semiplan determinat de dreapta ce uneşte originile).



Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

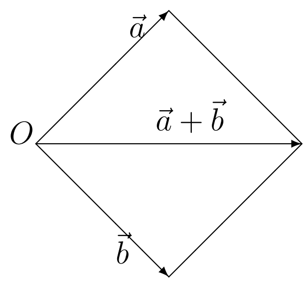
Definiţia 2. Se numeşte *vector geometric liber* clasa de echipolenţă a unui segment orientat (A, B) şi îl notăm cu $\overrightarrow{AB}$. Pentru prescurtare vom mai folosi notaţia $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Pentru a avea o imagine intuitivă vom desena *reprezentantul* vectorului $\overrightarrow{AB}$ în punctul A, asigurându-ne că ce urmează a discuta despre el nu depinde de reprezentat. Notăm cu $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, şi îl numim vectorul nul.

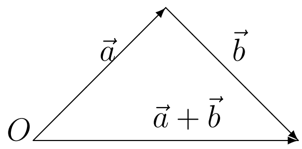
Notăm cu $\mathcal{V} = \mathcal{M} \times \mathcal{M}/\sim$ mulţimea vectorilor geometrici liberi. În continuare pentru comoditate o să-i numim simplu vectori. După cum $\mathcal{M}$ este o dreaptă, plan sau spaţiul euclidian o să mai precizăm cu $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, respectiv $\mathcal{V}_3$ vectorii corespunzători.

Pe $\mathcal{V}$ definim următoarele operaţii:

I. *Suma a doi vectori*, $\vec{a} + \vec{b}$, ca fiind clasa de echipolenţă a segmentului orientat diagonala dintr-un punct fixat O în paralelogramul determinat de reprezentările vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ în punctul O. Definiţia dată este cunoscută sub denumirea de *regula paralelogramului* şi din considerente de asemănarea figurilor nu depinde reprezentanţii aleşi.



În baza definiţiei echipolenţei vectorilor o regulă echivalentă este regula triungiului:



Numim *opusul* vectorului $\vec{a}$ clasa de echivalenţă a segmentului de aceeşi lungime cu $\vec{a}$ dar de sens opus pe dreapta suport. Notăm opusul cu $-\vec{a}$.

Verificăm cu uşurinţă următoarele axiome de grup abelian pentru $(\mathcal{V},+)$:

1. adunarea este asociativă, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
2. adunarea este comutativă, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
3. vectorul $\vec{0}$ verifică, $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4. opusul lui $\vec{a}$ verifică, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,

pentru orice $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathcal{V}$.

II. Definim *amplificarea cu scalari* $\alpha\in\mathbf{R}$ a unui vector $\vec{a}$ ca fiind vectorul $\alpha\vec{a}$ al cărui reprezentant într-un punct are aceeaşi direcţie cu $\vec{a}$, acelaşi sens dacă $\alpha>0$ sau contrar dacă $\alpha<0$, iar lungimea $\|\alpha\vec{a}\|=|\alpha|\|\vec{a}\|$.

Definiţia nu depinde de reprezentanţi şi satisface axiomele:

1. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;
2. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;
3. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$;
4. $1\vec{a}=\vec{a}$,

pentru orice $\alpha,\beta\in R$ şi $\vec{a},\vec{b}\in\mathcal{V}$.

Din aceste lucruri deducem că

Teoremă. $(\mathcal{V},+,R)$ este un spaţiu vectorial real.

Construcţia spaţiului afin corespunzător este cea de la varietăţi liniare. De fapt, noi aici am plecat de la un sistem geometric axiomatic şi am construit această structură afină.

$(\mathcal{V}_1,+,R),(\mathcal{V}_2,+,R),(\mathcal{V}_3,+,R)$ reprezintă spaţiile vectorilor de pe dreaptă, din plan, respectiv din spaţiul euclidian. Doi vectori din $(\mathcal{V}_1,+,R)$ se mai numesc *coliniari*, iar doi vectori din $(\mathcal{V}_2,+,R)$ se numesc *coplanari.*

Propoziţia 1. Pe dreapta $\mathcal{V}_1$ orice doi vectori sunt liniar dependenţi. Există vectori de lungime 1.

Demonstraţia este clară deoarece $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ având acelaşi suport ei sunt proporţionali, adică $\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2$, deci sunt liniar dependenţi. Orice vector nenul împărţit la lungimea sa devine de lungime 1.

Fie O fixat pe dreapta şi $\vec{e} \in \mathcal{V}_1$ cu $\| \vec{e} \| = 1$, numit *versor* pe dreaptă. Ansamblul $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}\}$ se numeşte *reper* pe dreaptă. Dacă M este un punct arbitrar pe dreaptă, există un unic $x \in R$ astfel încât vectorul legat $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$. Am obţinut în reperul $\mathcal{R}$ o corespondenţă bijectivă $M \in \mathcal{V}_1 \leftrightarrow x \in R$, numită *sistem de coordonate* pe dreaptă şi spunem că M are coordonata x în reperul $\mathcal{R}$, scriem $M(x)$. Condiţia ca $\| \vec{e} \| = 1$ nu este obligatorie într-un reper pe dreaptă. În acest caz general reperul se numeşte afin pe dreaptă.

Dreapta cu orientarea dată de reperul $\mathcal{R}$, se mai numesţe *axă*. Deducem că $\dim \mathcal{V}_1 = 1$.

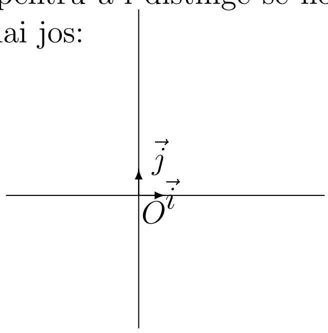
Propoziţia 2. În planul $\mathcal{V}_2$ orice trei vectori sunt liniar dependenţi. Există doi vectori liniar independenţi în plan.

Demonstraţie. Fie $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathcal{V}_2$ şi O un punct fixat. Reprezentăm vectorii în punctul O şi descompunem paralel $\vec{v}_3$ după direcţiile lui $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$.

Obţinem că $\overrightarrow{OA_3} = \alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OA_2}$ şi trecând la clasele respective rezultă că $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$, adică vectorii sunt liniar dependenţi.

Dacă considerăm O, A_1, A_2 trei puncte necoliniare atunci vectorii $\overrightarrow{OA_1} = \vec{e}_1$ şi $\overrightarrow{OA_2} = \vec{e}_2$ sunt liniar independenţi, neavând aceeaşi direcţie. Ansamblul $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se numeşte *reper afin în plan.* Dacă M este un punct arbitrar din plan atunci $\overrightarrow{OM}$ se descompune unic paralel după direcţiile $\overrightarrow{OA_1}$ şi $\overrightarrow{OA_2}$ adică, $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, cu $x, y \in R$ numite coordonatele punctului M în reperul $\mathcal{R}$ şi notăm $M(x, y)$. Corespondenţa bijectivă $M \leftrightarrow (x, y)$ se numeşte *sistem de coordonate în plan.* Notăm că $\dim \mathcal{V}_2 = 2$.

De observat că vectorii reperului nu sunt neapărat de lungime unitate sau perpendiculari. Dacă în particular se întâmplă ca vectorii reperului să fie de lungime unitate şi de direcţii perpendiculare, atunci reperul se numeşte *cartezian* şi pentru a-l distinge se notează cu $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ şi se reprezintă intuitiv ca mai jos:



Propoziţia 3. În spaţiul euclidian $\mathcal{V}_3$ orice patru vectori sunt liniar dependenţi. Există trei vectori liniar independenţi în spaţiu.

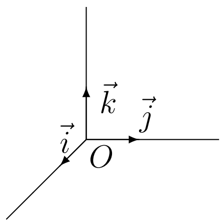
Demonstraţie. Fie $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in \mathcal{V}_2$ şi O un punct fixat. Reprezentăm vectorii în punctul O şi descompunem paralel $\vec{v}_4$ după direcţia lui $\vec{v}_3$ până obţinem un punct A_4' în planul OA_1A_2 (presupunând $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ necoplanari). Apoi descompunem în planul OA_1A_2 pe $\overrightarrow{OA_4'}$ după direcţiile lui $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$.

Obţinem că $\overrightarrow{OA_4'} = \alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OA_2}$. Dar $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OA_4'} + \overrightarrow{A_4'A_4} = \alpha\overrightarrow{OA_1} +$

$\beta\overrightarrow{OA_2} + \gamma\overrightarrow{OA_3}$. Trecând la clasele respective rezultă că $\vec{v}_4 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$, adică vectorii sunt liniar dependenţi.

Dacă considerăm O, A_1, A_2, A_3 patru puncte necoplanare atunci vectorii $\overrightarrow{OA_1} = \vec{e}_1$ şi $\overrightarrow{OA_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{e}_3$ sunt liniar independenţi. Ansamblul $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se numeşte *reper afin în spaţiu.* Dacă M este un punct arbitrar din spaţiu atunci $\overrightarrow{OM}$ se descompune unic paralel ca mai sus adică, $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + z\overrightarrow{OA_3} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, cu $x, y, z \in R$ numite coordonatele punctului M în reperul $\mathcal{R}$ şi notăm $M(x, y, z)$. Corespondenţa bijectivă $M \leftrightarrow (x, y, z)$ se numeşte *sistem de coordonate în spaţiu.* Notăm că $\dim \mathcal{V}_3 = 3$.

Dacă se întâmplă ca vectorii reperului să fie de lungime unitate şi de direcţii perpendiculare, atunci reperul se numeşte *cartezian în spaţiu* şi pentru a-l distinge se notează cu $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ şi se reprezintă intuitiv ca mai jos:



Cele trei propoziţii de mai sus, deşi elmentar de simple, se cuprind într-un singur enunţ, numit *teorema fundamentală a geometriei analitice.*

Dacă într-un reper, să zicem din spaţiu $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, considerăm punctele A şi B de coordonate $A(a^1, a^2, a^3)$ şi $B(b^1, b^2, b^3)$, atunci din axioma A'2 a unui spaţiu afin avem că $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, astfel că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b^1 - a^1)\vec{e}_1 + (b^2 - a^2)\vec{e}_2 + (b^3 - a^3)\vec{e}_3$. Obţinem că vectorul $\overrightarrow{AB}$ fixat în O ar avea componentele $(b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3)$.

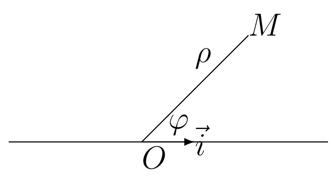
Am obţinut astfel o corespondenţă mai clară între $\mathcal{V}$ ca spaţiu afin şi spaţiul afin standard. Aici am folosit indici sus pentru a pune în evidenţă tocmai acestă corespondenţă. De regulă vom folosi indici puşi jos.

2.1.2 Sisteme de coordonate în planul şi spaţiul euclidian

Am obţinut în planul şi spaţiul euclidian repere afine la modul general, iar atunci când luăm în considerare structura euclidiană am obţinut repere carteziene pentru care bazele reperelor sunt ortonormate. Avem mai sus reprezentarea lor geometrică. Coordonatele unui punct în acest caz se numesc *coordonate carteziene.*

În aplicaţii, în special în tehnică, se folosesc şi alte tipuri de coordonate pe care le introducem în continuare şi vedem legatura lor cu cele carteziene.

a) *coordonate polare în plan.* Considerăm o axă $\{O, \vec{i}\}$ şi ca sens de parcurs în plan raportat la axă cel trigonometric



Un punct M va fi precis cunoscut dacă dăm distanţa $\rho = \| OM \|$ şi unghiul φ dintre axă şi (OM), orientat trigonometric.

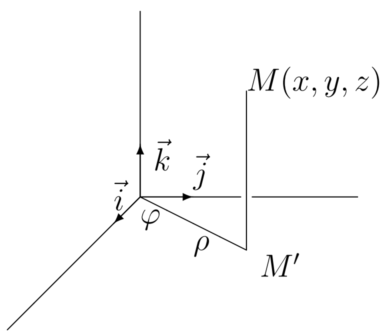
Sistemul (ρ, φ), cu $\rho \geq 0$ şi $\varphi \in [0, 2\pi)$, se numesc coordonate polare în plan.

Dacă $\{O, \vec{i}\}$ o considerăm drept axă Ox şi construim Oy perpendiculara în O pe Ox, obţinem un reper cartezian în care M are coordonatele $M(x, y)$. Legătura între cordonatele polare şi cele carteziene este

$$x = \rho \cos \varphi \ \ ; \ y = \rho \sin \varphi \tag{2.1.1}$$

Invers, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi până la precizarea cadranului $tg\varphi = y/x$.

b) *Coordonate cilindrice în spaţiu.* Cosiderăm pentru simplitatea expunerii de la început un punct $M(x, y, z)$ într-un reper cartezian $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Proiectăm ortogonal punctul M pe planul Oxy şi obţinem punctul M' pentru care considerăm coordonatele sale polare în acest plan, ρ şi φ.



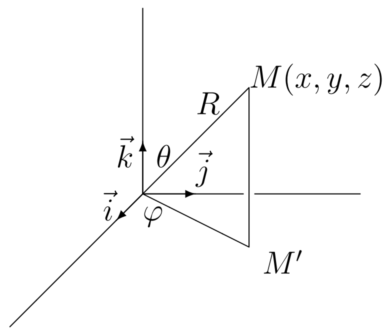
Punctul M este perfect determinat de (ρ, φ, z) numite coordonate cilindrice în spaţiu. Legătura între coordonatele cilindrice şi cele carteziene este $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$.

c) *Coordonate sferice în spaţiu.* Considerăm aceeaşi construcţie ca la coordonatele cilindrice, dar în locul lui $\rho =\parallel OM' \parallel$ şi a lui z dăm $R =\parallel OM \parallel$ şi unghiul $\theta \in [0, \pi]$ dintre axa Oz şi OM.

Cum $\parallel OM' \parallel = R\sin\theta$ şi $z = R\cos\theta$, înlocuind în coordonatele cilindrice, obţinem

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \ ; \ y = R\sin\theta\sin\varphi \ ; \ z = R\cos\theta. \tag{2.1.2}$$

Legatura inversă se obţine imediat, $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $tg\varphi = y/x$, $cos\theta = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.



2.1.3 Repere într-un spaţiu afin. Schimbarea reperelor.

Consideraţiile privind vectorii geometrici liberi ne permit să generalizăm noţiunea de reper la un spaţiu afin oarecare de dimensiune finită, $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \varphi, V)$, $\dim \mathcal{A} = n$.

Fie O un punct fixat şi $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ o bază în V. Considerăm spaţiul punctual afin $\mathcal{A}_O$ ca spaţiu vectorial. Atunci din unicitatea scrierii într-o bază, vectorul $\overrightarrow{OM}$ se descompune unic după baza B, pentru orice punct M, adică $\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ... + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x^i\vec{e}_i$. Astfel corespondenţa $M \in \mathcal{A} \leftrightarrow (x^1, x^2, ..., x^n) \in K^n$ este bijectivă.

Definiţie. Numim *reper* în spaţiul afin $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \varphi, V)$ ansamblul $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$. În acest reper spunem că M are coordonatele $M(x^1, x^2, ..., x^n)$.

De regulă vom folosi prescurtările $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_i\}$ şi $M(x^i)$.

Într-un spaţiu afin pot exista mai multe repere afine. Să considerăm două din ele $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ şi $\mathcal{R}' = \{O', \vec{e}\,'_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Fie $S = (s^i_j)$ matricea de trecere de la baza $B = \{\vec{e}_i\}$ la baza $B' = \{\vec{e}'_i\}$ şi vectorul $\overrightarrow{OO'}$ să-l descompunem după baza B :

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} s^i \vec{e}_i \;\; ; \quad \vec{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} s^i_j \vec{e}_i \;,\; j = 1, 2, .., n. \tag{2.1.3}$$

Un punct M din spaţiu afin poate fi privit atât din reperul $\mathcal{R}$ cât şi din $\mathcal{R}'$, astfel că el va avea coordonatele $M(x^i)$ în $\mathcal{R}$ şi $M(x'^i)$ în $\mathcal{R}'$, asta înseamnă că $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i$ şi $\overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^{n} x'^j \vec{e}'_j$. Scris după baza B vectorul $\overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^{n} x'^j \vec{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} x'^j \left(\sum_{i=1}^{n} s^i_j \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s^i_j x'^j\right) \vec{e}_i$.

Dar $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ şi egalând componentele după vectorul $\vec{e}_i$ obţinem,

Teoremă. La schimbarea de repere $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, coordonatele unui punct M se schimbă după regula

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} s^i_j x'^j + s^i \;\; ; \; i = 1, 2, ..., n. \tag{2.1.4}$$

Putem memora mai uşor această formulă folosind o scriere matriceală.

Fie X matricea coloană cu componentele (x^i), X' cu componentele (x'^i) şi $S = (s^i_j)$ matricea pătratică de trecere de la baza $B = \{\vec{e}_i\}$ la baza $B' = \{\vec{e}'_i\}$, (vezi notaţiile de la schimbări de baze). Notăm cu S_0 matricea coloană de componente $(s^1, ..., s^n)$. Atunci formula (2.1.4) devine

$$X = SX' + S_0. \tag{2.1.5}$$

Dacă $S_0 = 0$ schimbarea de repere se numeşte *centroafină* iar dacă $S = I$, matricea unitate, obţinem o *translaţie* a reperelor afine.

2.2 Produse cu vectori geometrici

După ce am făcut acestă generalizare privind reperele afine revenim cu încă câteva chestiuni privind spaţiul vectorilor geometrici liberi. Vom arăta că acest spaţiu vectorial are o structură de spaţiu euclidian şi în plus chiar o structură de algebră.

2.2.1 Produsul scalar a doi vectori

Întâi vom defini unghiul a doi vectori ca fiind unghiul mai mic dintre direcţiile lor. Noţiunea de lungime (normă) a unui vector am definit-o ca fiind lungimea segmentelor orientate echipolente.

Definiţie. Prin *produsul scalar* a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ înţelegem numărul real

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Deci un produs scalar defineşte o aplicaţie $\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$.

O primă observaţie este că $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dacă şi numai dacă $\vec{a} \perp \vec{b}$ sau eventual unul din vectori să fie vectorul nul.

Prpoprietăţi:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \| \vec{a} \|^2 \geq 0$ şi $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ dacă şi numai dacă $\vec{a} = \vec{0}$.

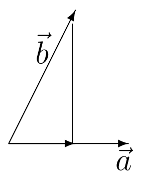
Exceptând 3. demonstraţia acestor afirmaţii este imediată. Pentru 3. dăm o justificare utilizând proiecţia unui vector pe o axă. Dar de observat este faptul că aceste proprietăţi sunt tocmai axiomele unui spaţiu euclidian, deci $(\mathcal{V}, \cdot)$ este un spaţiu euclidian.

Definiţie. Fie $(O, \vec{e})$ o axă şi $\vec{b}$ un vector dat. Prin *proiecţia* vectorului $\vec{b}$ pe axa înţelegem

$$pr_{\vec{e}}\vec{b} = \| \vec{b} \| \cos(\vec{e}, \vec{b})\ \vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{b})\vec{e}.$$

Mai general, dacă considerăm $\vec{e}$ versorul unui vector $\vec{a}$, adică $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, atunci prin proiecţia lui $\vec{b}$ pe $\vec{a}$ înţelegem

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = (\vec{e} \cdot \vec{b})\vec{e} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\| \vec{a} \|^2}\vec{a}. \tag{2.2.1}$$



Folosind proiecţia pe direcţia lui $\vec{a}$ obţinem, $pr_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = pr_{\vec{a}}\vec{b} + pr_{\vec{a}}\vec{c}$.

Folosind acum formula (2.2.1), obţinem că $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Să facem acum câteva observaţii privind spaţiul punctual afin.

Fie $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un reper cartezian şi $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ două puncte.

Ţinând cont că reperul este ortonormat, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ şi $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = \| \vec{k} \|$, şi de proprietăţile produsului scalar, vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ şi $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ vor avea produsul scalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{2.2.2}$$

adică tocmai produsul scalar uzual (ştim că în orice bază ortonormată orice produs scalar coincide cu cel uzual).

Avem $\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ şi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}$ va fi

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{2.2.3}$$

2.2.2 Produsul vectorial a doi vectori geoemetrici liberi

Vom introduce întâi noţiunea de orientare în spaţiu.

Două repere afine în $\mathcal{V}$ se numesc la fel orientate dacă matricea schimbării de baze are determinatul pozitiv. În caz contrar ele sunt invers orientate.

Prin definiţie reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se zice că este direct orientat (sau pozitiv orientat). Orice alt reper care se obţine în O printr-o schimbare de baze cu determinat pozitiv este direct orientat, spre exemplu $\mathcal{R} = (O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$, în schimb reperul $\mathcal{R} = (O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ este invers orientat.

Mai general, vom arăta în capitolul următor că dacă $\vec{i}$ este versorul lui $\vec{a}$, $\vec{k}$ este versorul lui $\vec{c}$ şi $\vec{b}$ este un vector nu neapărat de versor $\vec{j}$ dar situat în planul perpendicular pe $(O, \vec{a}, \vec{c})$ şi obţinut din $\vec{a}$ printr-o rotaţie în sens trigonometric de unghi $< \pi$, atunci reperul $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este direct orientat. Aceasta este cunoscută şi sub denumirea de regula burghiului. Întreg ansamblul poate fi privit independent de $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Definiţie. Prin *produsul vectorial* a doi vectori înţelegem vectorul definit de aplicaţia

$$\times : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \ , \ (\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} \times \vec{b}$$

astfel încât:

$\vec{a} \times \vec{b}$ are direcţia perpendiculară pe planul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ fixaţi într-un punct O.

$\vec{a} \times \vec{b}$ are sensul astfel ca reperul $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ să fie direct orientat.

$\parallel \vec{a} \times \vec{b} \parallel = \parallel \vec{a} \parallel \parallel \vec{b} \parallel \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Proprietăţi.

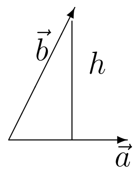
1. $\vec{a} \times \vec{b} \ \perp (\vec{a}, \vec{b})$.

2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ şi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ dacă şi numai dacă $\vec{b}$ este coliniar cu $\vec{a}$.

3. $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$.

4. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

5. $\parallel \vec{a} \times \vec{b} \parallel =$ aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ fixaţi într-un punct, deoarece $\mathcal{A}_{par} = \parallel \vec{a} \parallel h = \parallel \vec{a} \parallel \parallel \vec{b} \parallel \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \parallel \vec{a} \times \vec{b} \parallel$.



6. Construcţia lui $\vec{a} \times \vec{b}$ într-un punct.

Considerăm un plan π perpendicular în O pe $\vec{a}$ şi proiectăm pe π extremitatea B a vectorului $\vec{b}$, rezultă punctul $B' \in \pi$.

Avem $\| \overrightarrow{OB'} \| = \| \vec{b} \| \sin(\vec{a}, \vec{b})$. Amplificăm $\overrightarrow{OB'}$ cu $\| \vec{a} \|$ şi rezultă $\overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OB'} \| \vec{a} \|$ cu $\| \overrightarrow{OB''} \| = \| \vec{a} \times \vec{b} \|$.

Rotim $\overrightarrow{OB''}$ cu un unghi de $90°$ şi obţinem $\overrightarrow{OB'''} = \vec{a} \times \vec{b}$, construit în O.

Folosind această construcţie, prin proiecţia paralelogramului construit în O pe vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c},'$ şi apoi rotit cu $90°$, obţinem:

7. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Să facem câteva consideraţii privind produsul vectorial într-un reper ortonormat $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Fie $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ şi $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Din definiţia produsului vectorial obţinem următoarea tablă pentru înmulţirea vectorilor bazei

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

şi folosind proprietăţile produsului vectorial obţinem:

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$, sau sub o formă mai uşor de memorat avem determinantul formal scris

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.4}$$

Dacă $M_k(x_k, y_k, z_k)$, sunt vârfurile unui paralelogram, $k = 1, 2, 3, 4$, atunci aria paralelogramului este $\| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \|$, iar aria triunghiului $\Delta M_1M_2M_4$ este $\frac{1}{2} \| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \|$.

2.2.3 Produsul mixt (exterior) a trei vectori geometrici

Acest produs nu presupune o operaţie în plus.

Definiţie. Prin *produsul mixt* al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}$ şi $\vec{c}$ înţelegem scalarul

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \tag{2.2.5}$$

Acesta se mai notează $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ şi în această notaţie mai este cunoscut sub denumirea de produs exterior.

Proprietăţi:

1. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari.

Într-adevăr, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$ implică $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$, dar $(\vec{b} \times \vec{c}) \perp (\vec{b}, \vec{c})$, deci $\vec{a} \in (\vec{b}, \vec{c})$ adică $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari.

Invers, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari implică $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ şi deci

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \gamma\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ deoarece $\vec{b} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$ şi $\vec{c} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$

În particular deci reţinem că $\left(\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$.

2. $\left| \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \right| =$ volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ca dimensiuni, fixaţi într-un punct.

$\| \vec{b} \times \vec{c} \| = \mathcal{A}_{par(\vec{b},\vec{c})}$ şi $Vol_{par} = \mathcal{A}_{par(\vec{b},\vec{c})} h = \| \vec{b} \times \vec{c} \| \| \vec{a} \| | \cos(\vec{a}, (\vec{b} \times \vec{c})) | = \left| \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \right|$

3. Volumul tetraedrului construit pe $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este (din geoemetria elementară) $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ca dimensiuni.

4. Expresia analitică a produsului mixt.

Fie $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ şi $\vec{c} = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ trei vectori într-un reper ortonormat. Vectorul $\vec{b} \times \vec{c}$ se calculează cu un determinant de forma (2.2.4) şi ţinând cont de formula de calcul a produsului scalar uzual rezultă că $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ este tocmai dezvoltarea pe prima linie a umătorului determinant

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.6}$$

Aplicaţie. Fie $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, patru puncte necoplanare. Să calculăm volumul tetraedrului de aceste vârfuri.

Considerăm $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$ şi $\vec{c} = \overrightarrow{M_0M_3}$. Atunci

$$Vol_{tet} = \frac{1}{6} \mid \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \mid = \frac{\varepsilon}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ astfel ca această cantitate să fie pozitivă.

2.2.4 Dublul produs vectorial

Definiţie. Numim *dublu produs vectorial* al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorul dat de $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

De notat că înmulţirea vectorială nu este asociativă şi deci ordinea parantezei contează esenţial.

Într-adevăr, să observăm că $(\vec{b}\times\vec{c}) \in$ unui plan $\perp (\vec{b},\vec{c})$ şi atunci $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ este perpendicular pe $(\vec{b}\times\vec{c})$, deci în planul lui $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ astfel că $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$. Urmează determinarea scalarilor α, β. Acest lucru se face prin calcul direct într-un reper ortonormat, eventual convenabil ales. Se obţine

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{2.2.7}$$

cunoscută sub denumirea de *formula lui Gibs*.

Să observăm că $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} + (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$, adică cu totul alt vector decât $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Aplicaţie. Arătaţi că

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0} \tag{2.2.8}$$

numită *identitatea lui Jacobi.*

Demonstraţie:

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}.$

Prin adunare, din comutativitatea produsului scalar, doi câte doi din vectori se reduc şi rezultatul este $\vec{0}$.

Încheiem cu o remarcă. $(\mathcal{V}, +, R)$ are o structură de spaţiu vectorial şi în plus pe $\mathcal{V}$ am definit o operaţie internă, cea de produs vectorial care este distributivă faţă de adunarea vectorilor şi verifică un fel de asociativitate la amplificarea cu scalari reali. Ansamblul acesta de spaţiu vectorial plus un produs cu proprietăţile amintite se numeţe algebră , $((\mathcal{V}, +, R), \times)$.

Algebra vectorilor geometrici liberi este anticomutativă, nu este asociativă dar verifică identitatea lui Jacobi. Se spune că este o algebră Lie şi este exemplul cel mai la îndemână de o astfel de algebră ce constituie un capitol în sine în matematică.

2.2.5 Extinderi ale produsului mixt şi vectorial

Fie $(V, +, R)$ un spaţiu vectorial real, $\dim V = n$ si $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază a sa.

Să considerăm n vectori x_α , $\alpha = 1, 2, ..., n$. Descompuşi după baza B aceştia se scriu

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_\alpha^i e_i \ , \ \forall\alpha = 1, 2, ..., n.$$

şi deci scriem $x_\alpha = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, ..., x_\alpha^n)$ componentele vectorului x_α în baza B.

Definiţie. Numim *produsul mixt (exterior)* al vectorilor $\{x_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,n}}$ în baza B următorul număr real

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = \det\left(x_\alpha^i\right) = \begin{vmatrix} x_1^1 & ... & x_n^1 \\ ... & ... & ... \\ x_1^n & ... & x_n^n \end{vmatrix}. \tag{2.2.9}$$

Proprietăţi.

1. Produsul mixt depinde de baza aleasă.

2. $(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ dacă şi numai dacă vectorii sunt liniar dependenţi (un determinant este 0 dacă şi numai dacă o linie este combinaţie liniară de celelalte).

3. Dacă schimbăm ordinea a doi vectori, produsul mixt îşi schimbă semnul.

4. Fie $B' = \{e_{\prime i}\}_{i=\overline{1,n}}$ o altă bază şi $S = (s_j^i)$ matricea de trecere de la B la B', adică $e'_j = \sum_{i=1}^n s_j^i e_i$. Aceasta determină schimbarea de coordonate $x_\alpha^i = \sum_{j=1}^n s_j^i x_\alpha'^j$, $\forall\alpha = 1, 2, ..., n$. Trecând la determinanţi obţinem că $\det\left(x_\alpha^i\right) = \Delta \det\left(x_\alpha'^i\right)$, unde $\Delta = \det S$. Altfel scris am obţinut

$$(x_1, x_2, ..., x_n)_B = \Delta(x_1, x_2, ..., x_n)_{B'} \tag{2.2.10}$$

unde primul produs mixt este în baza B iar cel din dreapta în baza B'.

Presupunem că V are structură euclidiană cu produsul scalar $g(x, y)$.

Avem $g'_{kh} = g(e'_k, e'_h) = g(\sum_{i=1}^n s_k^i e_i, \sum_{j=1}^n s_h^j e_j) = \sum_{i,j=1}^n s_k^i s_h^j g(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n s_k^i s_h^j g_{ij}$.

Adică, matriceal $G' = S^t \cdot G \cdot S$, şi trecând la determinanţi rezultă $\det G' = \Delta^2 \det G$.

Să presupunem în continuare că B este o bază ortonormată în raport cu produsul scalar g, deci $g_{ij} = \delta_{ij}$ şi $G = 1$.

Deducem că $\det G' = \Delta^2$, adică $\Delta = \pm\sqrt{\det G'}$. Dacă bazele sunt la fel orientate atunci $\Delta = \sqrt{\det G'}$, iar dacă sunt invers orientate $\Delta = -\sqrt{\det G'}$.

Revenind în (2.2.10), rezultă că

$$(x_1, x_2, ..., x_n)_B = \pm\sqrt{\det G'}(x_1, x_2, ..., x_n)_{B'} \tag{2.2.11}$$

Dacă şi B' este ortonormată şi la fel orientată ca B atunci $\Delta = 1$, şi deci produsul mixt a n vectori este acelaşi în orice două baze ortonormate şi la fel orientate.

Aplicaţie. Să considerăm B o bază ortonormată fixată, deci produsul scalar coincide cu cel uzual, $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ şi $\{x_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,n}}$, $\{y_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,n}}$ două sisteme de n vectori. Produsele lor mixte în baza B satisfac

$(x_1, x_2, ..., x_n).(y_1, y_2, ..., y_n) = \det(x^i_\alpha) \cdot \det(y^i_\beta) = \det(x^i_\alpha) \cdot \det(y^\beta_i)^t = \det((x^i_\alpha) \cdot (y^\beta_i)^t)$.

Dezvoltat aceasta înseamnă

$$(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 & ... & x_1 \cdot y_n \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 & .... & x_2 \cdot y_n \\ ... & ... & .... & ... \\ x_n \cdot y_1 & x_n \cdot y_2 & .... & x_n \cdot y_n \end{vmatrix} \tag{2.2.12}$$

numit *determinantul Gram* al celor două sisteme de vectori.

În particular dacă cele două sisteme de vectori coincid, obţinem

$$(x_1, x_2, ..., x_n)^2 = \begin{vmatrix} x_1 \cdot x_1 & x_1 \cdot x_2 & ... & x_1 \cdot x_n \\ x_2 \cdot x_1 & x_2 \cdot x_2 & .... & x_2 \cdot x_n \\ ... & ... & .... & ... \\ x_n \cdot x_1 & x_n \cdot x_2 & .... & x_n \cdot x_n \end{vmatrix} \tag{2.2.13}$$

şi ca o consecinţă avem că n vectori într-un spaţiu n dimensional euclidian sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă determinantul lor Gram este 0.

Să introducem o noţiune care să generalizeze şi produsul vectorial.

Fie $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ vectori într-un spaţiu cu n dimensiuni, $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază şi $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} x^i_\alpha e_i$, $\forall \alpha = 1, 2, ..., n-1$.

Definim *produsul vectorial* al celor $n-1$ vectori ca fiind vectorul

$$(x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1})_B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \\ x^1_1 & x^2_1 & .... & x^n_1 \\ ... & ... & .... & ... \\ x^1_{n-1} & x^2_{n-1} & .... & x^n_{n-1} \end{vmatrix} \tag{2.2.14}$$

Aplicaţia $f : V \to R$ dată de $f(x) = (x, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ verifică

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, şi mai încolo o să o numim liniară.

Prpoprietăţi.

1. Produsul vectorial depinde de baza aleasă.

2. Dacă vectorii $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sunt liniar dependenţi atunci produsul lor vectorial este 0.

3. Presupunem că B este bază ortonormată în spaţiul V euclidian şi facem schimbarea de baze $B \overset{S}{\to} B'$. Ţinând cont de aplicaţia liniară f şi de (2.2.11) deducem că

$$(x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1})_B = \frac{\pm}{\sqrt{\det G'}}(x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1})_{B'}.$$

4. Tot ţinând cont de f şi dezvoltarea unui determinant pe prima linie, obţinem că $x_\alpha \cdot (x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1})_B = 0, \forall \alpha = 1, 2, ..., n-1$, adică $x_\alpha \perp (x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1})$ şi aceasta indiferent de baza aleasă.

2.3 Subspaţii afine. Varietăţi liniare afine

În această secţiune vom introduce geometria analitică a dreptelor, planelor şi a generalizărilor lor într-un spaţiu afin. În particular spaţiul punctual afin îl vom considera cu structura euclidiană.

Fie $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \varphi, V)$ un spaţiu afin, $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ o submulţime nevidă şi $V' \prec V$ subspaţiu.

Definiţie. Se numeşte *subspaţiu afin* tripletul $\mathcal{A}' = (\mathcal{M}', \varphi/_{\mathcal{M}' \times \mathcal{M}'}, V')$ cu proprietăţile:

A'1. $\varphi(A, B) \in V'$, $\forall A, B \in \mathcal{M}'$

A'2. $\forall A \in \mathcal{M}'$ şi $\vec{v} \in V'$ există un singur punct $B \in \mathcal{M}'$ astfel încât $\varphi(A, B) = \vec{v}$.

Remarcăm deci că $\mathcal{A}'$ are la rândul său o structură de spaţiu afin. Dimensiunea lui V' dă dimensiunea subspaţiului afin. Se defineşte ca la spaţii afine relaţia de echipolenţă şi clasa lui (A, B) o notăm $\overrightarrow{AB}$.

Propoziţia 1. Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $V' \prec V$ subspaţiu, $M_0 \in \mathcal{A}$ fixat. Atunci

$$\mathcal{A}' = \{M \ / \ M \in \mathcal{A} \ , \ \overrightarrow{M_0 M} = \vec{v} \ , \ \forall \vec{v} \in V'\}$$

este un subspaţiu afin în $\mathcal{A}$, numit subspaţiul ce trece prin M_0 şi are pe V' ca subspaţiu director.

Demonstraţia decurge din faptul că $\forall A, B \in \mathcal{M}'$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A} \in V'$.

În continuare să presupunem că $\dim V = n$ şi că $\dim V' = m$, generat de sistemul de vectori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ liniar independenţi. Atunci

$$\overrightarrow{M_0M} = \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \vec{v}_j \tag{2.3.1}$$

cu $\lambda^j \in K$ scalari.

Definiţie. Un sistem de $m+1$ puncte $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$ din $\mathcal{A}$ se numeşte *afin independent* dacă vectorii $\{\overrightarrow{M_0M_1}, ..., \overrightarrow{M_0M_m}\}$ sunt liniar independenţi în V.

În acest caz putem înlocui în (2.3.1) vectorii $\vec{v}_j$ cu $\overrightarrow{M_0M_j}$ şi definim:

Definiţie. Numim subspaţiul afin generat de punctele $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$ din $\mathcal{A}$, subspaţiul ce trece prin M_0 şi are ca subspaţiu director cel generat de vectorii $\{\overrightarrow{M_0M_1}, ..., \overrightarrow{M_0M_m}\}$.

Ecuaţia acestui subspaţiu este

$$\overrightarrow{M_0M} = \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \overrightarrow{M_0M}_j. \tag{2.3.2}$$

Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct fixat şi $\mathcal{A}_O$ spaţiul punctual afin ataşat. Considerăm $M_0 \in \mathcal{A}$ dat şi $V' \prec V$ subspaţiu.

Definiţie. Numim *varietate liniară afină* o submulţime L de puncte M din $\mathcal{A}$ cu proprietatea că

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + V'. \tag{2.3.3}$$

Observăm că orice varietate liniară afină este un subspaţiu afin ce trece prin M_0 şi are pe V' ca subspaţiu director deoarece $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$. Invers, fixând elementele O, M_0 şi V' subspaţiul afin se scrie ca o varietate liniară.

Să discutăm cazul finit dimensional, $\dim V = n$ şi $\dim V' = m$, generat de sistemul de vectori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$. Din (2.3.1) obţinem că varietatea liniară ce trece prin M_0 şi are pe V' ca subspaţiu director este

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \vec{v}_j \tag{2.3.4}$$

iar din (2.3.2) rezultă că varietatea liniară determinată de punctele $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$ afin independente este

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \overrightarrow{M_0 M_j}. \tag{2.3.5}$$

O varietate afină de dimensiune m se mai numeşte $m-$*plan.*

În particular un $1-$plan se numeşte *dreaptă* iar un $(n-1)-$plan se numeşte *hiperplan.*

În continuare vom da ecuaţii într-un reper afin $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ pentru dreaptă şi hiperplan.

Dreapta. 1. Ce trece prin M_0 şi are pe $V' = \{\vec{v}\}$ ca subspaţiu director:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{v}$$

ecuaţia vectorială a dreptei, sau scrisă pe componente obţinem ecuaţiile parametrice:

$$x^i = x_0^i + \lambda l^i \ \ ; \ i = \overline{1,n}.$$

Eliminând parametrul λ obţinem ecuaţiile canonice ale dreptei:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{l^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{l^2} = ... = \frac{x^n - x_0^n}{l^n}.$$

2. Dreapta determinată de punctele M_0 şi M_1, ecuaţia vectorială se obţine din (2.3.5):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{M_0 M_1}.$$

Scrisă pe componente obţinem ecuaţiile parametrice:

$$x^i = x_0^i + \lambda(x_1^i - x_0^i) \ \ ; \ i = \overline{1,n}$$

din care prin eliminarea parametrului λ obţinem ecuaţiile canonice:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{x_1^1 - x_0^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{x_1^2 - x_0^2} = ... = \frac{x^n - x_0^n}{x_1^n - x_0^n}.$$

Hiperplanul. 1. Ce trece prin M_0 şi are pe $V' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\}$ ca subspaţiu director:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^j \vec{v}_j$$

care scris parametric ne dă

$$x^i = x_0^i + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^j l_j^i \ ; \ i = \overline{1,n}.$$

Observăm că vectorii $\{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\}$ sunt liniar dependenţi şi din proprietăţile produsului mixt a n vectori rezultă că acesta va fi nul, $\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\right) = 0$, adică indiferent de reper determinantul cu componentele lor va fi 0,

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & ...... & x^n - x_0^n \\ l_1^1 & l_1^2 & ...... & l_1^n \\ .... & .... & ...... & .... \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & ...... & l_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0$$

numită ecuaţia scalară a hiperplanului.

2. Hiperplanul determinat de n puncte afin independente se obţine asemănător scriind faptul că vectorii $\{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0}, ..., \overrightarrow{OM}_{n-1} - \overrightarrow{OM_0}\}$ sunt liniar dependenţi, adică produsul lor mixt este 0,

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & ...... & x^n - x_0^n \\ x_1^1 - x_0^1 & x_1^2 - x_0^2 & ...... & x_1^n - x_0^n \\ .... & .... & ...... & .... \\ x_{n-1}^1 - x_0^1 & x_{n-1}^2 - x_0^1 & ...... & x_{n-1}^n - x_0^1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând după prima linie oricare din aceşti determinanţi ce dau ecuaţia unui hiperplan obţinem o ecuaţie liniară de forma

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + ... + A_n x^n + A_0 = 0 \tag{2.3.6}$$

numită ecuaţia generală a hiperplanului.

Pentru un $m-$plan oarecare $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \vec{v}_j$ sunt de preferat ecuaţiile sale parametrice

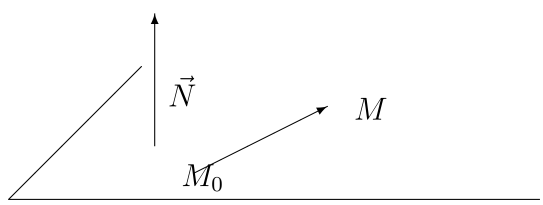
$$x^i = x_0^i + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j l_j^i \ ; \ i = \overline{1,n} \tag{2.3.7}$$

sau pentru hiperplanul determinat de $m+1$ puncte afin independente vom avea

$$x^i = x_0^i + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j (x_j^i - x_0^i) \ \ ; \ i = \overline{1,n}.$$

Evident aceste ecuaţii liniare depind de m parametrii λ^i. Să considerăm intersecţia a $n-m$ hiperplane de ecuaţii (2.3.6) cu proprietatea că rangul matricei sistemului lor este tot $n-m$. În acest caz sistemul lor se rezolvă notând variabilele secundare în număr de m cu $\lambda^1, \lambda^2, ..\lambda^m$ şi se obţin soluţii de forma (2.3.7). Astfel orice m -plan poate fi scris ca intersecţia a $n-m$ hiperplane.

În continuare să considerăm că spaţiul punctual afin $\mathcal{A}_O$ legat în originea reperului $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ are o structură euclidiană, pe scurt vom spune spaţiul punctual euclidian şi îl notăm cu $\mathcal{E}_n$. Subspaţiul director al unui hiperplan $V' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\}$ are dimensiunea $n-1$ şi deci un complement ortogonal în $\mathcal{E}_n$ al său va fi generat de un singur vector, $\vec{N}$ numit *vector normal* la hiperplan. Să presupunem că raportat la reperul $\mathcal{R}$ vectorul normal are componentele $\vec{N} = (A_1, A_2, ...A_n)$.



Fie $M_0(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ un punct fixat al hiperplanului $\mathcal{H}$. Un punct arbitrar M de coordonate $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ va fi în hiperplanul $\mathcal{H}$ dacă $\vec{N}$ este ortogonal vectorului $\overrightarrow{M_0M}$, adică dacă notăm cu $\cdot$ produsul scalar în $\mathcal{E}_n$, vom avea $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, sau echivalent $\vec{N} \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = 0$. Dacă reperul este ortonormat atunci produsul scalar coicide cu cel uzual şi această ecuaţie se scrie pe componente:

$$A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + ... + A_n(x^n - x_0^n) = 0 \tag{2.3.8}$$

numită ecuaţia hiperplanului determinat de M_0 şi vectorul normal $\vec{N}$.

Comparând această ecuaţie cu ecuaţia (2.3.6) generală a unui hiperplan deducem că în $\mathcal{E}_n$, scalarii din faţa lui $x^1, x^2, ..., x^n$ sunt tocmai componentele unui vector normal la hiperplan. De asemenea, dacă notăm cu $A_0 = -\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_0}$ ecuaţia vectorială a hiperplanului $\mathcal{H}$ de mai sus se scrie

$$f(M) \equiv \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM} + A_0 = 0, \tag{2.3.9}$$

forma vectorială a ecuaţiei hiperplanului pe care o vom utiliza des pentru scriere prescurtată.

În continuare, considerăm util pentru anumiţi studenţi să particularizăm ecuaţiile scrise la cazul planului şi spaţiului euclidian $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Regăsim ecuaţiile studiate în liceu.

În $\mathcal{E}_2$ un reper ortonormat este $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ noţiunea de dreaptă coincide cu cea de hiperplan. Ecuaţia dreptei determinată de un punct şi un vector director este

$$\frac{x - x_0}{l^1} = \frac{y - y_0}{l^2}$$

iar ecuaţia dreptei prin două puncte este

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Dacă $l^1 \neq 0$, scalarul $m = \frac{l^2}{l^1}$ are o semnificaţie geometrică, panta unei drepte, şi reprezintă tangenta unghiului orientat dintre axa Ox şi dreaptă. Evident că $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Dacă $l^1 = 0$ atunci ecuaţia dreptei se reduce la $x - x_0 = 0$ şi reprezintă o dreaptă verticală În $\mathcal{E}_3$ un reper ortonormat este $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dreapta are una din ecuaţiile:

$$\frac{x - x_0}{l^1} = \frac{y - y_0}{l^2} = \frac{z - z_0}{l^3},$$

dreapta determinată de un punct şi vector director, sau

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0},$$

ecuaţiile dreptei prin două puncte. Utile în aplicaţii sunt şi ecuaţiile parametrice ale dreptei, obţinute din acestea prin egalarea rapoartelor cu λ.

Noţiunea de hiperplan în $\mathcal{E}_3$ este cea clasică de plan, (alte $m-$plane nu există).

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1^1 & l_1^2 & l_1^3 \\ l_2^1 & l_2^2 & l_2^3 \end{vmatrix} = 0,$$

planul determinat de un punct şi doi vectori directori (două drepte ce se intersectează în M_0), sau

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

planul determinat de trei puncte necoliniare. Oricare din aceşti determinanţi dezvoltaţi ne dau ecuaţia generală a planului $A_1x + A_2y + A_3z + A_0 = 0$. Planul determinat de un punct M_0 şi vectorul normal $\vec{N}(A_1, A_2, A_3)$, este $A_1(x-x_0) + A_2(y-y_0) + A_3(z-z_0) = 0$.

De aici putem să deducem ecuaţii pentru plane şi drepte particulare. Spre exemplu planul xOy este determinat de O şi $\vec{i}, \vec{j}$. Din primul determinant rezultă $z = 0$ ecuaţia planului xOy. Analog xOz are ecuaţia $y = 0$, iar yOz are ecuaţia $x = 0$.

Planul determinat de punctele $M_0(a, 0, 0)$, $M_1(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ se obţine din al doilea determinant şi are ecuaţia

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

numită *ecuaţia planului prin tăieturi.*

Să considerăm $\vec{N}$ vector normal la planul $A_1x + A_2y + A_3z + A_0 = 0$ şi notăm cu α măsura unghiului $(\vec{N}, \vec{i})$, cu β măsura unghiului $(\vec{N}, \vec{j})$, şi cu γ măsura unghiului $(\vec{N}, \vec{k})$. Avem $\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{i}}{||\vec{N}||} = \frac{A_1}{\sqrt{A_i^2+A_2^2+A_3^2}}$, $\cos\beta = \frac{\vec{N}\cdot\vec{j}}{||\vec{N}|} = \frac{A_2}{\sqrt{A_i^2+A_2^2+A_3^2}}$, $\cos\gamma = \frac{\vec{N}\cdot\vec{k}}{|\vec{N}||} = \frac{A_3}{\sqrt{A_i^2+A_2^2+A_3^2}}$. Înlocuind A_1, A_2, A_3 în $A_1(x-x_0) + A_2(y-y_0) + A_3(z-z_0) = 0$, obţinem

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

ecuaţia normală a planului, unde $p = \frac{A_1x_0+A_2y_0+A_3z_0}{\sqrt{A_i^2+A_2^2+A_3^2}}$ va reprezenta aşa cum vom demonstra în secţiunea următoare distanţa de la origine la plan.

Axa Ox este determinată de O şi vectorul $\vec{i}$ şi deci se scrie $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$, sau echivalent $y = 0$ şi $z = 0$, adică intersecţia planelor xOy şi xOz. Analog Oy este $x = 0$ şi $z = 0$, iar Oz este $x = 0$ şi $y = 0$.

Despre dreapta în spaţiu ca intersecţie de două plane vom discuta imediat.

2.3.1 Poziţii relative, unghiuri şi distanţe

Vom aborda câteva idei privind poziţia $m-$planelor în $\mathcal{E}_n$, cu particularizări pentru $\mathcal{E}_2$ şi $\mathcal{E}_3$.

1. Poziţia relativă a două drepte $d_1(M_1, \vec{v}_1)$ şi $d_2(M_2, \vec{v}_2)$.

-dreptele sunt paralele dacă vectrorii lor directori sunt coliniari, $\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2$

-dreptele sunt perpendiculare dacă $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

-unghiul lor este $\cos\alpha = \varepsilon\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\cdot\|\|\vec{v}_2\|}$, unde $\varepsilon = \pm 1$ astfel ca $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (deci $\cos\alpha \geq 0$).

-în cazul lui $\mathcal{E}_3$ putem vorbi de coplanaritatea a două drepte (incidente sau paralele), aceasta se întâmplă dacă vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ sunt coplanari şi deci produsul lor mixt $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$.

2. Poziţia relativă a k hiperplane, se rezumă la rezolvarea unui sistem liniar cu k ecuaţii şi n necunoscute, $x^1, x^2, ..., x^n$. Dacă rangul matricei sistemului este $n - m$ şi toţi determinanţii caracteristici sunt nuli se obţine un $m-$plan. Preferăm aici să discutăm cazul particular a două plane din $\mathcal{E}_3$.

Fie $(P_1)\ A_1x + A_2y + A_3z + A_0 = 0$ şi $(P_2)\ B_1x + B_2y + B_3z + B_0 = 0$ două plane.

-dacă rangul matricei sistemului lor este doi, atunci una din necunoscute (spre exemplu z) devine parametru şi rezolvând sistemul se obţin ecuaţiile parametrice ale unei drepte (dreapta de intersecţie). În aplicaţii este util de multe ori să ştim doar vectorul director $\vec{v}$ al acestei drepte. Cum vectorii normali la cele două plane sunt perpendiculari pe dreapta de intersecţie rezultă că $\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. De asemenea, toate planele care trec prin această dreaptă de intersecţie se spune că formează un *fascicol de plane* de ecuaţie $\alpha P_1 + \beta P_2 = 0$ cu $\alpha, \beta \in R$. Cum cel puţin unul din cei doi scalari este nenul, spre exemplu $\alpha \neq 0$, obţinem că acest fascicol este $P_1 + \lambda P_2 = 0$, cu menţiunea că aici lipseşte planul $P_2 = 0$.

-dacă rangul matricei sistemului celor două plane este unu, atunci două din variabile devin parametrii şi una din ecuaţii este secundară. Dacă determinantul caracteristic este nul atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat şi deci cele două plane coincid. Dacă determinantul caracteristic este nenul atunci planele sunt paralele. Ecuaţiile a două plane (hiperplane) paralele diferă (până la un factor de proporţionalitate) prin termenul liber.

Cu totul asemănător se discută poziţia relativă a trei plane.

Unghiul a două hiperplane (plane) coincide cu unghiul din primul cadran al vectorilor normali, $\cos\alpha = \varepsilon\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|}$, unde $\varepsilon = \pm 1$ astfel că $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. În particular planele sunt perpendiculare dacă $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ şi paralele sau confundate dacă $\vec{N}_1 = \lambda\vec{N}_2$.

3. Poziţia relativă a două m_1- şi m_2-plane se discută la fel după rangul

matricei sistemului obţinut prin scrierea lor ca intersecţii de hiperplane.

De interes este unghiul dintre o dreaptă şi un hiperplan, ca fiind complementul unghiului format de vectorul director al dreptei $\vec{v}$ şi vectorul normal la hiperplan $\vec{N}$, astfel că $\sin\alpha = \varepsilon\frac{\vec{v}\cdot\vec{N}}{\|\vec{v}\|\|\vec{N}\|}$, unde $\varepsilon = \pm 1$ astfel ca $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

În continuare dorim să facem câteva precizări privind **distanţele** între varietăţi liniare din $\mathcal{E}_n$.

-distanţa dintre două puncte M_1 şi M_2 este

$\| M_1M_2 \| = \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + ... + (x_1^n - x_2^n)^2}$.

În particular putem scrie distanţele din plan şi respectiv spaţiu.

-distanţa de la un punct M_0 la un hiperplan $(\mathcal{H})$ $A_1x^1 + A_2x^2 + ... + A_nx^n + A_0 = 0$, sau sub forma vectorială $(\mathcal{H})$ $\vec{N}\cdot\overrightarrow{OM} + A_0 = 0$.

Căutăm M_1 proiecţia ortogonală a punctului M_0 pe $(\mathcal{H})$.

Pentru aceasta intersectăm $(\mathcal{H})$ cu dreapta ce trece prin M_0 şi este perpendiculară pe hiperplan. Vectorul director al acestei drepte este tocmai $\vec{N}$ normal la $(\mathcal{H})$ şi deci ecuaţia vectorială a acestei drepte (normale) este: (M_0M_1) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{N}$. Intersectând cu $(\mathcal{H})$ obţinem $\lambda \| \vec{N} \|^2 + \vec{N}\cdot\overrightarrow{OM_0} + A_0 = 0$, adică $\lambda = -\frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{OM_0} + A_0}{\|\vec{N}\|^2}$. Aceasta este valoarea lui λ din ecuaţia dreptei normale corespunzatoare punctului M_1, adică $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} - \frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{OM_0} + A_0}{\|\vec{N}\|^2}\vec{N}$, din care deducem că

$$d(M_0, (\mathcal{H})) = \| M_0M_1 \| = \| \frac{\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_0} + A_0}{\| \vec{N} \|^2} \vec{N} \| = \frac{| \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_0} + A_0 |}{\| \vec{N} \|}.$$

În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R}$ această distanţă se scrie

$$d(M_0, (\mathcal{H})) = \frac{| A_1x^1 + A_2x^2 + ... + A_nx^n + A_0 |}{\sqrt{A_i^2 + A_2^2 + ... + A_n^2}}. \quad (2.3.10)$$

De aici regăsim distanţa de la un punct la o dreaptă în planul $\mathcal{E}_2$ sau distanţa de la un punct la un plan în spaţiul $\mathcal{E}_3$.

-distanţa de la un punct M_0 la un $m-$plan (nu neapărat hiperplan) determinat de punctele afin independente $P_0, P_1, ..P_m$.

Considerăm vectorul $\overrightarrow{P_0M_0}$ şi proiecţia sa pe subspaţiul generat de vectorii $\{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, ..., \overrightarrow{M_0M_m}\}$. De la spaţii euclidiene ştim că

$$d = \| w^\perp \| = \| \overrightarrow{P_0M_0} - pr_{\{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, ..., \overrightarrow{M_0M_m}\}} \overrightarrow{P_0M_0} \| . \quad (2.3.11)$$

Aceeaşi distanţă se poate scrie şi cu determinanţi Gram, sensul geometric fiind obţinut în cazul particular al distanţei de la un punct la un plan ca fiind raportul dintre volumul unui poliedru şi aria bazei, exprimate ambele cu ajutorul unor determinanţi Gram.

Distanţa de la un punct la o dreaptă într-un spaţiu cu $n-$dimensiuni se determină intersectând dreapta cu un hiperplan perpendicular pe ea prin acel punct. Se determină astfel proiecţia punctului pe dreaptă şi distanţa căutată este tocmai distanţa de la punct la proiecţia sa pe dreaptă. După calcule se găseşte că distanţa de la M_0 la dreapta $d(M_1, \vec{v})$ este:

$$d = \| \overrightarrow{M_0M_1} - \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}}{\| \vec{v} \|} \vec{v} \| . \quad (2.3.12)$$

Cazul particular de interes aici este distanţa de la un punct la o dreaptă din $\mathcal{E}_3$.

Fie M_0 punct şi dreapta $d_1(M_1, \vec{v}_1)$. Atunci distanţa de la M_0 la d_1 este înalţimea din M_0 în paralelogramul construit pe vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}$ şi $\vec{v}_1$. Folosind faptul că aria paralelogramului este norma produsului vectorial, obţinem

$$d(M_0, d_1) = \frac{\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v}_1 \|}{\| \vec{v}_1 \|}. \quad (2.3.13)$$

Avem desenul:

-distanţa dintre două m_1- şi m_2-plane, este prin definiţie distanţa de la un punct M_0 al primului m_1-plan la $m-$planul ce trece printr-un punct al m_2-planului şi are ca subspaţiu director subspaţiul generat de reuniunea celor două subspaţii directoare.

Cazul particular de interes în $\mathcal{E}_3$ este distanţa dintre două drepte în spaţiu, $d_1(M_1, \vec{v}_1)$ şi $d_2(M_2, \vec{v}_2)$.

Considerăm desenul de mai jos, obţinut prin ducerea unor paralele la d_1 prin M_2 şi respectiv la d_2 prin M_1.

Distanţa dintre cele două drepte este tocmai înălţimea în paralelipipedul construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ având ca bază paralelogramul construit pe $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Deci

$$d(d_1, d_2) = \frac{|\ (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)\ |}{\|\ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2\ \|}. \tag{2.3.14}$$

2.4 Semispaţii

Fie $\mathcal{A}_n$ un spaţiu afin real de dimensiune n şi $(\mathcal{H})$ un hiperplan în el, A, B două puncte distincte din spaţiu neaparţinând hiperplanului. Considerăm dreapta $d(A, B)$ determinată de cele două puncte, dreaptă ce nu este conţinută în hiperplan.

Definiţie. a) Un punct $M \in d(A, B)$ se află între A şi B (scriem $A{-}M{-}B$) dacă există $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Numim segment deschis mulţimea $\mid AB \mid = \{M \ / \ A - M - B\}$, iar segmentul închis este

$[AB] = \mid AB \mid \cup\{A, B\}$.

b) Punctele A şi B sunt separate de hiperplanul $(\mathcal{H})$ dacă $d(A, B) \cap (\mathcal{H}) = \{M\}$ şi $A - M - B$. În caz contrar punctele se găsesc de aceeaşi parte a hiperplanului.

Propoziţia 1. Un punct $M \in [AB]$ dacă şi numai dacă $\forall O \in \mathcal{A}_n$ fixat este adevărată una din următoarele afirmaţii:

a) $\exists\lambda \in [0, 1]$ astfel încât $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

b) $\exists k > 0$ astfel încât $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}$.

Demonstraţie. Traducem $M \in [AB]$ prin faptul că $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, cu $\lambda \in [0, 1]$. Echivalent aceasta înseamnă că $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ din care rezultă a). Pentru b) scriem că $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ cu $k > 0$ şi traducem prin $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$.

Faptul că $\lambda \in [0, 1]$ este echivalent cu $\lambda(1 - \lambda) \geq 0$.

Propoziţia 2. Fie $A, B \in \mathcal{A}_n$ şi hiperplanul $(\mathcal{H})$ de ecuaţie $f(M) \equiv \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM} + A_0 = 0$, raportat la un reper în O. Punctele A şi B se găsesc de aceeaşi parte a hiperplanului $(\mathcal{H})$ dacă şi numai dacă $f(A) \cdot f(B) > 0$.

Demonstraţie. Distingem două situaţii.

a) $d(A, B) \mid\mid (\mathcal{H})$. Considerăm $(\mathcal{H}') \mid\mid (\mathcal{H})$ astfel ca dreapta $d(A, B) \in (\mathcal{H}')$. Ecuaţiile a două hiperplane paralele diferă prin termenul liber, adică $(\mathcal{H}')$ are ecuaţia $f'(M) \equiv f(M) + h = 0$, cu $h \neq 0$. Din faptul că $A, B \in (\mathcal{H}')$ deducem $f'(A) = f'(B) = 0$, adică $f(A) = -h$ şi $f(B) = -h$, din care rezultă $f(A) \cdot f(B) = h^2 > 0$.

b) $d(A, B) \cap (\mathcal{H}) = \{M\}$. Dacă punctele A şi B se găsesc de aceeaşi parte a hiperplanului, din propoziţia anterioară deducem că $\exists k < 0$ astfel încât $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}$.

Cum $M \in (\mathcal{H})$, rezultă că $\vec{N}\cdot\overrightarrow{OM}+A_0=0$, adică $\vec{N}\cdot(\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB})+A_0=0$, sau altfel scris, $\vec{N}\cdot\overrightarrow{OA}+k\vec{N}\cdot\overrightarrow{OB}+(1+k)A_0=0$, de unde rezultă că $\vec{N}\cdot\overrightarrow{OA}+A_0+k(\vec{N}\cdot\overrightarrow{OB}+A_0)=0$. Această ultimă relaţie ne spune că $f(A)+kf(B)=0$ şi cum $k<0$ rezultă din nou că $f(A)\cdot f(B)>0$.

Consecinţă. Dacă perechile de puncte (A,B) şi (B,C) sunt de aceeaşi parte a unui hiperplan $(\mathcal{H})$ atunci şi (A,C) se găsesc de aceeaşi parte a lui $(\mathcal{H})$.

Demonstraţia rezultă din faptul că $f(A)\cdot f(B)>0$ şi $f(B)\cdot f(C)>0$, care prin înmulţire ne dau $f(A)\cdot f(C)>0$.

De aici deducem că:

Propoziţia 3. Relaţia de a fi de aceeaşi parte a unui hiperplan este o relaţie de echivalenţă.

Fie A fixat şi $(\mathcal{H})$ un hiperplan. Notăm cu

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A^+ &= \{M\in\mathcal{A}_n \;/\; f(A)\cdot f(M)>0\}\\ \mathcal{H}_A^- &= \{M\in\mathcal{A}_n \;/\; f(A)\cdot f(M)<0\}\end{aligned}$$

clasele de echivalenţă definite de relaţia de a fi de aceeaşi parte cu A.

Cele două mulţimi se numesc *semispaţii* delimitate de $(\mathcal{H})$.

Evident $\mathcal{A}_n=\mathcal{H}_A^+\cup\mathcal{H}_A^-\cup\mathcal{H}$.

2.4.1 Mulţimi convexe

Definiţie. O mulţime $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}_n$ se numeşte convexă dacă $\forall A,B\in\mathcal{C}$ atunci întreg segmentul $[AB]\subset\mathcal{C}$.

Propoziţia 1. O mulţime $\mathcal{C}$ este convexă dacă şi numai dacă $\forall O$ punct fixat $\exists\lambda\in[0,1]$ astfel încât din $\overrightarrow{OM}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ atunci $M\in\mathcal{C}$.

Propoziţia 2. Orice semispaţiu este mulţime convexă.

Demonstraţie. Fie A fixat şi $(\mathcal{H})$ un hiperplan, $\mathcal{H}_A^+$ şi $\mathcal{H}_A^-$ semispaţiile sale. Vom demonstra că $\mathcal{H}_A^+$ este mulţime convexă şi la fel rezultă pentru $\mathcal{H}_A^-$. Pentru simplitate să presupunem că $f(A)>0$, atunci $\mathcal{H}_A^+=\{M\in\mathcal{A}_n \;/\; f(A)\cdot f(M)>0\}=\{M \;/\; f(M)>0\}=\{M \;/\; \vec{N}\cdot\overrightarrow{OM}+A_0>0\}$.

Considerăm M_1 şi $M_2\in\mathcal{H}_A^+$, adică $\vec{N}\cdot\overrightarrow{OM_1}+A_0>0$ şi $\vec{N}\cdot\overrightarrow{OM_2}+A_0>0$. Un punct $M\in[M_1M_2]$ dacă şi numai dacă $\exists\lambda\in[0,1]$ astfel încât din $\overrightarrow{OM}=(1-\lambda)\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}$, şi deci

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM} + A_0 = \vec{N} \cdot ((1-\lambda)\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}) + A_0 = (1-\lambda)[\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_1} + A_0] + \lambda[\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_2}) + A_0] > 0$ deoarece $(1-\lambda) > 0$ şi $\lambda > 0$. Astfel că $M \in \mathcal{H}_A^+$, adică $\mathcal{H}_A^+$ este mulţime convexă. Analog se discută alte situaţii.

Propoziţia 3. Intersecţia unui număr finit de mulţimi convexe este o mulţime convexă.

Demonstraţia rezultă din faptul că dacă un segment se găseşte în două mulţimi convexe atunci el se găseşte şi în intersecţie. Întersecţia (finite) a tuturor mulţimilor convexe ce conţin o mulţime S se numeşte *înfăşurătoarea convexă* a mulţimii S. Evident înfăşurătoarea convexă este o mulţime convexă.

Consecinţă. Mulţimea $\mathcal{P} = \{M \ / \ A \cdot X \leq B\}$ este convexă, unde A este o matrice de tip $m \times n$, B este matrice coloană $(b_1 .... b_m)^t$ şi X este matricea coloană $(x^1 .... x^n)^t$ cu coordonatele unui punct M din $\mathcal{A}_n$ într-un reper afin.

Demonstraţia rezultă din faptul că $A \cdot X \leq B$ poate fi interpretat ca intersecţia a m semispaţii care am văzut că sunt mulţimi convexe.

Mulţimea $\mathcal{P}$ se numeşte *politop* (sau *tronson*).

Definiţie. Numim *program liniar* următoarea problemă:

Se consideră politopul $\mathcal{P} = \{M \ / \ A \cdot X \leq B\} \neq \emptyset$ şi $\vec{N} = (A_1, ..., A_n)$ un vector scris în reperul $\mathcal{R}$.

Să se determine coordonatele X ale unui punct $M \in \mathcal{P}$, pentru care $\vec{N} \cdot \vec{X}$ =maxim.

Soluţie. Fie $m = \vec{N} \cdot \vec{X}$ valoarea căutată pentru care se realizează maximul. Considerăm atunci hiperplanul $(\mathcal{H})$ $f(M) = \vec{N} \cdot \vec{X} - m = 0$ şi calculăm distanţa $d(O, (\mathcal{H})) = \frac{|m|}{\|\vec{N}\|}$.

Deducem că $| \ m \ |$ este maximă dacă şi numai dacă $d(O, (\mathcal{H}))$ este maximă. Astfel că soluţia programului liniar se obţine ducând hiperplane paralele cu $\vec{N} \cdot \vec{X} = 0$, le intersectăm cu $\mathcal{P}$ şi punctele obţinute situate la distanţa cea mai mare de O sunt soluţii ale problemei.

În cazul particular al planului euclidian un program liniar se formulează astfel.

Găsiţi soluţiile problemei:

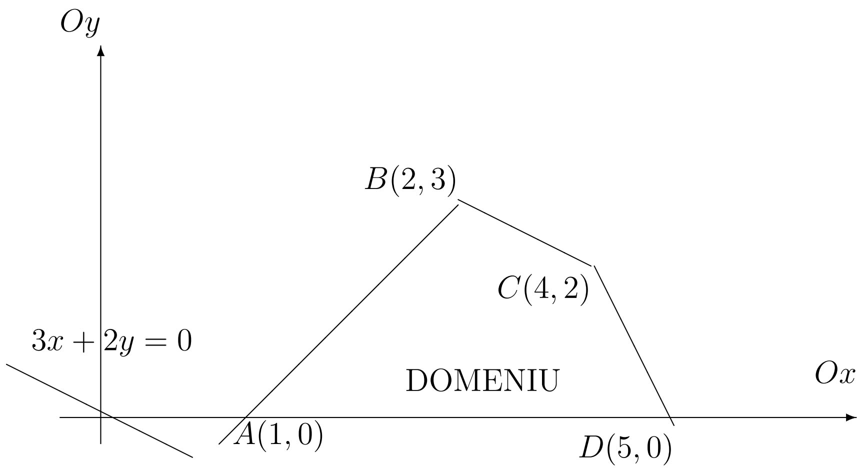
$\max(A_1 x + A_2 y) =?$, ce satisface inegalităţile (restricţiile)

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & \leq & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & \leq & b_2 \\ \ldots\ldots & .. & \ldots\ldots & .. & \ldots \\ a_{m1}x & + & a_{m2}y & \leq & b_m \end{cases}.$$

Aplicaţie. Să se rezolve problema de programare liniară

$$\begin{aligned} \max(3x+2y) &= ? \\ 2x+y &\leq 10 \\ x+2y &\leq 8 \\ 4x-y &\geq 5 \\ x,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Domeniu delimitat de restricţii este cel din figura de mai jos



Ducând drepte paralele cu $3x+2y=0$, cea mai îndepărtată de origine intersectează poligonul în $x_0 = 4$ şi $y_0 = 2$.

Deci $\max(3x+2y) = 3.4 + 2.2 = 16$.

2.4.2 Simplex

Fie $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$ o mulţime de puncte din spaţiul afin $\mathcal{A}_n$ şi O punct fixat.

Definiţie. Numim combinaţie liniară afină de punctele $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$

un vector
$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OM_i} \text{ cu } \forall \alpha_i \geq 0 \text{ şi } \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1.$$

Propoziţia 1. O combinaţie liniară afină nu depinde de alegerea punctului O.

Demonstraţie. Fie $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OM_i}$ şi O' alt punct. Avem că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ şi analog $\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_i}$. Înlocuind obţinem că $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_i}) = (\sum_{i=0}^{m} \alpha_i) \overrightarrow{OO'} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{O'M_i} = \overrightarrow{OO'} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{O'M_i}$, adică $\overrightarrow{O'M} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{O'M_i}$ şi deci scrierea nu depinde de O.

Teorema 1. O mulţime $\mathcal{M}$ este convexă dacă şi numai dacă conţine toate combinaţiile liniare afine de punctele sale.

Demonstraţie. Presupunem întâi că $\mathcal{M}$ conţine toate combinaţiile liniare afine de punctele sale, în particular deci pentru două puncte vom avea că din $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ atunci fie combinaţia $\overrightarrow{OM} = \alpha_0 \overrightarrow{OM_0} + \alpha_1 \overrightarrow{OM_1}$ unde $\alpha_i \geq 0$ şi $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. Renotând $\alpha_0 = 1 - \lambda$ şi $\alpha_1 = \lambda \in [0, 1]$, deducem că $M \in [M_0 M_1]$ şi deci segmentul $[M_0 M_1] \subset \mathcal{M}$ astfel că $\mathcal{M}$ este convexă.

Invers, fie $\mathcal{M}$ convexă. Demonstrăm prin inducţie că toate combinaţiile afine sunt în $\mathcal{M}$.

Pentru $m = 1$, din $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ şi faptul că segmentul $[M_0 M_1] \subset \mathcal{M}$, ca mai sus deducem că $\overrightarrow{OM} = \alpha_0 \overrightarrow{OM_0} + \alpha_1 \overrightarrow{OM_1}$ unde $\alpha_i \geq 0$ şi $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$; deci $\mathcal{M}$ conţine combinaţiile afine a celor două puncte.

Presupunem afirmaţia valabilă pentru n puncte şi demonstrăm pentru $n + 1$, adică din faptul că orice combinaţie liniară de n puncte este în $\mathcal{M}$ să demonstrăm că $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OM_i}$ cu $\forall \alpha_i \geq 0$ şi $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, implică $M \in \mathcal{M}$. Cum cel puţin un scalar este nenul, fie acesta spre exemplu α_0. Scriem

$\overrightarrow{OM} = \alpha_0 \overrightarrow{OM_0} + (1 - \alpha_0)\{\alpha'_1 \overrightarrow{OM_1} + ... + \alpha'_n \overrightarrow{OM_n}\} = \alpha_0 \overrightarrow{OM_0} + (1 - \alpha_0) \overrightarrow{OM'_1}$

unde $\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}, ..., \alpha'_n = \frac{\alpha n}{1 - \alpha_0}$. Cum $\forall \alpha'_i \geq 0$ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = 1$, în baza inducţiei $M'_1 \in \mathcal{M}$, şi deci $M \in [M_0 M'_1] \subset \mathcal{M}$. Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Definiţie. Fie $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$ o mulţime de puncte afin independente din spaţiul afin $\mathcal{A}_n$. Numim $m-$simplex $\mathcal{S}$ mulţimea punctelor M definite de toate combinaţiile afine ale acestor puncte.

Deducem că orice simplex este mulţime convexă. Din liniara independenţă a vectorilor rezultă că pentru fiecare $M \in \mathcal{S}$, scalarii $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m \in [0, 1]$

sunt unic determinaţi şi deci avem o corespondentă bijectivă, numită *coordonata baricentrică*, între punctele lui $\mathcal{S}$ şi un subspaţiu din R^{m+1}, dată de $M \leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m)$. În particular dacă $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_m = \frac{1}{m+1}$ punctul M este tocmai centrul de greutate al simplexului, din acest motiv M se numeşte baricentrul cu ponderile $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m$.

Să exemplificăm noţiunea dată.

-Pentru $m = 1$, simplexul este chiar segmentul $[M_0M_1]$.

-Pentru $m = 2$, fie simplexul $\{M_0, M_1, M_2\}$. Să arătăm că el este triunghiul $\Delta M_0M_1M_2$. În primul rănd triunghiul este mulţime convexă şi deci odată cu vârfurile sale toate punctele interioare, inclusiv laturile, se vor găsi în combinaţii liniare afine de vârfuri, deoarece ele se găsesc pe segmente ce unesc vârf cu puncte de pe laturi (care la rândul lor fiind segmente sunt combinaţii afine de două din vârfuri). Să arătăm că un punct din exteriorul $\Delta M_0M_1M_2$ nu poate fi în simplex.

Fie P exterior $\Delta M_0M_1M_2$ şi $(M_0P) \cap (M_0M_1) = \{M\}$ Presupunem $M_1 - M - M_2$. Din faptul că punctul P este exterior triunghiului rezultă că $\overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\overrightarrow{OM_0} + \alpha\overrightarrow{OM}$ cu $\alpha > 1$. Cum $M_1 - M - M_2$, există $\beta \in [0,1]$ astfel că $\overrightarrow{OM} = (1-\beta)\overrightarrow{OM_1} + \beta\overrightarrow{OM_2}$. Înlocuind obţinem, $\overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\overrightarrow{OM_0} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{OM_1} + \alpha\beta\overrightarrow{OM_2}$. Am obţinut o combinaţie liniară de puncte afin independente care nu este afină deoarece $(1-\alpha) < 0$, chiar dacă suma lor este 1.

-Analog în spaţiu, un tetraedru este un $4-$simplex.

Să analizăm următoarea situaţie, $m < n$ în spaţiul $\mathcal{A}_n$.

Considerăm pentru m-simplexul $\{M_0, M_1, ..., M_m\}$ următorul reper afin $\mathcal{R} = \{M_0, \overrightarrow{M_0M_1}, ..., \overrightarrow{M_0M_m}, \vec{e}_{m+1}, .., \vec{e}_n\}$ şi fie $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\overrightarrow{OM_i}$. Atunci în acest reper M are coordonatele $x^1 = \alpha_0, ..., x^m = \alpha_m, x^{m+1} = 0, .., x^n = 0$. Din faptul că $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$ şi $\alpha_i \geq 0$, rezultă că un simplex este delimitat de intersecţia unor semispaţii la care se adaugă hiperplanele de intersecţie.

Noţiunea de simplex este intens studiată atât din punct de vedere geometric cât şi topologic. Nu insistăm aici asupra acestor lucruri.

Încheiem cu o generalizare a noţiunii de mulţime convexă.

O mulţime se numeşte *afină* dacă odată cu două puncte ale sale, atunci dreapta lor se găseşte în acea mulţime, adică dacă $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ atunci $M \in \mathcal{M}$, unde $\overrightarrow{OM} = (1-\alpha)\overrightarrow{OM_0} + \alpha\overrightarrow{OM_1}$ şi $\forall \alpha \in R$.

Mulţimile afine sunt convexe (restrângând $\alpha \in [0,1]$), invers nu. Are loc următoarea teoremă pe care nu o mai demonstrăm aici.

Teoremă. Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_i\}_{i=1,n}$ un reper afin şi $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}_n$. Atunci $\mathcal{M}$ este afină dacă şi numai dacă $\exists N$ matrice de tipul $m \times n$ şi A_0 de tipul $m \times 1$ astfel ca $\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{A}_n \ / \ N \cdot X = A_0\}$, unde X este coloană cu componentele lui M în reperul $\mathcal{R}$.

2.5 Raport simplu. Paralelism şi asemănare

Fie A, B, M trei puncte situate pe o dreaptă $\mathcal{A}_1$ din spaţiul afin real $\mathcal{A}_n$.

Definiţie. Prin *raportul simplu* a celor trei puncte înţelegem numărul real $\rho := (A, B; M)$ pentru care $\overrightarrow{AM} = \rho\overrightarrow{MB}$.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}\}$ un reper pe dreaptă. Atunci avem $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \rho(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$ şi pe componente rezultă:

$$\rho = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M}.$$

Să obsevăm că avem

$$x_M = \frac{1}{1+\rho}x_A + \frac{\rho}{1+\rho}x_B = \alpha_0 x_A + \alpha_1 x_B \ \text{ cu } \alpha_0 + \alpha_1 = 1.$$

Înlocuind mai sus deducem după simplificare că $\rho = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$. Pe baza acestui fapt se verifică uşor că raportul simplu are proprietatea de a se păstra (a rămane invariant) la transformările afine pe care le vom studia mai târziu.

Propoziţia 1. Dacă $\rho := (A, B; C)$ este raportul simplu al celor trei puncte în această ordine, atunci prin permutarea literelor A, B, C se obţine una din următoarele valori $\rho, \frac{1}{\rho}, 1+\rho, \frac{1}{1+\rho}, \frac{\rho}{1+\rho}, \frac{1+\rho}{\rho}$.

Teorema Thales. Dacă cosiderăm triunghiul ΔABC şi $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, atunci $(MN) \parallel (BC)$ dacă şi numai dacă $(A,B;M) = (A,C;N)$.

Demonstraţie. Fie $(MN) \parallel (BC)$, atunci $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{BC}$. Notăm cu $(A,B;M) = s$ şi $(A,C;M) = t$.

Avem că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{NC} - s\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$, care înlocuite în $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{BC}$, din liniara independenţă a vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ rezultă $s = t = \lambda$. Demonstraţia reciprocă rezultă pe aceeaşi cale.

Combinând cu Propoziţia 1 rezultă că $(MN) \parallel (BC)$ dacă şi numai dacă $(M,B;A) = (N,C;A)$, adică tocmai teorema asemănării în triunghiuri.

Teorema 2. Fie $(\mathcal{H}_i)$, $i = 1,2,3$ trei hiperplane paralele şi d o dreaptă din $\mathcal{A}_n$, cu $d \cap \mathcal{H}_i = \{M_i\}$.

Raportul simplu $(M_1, M_2; M_3)$ nu depinde de alegerea dreptei d.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{R}\{O, \vec{e}_i\}_{i=1,n}$ un reper în spaţiu afin şi $(\mathcal{H}_i)$ $\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM} + B_i = 0$, $i = 1,2,3$, ecuaţiile celor trei hiperplane paralele.

Considerăm $d(M_0, \vec{v})$ o dreaptă de ecuaţie $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{v}$, sau altfel scris $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{v}$. Intersecţia dreptei cu hiperplanele se rezumă la a rezolva sistemul format de ele, adică $\vec{N} \cdot (\overrightarrow{OM_0} + \lambda_i\vec{v}) + B_i = 0$, $i = 1,2,3$, din care deducem că $\lambda_i = -\dfrac{\vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_0} + B_i}{\vec{N} \cdot \vec{v}}$, astfel că $\overrightarrow{M_0M_i} = \lambda_i\vec{v}$ cu $i = 1,2,3$.

Calculăm acum $\rho = (M_1M_2; M_3)$ adică $\overrightarrow{M_1M_3} = \rho\overrightarrow{M_3M_2}$, sau altfel scris $\overrightarrow{M_0M_3} - \overrightarrow{M_0M_1} = \rho(\overrightarrow{M_0M_2} - \overrightarrow{M_0M_3})$. Egalăm componentele lui $\vec{v}$ şi rezultă $\lambda_3 - \lambda_1 = \rho(\lambda_2 - \lambda_3)$, adică

$$\rho = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{B_1 - B_3}{B_3 - B_2}$$

cantitate ce nu depinde de dreapta d ci numai de termenii liberi ai celor trei hiperplane paralele.

Consecinţă. Fie $f(M) \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i x^i + A_0 = 0$ ecuaţia unui hiperplan $(\mathcal{H})$ şi A, B două puncte situate de o parte şi de cealaltă a hiperplanului, $(AB) \cap (\mathcal{H}) = \{M\}$. Atunci

$$\rho = (A,B;M) = \frac{-f(A)}{f(B)}.$$

Demonstraţie. Considerăm hiperplanele paralele cu $(\mathcal{H})$ ce trec prin A şi B,

$(\mathcal{H}_1)\, f(M) - f(A) = 0$ şi $(\mathcal{H}_2)\, f(M) - f(B) = 0$. Din $\rho = \frac{B_1 - B_3}{B_3 - B_2}$ rezultă că $\rho = \dfrac{A_0 - f(A) - A_0}{A_0 - (A_0 - f(B))} = \dfrac{-f(A)}{f(B)}$ adică ce trebuia arătat.

Din această consecinţă rezultă că pentru punctele situate de aceeaşi parte a unui hiperplan, adică $f(A).f(B) < 0$, avem că $\rho > 0$, iar pentru cele separate de hiperplan că $\rho < 0$.

Teorema Ceva. Fie ΔABC şi $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ astfel încât $\rho_1 = (B, C; A')$, $\rho_2 = (C, A; B')$, $\rho_3 = (A, B; C')$. Atunci dreptele (AA'), (BB'), (CC') sunt concurente dacă şi numai dacă $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = 1$.

Demonstraţie. Considerăm demonstraţia în planul $\mathcal{A}_2$ al triunghiului. Atunci o dreaptă este hiperplan şi deci putem calcula raportul simplu cu formula din consecinţa precedentă. Avem

$$\rho_1 = -\frac{f(B)}{f(C)},\ \rho_2 = -\frac{g(C)}{g(A)}\ ,\ \ \rho_3 = -\frac{h(A)}{f(B)}$$

unde f, g, h sunt ecuaţiile dreptelor (AA'), (BB'), (CC'), respectiv. Dreptele sunt concurente dacă şi numai dacă sistemul $f = 0, g = 0, h = 0$ admite soluţie. Din faptul că determinantul caracteristic este 0, rezultă că una din linii este combinaţie liniară de celelalte, adică $h = \lambda f + \mu g$. În particular avem $0 = h(C) = \lambda f(C) + \mu g(C)$, astfel că $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = -\dfrac{f(B) g(C) [\lambda f(A) + \mu g(A)]}{f(C) g(A) [\lambda f(B) + \mu g(B)]}$. Cum $f(A) = g(B) = h(C) = 0$, rezultă $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = -\dfrac{f(B) g(C) \mu g(A)}{f(C) g(A) \lambda f(B)} = -\dfrac{\mu}{\lambda} \dfrac{g(C)}{f(C)} = 1$.

Capitolul 3

Transformări în spaţii afine

Am început cu studiul unei structuri pur algebrice, cea de spaţiu vectorial. Apoi ne-am apropiat de geometrie adăugând un produs scalar care ne-a permis să definim unghiuri şi distanţe într-un spaţiu vectorial. În final am legat algebra de geometrie prin capitolul spaţii afine, care aşa cum am văzut sunt în fiecare punct fixat modelate de un spaţiu vectorial.

În acest capitol vom studia aplicaţii în aceste spaţii.

3.1 Transformări liniare

Pentru început vom studia un caz particular de morfisme de spaţii vectoriale, noţiune intens dezvoltată la cursul de algebră liniară. Aici doar vom readuce în termenii noştrii noţiunile învăţate.

Fie $(V, +, .K)$ şi $(W, +, .K)$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp.

Definiţie. O aplicaţie $f : V \to W$ se numeşte morfism de spaţii vectoriale (sau operator liniar) dacă

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\ ;\ f(\alpha x) = \alpha f(x)\ ;\ \forall x, y \in V\ ,\ \alpha \in K$$

Evident, condiţiile din definiţie sunt echivalente cu :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\ ;\ \forall x, y \in V\ ,\ \alpha, \beta \in K.$$

Dacă în particular $W = K$ (orice corp comutativ este spaţiu vectorial peste el însuşi) atunci morfismul se mai numeşte aplicaţie liniară pe V. Dacă în locul lui V punem $V^p = V \times ... \times V$ de p ori şi $W = K$, morfismul se mai numeşte aplicaţie $p-$liniară. Un mic studiu al acestor morfisme o să-l facem separat.

Propoziţia 1. Dacă $f : V \to W$ este un morfism de spaţii vectoriale atunci:

a) $f(0) = 0$,

b) $f(-x) = -f(x)$,

c) Dacă V' este subspaţiu în V, atunci : $f(V') = \{w \in W \ / \ \exists v \in V \ , \ f(v) = w\}$ este subspaţiu în W.

d) Dacă W' este subspaţiu în W, atunci $f^{-1}(W') = \{v \in V \ / \ f(v) \in W'\}$ este subspaţiu în V.

(De observat că f^{-1} este o notaţie).

Demonstraţia acestor afirmaţii este imediată şi se cunoaşte de la cursul de algebră liniară.

Consecinţă. a) $f(V)$ este subspaţiu în W, notat $Im\ f$, şi numit subspaţiul imagine.

b) $f^{-1}(0)$ este subspaţiu în V, notat $Ker\ f$ şi numit subspaţiul nucleu.

c) $f^{-1}(W)$ este subspaţiu în V, numit subspaţiul imagine inversă sau contraimagine.

Propoziţia 2. Fie $f : V \to W$ un morfism de spaţii vectoriale. Atunci:

a) f este injectiv dacă şi numai dacă $Ker\ f = \{0\}$.

b) f este surjectiv dacă şi numai dacă $Im\ f = W$.

Propoziţia 3. Dacă $f : V \to W$ este un morfism injectiv de spaţii vectoriale şi $\{v_1, ..., v_n\}$ este un sistem de vectori liniari independenţi în V, atunci $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ este liniar independent în W.

În particular, dacă f este injectiv şi cele două spaţii au aceeaşi dimensiune, atunci f duce baze în baze.

Notăm cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulţimea tuturor morfismelor $f : V \to W$. Definim pentru $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ ; \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Atunci se verifică uşor că $(\mathcal{L}(V, W), +, K)$ este un spaţiu vectorial, al morfismelor celor două spaţii vectoriale.

Definim compunerea (sau produsul) a două morfisme ca fiind $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \ , \forall x \in V$.

Propoziţia 4. Dacă $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci $f \circ g \in \mathcal{L}(V, W)$.

De notat că $(\mathcal{L}(V, W), +, \circ)$ este un inel şi că dacă considerăm submulţimea morfismelor bijective atunci acestea formează grup faţă de compunere.

3.1.1 Transformări liniare

Aici vom considera un caz particular de morfisme, anume $V = W$ şi $\dim V = n$ finită. Pentru a le delimita le vom nota cu $T : V \to V$ şi evident avem că $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$; $\forall x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$.

Morfismele T le vom numi în continuare *transformări liniare.*

Să ne fixăm o bază în V, $B = \{e_{1,}, e_2, .., e_n\}$ şi $x = \sum x^i e_i$ un vector. Din liniaritatea lui T obţinem că $T(x) = \sum x^i T(e_i)$ şi deci T este bine determinată dacă cunoaştem vectorii

$$T(e_i) = a_i^1 e_1 + a_i^2 e_2 + ... + a_i^n e_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^j e_j \ \ , \ \forall i = 1, 2, ...n.$$

Obţinem astfel o matrice $A = \left(a_i^j\right)$ în care coloana i este scrierea lui $T(e_i)$ după baza B.

Dacă notăm matricial componentele vectorului x ca fiind coloana cu

$(x^1 \ x^2 \quad x^n)^t = X$, atunci matriceal transformarea liniară este coloana

$$Y = T(X) = A.X$$

şi deci o transformare liniară într-o bază se scrie ca un sistem liniar

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + & a_2^1 x^2 + & .... & a_n^1 x^n & = & y^1 \\ .... & ..... & ... & ... & .. & . \\ a_1^n x^1 + & a_2^n x^2 + & ... & a_n^n x_n & = & y^n. \end{cases}$$

Astfel, variind liniar variabilele $x^1, x^2, .., x^n$ obţinem diverse răspunsuri despre fenomenul studiat. De aici interesul pentru astfel de aplicaţii.

Dacă schimbăm baza $B \to B'$ cu matricea S obţinem vectorul $Y' = T(X') = A'.X'$. Ne interesează ce legătură există între A şi A'. Răspunsul îl găsim dacă ţinem cont că $X = S.X'$ şi analog $Y = S.Y'$. Traducem faptul că $Y = A.X$ şi obţinem

$$A' = S^{-1}.A.S. \tag{3.1.1}$$

Definiţie. Două matrice A şi A' pentru care există S cu $A' = S^{-1}.A.S$ se numesc matrice asemenea.

Dezvoltat condiţia de matrice asemenea se scrie $a'^{i}_{j} = \sum_{i.j=1}^{n} s^h_i \overset{*}{s}{}^j_k \, a^k_h$.

Definiţie. Se numeşte *rangul* transformării liniare T dimensiunea lui $T(V)$, notat $rangT$. Se numeşte *defectul* lui T dimensiunea lui $KerT$, notat $defT$.

Propoziţia 1. Avem

$$\dim V = rangT + defT. \tag{3.1.2}$$

De notat că liniara dependenţă a vectorilor lui $Im\ T$ implică liniara dependenţă a coloanelor matricei A a lui T într-o bază. Din condiţia de matrice asemenea deducem că acest rang nu depinde de baza aleasă şi deci $rangT$ este dat de rangul matricei A într-o bază fixată.

Putem stabili o bijecţie între $\mathcal{L}(V,V)$ şi matricele patratice $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ şi deci $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$.

Afirmaţiile se pot extinde pentru $\mathcal{L}(V,W)$ cu $\dim V = n$ şi $\dim W = m$. Atunci $\dim \mathcal{L}(V,W) = m.n$

3.1.2 Vectori şi valori proprii

Fie V un spaţiu vectorial, $\dim V = n$, şi $T \in \mathcal{L}(V,V)$ o transformare liniară.

Ne interesează să determinăm acele subspaţii ale lui V care sunt păstrate (lăsate invariante) prin T.

Definiţie. Un vector $x \in V$ se numeşte *vector propriu* pentru T dacă există $\lambda \in K$ astfel ca $T(x) = \lambda x$.

Scalarul λ se numeşte *valoare proprie* corespunzătoare lui x.

De fapt, pentru un λ dat putem vorbi nu numai de un vector propriu x ci de un subspaţiu propriu

$$V_\lambda = \{x \in V \ / \ T(x) = \lambda x\} \tag{3.1.3}$$

acesta fiind lăsat pe loc prin transformarea T. Din liniaritatea lui T verficăm uşor că V_λ este subspaţiu în V.

Dacă lucrăm matricial într-o bază atunci $T(x) = \lambda x$ ne dă $A.X = \lambda X$, adică sistemul liniar omogen

$$(A - \lambda I)X = 0. \tag{3.1.4}$$

El are soluţii nenule dacă

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

$p(\lambda)$ este un polinom de grad n în λ numit *polinom caracteristic.*

Dezvoltat acest polinom caracteristic se poate scrie ca

$p(\lambda) = (-1)^n\{\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - ... + (-1)^n\delta_n\}$,

unde $\delta_1 = TraceA = a_1^1 + a_2^2 + ... + a_n^n$, $\delta_2 =$ suma minorilor de ordin doi de pe diagonala lui $A, ..., \delta_n = \det A$.

Printre rădăcinile din K ale polinomului $p(\lambda) = 0$ găsim şi valorile proprii ale transformării liniare T. Rezolvând sistemul $(A - \lambda I)X = 0$ pentru aceste valori proprii obţinem vectorii proprii (subspaţiile proprii) corespunzători.

Propoziţia 1. Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.

Demonstraţie. Fie $A' = S^{-1}.A.S$ şi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $p'(\lambda) = \det(A' - \lambda I)$.

Avem $p'(\lambda) = \det(A' - \lambda I) = \det(S^{-1}.A.S - \lambda I) = \det S^{-1}.(A - \lambda I).S = \det S^{-1}. \det(A - \lambda I). \det S = p(\lambda)$ deoarece $S.S^{-1} = I$.

Consecinţă. 1. Polinomul caracteristic al unei transformări liniare nu depinde de baza aleasă.

2. Mulţimea valorilor proprii (spectrul) lui T nu depinde de baza aleasă.

3. Urma $TraceA$ (suma elementelor de pe diagonala principală) a două matrice asemenea este aceeaşi.

Teorema. (Hamilton-Cayley). Orice matrice îşi satisface propriul polinom caracteristic, adică

$p(A) = (-1)^n\{A^n - \delta_1A^{n-1} + \delta_2A^{n-2} - ... + (-1)^n\delta_nI\} = 0.$

Nu insistăm la acest curs asupra demonstraţiei.

În concluzie, pentru a determina vectorii proprii întâi rezolvăm ecuaţia caractristică $\det(A - \lambda I) = 0$, soluţiile din corpul K ale sale sunt valorile proprii, apoi pentru fiecare valoare proprie găsită determinăm subspaţiile proprii corespunzătoare rezolvând sistemul $(A - \lambda I)X = 0$. Este posibil ca o valoare proprie să fie rădăcină multiplă a ecuaţiei caracteristice. Se demonstrează că dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător unei valori proprii nu depăşeşte ordinul de multiplicitate al acelei valori proprii. Deci dacă rădăcina este simplă (nu este multiplă) atunci subspaţiile proprii vor fi de dimensiune unu, adică generate de un singur vector propriu. Dacă rădăcina este multiplă de ordin k atunci subspaţiul propriu corespunzător va avea dimensiunea $\leq k$, deci este generat de cel mult k vectori proprii liniar independenţi.

Deoarece aici doar repetăm chestiuni de algebră liniară este util să ilustrăm aceste idei printr-un exemplu.

Aplicaţie. Arătaţi că $T(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$ este o transformare liniară în R^3.

a) Determinaţi $T(1, 0, -1)$

b) Scrieţi matricea lui T în baza canonică din R^3 şi în baza $B' = \{e_1' = (-1, 1, 1), e_2' = (1, 2, -1), e_3' = (1, 2, 3)\}$.

c) Găsiţi valorile şi vectorii proprii ai transformării.

Soluţie. Se verifică direct luând $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3)$ că $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

a) $T(1, 0, -1) = (1, 0, -1)$, deci este vector propriu pentru $\lambda = 1$

b) Matricea A în baza canonică $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ se obţine calculând $T(e_1) = (1, 1, 0)$, $T(e_2) = (1, 0, 1)$, $T(e_3) = (0, 1, 1)$ şi deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matricea S a schimării de baze $B \to B'$ este $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi deci $A' = S^{-1}A.S$, calcul direct.

c) Rezolvăm ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$, adică $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Obţinem $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, valorile proprii.

Pentru $\lambda_1 = 1$ sistemul $(A - \lambda I)X = 0$ devine $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ cu soluţia $V_{\lambda_1} = \{(\alpha, 0, -\alpha)\}$.

(pentru $\alpha = 1$ se obţine cazul a)).

Pentru $\lambda_2 = -1$ sistemul $(A - \lambda I)X = 0$ devine $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ cu soluţia $V_{\lambda_2} = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha)\}$.

Pentru $\lambda_3 = 2$ sistemul $(A - \lambda I)X = 0$ devine $\begin{cases} -x_1 + \quad x_2 \qquad\quad = 0 \\ x_1 + \quad -2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - \quad x_3 = 0 \end{cases}$
cu soluţia $V_{\lambda 3} = \{(\alpha, \alpha, \alpha)\}$.

Acestea sunt subspaţiile proprii din care putem extrage spre exemplu următorii vectori proprii $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (1, 1, 1)$.

3.1.3 Forma diagonală a unei matrice

Să considerăm $A = (a^i_j)$ o matrice pătratică de ordin n. Evident ea poate fi privită ca matricea unei transformări liniare $T : V \to V$, într-o bază dată $B = \{e_1, ..., e_n\}$.

Ne interesează dacă există o matrice A' asemenea cu A, adică $A' = S^{-1}.A.S$, astfel încât A' să fie matrice diagonală, $A' = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$. Amintim că în matricea unei transformări liniare coloana i este dată de scrierea lui $T(e_i)$ în acea bază.

Problema se reduce la a găsi o bază $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ pentru care $T(e'_i) = \lambda_i e'_i,\ \ \forall i = 1, 2, .., n$. Aceasta însemnă că e'_i sunt vectori proprii pentru acea transformare.

În general problema nu are soluţie deoarece nu întodeauna putem determina n vectori proprii liniar independeţi, deci care să formeze bază şi S să fie matricea de trecere de la $B \to B'$. Următorul răspuns e apoape evident:

Propoziţia 1. a) Dacă rădăcinile polinomului caracteristic sunt toate simple şi aparţin lui K, atunci există forma diagonală, dată chiar de aceste valori proprii.

b) Dacă polinomul caracteristic are rădăcini multiple şi sunt toate din K, atunci matricea A admite forma diagonală dacă şi numai dacă ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor polinomului caracteristic coincid cu dimensiunile subspaţiilor proprii corespunzătoare.

La cursul de Algebră liniară s-a dovedit că dacă nu avem această situaţie există o matrice un pic mai complicată decât cea diagonală, numită forma Jordan, care să fie asemenea cu A.

În aplicaţia din secţiunea precedentă, valorile proprii sunt toate reale şi distincte, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, deci matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admite forma diagonală $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Legătura între A şi A' este $A' = S^{-1}.A.S$, unde S este matricea de trecere de la baza canonică B la baza B' a vectorilor proprii $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (1, 1, 1)$, adică $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

O obsevaţie merită atenţie. Lucrăm în spaţiul R^3 care am vazut că poate fi dotat cu un produs scalar, produsul scalar uzual $< x, y >= x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$. Se observă cu uşurinţă că $< v_1, v_2 >= 0$, $< v_1, v_3 >= 0$, $< v_2, v_3 >= 0$ şi deci baza vectorilor proprii este ortogonală. Cum subspaţiile proprii sunt generate de aceşti vectori în locul lor în B' am putea lua versorii lor, adică

$B' = \{e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$, care este o bază ortonormată.

Matricea S devine $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Se verifică destul de repede că $S.S^t = I$ şi deci $S^{-1} = S^t$, astfel că $A' = S^t.A.S$.

Întrebarea este: Putem face un astfel de raţionament întodeauna?.

Răspunsul îl găsim în secţiunea următoare.

3.2 Transformări în spaţii euclidiene

O să discutăm aici două clase de transformări. Prima clasă este într-un context mai larg al spaţiilor unitare şi a doua doar pentru spaţii euclidiene.

3.2.1 Transformări hermitiene

Fie $U = (V, <, >)$ un spaţiu unitar, deci scalarii sunt numere complexe. Prin restrângere la numere reale vom obţine afirmaţii valabile şi pentru spaţii euclidiene.

Definiţie. Se numeşte *transformare adjunctă* unei transformări liniare $T : V \to V$ o transformare liniară $T^* : V \to V$ ce satisface condiţia

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) >, \quad \forall x, y \in V.$$

Observăm că dacă există T^* atunci adjuncta sa este T.

Problema principală este existenţa lui T^*. Vom dovedi acest lucru în cazul finit dimensional

Teorema 1. Fie $U = (V, <, >)$ un spaţiu unitar, $\dim V = n$, şi $T \in \mathcal{L}(V, V)$ o transformare liniară.

Dacă $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază ortonormată din V în care T are matricea $A = (a^i_j)$, atunci există T^* şi matricea sa în baza B este $A^* = \overline{A}^t$, adică elementele sale se obţin prin transpunerea conjugatelor complexe din A.

Demonstraţie. Fie $B = \{e_i\}_{i=1,n}$ o bază ortonormată în V şi $T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_j^i e_i$ iar $T^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_j^{*i} e_i$. Căutăm $A^* = (a_j^{*i})$. Pentru aceasta e suficient să traducem condiţia de transformare adjunctă pentru vectorii bazei B, adică $< T(e_j), e_k >=< e_j, T^*(e_k) >$. De aici rezultă ţinând cont de $< x, \alpha y >= \bar{\alpha} < x, y >$ că $\sum_{i=1}^{n} a_j^i < e_i, e_k >= \sum_{i=1}^{n} \overline{a_k^{*i}} < e_j, e_i >$. Din faptul că baza aleasă este ortonormată, $< e_i, e_k >= \delta_{ik}$, deducem că $a_j^k = \overline{a_k^{*j}}$ şi deci $a_k^{*i} = \overline{a_j^k}$, astfel că $A^* = \overline{A}^t$. Existenţa lui A^* atrage exisitenţa lui T^*.

Prin particularizare la spaţii euclidiene, obţinem că $A^* = A^t$.

Din liniaritatea lui T se verifică uşor următoarele afirmaţii:

Propoziţia 1. Dacă T_1^* şi T_2^* sunt adjunctele lui T_1 şi T_2, atunci

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^* \ ; \ (T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^* \ ; \ (\alpha T)^* = \alpha T^*.$$

Definiţie. Transformarea liniară T se numeşte *hermitiană* dacă $T^* = T$.

Aceasta evident implică $< T(x), y >=< x, T(y) >, \quad \forall x, y \in V$ şi deci într-o bază ortonormată avem $A = \overline{A}^t$. În particular, prin reducere la cazul spaţiilor euclidiene condiţia de matrice hermitiană se reduce la faptul că matricea este simetrică, $A = A^t$.

Teorema 2. $T \in \mathcal{L}(V, V)$ o transformare hermitiană, atunci:

a) Toate valorile sale proprii sunt reale.

b) La valori proprii distincte corespund subspaţii proprii ortogonale.

c) Există o bază ortonormată a vectorilor proprii în care matricea transformării să fie diagonală.

Demonstraţie. a) Fie λ valoare proprie corespunzătoare lui x, adică $T(x) = \lambda x$, $x \neq 0$. Din $< T(x), x >=< x, T(x) >$ rezultă că $< \lambda x, x >=< x, \lambda x >$ şi deci $\lambda < x, x >= \bar{\lambda} < x, x >$, adică $\lambda = \bar{\lambda}$ şi deci $\lambda \in \mathbf{R}$.

b) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii corespunzătoare lui x_1 şi x_2, $T(x_1) = \lambda x_1$, $T(x_2) = \lambda x_2$. Traducem condiţia de transformare hermitiană $< T(x_1), x_2 >=< x_1, T(x_2) >$ şi din faptul că valorile proprii sunt reale obţinem $(\lambda_1 - \lambda_2) < x_1, x_2 >= 0$, adică $< x_1, x_2 >= 0$. Deci vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali, prin urmare şi subspaţiile proprii ale lor sunt ortogonale.

c) Doar schiţăm ideia de demonstraţie. Dacă λ_1 este rădăcină simplă atunci subspaţiul sau propriu $V_{\lambda_1} = \ker(T - \lambda_1 I)$ are dimensiunea 1 şi deci este generat de un vector $\{e_1\}$ pe care putem să-l presupunem unitar. Dacă λ_k este rădăcină multiplă de ordin k atunci subspaţiul sau propriu $V_{\lambda_k} =$

$\ker(T - \lambda_1 I)$ ar putea să aibă dimensiune mai mică decât k şi deci în final să nu putem forma o bază a vectorilor proprii. Să arătăm că aşa ceva nu se poate. Considerăm $V_{\lambda_k}^{\perp}$ complementul său ortogonal şi demonstrăm că acesta este invariant la T. Într-adevăr $\forall x \in V_{\lambda_k}$ şi $y \in V_{\lambda_k}^{\perp}$ avem că $0 =< (T - \lambda_k I)x, y >=< x, (T - \lambda_k I)y >$ şi deci $y \in V_{\lambda_k}$. Restricţiile lui T la V_{λ_k} şi la $V_{\lambda_k}^{\perp}$ la rândul lor vor îndeplini condiţii asemănătoare privind rădăcinile multiple. În final obţinem o bază a vectorilor proprii care din construcţia făcută se poate considera ortonormată.

De notat că punctul c) al teoremei ne asigură că *dacă o matrice este simetrică şi reală atunci ea admite formă diagonală într-o bază ortonormată a vectorilor proprii.*

3.2.2 Transformări ortogonale

Fie $T \in \mathcal{L}(V, V)$ o transformare liniară în spaţiul euclidian $(V, <, >)$.

Definiţie. Transformarea T se numeşte *ortogonală* dacă păstrează produsul scalar, adică

$$< T(x), T(y) >=< x, y > \ , \ \forall x, y \in V.$$

Propoziţia 1. a) Orice transformare ortogonală păstrează distanţele şi unghiurile.

b) Orice transformare ortogonală este bijectivă.

Demonstraţia rezultă din definiţie, luând $x = y \Rightarrow \| T(x) \| = \| x \|$ şi din faptul că $\cos\alpha = \frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$.

Bijectivitatea rezultă din faptul că presupunând $T(x) = 0 \Rightarrow \| T(x) \| = \| x \| = 0$ şi deci $KerT = \{0\}$.

Afirmăm că dacă o transformare liniară păstrează distanţele atunci ea este ortogonală şi deci va păstra şi ungiurile. Demonstraţia rezultă din următorul calcul. Avem $\| T(x) \| = \| x \|$, $\forall x \in V$. Înlocuind pe $x \to x + y$ deducem din liniaritatea lui T că $\| T(x) + T(y) \| = \| x + y \|$, adică $< T(x) + T(y), T(x) + T(y) >=< x + y, x + y >$. Dezvoltând calculul şi ţinând cont că $\| T(x) \| = \| x \|$ şi $\| T(y) \| = \| y \|$, rezultă că $< T(x), T(y) >=< x, y >$, adică transformarea este ortogonală.

O transformare care păstrează distanţele se mai numeşte *izometrie*. În concluzie, t*ransformările liniare ortogonale coincid cu izometriile.*

Propoziţia 2. Mulţimea izometriilor lui $(V, <, >)$ formează grup în raport cu compunerea lor, numit *grupul ortogonal* $GO(V)$.

Demonstraţie. $< (T_1 \circ T_2)(x), (T_1 \circ T_2)(y) >= < T_1(T_2(x)), T_1(T_2(y)) >= < T_1(x), T_1(y) >=< x, y >$.

Cum T este bijectivă, se deduce imediat structura de grup.

Propoziţia 3. O izometrie duce baze ortonormate în baze ortonormate.

Propoziţia 4. Singurele valori proprii ale unei izometrii sunt ± 1.

Demonstraţie. Fie λ valoare proprie pentru x, adică $T(x) = \lambda x$. Înlocuind în $\| T(x) \| = \| x \|$ rezultă că $|\lambda| = 1$ şi deci $\lambda = \pm 1$. Evident ele pot fi rădăcini multiple.

Definiţie. O matrice pătratică A se numeşte *ortogonală* dacă $A.A^t = I$.

Avem de aici că $(\det A)^2 = 1$, deci este inversabilă şi avem $A^t = A^{-1}$, prin urmare şi $A^t.A = I$.

Teorema 1. Matricea schimbării a două baze ortonormate este o matrice ortogonală.

Demonstraţie. Fie $B = \{e_i\}_{i=1,n}$ şi $B' = \{e'_i\}_{i=1,n}$ baze ortonormate şi $e'_k = \sum_{i=1}^n s_k^i e_i$.

Din $\delta_{kh} =< e'_k, e'_h >=< \sum_{i=1}^n s_k^i e_i, \sum_{j=1}^n s_h^j e_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_k^i s_h^j < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_k^i s_h^j \delta_{ij}$ deducem că $\sum_{i=1}^n s_k^i s_h^i = \delta_{kh}$, sau matricial scris $S.S^t = 1$.

Teorema 2. Matricea unei transformări ortogonale într-o bază ortonormată este o matrice ortogonală.

Demonstraţie. Fie $B = \{e_i\}_{i=1,n}$ bază ortonormată, $< e_i e_j >= \delta_{ij}$. Fie $T(e_k) = \sum_{i=1}^n a_k^i e_i$. Din $< T(e_k), T(e_h) >=< e_k, e_h >$ deducem că $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_k^i a_h^j < e_i, e_j >=< e_k, e_h >$, adică $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_k^i a_h^j \delta_{ij} = \delta_{kh}$, şi deci $\sum_{i=1}^n a_k^i a_h^i = \delta_{kh}$, sau matricial scris $A.A^t = I$.

Dacă $\det A = 1$ transformarea se numeşte *rotaţie* (justificarea o vom vedea în planul şi spaţiul euclidian), iar dacă $\det A = -1$ transformarea se numeşte *antideplasare (simetrie).*

Vom încerca să dăm un exemplu de antideplasare.

Definiţie. Fie S_p subspaţiu p dimensional în $(V, <, >)$, $v \in V$ şi $w = pr_{S_p} v$, $w^\perp = v - w$.

Numim *simetrie* faţă de subspaţiul S_p aplicaţia $\mathcal{S} : v \to w - w^\perp = 2w - v$, adică $\mathcal{S} = 2pr_{S_p} - Id$.

Intuitiv avem desenul de mai jos:

Propoziţia 5. Simetria faţă de un subspaţiu este o transformare ortogonală involutivă.

Demonstraţie. Din $\mathcal{S}(v) = w - w^{\perp} = 2w - v$, avem în primul rănd că transformarea este liniară şi că

$\| \mathcal{S}(v) \|^2 = < w - w^{\perp}, w - w^{\perp} > = \| w \|^2 + \| w^{\perp} \|^2 = \| v \|^2$ adică transformarea este ortogonală $\| \mathcal{S}(v) \| = \| v \|$.

În plus, $\mathcal{S}^2(v) = \mathcal{S}(2w - v) = 2\mathcal{S}(w) - \mathcal{S}(v) = 2w - (2w - v) = v$, adică $\mathcal{S}^2 = I$, deci involutivă.

Să particularizăm. Fie $B_S = \{e_i\}_{i=\overline{1,p}}$ bază ortonormată în S pe care o completăm la o bază ortonormată în $V, \dim V = n$, adică $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Vectorul $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ se proiectează pe $w = \sum_{i=1}^{p} < v^i, e_i > e_i$. În baza ortonormată B matricea simetriei $\mathcal{S}$ va fi $\mathcal{S}(e_\alpha) = e_\alpha$ pentru $\alpha = \overline{1,p}$ şi $\mathcal{S}(e_{p+k}) = -e_{p+k}$ pentru $k = \overline{1, n-p}$, astfel că $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$, cu $\det A = (-1)^{n-p}$.

Dacă S_p este un hiperplan ($p = n - 1$), atunci simetria are $\det A = -1$.

Concluzia ar fi:

Teorema 3. Orice transformare ortogonală este rotaţie, simetrie faţă de un hiperplan sau compunerea lor.

Compunerea a două simetrii faţă de hiperplane este de determinant 1, deci rotaţie. Invers nu rezultă. Totuşi are loc următoarea afirmaţie:

Teoremă (Cartan). Orice transformare ortogonală într-un spaţiu euclidian $(V, <,>)$ cu n dimensiuni este compunerea a cel mult n simetrii faţă de hiperplane.

3.3 Transformări afine

Fie $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \varphi, V)$ şi $\mathcal{A}' = (\mathcal{M}', \varphi', V')$ două spaţii afine peste acelaşi corp. Fixând un punct O combinaţia liniară afină $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ cu $\alpha + \beta = 1$ nu depinde de alegerea lui O şi vom scrie afin că $C = \alpha A + \beta B$.

Definiţie. Se numeşte *aplicaţie afină* o aplicaţie $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ce satisface:

$$\tau(\alpha A + \beta B) = \alpha\tau(A) + \beta\tau(B)\ ,\ \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ şi } \alpha + \beta = 1.$$

Propoziţia 1. $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ este afină dacă şi numai dacă aplicaţia $T : V \to V'$

$$T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}\ ,\ \forall A, B \in \mathcal{A}$$

este aplicaţie liniară de spaţii vectoriale.

Demonstraţie. Presupunem τ afină şi O fixat, $T(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$.

Arătăm că $T(\alpha\overrightarrow{OA}) = \alpha T(\overrightarrow{OA})$. Fie $\alpha\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, deducem că O, A, B sunt coliniare şi deci $B = (1-\alpha)O + \alpha A$. Deoarece τ este afină, rezultă că $\tau(B) = \tau((1-\alpha)O + \alpha A) = (1-\alpha)\tau(O) + \alpha\tau(A)$, din care obţinem $\tau(B) - \tau(O) = \alpha(\tau(A) - \tau(O))$ şi deci $\overrightarrow{\tau(O)\tau(B)} = \alpha\overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$, adică $T(\alpha\overrightarrow{OA}) = \alpha T(\overrightarrow{OA})$.

Calculăm acum $T(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Fie $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ şi alegem $\lambda \neq 1, 0$. Notăm $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OB}$. Obţinem că $\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA'} + \lambda\overrightarrow{OB'}$, astfel că $\tau(C) = (1-\lambda)\tau(A') + \lambda\tau(B')$, din care se obţine că $\overrightarrow{\tau(O)\tau(C)} = (1-\lambda)\overrightarrow{\tau(O)\tau(A')} + \lambda\overrightarrow{\tau(O)\tau(B')}$. Acum, ţinând cont de prima parte a demonstraţiei, se obţine $T(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = T(\overrightarrow{OA}) + T(\overrightarrow{OB})$.

Demonstraţia nu depinde de alegerea lui O deoarece $T(\overrightarrow{AB}) = T(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(B)} - \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)} = \overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}$.

Am demonstrat astfel că T este o aplicaţie liniară. Observăm că această aplicaţie liniară transferă noţiunea de liniaritate de la spaţii afine la spaţiul vectorial asociat.

Aplicaţia afină τ se zice că este bijectivă dacă şi numai dacă aplicaţia liniară T asociată este bijectivă.

Definiţie. Se numeşte *transformare afină* o aplicaţie afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, bijectivă pe un spaţiu de dimenisiune finită.

Teorema 1. Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_i\}_{i=1,n}$ un reper afin în spaţiul $\mathcal{A}$.

$\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este transformare afină dacă şi numai dacă

$$x'^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + a^i_0 \ ; \ \det(a^i_j) \neq 0 \ ; \ \forall i = \overline{1, n}, \tag{3.3.1}$$

unde (a^i_0), (x^i), (x'^i) sunt coordonatele punctelor $O' = \tau(O)$, M, şi respectiv $M' = \tau(M)$ în reperul dat $\mathcal{R}$.

Demonstraţie. Presupunem τ afină şi T transformarea liniară asociată lui τ. Rezultă că $\overrightarrow{O\tau(M)} = \overrightarrow{O\tau(O)} + \overrightarrow{\tau(O)\tau(M)}$. Traducând această relaţie în reperul $\mathcal{R}$ şi ţinem cont că $\overrightarrow{\tau(O)\tau(M)} = T(\overrightarrow{OM}) = T(\sum_{j=1}^n x^j e_j) = \sum_{ij,=1}^n x^j a^i_j \vec{e}_i$, obţinem exact condiţia (3.3.1) din teoremă.

Reciproc, presupunem adevărată condiţia din enunţ (3.3.1) şi arătăm că τ este o transformare afină. Fie $A(x^i), B(y^i)$ şi $\alpha, \beta \in K$ cu $\alpha + \beta = 1$.

Dacă $C = \alpha A + \beta B$ atunci fie $z^i = \alpha x^i + \beta y^i$ coordonatele lui C. Coordonatele lui $C' = \tau(C)$ vor fi

$$z'^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j z^j + x^i_0 = \alpha \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^i + \beta \sum_{j=1}^{n} a^i_j y^j + x^i_0$$

$= \alpha(\sum_{j=1}^n a^i_j x^j + x^i_0) + \beta(\sum_{j=1}^n a^i_j y^j + x^i_0) = \alpha x'^i + \beta y'^i$ şi deci $\tau(C) = \alpha\tau(A) + \beta\tau(B)$ cu $\alpha + \beta = 1$, adică τ este afină. Condiţia $\det(a^i_j) \neq 0$, asigură faptul că transformarea este bijectivă.

Matricial condiţia (3.3.1) se scrie

$$X' = A.X + A_0 \ \ , \ \ \det A \neq 0. \tag{3.3.2}$$

Observaţie. O transformare afină determină o schimbare de repere afine (vezi Cap.2), $X = S.X' + S_0$, unde $S = A^{-1}$, $S_0 = A^{-1}.X_0$, şi reciproc. În unele cazuri vom avea nevoie de ambele situaţii.

Teorema 2. Mulţimea transformărilor afine pe $\mathcal{A}$ admite o structură de grup, numit *grupul afin.*

Demonstraţie. Dacă $X' = A.X + A_0$ şi $X'' = A'.X' + A'_0$ sunt două transformări afine, atunci compunerea lor $X'' = A'.AX + (A_0.X_0 + X'_0)$ este tot o transformare afină. Transformarea identică este $X' = I.X$, iar inversa este $X = S.X' - S_0$.

Definiţie. Se numeşte *translaţie* în spaţiul afin $\mathcal{A}$ transformarea

$$X' = X + X_0. \tag{3.3.3}$$

Se numeşte *centro-afinitate* o transformare afină pentru care $\tau(O) = O$, adică

$$X' = A.X \ , \quad \det A \neq 0. \tag{3.3.4}$$

Teorema 3. a). Mulţimea translaţiilor unui spaţiu afin formează grup în raport cu compunerea, grupul translaţiilor.

b). Mulţimea centro-afinităţilor unui spaţiu afin formează grup în raport cu compunerea, grupul centro-afin.

c). Orice transformare afină este o compunere dintre o translaţie şi o centro-afinitate.

Demonstraţia este imediată.

Dacă spaţiul afin este şi cu structură euclidiană un interes deosebit îl reprezintă care din aceste transformări sunt şi izometrii. Aceste transformări pot fi interpretate ca translaţii, rotaţii şi simetrii faţă de hiperplanele reperelor afine asociate.

Orice translaţie este o izometrie a spaţiului, afirmaţia fiind imediată. Pentru cento-izometrii vom exemplifica acest lucru în cazul planului şi spaţiului euclidian în secţiunea următoare.

3.3.1 Izometriile planului şi spaţiului euclidian

Deoarece translaţia de repere afine este izometrie, ne rămâne pentru început să vedem care sunt centro-izometriile planului euclidian $\mathcal{E}_2$.

Am văzut că matricea de trecere de la o bază ortonormată la alta este o matrice ortogonală. Să considerăm în plan reperele ortonormate $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$ şi $\mathcal{R}'(O,\vec{i}',\vec{j}')$, cu matricea de trecere $S = (s^i_j)$ dată de

$$\vec{i}' = s^1_1\vec{i} + s^2_1\vec{j} \ ; \ \vec{j}' = s^1_2\vec{i} + s^2_2\vec{j}$$

Această matrice trebuie să fie ortogonală deoarece duce bază ortonormată în bază ortonormată, adică $S \cdot S^t = I$ şi $S^t \cdot S = I$, condiţii ce se traduc prin:

$$\begin{aligned}(s^1_1)^2 + (s^2_1)^2 &= 1 \ ; \ s^1_1 s^1_2 + s^2_1 s^2_2 = 0 \ ; \ (s^1_2)^2 + (s^2_2)^2 = 1 \ ; \\ (s^1_1)^2 + (s^1_2)^2 &= 1 \ ; \ s^1_1 s^2_1 + s^1_2 s^2_2 = 0 \ ; \ (s^2_1)^2 + (s^2_2)^2 = 1 \ .\end{aligned}$$

Prima condiţie ne sugerează să luăm $s^1_1 = \cos\alpha$ şi $s^2_1 = \varepsilon_1 \sin\alpha$.

Analizând în întregime condiţiile date, se obţine că

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \varepsilon_1 \sin\alpha \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin\alpha & \varepsilon_2 \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ unde } \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1, \ \alpha \in [0,\pi] \, . \tag{3.3.5}$$

Acestea sunt toate matricele ortogonale de ordin doi.

Să vedem ce semnificaţie poartă ele. Ele pot fi rotaţii sau simetrii faţă de drepte în planul euclidian.

Într-adevăr, dacă notăm cu $\omega \in [0, \pi]$ unghiul orientat dintre $\vec{i}$ şi $\vec{i}'$ ca în desenul alăturat

obţinem că $\cos\omega = \vec{i} \cdot \vec{i}' = s_1^1$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \omega) = -\sin\omega = \vec{j}' \cdot \vec{i} = s_2^1$ şi $\cos\omega = \vec{j} \cdot \vec{j}' = s_2^2$, $\sin\omega = \vec{i}' \cdot \vec{j} = s_1^2$. Astfel că, o rotaţie de unghi $\omega \in [0, \pi]$ este o centro-izometrie a reperelor pentru $\alpha = \omega$ şi $-\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Schimbarea de coordonate a unui punct $M(x, y)$ exprimat în $\mathcal{R}$ şi $M(x', y')$ în $\mathcal{R}'$ este *rotaţia* $X = S.X'$

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Dacă $\vec{i}' = \vec{i}$ şi $\vec{j}' = -\vec{j}$ se obţine o simetrie faţă de axa Ox de matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar dacă $\vec{i}' = -\vec{i}$ şi $\vec{j}' = \vec{j}$ se obţine o simetrie faţă de axa Oy de matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ambele fiind ortogonale.

Compunând aceste transformări cu o rotaţie, eventual de unghi $\omega = 0$ (transformarea identică), se obţin toate semnele pentru matricele ortogonale S din (3.3.5).

Pe de altă parte, am văzut că o schimbare de repere afine poate fi privită şi ca o transformare centro-afină de matrice $S^{-1} = S^t$. Astfel că în reperul $\mathcal{R}$ unui punct $M(x, y)$ facem să-i corespundă printr-o rotaţie de unghi α punctul $M'(x', y')$ dat de $X' = S^t \cdot X$, adică desenul

unde

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Cu totul asemănător putem discuta de simetriile faţă de Ox şi respectiv Oy.

În concluzie,

Teorema 1. Toate centro-izometriile planului euclidian sunt: transformarea identică, rotaţiile de unghi orientat ω, simetriile faţă de axe şi compuneri ale lor.

Să vedem acum care sunt centro-izometriile spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$. Încercăm să abordăm problema tot în acelaşi mod. Să determinăm matricele S ortogonale de ordin trei ce schimbă reperele ortonormate $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ şi $\mathcal{R}'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$. Evident problema este mult mai dificilă, de aceea pentru a obţine o clasificare a centro-izometriilor ne vom rezuma la a observa întâi că o transformare ortogonală are ca valori proprii pe ± 1 şi deci putem alege o dreaptă Ox' pentru care $\vec{i}'$ este vector propriu corespunzător lui $+1$ sau -1. Cum restricţia unei transformări ortogonale la subspaţiul ortogonal acestei drepte este o transformare ortogonală în plan, putem afirma că astfel de matrici ortogonale sunt de forma

$$S = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \varepsilon_1 \sin\alpha \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin\alpha & \varepsilon_2\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

În concluzie, ele pot fi transformarea identică, simetrii faţă de plane (şi deci faţă de axe), rotaţii în plane perpendiculare pe axe sau compuneri ale lor.

Vom exemplifica printr-o schimbare de repere în spaţiu ce se descompune în trei rotaţii în plane perpendiculare pe axe, anume *Unghiurile lui Euler*.

Să obţinem rotaţia reperului $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ în $\mathcal{R}'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

Avem desenul:

unde $\varphi,\psi,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Vom descompune această schimbare de repere în trei schimbări succesive după cum urmează:

a) Pentru început rotaţia de unghi φ, $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})\overset{S_1}{\to}\mathcal{R}_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1=\vec{k})$ în planul xOy.

Ecuaţiile acestei rotaţii sunt $X=S_1\cdot X_1$

unde $S_1=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) Apoi, rotaţia de unghi θ, $\mathcal{R}_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)\overset{S_2}{\to}\mathcal{R}_2(O,\vec{i}_2=\vec{i}_1,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ în planul perpendicular pe $O\vec{i}_1$ (linia nodurilor). Ecuaţiile acestei rotaţii sunt

$X_1 = S_2 \cdot X_2$

unde $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Obţinem desenul

c) În final pentru a obţine schimbarea de repere propusă este nevoie să facem rotaţia de unghi ψ, $\mathcal{R}_2(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2) \overset{S_3}{\rightarrow} \mathcal{R}'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}' = \vec{k}_2)$ în planul perpendicular pe $O\vec{k}_2$.

Ecuaţiile acestei rotaţii sunt $X_2 = S_3 \cdot X'$

unde $S_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Transformarea în întregime este compunerea celor trei rotaţii $X = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot X'$.

3.3.2 Grupul asemănărilor

Am văzut că o transformare afină este compunerea a unei translaţii cu o centro-afinitate şi am studiat dintre centro-afinităţi doar izometriile.

Definiţie. Se numeşte *omotetie* de centru M_0 şi modul $\lambda \in R^*$ transformarea afină $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dată de $T(M) = M'$ astfel încât $\overrightarrow{M_0M'} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$. Într-un reper afin $\mathcal{R}$ din spaţiu această condiţie se scrie

$$x'^i = x_0^i + \lambda(x^i - x_0^i) \ \ , \ i = \overline{1, n}. \tag{3.3.7}$$

Dacă centrul de omotetie este O, obţinem $x'^i = \lambda x^i$.

Se verifică uşor că

Propoziţia 1. Mulţimea omotetiilor de centru M_0 formează grup în raport cu compunerea lor.

Mai mult, compunerea a două omotetii de module diferite este o omotetie de modul produsul modulelor celor două omotetii.

Definiţie. Numim *asemănare* de modul $\lambda \in R^*$ transformarea afină $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dată de $T(M) = M'$ astfel încât oricare ar fi două puncte M, N să avem $\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{MN}$. Într-un reper afin $\mathcal{R}$ din spaţiu această condiţie se scrie

$$y'^i - x'^i = \lambda(y^i - x^i) \ \ , \ i = \overline{1, n}. \tag{3.3.8}$$

Evident că omotetiile sunt asemănări particulare. Dacă spaţiul are şi structură euclidiană, trecând la norme obţinem că $|M'N'| = |\lambda| \, |MN|$.

Propoziţia 2. Mulţimea asemănărilor spaţiului afin formează grup în raport cu compunerea.

Deci asemănările în cazul euclidian amplifică distanţele cu $|\lambda|$. Se demonstrează ca în geometria sintetică că:

Propoziţia 3. Orice asemănăre este izometrie, omotetie sau compunere a lor.

Capitolul 4

Forme liniare, multiliniare şi pătratice

În acest scurt capitol vom repeta câteva noţiuni de algebră liniară şi vom justifica notaţiile utilizate până în prezent privind indicii unor mărimi întâlnite, este vorba de tensori afini.

4.1 Forme liniare

Fie V un $K-$ spaţiu vectorial.

Definiţie. Se numeşte *formă liniară* pe spaţiul vectorial V o transformare liniară $f : V \to K$.

Am preferat să tratăm aceste transformări liniare separat din motivele pe care le vom vedea.

Am afirmat în capitolul precedent că mulţimea transformărilor liniare $\mathcal{L}(V, W)$ are structură de spaţiu vectorial. În particular, pentru $W = K$, $\mathcal{L}(V, K)$ mulţimea formelor liniare are structură de spaţiu vectorial peste corpul K. Vom nota $\mathcal{L}(V, K) = V^*$ şi-l vom numi *spaţiul dual* spaţiului V, elementele sale sunt deci aplicaţii (forme) liniare.

Vom aborda în continuare cazul finit dimensional. Presupunem $\dim V = n$ şi $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în V, $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ un vector dat. Din liniaritatea lui f rezultă că $f(x) = f(\sum_{i=1}^n x^i e_i) = \sum_{i=1}^n x^i f(e_i)$ şi dacă definim $a_i = f(e_i)$, atunci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \tag{4.1.1}$$

expresia formei liniare $f \in V^*$ în baza B.

Această scriere se poate pune ca produsul unei matrice linie A cu una coloană X.

Deci oricărei forme liniare într-o bază îi corespunde o matrice linie cu n elemente, adică un element din R^n, corespondenţa fiind bijectivă. Deducem că $\dim V^* = n$. Ne-ar interesa determinarea unei baze în V^*. Pentru aceasta să considerăm formele de coordonate în baza B, $f^i : V \to K$ date de $f^i(x) = x^i$, $i = \overline{1,n}$.

Propoziţia 1. $B^* = \{f^i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază în V^*, numită *baza duală* lui B.

Demonstraţie. Să observăm că $f^i(e_j) = \delta^i_j$ şi că $\{f^i\}$ sunt liniar independente, deoarece $\alpha_1 f^1 + ... + \alpha_n f^n = 0$ aplicată oricarui e_j implică $\alpha_j = 0$.

Apoi, dacă considerăm $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, atunci $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, de unde $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f^i(x)$, şi deci orice formă liniară este o combinaţie liniară de $\{f^i\}_{i=\overline{1,n}}$, adică B^* este bază.

Teorema 1. Dacă $B \xrightarrow{S} B'$ este o schimbare de baze în V, atunci bazele duale se schimbă cu matricea inversă $B^* \xrightarrow{S^{-1}} B^{*\prime}$.

Demonstraţie. Fie $e'_j = \sum_{i=1}^n s^i_j e_i$ şi deci $x^i = \sum_{j=1}^n s^i_j x'^j$. Avem $f^i(x) = x^i = \sum_{j=1}^n s^i_j x'^j = \sum_{j=1}^n s^i_j f'^j(x)$. Astfel că baza veche se leagă de cea nouă cu matricea S şi deci cea nouă de cea veche cu S^{-1}.

Se poate verifica că $(V^*)^*$ este izomorf cu V şi în consecinţă se pot identifica.

4.2 Forme p-liniare

Vom generaliza definiţia de mai sus la produsul cartezian $V^p = V \times V \times ... \times V$.

Definiţie. Numim *formă $p-$ liniară* o transformare $f : V^p \to K$ liniară în fiecare argument.

Notăm $f \in \mathcal{L}_p(V, K)$ şi această mulţime este un spaţiu vectorial faţă de suma a două aplicaţii $p-$ liniare şi amplificarea cu scalari din K.

Presupunem $\dim V = n$ şi $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în V, $x_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^n x^{i_\alpha}_\alpha e_{i_\alpha}$, $\alpha = \overline{1,p}$, descompunerea a p vectori după baza B. Aici am folosit subindici pentru a nu-i confunda. Atunci din liniaritatea în fiecare argument vom avea

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = \sum_{i_1,i_2,...i_p=1}^{n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ....x_p^{i_p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}) \tag{4.2.2}$$

şi deci $p-$forma este perfect determinată dacă se cunosc

$$f(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}) = a_{i_1 i_2 ... i_p} \tag{4.2.3}$$

Astfel o $p-$ formă în baza B se va scrie

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = \sum_{i_1,i_2,...i_p=1}^{n} a_{i_1 i_2 ... i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ....x_p^{i_p}. \tag{4.2.4}$$

Ne interesează dimensiunea lui $\mathcal{L}_p(V, K)$ şi, de asemenea, cum arată o bază.

Pentru $p-$ forme liniare $g_1, ..., g_p$ definim produsul lor $g = g_1 \otimes ... \otimes g_p$ ca fiind aplicaţia

$$g(x_1, x_2, ..., g_p) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot .... \cdot g_p(x_p).$$

Propoziţia 1. $g = g_1 \otimes ... \otimes g_p$ este o formă $p-$liniară.

Demonstraţia este imediată din definiţia lui g şi faptul că fiecare din g_i erau forme liniare.

Fie V spaţiu de dimensiune $n, B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în V, $B^* = \{f^i\}_{i=\overline{1,n}}$ baza duală în V^*. Putem atunci face produse, numite *tensoriale*, de p din cele n forme liniare f^i, adică

$$f^{i_1 i_2 .... i_p} = f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes .... \otimes f^{i_p}. \tag{4.2.5}$$

Propoziţia 2. Mulţimea formelor p-liniare (4.2.5) formează o bază în spaţiul $\mathcal{L}_p(V, K)$.

Demonstraţie. Liniara independenţă se arată ca şi în cazul formelor liniare dar pe fiecare din componente. Să arătăm că generează întreg spaţiul $\mathcal{L}_p(V, K)$. Din (4.2.5) rezultă că $f^{i_1 i_2 .... i_p}(e_1, e_2, ..., e_p) = a_{i_1} a_{i_2} ....a_{i_p}$. Notăm pentru simplitate $a_{i_1} a_{i_2} ....a_{i_p} = a_{i_1 i_2 .... i_p}$ şi (4.2.4) ne spune că

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = \sum_{i_1,i_2,...i_p=1}^{n} a_{i_1 i_2 ... i_p} f^{i_1 i_2 .... i_p}(x_1, x_2, ...x_p)$$

astfel că orice $p-$ formă este o combinaţie liniară de $f^{i_1 i_2 \dots i_p}$.

Ca o consecinţă să observăm că $\dim \mathcal{L}_p(V, K) = n^p$.

Fie $B' = \{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o altă bază în V şi S matricea schimbării de baze, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} s_j^i e_i$. Are loc:

Propoziţia 3. La schimbări de baze $B \xrightarrow{S} B'$ componenta unei p-forme liniare se schimbă după legea:

$$a'_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{j_1, j_2, \dots j_p = 1}^{n} s_{i_1}^{j_1} s_{i_2}^{j_2} \dots . s_{i_p}^{j_p} a_{j_1 j_2 \dots j_p}. \tag{4.2.6}$$

În final putem observa că produsul tensorial se poate extinde asupra $p-$formelor.

Propoziţia 4. Fie $f \in \mathcal{L}_p(V, K)$ şi $g \in \mathcal{L}_q(V, K)$. Atunci definim

$$h(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) = f(x_1, ..., x_p) \cdot g(y_1, ..., y_q). \tag{4.2.7}$$

şi este o $(p+q)-$formă liniară notată $h = f \otimes g$, şi numită *produsul lor tensorial.*

Demonstraţia este imediată.

4.3 Tensori afini

În acest paragraf amintim întâi că până în prezent am întâlnit următoarele mărimi care la schimbări de baze $e'_j = \sum_{i=1}^{n} s_j^i e_i$ se transformă după regulile:

-vectorii, care se schimbau după regula $x'^i = \sum_{j=1}^{n} s_j^{*i} x^j$, unde $S^{-1} = (s_j^{*i})$;

-transformările liniare, pentru care $a'^i_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} s_j^k s_h^{*i} a_k^h$;

-formele $p-$liniare, pentru care avem formula (4.2.6).

Vom generaliza aceste reguli.

Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim V = n, B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în V, $B^* = \{f^i\}_{i=\overline{1,n}}$ baza duală în V^* spaţiul dual. Notăm cu $\overset{p}{\times} V^*$ şi $\overset{q}{\times} V$ produsele carteziene de p ori ale lui V^* şi de q ori ale lui V.

Definiţie. Numim *tensor afin* de tip (p, q) o formă $(p+q)-$ liniară $t : \left(\overset{p}{\times} V^*\right) \times \left(\overset{q}{\times} V\right) \to \mathbf{R}$.

Un tensor va fi perfect cunoscut în baza B şi B^* dacă se cunosc numerele reale

$$t(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_q}; f^{j_1}, f^{j_2}, ..., f^{j_p}) = t^{j_1 j_2 ... j_p}_{i_1 i_2 ... i_q} \tag{4.3.1}$$

numite *componentele* tensorului t în bazele date.

Să observăm că la schimbări de baze $e'_j = \sum_{i=1}^n s^i_j e_i$ şi $f'^j = \sum_{i=1}^n s^{*j}_i f^i$ vom avea transformările:

$$t'^{\,h_1 h_2 .. h_p}_{\,k_1 k_2 ... k_q} = \sum_{i_1,...i_p j_1..,j_q=1}^{n} s^{i_1}_{k_1} s^{i_2}_{k_2} .... s^{i_q}_{k_q} s^{*h_1}_{j_1} s^{*h_2}_{j_2} .... s^{*h_p}_{j_p} t^{j_1 j_2 ... j_p}_{i_1 i_2 ... i_q} \tag{4.3.2}$$

Teorema 1. Pentru ca un sistem de n^{p+q} numere să fie componentele unui tensor de tip $(p+q)$ este necesar şi suficient ca să avem (4.3.2).

Notăm cu ${}^p_q\mathcal{T}(V)$ mulţimea tensorilor de tip (p, q). Se zice că este de p ori *contravariant* şi de q ori *covariant.*

Să observăm că un vector este un tensor de tip $(1, 0)$, o transformare liniară defineşte un tensor de tip $(1, 1)$, iar o $q-$ formă defineşte un tensor covariant de tip $(0, q)$.

Fără dificultate verificăm că mulţimea tensorilor ${}^p_q\mathcal{T}(V)$ formează un spaţiu vectorial faţă de operaţiile $t_1 + t_2$ şi αt definite uzual, dimensiunea sa fiind n^{p+q}.

Am văzut că $\{ f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes .... \otimes f^{i_p}\}$ formează o bază în spaţiul $\mathcal{L}_p(V, R)$ izomorf cu $\overset{p}{\times} V^*$. Fie $\{e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes .... \otimes e_{j_q}\}$ baza duală în $\overset{q}{\times} V$. Fără a intra în detalii se verifică că

$$\{e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes .... \otimes e_{j_q} \otimes f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes .... \otimes f^{i_p}\}$$

este o bază în ${}^p_q\mathcal{T}(V)$.

Dacă notăm cu $\mathcal{T}(V)$ mulţimea tuturor tensorilor pe V, indiferent de tip, atunci pe $\mathcal{T}(V)$ putem defini operaţia de adunare a tensorilor (formal completând cu 0 dacă nu sunt de acelaşi tip) şi operaţia de amplificare cu scalari reali. Se verifică imediat axiomele de spaţiu vectorial pentru $\mathcal{T}(V)$. În plus putem defini produsul tensorial a doi tensori (vezi pentru $p-$ forme), ${}^p_q\mathcal{T}(V) \times^r_s \mathcal{T}(V) \to^{p+r}_{q+s} \mathcal{T}(V)$ prin

$$t^{j_1 ... j_p n_1 .. n_r}_{i_1 .. i_q m_1 .. m_s} = u^{j_1 ... j_p}_{i_1 .. i_q} v^{n_1 ... n_r}_{m_1 .. m_s}.$$

$\mathcal{T}(V)$ capătă astfel o structură de algebră , numită *algebra tensorială* a lui V.

Definiţie. O $p-$forma liniară se numeşte *simetrică* în indicii h şi k dacă

$$f(x_1,...,x_h,...,x_k,...,x_p)=f(x_1,...,x_k,...,x_h,...,x_p)$$

şi *complet simetrică* dacă este simetrică în orice doi indici.

Putem defini deci tensori complet simetrici, ei formând o subalgebră a algebrei tensoriale.

Definiţie. O $p-$formă liniară se numeşte *alternată* dacă pentru indicii h şi k avem

$$f(x_1,..,x_h,...,x_k,...,x_p)=-f(x_1,...,x_k,...,x_h,...,x_p)$$

Mulţimea formelor alternate formează spaţiu vectorial, dar în general nu este algebră faţă de produsul tensorial clasic. În schimb produsul

$$(f\wedge g)(x_1,..,x_p,x_{p+1},..,x_{p+q})=\frac{1}{p!q!}\sum_\sigma \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(p)})\cdot g(x_{\sigma(p+1)},..,x_{\sigma(q+q)})$$

sumat după permutările σ, este o formă alternată, numită *produsul exterior* al formelor date.

Algebra obţinută se numeşte algebra exterioară a lui V.

4.4 Forme pătratice

În acest paragraf vom trata întâi cazul particular al formelor biliniare şi apoi legat de cele simetrice vom defini o aplicaţie numită formă pătratică.

Pentru claritate amintim definiţia unei $2-$forme sau, aşa cum o vom numi în continuare, formă biliniară.

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K.

Definiţie. Numim *formă biliniară* o aplicaţie $f:V\times V\to K$ liniară în ambele argumente, adică:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y) &= \alpha_1f(x_1,y)+\alpha_2f(x_2,y)\\ f(x,\beta_1y_1+\beta_2y_2) &= \beta_1f(x,y_1)+\beta_2f(x,y_2). \end{aligned}$$

Forma biliniară se numeşte *simetrică* dacă $f(x,y)=f(y,x)$,$\forall x,y\in V$.

Mulţimea formelor biliniare $\mathcal{L}_2(V,K)$ formează un spaţiu vectorial în raport cu adunarea lor şi amplificarea cu scalari. Formele simetrice $\mathcal{L}_2\mathcal{S}(V,K)$ formează un spaţiu vectorial.

Să particularizăm discuţia la cazul finit dimensional.

Presupunem $\dim V = n$ şi $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în V, $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i$, descompunerea vectorilor x şi y după baza B. Din liniaritatea în fiecare argument vom avea

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j f(e_i, e_j) \tag{4.4.1}$$

şi deci forma biliniară este perfect determinată dacă se cunosc

$$f(e_i, e_j) = a_{ij} \tag{4.4.2}$$

Astfel o formă biliniară în baza B se va scrie

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j. \tag{4.4.3}$$

Forma biliniară va fi simetrică dacă $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$, $\forall i, j = \overline{1,n}$, şi deci $a_{ij} = a_{ji}$ astfel că matricea formei biliniare în baza B , adică $A = (a_{ij})$ este o matrice simetrică, $A = A^t$.

La schimbarea bazei $B \xrightarrow{S} B'$ coeficienţii a_{ij} ai formei biliniare se schimbă după regula

$$a'_{ij} = \sum_{k,h=1}^{n} s_i^k s_j^h a_{kh} \tag{4.4.4}$$

sau în scriere matricială

$$A' = S^t.A.S \tag{4.4.5}$$

unde S este matricea schimbării de baze.

Din (4.4.5) şi faptul că S este o matrice cu $\det S \neq 0$, rezultă că rangul matricei A este invariant la schimbări de baze.

Să extindem acum la corpul numerelor complexe condiţia de simetrie.

Definiţie. O aplicaţie $g : V \times V \to C$ se numeşte *formă hermitiană* peste spaţiul complex V, dacă:

$$\begin{aligned} g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 g(x_1, y) + \alpha_2 g(x_2, y) \\ g(x,y) &= \overline{g(y,x)}. \end{aligned}$$

Evident, liniaritatea în y se schimbă, adică: $f(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 f(x, y_1) + \bar{\beta}_2 f(x, y_2)$.

În baza B condiţia a doua se traduce prin $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$, adică matricea unei forme hermitiene satisface $G = \overline{G^t}$, iar la schimbări de baze avem $G' = S^t.g.\overline{S}$.

Să revenim la cazul formelor biliniare simetrice.

Definiţie. O aplicaţie $h : V \to K$ se numeşte *formă pătratică* pe V dacă există o formă biliniară simetrică $f \in \mathcal{L}_2\mathcal{S}(V, K)$ astfel încât

$$h(x) = f(x, x) \quad , \quad \forall x \in V. \tag{4.4.6}$$

Forma biliniară f se numeşte forma *polară* lui h.

Mulţimea $\mathcal{P}(V)$ a formelor pătratice formează un spaţiu vectorial peste K.

Propoziţia 1. Spaţiile $\mathcal{L}_2\mathcal{S}(V, K)$ şi $\mathcal{P}(V)$ sunt izomorfe.

Pentru demonstraţie să definim aplicaţia care face să-i corespundă oricărei forme biliniare simetrice f forma pătratică h. Ea este bijectivă cu inversa

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{h(x + y) - h(x) - h(y)\}.$$

Condiţiile de izomorfism se dovedesc imediat.

Să exprimăm într-o bază $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o formă pătratică. Din (4.4.1) deducem că

$$h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j f(e_i, e_j)$$

şi dacă $f(e_i, e_j) = a_{ij}$ atunci

$$h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j \text{ cu } a_{ij} = a_{ji} \tag{4.4.7}$$

este expresia formei pătratice în baza B.

Matricea $A = (a_{ij})$ a formei pătratice se schimbă după aceeaşi regulă (4.4.4).

Ne interesează în continuare existenţa unor baze în care maticea formei pătratice să fie diagonală, adică $A' = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ şi deci în acea bază $B' = \{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$ forma pătratică să se scrie:

$$h(x) = \lambda_1(x'^1)^2 + \lambda_2(x'^2)^2 + ... + \lambda_n(x'^n)^2. \tag{4.4.8}$$

O astfel de scriere se numeşte *expresie canonică* a formei pătratice.

Să observăm că deoarece rangul matricei A este un invariant, doar $r = rangA$ dintre aceşti scalari sunt nenuli.

Teorema 1. Orice formă pătratică admite o expresie canonică.

Pentru demonstraţie vom da două metode.

Metoda lui Gauss.

Teoremă. Fie $h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j$ o formă pătratică de rang r scrisă în baza $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Există o bază $B' = \{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$ în care forma pătratică să aibă expresie canonică $h(x) = \lambda_1 (x'^1)^2 + \lambda_2 (x'^2)^2 + ... + \lambda_r (x'^r)^2$.

*Demonstraţie.*Vom proceda inductiv. Dacă $n = 1$, atunci $h(x) = a_{11}(x^1)^2$ şi deci condiţia se verifică.

Presupunem problema rezolvată pentru $n = m - 1$ şi discutăm pentru $n = m$. Distingem următoarele situaţii:

Cazul a). $a_{11} \neq 0$. Atunci $h(x) = a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + .. + 2a_{1n}x^1x^n + h_1(\bar{x})$, unde $\bar{x} = (x_2, x_3, ..., x_m)$ şi $h_1(\bar{x}) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x^i x^j$ este o formă pa-tratică în $m - 1$ variabile.

Deoarece $a_{11} \neq 0$, putem scrie:

$h(x) = a_{11}^{-1}\{a_{11}^2(x^1)^2 + 2a_{11}a_{12}x^1x^2 + .. + 2a_{11}a_{1n}x^1x^n\} + h_1(\bar{x})$, adică

$h(x) = a_{11}^{-1}\{a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + .. + a_{1n}x^n\}^2 + h_1(\bar{x}) - h_2(\bar{x})$, unde $h_2(\bar{x})$ depinde doar de $(x_2, x_3, ..., x_m)$.

Dacă notăm $h_3(\bar{x}) = h_1(\bar{x}) - h_2(\bar{x})$ şi facem următoarea schimbare de coordonate, determinată de o schimbare de baze:

$$\left\{\begin{array}{c} \tilde{x}^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + .. + a_{1n}x^n \\ \tilde{x}^2 = x^2 \\ .... \\ \tilde{x}^n = x^n \end{array}\right. \quad \text{adică } \tilde{X} = S^{-1}.X$$

atunci $h(\tilde{x}) = a_{11}^{-1}(\tilde{x}^1)^2 + h_3(\tilde{x})$, unde $h_3(\tilde{x})$ este o nouă formă pătratică în $m-1$ variabile pentru care putem aplica procedeul inductiv. În final obţinem o expresie canonică în baza determinată de schimbările de coordonate.

Cazul b). $a_{11} = 0$ dar există un $a_{kk} \neq 0$. Considerăm în locul bazei iniţiale baza $B' = \{e_k, e_2, ..., e_1, ..., e_n\}$. În raport cu B' avem $a'_{11} \neq 0$ şi putem aplica cazul a).

Cazul c). Toţi $a_{ii} = 0$. Dacă forma pătratică este nenulă atunci există cel puţin un $g_{kh} \neq 0$. Pentru simplitate să presupunem că acesta ar fi $g_{12} \neq 0$.

Facem schimbarea de coordonate $X = S.\tilde{X}$ ce va defini o schimbare de baze în V,

$$\begin{cases} x^1 = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 \\ x^2 = \tilde{x}^1 - \tilde{x}^2 \\ x^3 = \tilde{x}^3 \\ \ldots\ldots. \\ x^n = \tilde{x}^n. \end{cases}$$

Astfel că: $h(\tilde{x}) = a_{12}\{(\tilde{x}^1)^2 - (\tilde{x}^2)^2\} + ...$ va fi o formă pătratică din cazul a). Deci forma pătratică va admite expresie canonică.

Observaţie. Baza B' în care avem expresie canonică nu este unică. Este uşor de văzut ce s-ar întâmpla dacă la cazul a) am grupa termenii după alt pătrat. Mai mult, putem alege baze în care expresia canonică să aibă primii r coeficienţi ± 1, numită şi expresie *normală.* În concluzie, vorbim de o expresie canonică, ea nefiind unică.

Vom exemplifica metoda printr-o *aplicaţie.*

Să se reducă la expresie canonică forma pătratică scrisă în baza canonică din R^3.

$h(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

Soluţie. Să observăm că x_1 este la pătrat. Grupăm toţi termenii ce conţin pe x_1. Obţinem

$h(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 - 8x_3^2 + 6x_2x_3$. Pentru ultima parte avem o nouă formă pătratică în x_2 şi x_3. Grupăm după x_2.

$h(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_2 + 3x_3)^2 - 17x_3^2$.

Acum dacă notăm $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' = x_2 + 3x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$, obţinem că $h(x') = (x_1')^2 + (x_2')^2 - 17(x_3')^2$, adică expresie canonică. Pentru a determina baza în care avem aceasta, inversăm sistemul şi rezultă: $\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' + 5x_3' \\ x_2 = x_2' - 3x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$.

Comparându-l cu $X = SX'$, matricea schimbării de baze este $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar vectorii noii baze sunt coloanele lui S.

Metoda Jacobi.

Teoremă. Fie h o formă pătratică de rang r scrisă în baza $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ şi

$A(a_{ij})$ matricea sa în această bază. Dacă următorii determinanţi sunt nenuli

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1r} \\ : & :: & : \\ a_{r1} & :: & a_{rr} \end{vmatrix}$$

atunci există o bază $B' = \{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$ în raport cu care forma pătratică să admită expresia canonică

$$h(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x'^1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'^2)^2 + ... + \frac{\Delta_{r-1}}{\Delta_r}(x'^r)^2.$$

Demonstraţie. Fie f forma polară lui h şi construim o bază $B' = \{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$ de forma următoare

$$\begin{cases} e'_1 = s_1^1 e_1 \\ e'_2 = s_2^1 e_1 + s_2^2 e_2 \\ ...... \\ e'_r = s_r^1 e_1 + ... + s_r^r e_r \end{cases}$$

şi $e'_{r+1} = e_{r+1}, .., e'_n = e_n$.

Impunem asupra lor condiţiile $f(e'_i, e'_j) = 0$, pentru $j < i$, şi $f(e'_i, e'_i) = 1$, pentru $i = 1, 2.., r$. Se obţine că $s_i^i = \frac{\Delta i-1}{\Delta_i}$ şi B' este o bază.

Aceeaşi aplicaţie rezolvată prin metoda lui Jacobi ne dă:

$h(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ şi matricea sa în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ cu } \Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = \det A = -17.$$

Deci expresie canonică este $h(x') = \frac{1}{1}(x'_1)^2 + \frac{1}{1}(x'_2)^2 - \frac{1}{17}x'^2_3$.

Să observăm că ea nu coincide cu cea din metoda Gauss, dar există o legătură pe care cititorul poate o va sesiza.

Din moment ce nu există o unică expresie canonică se pune problema ce leagă totuşi două expresii canonice. Răspunsul este dat de următoarea teoremă:

Teorema Sylvester. (Legea de inerţie). Pentru o formă pătratică reală numărul termenilor pozitivi sau negativi este acelaşi în orice expresie canonică.

Demonstraţie. Am văzut că rangul se păstrează la schimbări de baze şi că putem considera expresii normale ale formei pătratice în care toţi coeficienţii nenuli sunt ± 1.

Considerăm două baze şi fie

$$\begin{aligned} h(x) &= a_1 \left|x^1\right|^2 + ... + a_r \left|x^r\right|^2 \text{ în } B = \{e_1, ...e_n\} \\ h(y) &= a_1 \left|y^1\right|^2 + ... + a_r \left|y^r\right|^2 \text{ în } B' = \{f_1, ...f_n\} \end{aligned}$$

expresii canonice pentru aceeaşi formă pătratică în cele două baze.

Notăm cu p şi respectiv q numărul coeficienţilor pozitivi pentru $h(x)$ respectiv $h(y)$, în expresiile lor normale,

$$\begin{aligned} h(x) &= \left|x^1\right|^2 + ... + \left|x^p\right|^2 - (\left|x^{p+1}\right|^2 + ... + \left|x^r\right|^2) \\ h(y) &= \left|y^1\right|^2 + ... + \left|y^q\right|^2 - (\left|y^{q+1}\right|^2 + ... + \left|y^r\right|^2). \end{aligned}$$

Dacă am presupune $p > q$, atunci considerăm subspaţiile generate de $W_p = \{e_1, ...e_p\}$, $\dim W_p = p$, şi $U_{n-q} = \{f_{q+1}, ...f_r, ...f_n\}$, $\dim U_{n-q} = n - q$. Să observăm că $\dim W_p + \dim U_{n-q} > n$ şi deci există $v \in W_p \cap U_{n-q}$, $v \neq 0$ în care vom avea $v = v^1 e_1 + ... + v^p e_p$ şi $v = v^{q+1} f_{q+1} + ... + v^n f_n$.

Calculăm acum h pentru $x = y = v$ şi obţinem

$$\begin{aligned} h(v) &= \left|v^1\right|^2 + ... + \left|v^p\right|^2 > 0 \\ h(v) &= -(\left|v^{q+1}\right|^2 + ... + \left|v^r\right|^2) < 0. \end{aligned}$$

Absurd !. La fel se procedează dacă am presupune $p < q$.

În concluzie $p = q$.

Numărul termenilor pozitivi, al celor negativi şi rangul formei pătratice defineşte *signatura* formei pătratice.

Forma se numeşte *pozitiv (negativ) definită* dacă signatura sa conţine numai termeni pozitivi (negativi).

4.4.1 Forme pătratice în spaţii euclidiene.

Să considerăm $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian, $\dim V = n$. Într-o bază ortonormată produsul scalar coincide cu cel uzual. Aşa cum am remarcat între spaţiul formelor pătratice şi spaţiul matricelor simetrice există un izomorfism şi deci putem asocia unei forme pătratice o matrice simetrică ce corespunde unei transformări liniare într-o bază dată. Astfel avem aplicaţia $g : V \times V \to < x, T(y) >$.

Într-o bază ortonormată $B = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ vom avea $h(x) = < x, T(x) >= X^t.A.X$.

La schimbări de baze ortonormate, $S^t = S^{-1}$, atunci avem $A' = S^t.A.S = S^{-1}.A.S$ şi de aici identificarea matricei formei pătratice cu cea a unei transformări liniare simetrice.

Am demonstrat în capitolul transformări hermitiene că o matrice simetrică reală admite întodeauna formă diagonală într-o bază a vectorilor proprii ortonormaţi. Obţinem astfel o nouă metodă de reducere la expresie canonică a unei forme pătratice reale într-un spaţiu euclidian, numită **Metoda transformărilor ortogonale** .

Ea constă deci în a lua matricea formei pătratice într-o bază ortonormată, a găsi valorile sale proprii şi baza ortonormată a vectorilor proprii corespunzători. În această bază formă pătratică admite expresie canonică dată de valorile sale proprii.

Încheiem acest capitol observând că un produs scalar este de fapt o formă biliniară simetrică şi pozitiv definită, adică

$< x, y >= g(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^i y^j$ cu $g_{ij} = g_{ji}$ şi $h(x) = g(x, x) > 0$.

Tensorul g_{ij} se mai numeşte şi tensorul metric al produsului scalar (metricii).

Aplicaţie. Utilizând metoda transformărilor ortogonale să se reducă la o expresie canonică forma pătratică $h(x) = (x^1)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3$.

Soluţie. Matricea A în baza canonică $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Observăm că este chiar matricea pentru care am găsit vectorii şi valorile propii de la capitolul transformări liniare. Acolo am găsit că valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ şi $\lambda_2 = 2$.

Vectorii proprii ortonormaţi erau $B' = \{e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$, care determină o bază ortonormată. În această bază forma pătratică admite expresia canonică

$h(x') = (x'^1)^2 - (x'^2)^2 + 2(x'^3)^2$.

Capitolul 5

Conice

În acest capitol vom studia o generalizare a unor locuri geometrice studiate în liceu: cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă.

Dacă la început în liceu s-a studiat cercul cu centrul în origine şi apoi cercul cu centrul într-un punct oarecare, pentru celelalte locuri geometrice s-a studiat numai cazul când centrul este în originea reperului şi axele de coordonate sunt axe de simetrie. Dar la fel de important este studiul, spre exemplu, al unei elipse având ca centru un punct oarecare şi axele de simetrie nu neapărat paralele cu axele de coordonate.

La fel putem discuta despre cazul hiperbolei sau al parabolei.

5.1 Clasificarea conicelor

Deşi teoria care urmează poate fi dezvoltată într-un reper afin din spaţiul $\mathcal{A}_2$, preferăm pentru claritatea expunerii spaţiul euclidian geometric de dimensiune doi, $\mathcal{E}_2$, în care se consideră reperul ortonormat cartezian $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$.

Definiţie. Se numeşte *conică* o mulţime (Γ) de puncte M din planul $\mathcal{E}_2$, ale căror coordonate $M(x, y)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$, satisfac o ecuaţie algebrică de gradul al doilea:

$$f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (5.1.1)$$

numită ecuaţia conicei în raport cu reperul $\mathcal{R}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = \overline{1,3}$.

Cel puţin unul din primii trei coeficienţi este nenul.

Din studiile anterioare sunt cunoscute câteva exemple de astfel de mulţimi de puncte, numite curbe plane de ordinul al doilea:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, numită *elipsă*, care este o curbă simetrică faţă de O, axele Ox şi Oy, şi are reprezentarea grafică din figură alăturată.

În cazul particular $a = b$, ecuaţia devine $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ şi reprezintă cercul cu centrul în O şi de rază a.

(2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, numită *hiperbolă*, care are aceleaşi simetrii faţă de O, Ox, Oy şi reprezentarea grafică este în figura alăturată elipsei.

Dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$ se numesc *asimptotele* hiperbolei.

(3) $y^2 - 2px = 0$, numită *parabolă*, este o curbă nemărginită, simetrică faţă de Ox. Punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$se numeşte *focarul* parabolei.

Reprezentarea grafică este în figura alăturată.

Nu vom insista acum asupra proprietăţilor geometrice ale acestor curbe studiate dezvoltat în liceu.

Vom observa în continuare că dacă sunt date două drepte:

$(d_1)\;\; a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $(d_2)\;\; a_2x + b_2y + c_2 = 0$

distincte, atunci mulţimea de puncte $(d_1) \cup (d_2)$ este reprezentată de ecuaţia:

(4) $\;d_1 \cdot d_2 = 0$ adică: $(a_1x + b_1y + c_1) \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0$

şi este o curbă de gradul al doilea, adică o conică.

Dacă $d_1 \equiv d_2$ atunci ea reprezintă o *dreaptă dublă*: (5) $\;d_1^2 = 0$, de ecuaţie $(a_1x + b_1y + c_1)^2 = 0$.

Putem considera ecuaţia de forma:

(6) $\;(d_1)^2 + (d_2)^2 = 0$ cu d_1 neparalel cu d_2 (adică $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$)

care reprezintă un *punct dublu*, şi anume punctul de intersecţie al dreptelor (d_1) şi (d_2) .

În sfarşit un alt exemplu este:

(7) $\;x^2 + y^2 + a^2 = 0, \quad a \in \mathbf{R} - \{0\}$

şi care reprezintă o *conică vidă* (nu există puncte din plan al căror coordonate să satisfacă (7).

În cele ce urmează vom arăta că singurele conice sunt exemplele de mai sus, raportate eventual la alte repere ortonormate din $\mathcal{E}_2$.

Vom face câteva notaţii legate de ecuaţia (5.1.1). Fie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = (a_{13}, a_{23}) \,, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

cu condiţiile $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2, 3.$

În scriere matriceală ecuaţia (5.1.1) va căpăta forma echivalentă:

$$f(X) \equiv X.^t A.X + 2B.X + a_{33} = 0 \tag{5.1.2}$$

Teorema 1. La schimbări de repere afine ecuaţia unei conice se transformă tot în ecuaţia unei conice.

Demonstraţie. Fie $X = S.X' + X_0$ o schimbare afină de repere, de la $\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la $\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\}$, unde $S = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix}$ este matricea schimbării bazelor de vectori şi $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$este dată de coordonatele lui $O' (x_0, y_0)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$.

Atunci (5.1.4) se scrie în reperul $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} f(X') \equiv \left(S.X' + X_0\right)^t A. \left(S.X' + X_0\right) + 2B \left(SX' + X_0\right) + a_{33} = \\ = X'^t.S^t.A.SX' + X'^t.S^t.A.X_0 + X_0^t.A.S.X' + X_0^t.A.X_0 + \\ +2B.S.X' + 2B.X_0 + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Ţinând cont că $A = A^t$, rezultă că următorul număr real verifică $X'^t.S^t.A.X_0 = \left(X'^t.S^t.A.X_0\right)^t = X_0^t.A.S.X'$, obţinem că:

$$f\left(X'\right) \equiv X'^t \left(S^t AS\right) X' + 2 \left(X_0^t.A.S + B.S\right) X' + X_0^t.A.X_0 + 2BX_0 + a_{33} = 0.$$

Facem notaţiile:

$$A' = S^t.A.S\ ,\quad B' = X_0^t.A.S + B.S\ ,\quad a_{33} = X_0^t.A.X_0 + 2BX_0 + a_{33} \tag{5.1.3}$$

şi rezultă:

$$f\left(X'\right) \equiv X'^t.A'.X' + 2B'.X' + a_{33}' = 0, \tag{5.1.4}$$

adică $f\left(X'\right) = 0$ este tot o conică.

Dacă $\det A \neq 0$ atunci $\det A' = (\det S)^2 . \det A \neq 0.$

Observaţia 1. În demonstraţie nu s-a folosit faptul că reperele $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$ sunt ortonormate, deci demonstraţia este valabilă pentru repere afine oarecare.

(Se spune că proprietatea are caracter geometric).

Observaţia 2. $a'_{33} = f(X_0) = f(x_0, y_0)$.

În continuare vom face notaţiile:

$\delta = \det A$, $\Delta = \det D$, $I = a_{11} + a_{22}$

Teorema 2. Numerele δ, Δ, I sunt invariante (nu işi schimbă valoarea) la schimbări de repere ortonormate.

Demonstraţie. Să considerăm schimbarea $X = SX' + X_0$ a reperelor ortonormate $\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$ şi $\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\}$. Atunci matricea S este o matrice ortogonală $S^t = S^{-1}$, şi $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$reprezintă matricea cu coordonatele lui $O'(x_0, y_0)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

Să arătăm că $\delta = \delta', \Delta = \Delta', I = I'$.

Avem: $\delta = \det A' = (\det S)^2 . \det A = \det A = \delta$, deoarece S este ortogonală. Să observăm că $I = a_{11} + a_{22}$ este urma matricei A şi cum $A' = S^{-1}AS$ sunt matrice asemenea vor avea acelaşi polinom caracteristic şi aceeaşi urmă, $I' = I$.

Pentru a demonstra invarianţa lui Δ să considerăm matricea:

$S' = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & x_0 \\ s_1^2 & s_2^2 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi fie $D' = \begin{pmatrix} A' & B'^t \\ B' & a'_{33} \end{pmatrix}$ matricea corespunzatoare lui D în $\mathcal{R}'$. După schimbarea de reper avem:

$$D' = \begin{pmatrix} S^t.A.S & (x_0^t.A.S + BX_0)^t \\ X_0^t.A.S + BX_0 & X_0^t A X_0 + 2BX_0 + a_{33} \end{pmatrix}.$$

Făcând produsul matricelor $\left(S'\right)^t .D.S'$(scrise dezvoltat) se constată prin calcul că $D' = \left(S'\right)^t .D.S'$. Cum $\det S' = \det S$, obţinem că

$\Delta' = (\det S)^2 .\Delta = \Delta.$

Observaţia 3. Pentru a evita acest calcul matriceal pentru D' putem ţine cont de faptul că o schimbare de reper este o translaţie, plus o centro-afinitate şi deci să arătăm invarianţa lui Δ la cele două transformări.

Definiţie. Cantităţile δ, Δ, I se numesc *invarianţii izometrici* (ortogonali) ai conicei (5.1.1).

În continuare ne propunem să facem o **clasificare izometrică** a conicelor.

Pentru conica (5.1.1) sau (5.1.2) considerăm forma pătratică:

$$h(X) = X^t.A.X = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{5.1.5}$$

cu matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ simetrică şi reală. Ea admite expresie canonică prin metoda transformărilor ortogonale într-o bază ortonormată $\mathcal{R}' = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\}$.

Expresia canonică este:

$$h\left(X'\right) = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 \tag{5.1.6}$$

cu $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, unde λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale ecuaţiei caracteristice $\det(A - \lambda I) = 0$, adică: $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$,

sau dezvoltând determinantul obţinem:

$$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0 \tag{5.1.7}$$

(ecuaţia caracteristică a conicei, sau *ecuaţia seculară*).

Rezolvând sistemul caracteristic: $(A - \lambda I)X = 0$, obţinem vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2, adică baza $B' = \left\{\vec{i}', \vec{j}'\right\}$. Fie S matricea de trecere de la B la B'.

În continuare considerăm schimbarea de repere afine: $\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\} \to \mathcal{R}_1 = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\}$, cu $X = S.X'$. Această centro-afinitate am văzut că nu poate fi decât o rotaţie, simetrie plană sau compunere a lor.

În urma sa $f(X)$ capătă forma:

$$f(X) = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \tag{5.1.8}$$

Din (5.1.3), deoarece $X_0 = 0$, rezultă că:

$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B' = B \cdot S$ şi $a'_{33} = a_{33}$. Conform cu Th.2, avem $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta', I = \lambda_1 + \lambda_2 = I'$ şi

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta a_{33} - \lambda_2 \left(a'_{13}\right)^2 - \lambda_1 \left(a'_{23}\right)^2 .$$

În continuare luăm în discuţie următoarele cazuri:

I. Cazul $\delta \neq 0$, adică λ_1, λ_2 nenuli. În (5.1.8) vom efectua următoarele grupări de termeni:

$$\lambda_1\left(x^{'}+\frac{a_{13}^{'}}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y^{'}+\frac{a_{23}^{'}}{\lambda_2}\right)^2-\frac{\left(a_{13}^{'}\right)^2}{\lambda_1}-\frac{\left(a_{23}^{'}\right)^2}{\lambda_2}+a_{33}=0$$

sau:

$$f\left(X^{'}\right)\equiv\lambda_1\left(x^{'}+\frac{a_{13}^{'}}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y^{'}+\frac{a_{23}^{'}}{\lambda_2}\right)^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$$

În continuare efectuând translaţia reperului $\mathcal{R}_1=\left\{O,\vec{i}',\vec{j}'\right\}$ cu reperul $\mathcal{R}'=\left\{O',\vec{i}',\vec{j}'\right\}$ dată de :

$$x'=x''-\frac{a_{13}'}{\lambda_1};\;\; y'=y''-\frac{a_{23}'}{\lambda_2} \tag{5.1.9}$$

adică O' în raport cu reperul $\mathcal{R}_1$ are coordonatele: $x'=-\frac{a_{13}'}{\lambda_1}$; $y'=-\frac{a_{23}'}{\lambda_2}$;
Ecuaţia (5.1.8) devine:

$$f\left(X^{"}\right)\equiv\lambda_1\left(x''\right)^2+\lambda_2\left(y''\right)^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{5.1.10}$$

a). Dacă $\Delta\neq 0$ ecuaţia se scrie:

$$\frac{\left(x''\right)^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}+\frac{\left(y''\right)^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}-1=0 \tag{5.1.11}$$

a1). Să remarcăm că dacă $\delta=\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ atunci λ_1 şi λ_2 au acelaşi semn şi deci, dacă $I\Delta<0$ atunci (5.1.11) este ecuaţia unei elipse (reale) raportată la reperul $\mathcal{R}'$.

Dacă $I\Delta>0$, (5.1.11) nu are soluţii reale şi deci este o conică vidă (elipsă imaginară);

a2). Dacă $\delta=\lambda_1\cdot\lambda_2<0$, atunci (5.1.11) repezintă o hiperbolă. În plus, dacă $I=0$, hiperbola este echilateră.

b). Dacă $\Delta=0$, atunci dacă:

b1). $\delta>0, atunci \lambda_1$ şi λ_2 au acelasi semn; deci: $\left(x''\right)^2=0$ şi $(y'')^2=0$, adică conică este punct dublu.

b2). Dacă $\delta < 0$, atunci λ_1 şi λ_2 au semne contrare şi deci $\lambda_1 \left(x''\right)^2 + \lambda_2(y'')^2 = 0$, se va descompune cu produsul a două drepte concurente.

II. Cazul $\delta = 0$. Cum $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, rezultă că putem lua $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 \neq 0$. Ecuaţia (5.1.8) devine:

$$f\left(X'\right) = \lambda_2 \left(y'\right)^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$$

care se scrie:

$$f\left(X'\right) \equiv \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{13}x' + a_{33} - \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{\lambda_2} = 0. \tag{5.1.12}$$

Calculăm invarianţii izometrici: $\Delta' = \Delta = -\lambda_2 \left(a'_{13}\right)^2$ şi $I' = I = \lambda_2$.

a). Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $a'_{13} \neq 0$, ecuaţia (5.1.12) se scrie:

$$f\left(X'\right) \equiv \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{13}\left[x' + \frac{a_{33}}{2a'_{13}} - \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{2\lambda_2 a'_{13}}\right] = 0.$$

În continuare efectuăm translaţia reperului $\mathcal{R}_1 = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\}$ în reperul $\mathcal{R}' = \left\{O', \vec{i}', \vec{j}'\right\}$ dată de:

$$x' = x'' + \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{2\lambda_2 a'_{13}} - \frac{a_{33}}{2a'_{13}} \quad \text{si } y' = y'' - \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \tag{5.1.13}$$

în care O' are coordonatele $x' = \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{2\lambda_2 a'_{13}} - \frac{a_{33}}{2a'_{13}}$; $y' = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}$; şi ecuaţia (5.1.12) devine: $\lambda_2 \left(y"\right)^2 + 2a'_{13}x" = 0$, sau înlocuind $\lambda_2 = I$ şi $a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}$, obţinem:

$$\left(y''\right)^2 \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}} \cdot x'' = 0, \tag{5.1.14}$$

adică ecuaţia unei parabole.

b). Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia (5.1.12) se scrie $f\left(X'\right) \equiv \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + a_{33} - \frac{\left(a'_{23}\right)^2}{\lambda_2} = 0$. Efectuând translaţia reperelor $\mathcal{R}_1 = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\} \to \mathcal{R}' = \left\{O', \vec{i}', \vec{j}'\right\}$ dată de: $x' = x''$ si $y' = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}$, obţinem:

$$\left(y''\right)^2 + \frac{a_{33}}{I} - \left(\frac{a'_{23}}{I}\right)^2 = 0 \tag{5.1.15}$$

care reprezintă:

b1). două drepte paralele, dacă $\left(\frac{a'_{23}}{I}\right)^2 > \frac{a_{33}}{I}$;

b2). două drepte confundate dacă $\left(\frac{a'_{23}}{I}\right)^2 = \frac{a_{33}}{I}$

b3). conică vidă dacă $\left(\frac{a'_{23}}{I}\right)^2 < \frac{a_{33}}{I}$

În concluzie:

Teorema 3. Clasificarea izometrică a conicelor este dată de următorul tabel:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	$I\Delta < 0$, elipsă	punct dublu
$\delta > 0$	$I\Delta > 0$, conică vidă	punct dublu
$\delta < 0$	hiperbolă	două drepte concurente
$\delta = 0$	parabolă	două drepte paralele, confundate, conică vidă

Definiţie. Conicele pentru care $\Delta = 0$ se numesc conice *degenerate* respectiv, pentru $\Delta \neq 0$ conice *nedegenerate.*

Ecuaţiile (5.1.11), (5.1.14), (5.1.15) se numesc *ecuaţiile canonice* ale conicelor.

5.2 Proprietăţi geometrice ale conicelor

5.2.1 Centrul unei conice

Definiţie. Prin *centrul* unei conice nedegenerate înţelegem un punct C al planului $\mathcal{E}_2$ în raport cu care conica admite simetrie.

Să observăm din exemplele date că simetrii admit numai elipsa şi hiperbola iar din (5.1.9) rezultă că centrul (de simetrie) al conicei este $O'\left(x''_0 = 0, y''_0 = 0\right)$, sau din (5.1.10):

$$x'_0 = -\frac{a'_{13}}{\lambda_1}\ ,\ \ y'_0 = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2} \tag{5.2.1}$$

în raport cu reperul $\mathcal{R}_1 = \left\{O, \vec{i}', \vec{j}'\right\}$. În raport cu reperul ortonormat iniţial

$\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$ centrul va avea coordonatele $C\left(x_0, y_0\right)$astfel încât $X_0 = S.X_0'$ unde $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $X_0' = \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix}$ şi S matricea schimbării bazelor reperului.

Ecuaţiile (5.2.1) sunt echivalente cu : $\lambda_1 x_0' + a_{13}' = 0$, $\lambda_2 y_0' + a_{23}' = 0$, sau în scriere matriceală cu $A^t \cdot X_0' + \left(B'\right)^t = 0$, unde

$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $B' = \left(a_{13}', a_{23}'\right)$.

Ştim că la schimbări de baze matricea unei forme pătratice se schimbă după regula $A' = S^t.A.S$ şi folosind (5.1.3) , obţinem: $S^t.A.S.X_0' + S^t.B^t = 0$, de unde prin înmulţirea la stânga a ecuaţiei cu S (avem $S.S^t = I$, matrice ortogonală) şi înlocuind $SX_0' = X_0$, obţinem:

$$A.X_0 + B^t = 0 \tag{5.2.2}$$

adică dezvoltat:

$$\begin{aligned} f_x &\equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ f_y &\equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

sistem ce dă coordonatele (x_0, y_0) ale centrului C în reperul $\mathcal{R} = \left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$.

Teorema 1. Dacă (Γ) este o conică nedegenerată gen elipsă sau hiperbolă, atunci coordonatele centrului C în raport cu reperul $\mathcal{R} = \left\{0, \vec{i}, \vec{j}\right\}$ sunt date de sistemul (5.2.3).

Observaţia 1. Rezolvând sistemul (5.2.3), după regula lui Cramer obţinem: $C\left(\frac{A_{31}}{\delta}, \frac{A_{32}}{\delta}\right)$, unde $A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Din acest motiv conicele gen parabolă ($\delta = 0$) se mai numesc cu centrul la infinit.

Observaţia 2. Dacă conica este degenerată, $\Delta = 0$, $\delta < 0$, punctul de intersectie al celor două drepte este tocmai C.

5.2.2 Axe de simetrie la o conică

Definiţie. Se numesc *axe de simetrie* la o elipsă sau hiperbolă, axele reperului $\mathcal{R}' = \left\{O', \vec{i}', \vec{j}'\right\}$ în care avem expresia canonică (5.1.11) a conicei.

Axa de simetrie a unei parabole este axa $O'x''$ a reperului $\mathcal{R}' = \left\{O', \vec{i}', \vec{j}'\right\}$ în care avem expresia canonică (5.1.14).

Teorema 1. Pantele axelor de simetrie sunt date de :

a) $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ dacă $a_{12} = 0$

b) $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})\, m - a_{12} = 0$, dacă $a_{12} \neq 0$

c) dacă conica este parabolă, axa de simetrie a parabolei are panta: $m = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Demonstraţie. a) Dacă $a_{12} = 0$, forma pătratică are expresie canonică şi deci, $\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$.

b) Fie S matricea schimbării de bază de la $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ la $\left\{\vec{i}', \vec{j}'\right\}$.

Cum S este ortogonală, rezultă: $S.S^t = I$. Notăm cu α unghiul orientat dintre $\vec{i}$ şi $\vec{i}'$ şi cu β unghiul orientat între $\vec{i}$ şi $\vec{j}'$, atunci:

$\vec{i}' = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}$

$\vec{j}' = \cos\beta\, \vec{i} + \sin\beta\, \vec{j}$

Vectorul $\vec{i}'$ este vectorul propriu corespunzător lui $\lambda_1 \neq 0$ în (5.1.10), astfel că $T(\vec{i}') = \lambda_1 \vec{i}'$, unde matricea lui T în baza $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este matricea lui T, atunci avem: $A.\vec{i}' = \lambda_1 \vec{i}'$, adică:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

sau dezvoltat:

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda_1 \cos\alpha \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda_1 \sin\alpha \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Împărţim cele două ecuaţii şi notăm $tg\ \alpha = m$, obţinem: $m = \dfrac{a_{21} + a_{22}m}{a_{11} + a_{12}m}$, sau

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})\, m - a_{12} = 0. \tag{5.2.6}$$

Analog, $T(\vec{j}') = \lambda_2 \vec{j}'$, şi ne conduce la aceeaşi ecuaţie (5.2.6), unde $m = tg\beta$.

c) Dacă $\lambda_1 = 0$, sistemul (5.2.5) se reduce la:

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0 \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

adică: $tg\ \alpha = m = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}$.

Observaţie. Din prima relaţie (5.2.5) obţinem pentru una din axe:

$a_{11} + a_{12} tg\alpha = \lambda_1$

iar pentru cealaltă axă:

$a_{11} + a_{12} tg\beta = \lambda_2$

din care obţinem:

$$a_{12}\left(tg\alpha - tg\beta\right) = \lambda_1 - \lambda_2. \tag{5.2.7}$$

În concluzie, pentru a obţine o rotaţie de unghi $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este suficient să alegem λ_1 şi λ_2 astfel ca:

$$semn\ a_{12} = semn\ \left(\lambda_1 - \lambda_2\right).$$

5.2.3 Intersecţia unei conice cu o dreaptă.

Fie (d) dreapta din $\mathcal{E}_2$ dată parametric de ecuaţiile:$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + ht \end{cases}$
unde $M_0\left(x_0, y_0\right)$ este un punct al dreptei, $\overrightarrow{v}\left(l, h\right)$ vectorul director şi $t \in \mathbf{R}$.

Intersecţia conicei cu dreapta va fi dată de soluţiile sistemului alăturând dreptei ecuaţia conicei (5.1.1). După înlocuirea lui x şi y în ecuaţia conicei şi gruparea termenilor obţinem:

$$t^2\varphi\left(l, h\right) + 2t\left[lf_x\left(M_0\right) + hf_y\left(M_0\right)\right] + f\left(x_0, y_0\right) = 0 \tag{5.2.8}$$

unde:

$\varphi\left(l, h\right) = a_{11}l^2 + 2a_{12}l.h + a_{22}h^2$

$f_x\left(M_0\right) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$

$f_y\left(M_0\right) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$.

În funcţie de discriminantul ecuaţiei (5.2.8) avem numărul punctelor de intersecţie al conicei cu dreapta:

$$\nabla = \left(lf_x\left(M_0\right) + hf_y(M_0)\right)^2 - \varphi\left(l, h\right)\cdot f\left(M_0\right). \tag{5.2.9}$$

Dacă $\nabla > 0$, conica este intersectată în două puncte de dreaptă.

$\nabla < 0$, dreapta nu intersectează conica

$\nabla = 0$, dreapta este tangentă conicei.

În particular, $\nabla = 0$ şi M_0 pe conică, rezultă $f(M_0) = 0$ şi înlocuind $l = (x - x_0)/t$, $h = (y - y_0)/t$, obţinem:

$$(x - x_0) f_x (M_0) + (y - y_0) f_y (M_0) = 0 \qquad (5.2.10)$$

ecuaţia tangentei în $M_0 \in (\Gamma)$ la conică.

5.2.4 Diametrul conjugat unei direcţii.

Definiţie. Se numeşte *diametru conjugat* unei direcţii $\overrightarrow{v}(l, h)$ dreapta ce conţine locul geometric al mijloacelor corzilor tăiate pe conică de drepte de direcţie $\overrightarrow{v}$.

Teorema 1. Diametrul conjugat direcţiei $\overrightarrow{v}(l, h)$ are ecuaţia:

$$l \cdot f_x + h f_y = 0 \qquad (5.2.11)$$

unde $f_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$ şi $f_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$.

Demonstraţie. Dreapta ce trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ şi are direcţia $\overrightarrow{v}(l, h)$ este $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + ht$, $t \in \mathbf{R}$. Intersectând dreapta cu conica $f(x, y) = 0$ obţinem pentru $\nabla > 0$, două puncte $P_i(x_i = x_0 + lt_i, y_i = y_0 + ht_i)$, $i = 1, 2$, unde t_1, t_2 sunt soluţiile ecuaţiei (5.2.8).

Mijlocul segmentului P_1P_2 are coordonatele:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 + l\frac{t_1 + t_2}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 + h\frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Condiţia ca M_0 să fie mijlocul acestor segmente P_1P_2 este deci ca $t_1 + t_2 = 0$. Astfel că locul geometric al punctelor M_0 se obţine din (5.2.8) când $t_1 + t_2 = 0$, adică:

$$l f_x (M_0) + h f_y (M_0) = 0$$

Cum M_0 este un mijloc arbitrar, rezultă (5.2.11).

Observaţia 1. Orice diametru trece prin centrul conicei.

Observaţia 2. Diametrul conjugat unei drepte de pantă $m = \frac{h}{l}$ este:

$$f_x + m f_y = 0 \tag{5.2.12}$$

Înlocuind f_x şi f_y din (5.2.11) se obţine dreapta:

$$(a_{11} + m a_{12})\, x + (a_{21} + m a_{22})\, y + (a_{13} + m a_{23}) = 0 \tag{5.2.13}$$

de pantă:

$$m' = -\frac{a_{11} + m a_{12}}{a_{21} + m a_{22}} \tag{5.2.14}$$

adică:

$$a_{22} m.m' + a_{12}\,(m + m') + a_{11} = 0 \tag{5.2.15}$$

care reprezintă condiţia de *conjugare* a doi diametri.

Dacă $m' = -\frac{1}{m}$ (direcţiile sunt perpendiculare), obţinem ecuaţia (5.2.6) astfel că axele de simetrie ale unei elipse sau hiperbole sunt doi diametri conjugaţi perpendiculari. Deci ecuaţiile axelor sunt date de (5.2.12) cu m din (5.2.6).

Condiţia ca un diametru al unei hiperbole să fie asimptotă, este ca el să intersecteze conica la ∞ , deci $m' = m$, astfel că

$$a_{22} m^2 + 2 a_{12} m + a_{11} = 0 \tag{5.2.16}$$

care ne dă pantele asimptotelor unei hiprbole ($\delta = a_{12}^2 - a_{22} \cdot a_{11} < 0$).

5.2.5 Pol şi polară la o conică.

Considerăm o dreaptă în planul xOy ce trece prin $M_0(x_0, y_0)$ şi de vector director $\overrightarrow{v}\,(l, h)$,

$x = x_0 + lt, \;\; y = y_0 + ht, \;\; t \in \mathbf{R}$.

Fie P_0, P_1, P_2 şi P patru puncte pe dreaptă corespunzătoare valorilor t_0, t_1, t_2 şi t în ecuaţiile parametrice ale dreptei.

Definiţie. Se numeşte *biraport* al punctelor P_0, P, P_1 şi P_2 numărul :

$$[P_0, P; P_1, P_2] = \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t} : \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t} = \frac{(P_0, P; P_1)}{(P_0, P; P_2)}.$$

Dacă $[P_0, P; P_1, P_2] = -1$ se spune că punctele formează o *diviziune armonică* şi că P *este conjugatul armonic al punctului* P_0 în raport cu P_1 şi P_2.

O diviziune armonică este dată deci de condiţia:

$$\frac{t_1 - t_0}{t_1 - t} + \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t} = 0$$

În particular dacă $P_0 \equiv M_0$, adică $t_0 = 0$, atunci obţinem: $\dfrac{2}{t} = \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}$.

Să considerăm (Γ) o conică şi $P_0\,(x_0, y_0)$ un punct fixat.

Dreapta $x = x_0 + lt, y = y_0 + ht,\ t \in \mathbf{R}$ va tăia conica în cel mult două puncte $P_1\,(x_1, y_1)\,, P_2\,(x_2, y_2)\,.$

Teorema 1. Locul geometric al conjugatului armonic P al punctului P_0 în raport cu punctele P_1, P_2 de intersecţie al dreptelor ce trec prin P_0 este o parte dintr-o dreaptă de ecuaţie:

$$a_{11}x.x_0 + a_{12}(xy_0 + yx_0) + a_{22}y.y_0 + a_{13}\,(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0 \quad (5.2.17)$$

sau altfel scris:

$$xf_x\,(P_0) + yf_y\,(P_0) + f_0\,(P_0) = 0 \quad (5.2.18)$$

unde:

$$f_x\,(P_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$$
$$f_y\,(P_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$
$$f_0\,(P_0) = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}.$$

Demonstraţie. Punctele P_1 şi P_2 se obţin pentru $t = t_1, t = t_2$ iar conjugatul armonic al lui P_0 în raport cu conica se obţine pentru t dat de relaţia: $\frac{2}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$.

Astfel că: $\dfrac{2}{t} = \dfrac{(t_1+t_2)}{t_1 t_2} = -2\dfrac{l f_x(P_0) + h f_y(P_0)}{f(P_0)}$ (am folosit (5.2.8)).

Pentru a găsi locul geometric căutat, eliminăm t, l, h din această ecuaţie şi ecuaţiile parametrice ale dreptei şi se obţine:

$$(x - x_0) f_x(P_0) + (y - y_0) f_y(P_0) + f(P_0) = 0$$

din care dezvoltând se obţine (5.2.17) sau echivalent (5.2.18).

Definiţie. Dreapta (5.2.17), sau (5.2.18), se numeşte *polara punctului* P_0 în raport cu conica (Γ), $f(x,y) = 0$.

Fiind dată o dreaptă (d), punctul P_0 al cărei polară în raport cu conica este dreapta (d) se numeşte polul dreptei (d). El se poate determina identificând ecuaţia (5.2.17) cu ecuaţia dreptei date.

5.2.6 Conice prin condiţii iniţiale. Fascicole de conice.

Fie conica (Γ):

$$f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (5.2.19)$$

În această ecuaţie coeficienţii a_{ij} nu pot fi toţi nuli (cel puţin unul din primii trei este nenul), astfel că împărţind ecuaţia prin unul din ei (nenul) rămân doar cinci coeficienţi esenţiali. Obţinem că o conică poate fi determinată de cinci condiţii independente. Spre exemplu o alegere a cinci puncte independente de pe conică poate determina unic conica.

Date patru puncte ale conicei, conica nu este unic determinată.

Să observăm că date fiind două conice: (Γ_1) şi (Γ_2) de ecuaţii $f(x,y) = 0$ şi $g(x,y) = 0$, intersecţia lor se poate face în maxim patru puncte (dat fiind că avem un sistem de două ecuaţii de gradul al doilea).

Date patru puncte, rezultă că prin ele vor trece o infinitate de conice depinzând de un parametru.

Teorema 1. Fiind date două conice (Γ_1) şi (Γ_2) de ecuaţii $f(x,y) = 0$ şi $g(x,y) = 0$, mulţimea conicelor (Γ) ce trec prin punctele de intersecţie ale conicelor (Γ_1) şi (Γ_2) este dată de

$$\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2 = 0 \qquad , \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \qquad (5.2.20)$$

Demonstraţie. (5.2.20) reprezintă ecuaţiile unor conice, (Γ_1) şi (Γ_2) sunt cuprinse în această mulţime. Într-adevăr, pentru $\alpha = 0$, $\beta = 1$, obţinem

$\Gamma_2 = 0$, iar pentru $\alpha = 1$, $\beta = 0$, obţinem $\Gamma_1 = 0$. Astfel că (5.2.20) reprezintă conice ce trec prin cele maxim patru puncte de intersecţie între (Γ_1) şi (Γ_2). În (5.2.20) cel puţin unul din parametrii α sau β sunt nenuli. Spre exemplu, dacă $\alpha \neq 0$, atunci:

$$\Gamma_1 + \lambda\Gamma_2 = 0 \tag{5.2.21}$$

unde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$.

(5.2.21) reprezintă *ecuaţia fascicolului de conice* determinat de (Γ_1) şi (Γ_2). Acest fascicol depinde de un singur parametru , $\lambda \in \mathbf{R}$.

Astfel că, date fiind patru puncte de intersecţie ale conicelor Γ_1 si Γ_2 , o conică din fascicol va fi determinată unic de o a cincea condiţie (independentă).

Conicele (Γ_1) şi (Γ_2) se numesc *conice fundamentale* ale fascicolului de conice. Luând alte două conice din (5.2.20), $\Gamma' = \alpha_1\Gamma_1 + \beta_1\Gamma_2$ şi $\Gamma'' = \alpha_2\Gamma_2 + \beta_2\Gamma_2$, fascicolul de conice $\alpha\Gamma' + \beta\Gamma'' = 0$ coincide cu $\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2 = 0$.

Obţinem că:

Propoziţia 1. Într-un fascicol de conice, orice două conice ale fascicolului pot fi luate drept conice fundamentale.

În continuare să considerăm patru puncte P_1, P_2, P_3, P_4 ce reprezintă punctele de intersecţie a două conice. Atunci, conicele:

(Γ_1) $\qquad (P_1P_3) \cdot (P_2 \cdot P_4) = 0$ şi

(Γ_2) $\qquad (P_1P_2) \cdot (P_3P_4) = 0$

sunt conicele degenerate (produsul a două drepte) şi pot fi luate drept conice fundamentale ale fascicolului de conice ce trce prin cele patru puncte, adică:

$$\alpha\,(P_1P_3) \cdot (P_2P_4) + \beta\,(P_1P_2) \cdot (P_3P_4) = 0 \tag{5.2.22}$$

reprezintă fascicolul de conice determinat de cele patru puncte.

Dacă (Γ) este una din conicele ce trec prin cele patru puncte, considerăm cazurile limită când $P_1 \to P_3$ şi $P_2 \to P_4$. Atunci dreptele (P_1P_3) şi (P_2P_4) vor deveni tangente conicei (Γ), iar $(P_1P_2) \equiv (P_3P_4)$. Astfel că, fascicolul de conice tangente unei conice (Γ) în punctele P_1 şi P_2 se obţine din (5.2.22) luând drept conice fundamentale conica (Γ) şi $(P_1P_2) \cdot (P_1P_2)$, adică:

$$\Gamma + \lambda (P_1P_2)^2 = 0. \tag{5.2.23}$$

(5.2.23) se numeşte ecuaţia *fascicolului bitangent* de conice.

Încheiem capitolul conice privind o proprietate metrică ce defineşte o conică.

Teorema 2. Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la un punct dat F şi la o dreaptă (d) este constant, este o conică nevidă. Notând cu $e=$ excentricitate valoarea acestui raport, avem:

I. Dacă $F \notin (d)$, atunci: a) Pentru $e < 1$, conica este o elipsă

b) Pentru $e > 1$, conica este o hiperbolă

c) Pentru $e = 1$, conica este o parabolă

II. Dacă $F \in (d)$, atunci: a) Pentru $e < 1$, conica este un punct dublu

b) Pentru $e = 1$, conica este o dreaptă dublă

c) Pentru $e > 1$, conica este produsul a două drepte concurente în F.

Demonstraţie. Alegem reperul ortonormat xOy, unde Ox este perpendiculara prin F la (d), O este mijlocul segmentului cuprins între F şi (d) pe Ox, iar Oy este paralela prin O la (d).

Fie $F(c, 0)$ în reperul xOy. Atunci: $\|MF\| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ şi $\|MN\| = x + c$.

Condiţia $\|MF\| = e\|MN\|$ ne duce la: $(x-c)^2 + y^2 = e^2 (x+c)^2$, adică:

$$\left(1-e^2\right) x^2 + y^2 - 2c\left(1+e^2\right) x + c^2\left(1-e^2\right) = 0 \tag{5.2.24}$$

Reducerea la forma canonică a conicelor ne demonstrează în întregime teorema $\left(\delta = 1 - e^2, \Delta = -4c^2e^2, I = 2 - e^2\right)$. Punctul F se numeşte *focarul* conicei, iar (d) se numeşte *directoare* a conicei.

Capitolul 6

Cuadrice

În acest capitol vom aborda teoria unor suprafeţe din spaţiu ce nu au fost studiate în liceu dar care au o anumită analogie de studiu cu conicele. Am fi putut aborda o teorie generală în spaţii cu n dimensiuni ale (hiper)cuadricelor dar, probabil, înţelegerea teoriei ar fi fost mai dificilă şi mai puţin utilă.

6.1 Cuadrice. Exemple de cuadrice

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper ortonormat în spaţiul $\mathcal{E}_3$.

Definiţie. Se numeşte *cuadrică* locul geometric (Γ) al punctelor M ale căror coordonate (x, y, z) satisfac ecuaţia algebrică:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &\equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

în care cel puţin unul din coeficienţii termenilor de ordin doi este nenul.

Vom studia pentru început câteva exemple:

6.1.1 Sfera

Definiţie. Se numeşte *sferă* locul geometric al punctelor spaţiului $\mathcal{E}_3$ pentru care distanţa la un punct fix, numit centrul sferei, este constantă (raza sferei).

În raport cu $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ fie $C(a, b, c)$ centrul sferei şi R raza sferei. Atunci locul geometric (S) al punctelor $M(x, y, z)$ ale sferei este:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{6.1.2}$$

sau echivalent:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0 \qquad (6.1.3)$$

unde: $\alpha = -a,\ \beta = -b,\ \gamma = -c,\ \delta = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Din (6.1.3) rezultă că sfera este o cuadrică în care $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$ şi $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, adică condiţia

$$A\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + Bx + Cy + Dz + E = 0 \qquad (6.1.4)$$

reprezintă ecuaţia unei sfere.

Considerăm patru puncte necoplanare: $P_i\,(x_i, y_i, z_i)\,, i = 1, 2, 3, 4.$ Punctele P_i se vor găsi pe sfera (6.1.4) dacă verifică ecuaţia respectivă.

Dacă $P(x, y, z)$ este un punct oarecare al sferei, atunci obţinem următorul sistem de ecuaţii: $\begin{cases} A\,(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0 \\ A\,(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + Dz_1 + E = 0 \\ A\,(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + Dz_2 + E = 0 \\ A(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) + Bx_3 + Cy_3 + Dz_3 + E = 0 \\ A\,(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2) + Bx_4 + Cy_4 + Dz_4 + E = 0 \end{cases}$

sistem cu cinci ecuaţii şi cinci necunoscute: A, B, C, D, E, omogen.

Sistemul are soluţii diferite de soluţia banală dacă:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuaţia obţinută mai sus reprezintă ecuaţia sferei determinată de patru puncte necoplanare.

În continuare să considerăm $d\,(M_0, \overrightarrow{v})$ o dreaptă ce trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul director $\overrightarrow{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, ales astfel încât să fie versor pe dreaptă, adică $\|\vec{v}\| = 1$, şi deci : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Un punct $M \in (d)$, dacă $\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{v}, \rho \in \mathbf{R}$, sau parametric:

$$x - x_0 = \rho l\ ;\ \ y - y_0 = \rho m\ ;\ \ z - z_0 = \rho n \qquad (6.1.5)$$

Intersecţia dreptei (d) cu sfera (S) se rezumă la rezolvarea sistemului de ecuaţii (6.1.5) şi (6.1.3). În urma calculelor obţinem:

$$\rho^2 + 2\rho\left[(x_0 + \alpha)\,l + (y_0 + \beta)m + (z_0 + \gamma)n\right] + S\,(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad (6.1.6)$$

unde $S\left(x_0, y_0, z_0\right)$ se obţine înlocuind coordonatele punctului M_0 în membrul stâng al ecuaţiei (6.1.3) a sferei (S).

Fie Δ discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea (6.1.6) în necunoscuta ρ. Dacă $\Delta > 0$, dreapta intersectează sfera în două puncte M_1, M_2 distincte.

Dacă $\Delta = 0$, dreapta este tangentă sferei, iar dacă $\Delta < 0$ dreapta (d) nu intersectează sfera.

Definiţie. Se numeşte *puterea* punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în raport cu sfera (S) numărul:

$$\rho_{(S)}\left(M_0\right) = \varepsilon \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{M_0M_2}\right\| = \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0M_2} \tag{6.1.7}$$

unde M_1 şi M_2 sunt punctele de intersecţie a dreptei $d\left(M_0, \overrightarrow{v}\right)$ cu sfera (S), iar $\varepsilon = 1$ dacă $\overrightarrow{M_0M_1}$ şi $\overrightarrow{M_0M_2}$ au acelaşi sens (M_0 exterior sferei), sau $\varepsilon = -1$ dacă $\overrightarrow{M_0M_1}$ şi $\overrightarrow{M_0M_2}$ au sensuri opuse (M_0 interior sferei).

Trecând la norme în $\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{v}$, obţinem $\| \overrightarrow{M_0M_1} \| = |\rho_1|$ şi $\| \overrightarrow{M_0M_2} \| = |\rho_2|$, $(\| \overrightarrow{v} \| = 1)$, astfel că $\rho_{(S)}\left(M_0\right) = \varepsilon\left|\rho_1\right| \cdot \left|\rho_2\right| = \varepsilon\left|\rho_1 \cdot \rho_2\right| = \rho_1\rho_2 = S\left(x_0, y_0, z_0\right)$

Obţinem astfel că puterea unui punct faţă de sferă nu depinde de direcţia dreptei (d) ce trece prin M_0 şi că

$$\rho_{(S)}\left(M_0\right) = S\left(x_0, y_0, z_0\right). \tag{6.1.8}$$

Definiţie. Se numeşte *planul radical* a două sfere, $S_1 = 0$ şi $S_2 = 0$, locul geometric al punctelor M pentru care $\rho_{(S_1)}\left(M\right) = \rho_{(S_2)}\left(M\right)$.

Dacă $M(x, y, z)$ este un punct al acestui loc geometric, atunci din (6.1.8) rezultă că $S_1\left(x, y, z\right) = S_2\left(x, y, z\right)$, adică:

$$S_1 - S_2 = 0$$

este ecuaţia planului radical al sferelor S_1 şi S_2.

Să observăm din (6.1.3) că este vorba de ecuaţia unui plan

$$2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)x + 2\left(\beta_1 - \beta_2\right)y + 2\left(\gamma_1 - \gamma_2\right)z + \delta_1 - \delta_2 = 0.$$

Dacă sferele S_1 şi S_2 se intersectează, atunci punctele lor de intersecţie verifică (6.1.5), deci sunt în planul lor radical.

Definiţie. Se numeşte *axul radical* a trei sfere, $S_1 = 0,\ S_2 = 0$ şi $S_3 = 0$, intersecţia planelor lor radicale.

Dacă $S_1 - S_2 = 0$ este planul radical al sferelor S_1 şi S_2, iar $S_2 - S_3 = 0$ este planul radical al sferelor S_2 şi S_3, atunci planul radical al sferelor S_1 şi S_3, adică $S_1 - S_3 = 0$, trece prin dreapta de intersecţie a primelor două. Astfel că ecuaţia axului radical al celor trei sfere este:

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = 0 \\ S_2 - S_3 = 0 \end{cases}$$

În continuare să ne ocupăm de intersecţia unei sfere (S) cu un plan (π).

Fie (S) sfera de ecuaţie (6.1.2) şi planul : (π) $Ax + By + Cz + D = 0$.

1) Dacă distanţa de la centrul C al sferei la planul π, $d\left(C, (\pi)\right) < R$, adică: $\dfrac{|A.a + B.b + C.c + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < R$, atunci planul taie sfera după un cerc real, de ecuaţii:

$$\begin{cases} S = 0 \\ \pi = 0 \end{cases}.$$

Raza r a cercului este $r^2 = \sqrt{R^2 - d^2}$ iar centrul cercului ω este proiecţia ortogonală a centrului sferei pe planul (π).

2) Dacă $d\left(C, (\pi)\right) = R$, atunci planul (π) este tangent sferei (S).

3) Dacă $d\left(C\left(\pi\right)\right) \rangle R$, planul nu intersectează sfera.

Legat de 1) să facem următoarea observaţie. Dacă $S_1 = 0$ şi $S_2 = 0$ sunt două sfere, atunci ele se vor intersecta dacă planul lor radical (π) $S_1 - S_2 = 0$ intersectează sferele, astfel că ecuaţiile cercului de intersecţie a sferelor S_1 şi S_2 vor fi date de sistemul: $S_1 - S_2 = 0$ şi $S_1 = 0$.

Totalitatea sferelor ce trec prin cercul de intersecţie a două sfere formează un fascicol de sfere de ecuaţie:

$$\alpha S_1 + \beta S_2 = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \tag{6.1.9}$$

iar dacă $\alpha \neq 0$, atunci

$$S_1 + \lambda S_2 = 0 \qquad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{6.1.10}$$

Fascicolul de sfere ce trece prin cercul de intersecţie a două sfere este dat de : $S_1 + \lambda (S_1 - S_2) = 0$

Legat de 2) să vedem cum scriem planul tangent la sfera (S) într-un punct $M_0 (x_0, y_0, z_0) \in (S)$, adică punctul satisface:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + 2\gamma z_0 + \delta = 0,$$

sau altfel scris: $S (x_0, y_0, z_0) = 0$.

Dreapta (6.1.5) va fi tangentă sferei (S) dacă intersecţia sa cu sfera se face într-un singur punct, deci $\Delta = 0$, adică în (6.1.6) avem:

$$(x_0 + \alpha) l + (y_0 + \beta) m + (z_0 + \gamma) n = 0. \tag{6.1.11}$$

Înlocuim l, m, n din (6.1.5), ţinem cont că $S (x_0, y_0, z_0) = 0$, obţinem:

$$x.x_0 + y.y_0 + z.z_0 + \alpha (x + x_0) + \beta (y + y_0) + \gamma (z + z_0) + \delta = 0 \tag{6.1.12}$$

ecuaţia *planului tangent* în M_0 la sfera (S).

6.1.2 Elipsoidul

Elipsoidul este locul geometric al punctelor $M \in \mathcal{E}_3$, ale căror coordonate (x, y, z) în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ satisfac ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{6.1.13}$$

Pentru a vedea care este forma acestei suprafeţe o intersectăm cu:

- axele de coordonate: cu $Ox \Rightarrow A\,(a, 0, 0)$ şi $A'\,(-a, 0, 0)$

cu $Oy\ \Rightarrow B\,(0, b, 0)$ şi $B'\,(0, -b, 0)$

cu $Oz\ \Rightarrow C\,(0, 0, c)$ şi $C'\,(0, 0, -c)$

- planele de coordonate:

xOy şi rezultă $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

xOz şi rezultă: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

yOz şi rezultă: $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

adică elipse în planele de coordonate;

- plane paralele cu planele de coordonate:

cu $z = h$, rezultă: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) = 0 \\ z = h \end{cases}$

care reprezintă elipse reale dacă $|h| < c$. Analog, cu $y = h, x = h$.

Dacă $a = b = c$ se obţine o sferă. Reprezentarea elipsoidului este:

6.1.3 Hiperbolidul cu o pânză

De ecuaţie

$$(H_1)\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{6.1.14}$$

Intersectăm ca mai sus suprafaţa (6.1.14) cu:

$Ox :\Rightarrow A\left(a,0,0\right)$ şi $A^{'}\left(-a,0,0\right)$

$Oy :\Rightarrow B\left(0,b,0\right)$ şi $B^{'}\left(0,-b,0\right)$

Oz : pentru $x=0, y=0$, cuadrica nu are intersecţie.

-cu planele de coordonate: $xOy : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$, elipsă xOz : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$, hiperbolă

$yOz : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$, hiperbolă

- cu planele paralele cu planele de coordonate:

$z=h : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)=0 \\ z=h \end{cases}$

elipse, pentru $\forall\ h\in\mathbf{R}$,

$y=h : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)=0 \\ y=h \end{cases}$

hiperbole, $h\in\forall\mathbf{R}$.

Reprezentarea grafică este în figura 2.

Generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză.

Numim suprafaţă *riglată* suprafaţa care este generată de drepte. Numim *generatoare rectilinii* ale unei suprafete, o familie de drepte astfel încât orice două drepte din familie pot genera suprafaţa. Vom arăta că suprafaţa:

$$(H_1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

este generată de o familie de drepte. Într-adevăr, ecuaţia este echivalentă cu:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

astfel că obţinem următoarele familii de drepte:

$$(G_\lambda) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$$(G_\mu) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

Propoziţia 1. Prin orice punct al lui (H_1) trece câte o singură generatoare din fiecare familie (G_λ) sau (G_μ).

Demonstraţie. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in H_1$, înlocuim în G_λ şi se obţine un sistem liniar cu o singură necunoscută λ, compatibil $(M_0 \in H_1)$. Deci obţinem o soluţie unică λ_0 ce determină o singură generatoare din G_λ. Analog pentru G_μ.

Consecinţă. Două generatoare din aceeaşi familie nu se întâlnesc.

Propoziţia 2. Orice generatoare din familia G_λ întâlneşte o generatoare din familia G_μ.

Demonstraţie. Sistemul liniar de patru ecuaţii şi necunoscute x, y, z, λ, $(\lambda, \mu$ daţi) format de G_λ şi G_μ are determinantul caracteristic nul; sistemul este deci compatibil.

6.1.4 Hiperbolidul cu două pânze

De ecuaţie:

$$(H_2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{6.1.15}$$

Facem cu totul asemănător intersecţiile cu axele de coordonate, planele de coordonate şi plane paralele lor. Pentru $z = h$ se obţine: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) = 0 \\ z = h \end{cases}$, care pentru $|h| > c$ ne dau elipse.

În planele $x = h$ şi $y = h$ se obţin hiperbole. Reprezentarea este dată în figura 3.

6.1.5 Paraboloidul eliptic

De ecuaţie:

$$(P_E) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \qquad p > 0. \tag{6.1.16}$$

Intersecţiile cu plane $z = h > 0$ ne dau elipse, iar în planele $x = h,\ y = h$ se obţin parabole. Reprezentarea grafică este în figura 4.

6.1.6 Paraboloidul hiperbolic

De ecuaţie:

$$(P_H) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \qquad p > 0.$$

Intersecţia cu xOy ne dă dreptele:
$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Intersecţia cu $z = h \neq 0$, ne dă:
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2ph = 0 \\ z = h \end{cases}$, hiperbolă.

Intersecţia cu xOz şi yOz ne dă parabole. Reprezentarea grafică este în figura 5.

Generatoare rectilinii la paraboloidul hiperbolic (P_H).

Ca şi la (H_1) arătăm că paraboloidul hiperbolic:

$(P_H) \quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ admite două familii de generatoare.

$(G_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda z \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$ şi $(G_\mu) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu} \end{cases}$

Propoziţiile 1. şi 2. de la paragraful 6.1.3.şi consecinţa lor se traduc corespunzător pentru (P_H).

6.1.7 Conul

De ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{6.1.17}$$

Intersecţiile cu plane $z = h$ ne dau elipse. Intersecţiile cu plane $x = 0$ şi $y = 0$ ne dau perechi de drepte ce trec prin origine.

Reprezentarea grafică este dată în figura 6.

6.1.8 Cilindrul

- Cilindrul eliptic, de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{6.1.18}$$

- Cilindrul hiperbolic, de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{6.1.19}$$

- Cilindrul parabolic, de ecuaţie:

$$y^2 = 2px, \qquad p \neq 0 \tag{6.1.20}$$

sunt suprafeţe definite de drepte paralele cu Oz şi care se sprijină pe elipsă, hiperbolă, respectiv parabolă din planul $z = 0$.

6.1.9 Punctul dublu

Determinat de ecuaţia: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

6.1.10 Perechi de plane

-secante, de ecuaţie: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$

-paralele, de ecuaţie $x^2 - a^2 = 0$

-confundate, de ecuaţie $x^2 = 0$

6.1.11 Dreaptă dublă

De ecuaţie: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$

6.1.12 Cuadrică vidă

-elipsoid imaginar, de ecuaţie: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

-cilindru eliptic imaginar: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$

-plane imaginare paralele: $x^2 + a^2 = 0$

6.2 Clasificarea cuadricelor

Cuadricele considerate mai sus se numesc *cuadrice pe ecuaţii reduse.*

Putem discuta totuşi de un elipsoid, spre exemplu, care nu are drept simetrii axele şi planele de coodonate, el având drept simetrii un reper diferit de $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Fie cuadrica de ecuaţie generală (6.1.1). Folosind invarianţii izometriei, vom arăta că o cuadrică poate fi redusă la una cuadricele pe ecuaţii reduse din secţiunea precedentă. Vom asocia cuadricei (6.1.1) următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{312} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = (a_{14} \quad a_{24} \quad a_{44}),$$

$$D = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

cu condiţiile: $\quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1,4}.$

În scriere matriceală (6.1.1) devine:

$$f(X) \equiv {}^tX.A.X + 2B.X + a_{44} = 0. \tag{6.2.1}$$

La schimbări de repere afine: $X = SX' + X_0$, ecuaţia cuadricei devine:

$$f\left(X'\right) \equiv X'^t \cdot A' \cdot X' + 2B'X' + a'_{44} = 0 \tag{6.2.2}$$

unde:

$$A' = S^t \cdot A \cdot S, \qquad B' = X_0^t \cdot A \cdot S + B \cdot S, \qquad a'_{44} = f(X_0). \tag{6.2.3}$$

Calculele se efectuează asemănător ca la conice.

Notăm:

$$\delta = \det A, \qquad \Delta = \det D, \qquad I = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{6.2.4}$$

şi cu :

J - suma minorilor de ordin doi cu elemente de pe diagonala principală din A.

K - suma minorilor de ordin trei cu elemente de pe diagonala principală din D.

L - suma minorilor de ordin doi cu elemente de pe diagonala principală din D.

Următoarea teoremă se demonstrează asemănător ca Teorema 1.2, de la conice:

Teorema 1. a) δ, Δ, I, J sunt invarianţii izometrici ai cuadricei (6.1.1).

b)K, L sunt invarianţii centro-izometrici.

În continuare vom proceda la reducerea izometrică a cuadricelor la formă canonică. În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$ considerăm transformarea liniară $T : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ care în baza $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ are matricea A.

Prin metoda transformărilor ortogonale putem determina o bază $B^{'} = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ în raport cu care forma patratică $h\left(X\right) = X^t \cdot A \cdot X$ are expresie canonică, cu matricea $A^{'} = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ sunt valorile proprii ale matricei A şi elementele lui B' sunt vectorii proprii corespunzători, ortonormaţi. Ecuaţia (6.2.1) în raport cu reperul $\mathcal{R}_1 = \{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ se scrie:

$$\lambda_1 \left(x^{'}\right)^2 + \lambda_2 \left(y^{'}\right)^2 + \lambda_3 \left(z^{'}\right)^2 + 2\acute{a}_{14}^{'} x^{'} + 2a_{24}^{'} y^{'} + 2a_{34}^{'} z^{'} + a_{44} = 0. \quad (6.2.5)$$

Teorema 2. Clasificarea cuadricelor este dată de următorul tabel:

	δ	Δ	$I\delta$	I	J	K	L	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Cuadrica
1.	$\neq 0$	< 0	> 0					Acelaşi semn	Elipsoid
2.	$\neq 0$	> 0	> 0					Acelaşi semn	C. vidă
3.	$\neq 0$	$= 0$	> 0					Acelaşi semn	P. dublu
4.	$\neq 0$	> 0	≤ 0					$\pm \quad \pm \quad \mp$	(H_1)
5.	$\neq 0$	> 0			≤ 0			$\pm \quad \pm \quad \mp$	(H_1)
6.	$\neq 0$	< 0	≤ 0					$\pm \quad \pm \quad \mp$	(H_2)
7.	$\neq 0$	< 0			≤ 0			$\pm \quad \pm \quad \mp$	(H_2)
8.	$\neq 0$	$= 0$	$\underline{\leq 0}$		$\overline{\leq 0}$				Con
9.	$= 0$	$\neq 0$			$\rangle 0$			$+ \quad + \quad 0$	PE
10.	$= 0$	$\neq 0$			$\langle 0$			$+ \quad - \quad 0$	PH
11.	$= 0$	$= 0$			$\rangle 0$	$\neq 0$		$+ \quad + \quad 0$	Cilindru E.
12.	$= 0$	$= 0$			$\langle 0$	$\neq 0$		$+ \quad - \quad 0$	Cilindru H
13.	$= 0$	$= 0$			≤ 0	$= 0$		$+ \quad - \quad 0$	Pl. secante
14.	$= 0$	$= 0$			$\rangle 0$	$= 0$		Acelaşi semn	Dr. dublă
15.	$= 0$	$= 0$		$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	< 0	$\pm \quad 0 \quad 0$	Pl. paralele
16.	$= 0$	$= 0$		$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\pm \quad 0 \quad 0$	Pl. conf.
17.	$= 0$	$= 0$		$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	> 0	$\pm \quad 0 \quad 0$	C. vidă
18.	$= 0$	$= 0$		$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$		$\pm \quad 0 \quad 0$	Cilindru P.

Demonstraţie. Procedăm asemănător ca la conice:

Fie cuadrica (6.2.5).

Cazul $\delta \neq 0$. Cum $\delta = \delta^{'} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0$, atunci putem scrie:

$$\lambda_1 \left(x^{'} + \frac{a_{14}^{'}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y^{'} + \frac{a_{24}^{'}}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z^{'} + \frac{a_{34}^{'}}{\lambda_3} \right) + ... = 0 \qquad (6.2.6)$$

Facem translaţia reperului $\mathcal{R}_1$ în punctul $O^{'}$:

$$x^{'} = x^{''} - \frac{a_{14}^{'}}{\lambda_1}; y^{'} = y^{''} - \frac{a_{24}^{'}}{\lambda_2}; z^{'} = z^{''} - \frac{a_{34}^{'}}{\lambda_3}. \qquad (6.2.7)$$

În raport cu reperul $\mathcal{R}^{'} = \left\{ O^{'}, \vec{i}^{'}, \vec{j}^{'}, \vec{k}^{'} \right\}$ cuadrica are ecuaţia:

$$\lambda_1 \left(x^{''} \right)^2 + \lambda_2 \left(y^{''} \right)^2 + \lambda_3 \left(z^{''} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \qquad (6.2.8)$$

Cazurile 1-8 din tabel se deduc din (6.2.8).

Cazul $\delta = 0$, $\delta = \delta' = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$, cel puţin o valoare proprie se anulează. Să presupunem că $\lambda_3 = 0$. Calculăm $\Delta' = -\lambda_1\lambda_2 \left(a'_{34}\right)^2 = \Delta$. Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ şi $a'_{34} \neq 0$,astfel că:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{14}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{24}}{\lambda_2}\right)^2 + 2\left[a'_{34}z' - \frac{\left(a'_{14}\right)^2}{2\lambda_1} - \frac{\left(a'_{24}\right)^2}{2\lambda_2} + \frac{a_{44}}{2}\right] = 0$$

Facând translaţia cerută de această ecuaţie, putem scrie:

$$\lambda_1 \left(x''\right)^2 + \lambda_2 \left(y''\right)^2 + 2z'' = 0 \tag{6.2.9}$$

din care deducem cazurile 9 şi 10 din tabel.

Dacă $\delta = 0, \Delta = 0$, presupunem $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ sau $a'_{34} = 0$, calculăm J cu $\lambda_3 = 0$ şi obţinem $J = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Cazurile 11-14 se obţin considerând $a'_{34} = 0$ şi scriem ecuaţia:

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + 2a'_{14}y' + a_{44} = 0. \tag{6.2.10}$$

Calculăm $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 A_{44} - \lambda_1 \left(a'_{14}\right)^2 - \lambda_2 \left(a'_{24}\right)^2$. Dacă $K = 0$, ecuaţia (6.2.9) se scrie:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{14}}{1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{24}}{2}\right)^2 = 0 \tag{6.2.11}$$

adică cazurile 13 si 14 din tabel. Cazul 11 rezultă din (6.2.9).

În cazurile 15-18, presupunem $J = 0$ şi rezultă $\lambda_2 = 0$, astfel că:

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0. \tag{6.2.12}$$

Valoarea lui K este : $K = \lambda_1 \left[\left(a'_{24}\right)^2 + \left(a'_{34}\right)^2\right]$.

Dacă $K = 0$, obţinem $\lambda_1 \left(x'\right)^2 + 2a'_{14}x' + a_{44} = 0$ şi $L = \lambda_1 a_{44} - \left(a'_{14}\right)^2$, astfel că rezultă cazurile 15-17 din tabel.

Dacă $K \neq 0$ din (6.2.12) rezultă cazul 18.

6.3 Generări de suprafeţe

Teoria suprafeţelor va fi studiată în detaliu ulterior la alt curs. Aici vom face o scurtă introducere în definirea unei curbe sau suprafeţe la modul general într-un spaţiu afin cu n dimensiuni.

6.3.1 Subvarietăţi într-un spaţiu afin

Presupunem cunoscute noţiunile de funcţie diferenţiabilă de clasă C^k şi teorema de inversare locală pentru funcţii de mai multe variabile.

Să considerăm $\mathcal{A}_n$ un spaţiu afin cu n dimensiuni şi $M(x^1, x^2, .., x^n)$ un punct raportat la un reper afin $\mathcal{R}$. Aceasta presupune existenţa unei corespondenţe bijective $\varphi : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}^n$ ce asociază lui M coodonatele sale $(x^1, x^2, .., x^n)$.

Pe $\mathcal{A}_n$ putem considera topologia indusă prin φ^{-1} de cea din $\mathbf{R}^n$, astfel că φ devine o aplicaţie continuă, adică omeomorfism. Fie $\mathcal{S}_p$ un subspaţiu de dimensiune $p \leq n$ şi $\mathcal{R}'$ un reper în $\mathcal{S}_p$ a cărui extensie este $\mathcal{R}$. Considerăm $\psi : \mathcal{S}_p \to \mathbf{R}^p$ aplicaţia definită de acest reper ce asociază unui $M \in \mathcal{S}_p \to (u^1, u^2, .., u^p)$ coordonatele în reperul $\mathcal{R}'$.

Definiţie. $\mathcal{S}_p$ se numeşte *subvarietate* de dimensiune p şi clasă k dacă $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie diferenţiabilă de clasă C^k în fiecare punct al lui $\mathcal{S}_p$.

Aplicaţia $\varphi \circ \psi^{-1}$ se va exprima sub forma

$$x^i = x^i(u^1, ..., u^p) \ \ ; \ \ i = \overline{1, n}, \tag{6.3.1}$$

şi se numesc *ecuaţiile parametrice* ale subvarietăţii.

Presupunem că $\det\left(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}\right) \neq 0$, $\alpha, \beta \in \overline{1, p}$. Atunci putem aplica teorema de inversare locală şi găsim $u^\beta = u^\beta(x^1, ..., x^n)$, $\beta \in \overline{1, p}$, care înlocuite în următoarele $n - p$ ecuaţii ne dau

$$x^a = x^a(x^1, ..., x^p) \ \ ; \ a = \overline{p+1, n} \tag{6.3.2}$$

numite *ecuaţiile explicite* ale subvarietăţii.

În sfârşit, dacă trecem mai sus totul într-un membru putem scrie,

$$F^a(x^1, ..., x^p, ..., x^n) = 0 \ \ ; \ a = \overline{p+1, n} \tag{6.3.3}$$

numite *ecuaţiile implicite* ale subvarietăţii.

Un punct pentru care $\det\left(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}\right) \neq 0$ se numeşte *punct regulat*al subvarietăţii.

Exemple: 1. Cazul $n = 1$, $p = 0, 1$ ne dau ca subvarietăţi doar O şi înreaga dreaptă afină.

2. Cazul $n = 2$ si $p = 0, 1$ din nou nu prezintă interes, dar în cazul $n = 2$ şi $p = 1$ subvarietatea se numeşte *curbă plană* care poate fi dată în una din cele trei modalităţi de mai sus:

- $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases}$, curbă parametric (spre exemplu cercul$\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \end{cases}$)

- $y = y(x)$, curbă explicit (spre exemplu parabola $y = x^2$)

- $F(x, y) = 0$, curbă implicit (spre exemplu cercul $x^2 + y^2 - r^2 = 0$).

3. Cazul $n = 3$.

Aici prezintă interes cazul $p = 1$, subvarietatea se numeşte atunci *curbă în spaţiu* şi poate fi dată în una din următoarele situaţii, cazul explicit reducându-se la cel parametric:

-parametric $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}$, spre exemplu elicea cilindrică $\begin{cases} x = a\cos u \\ y = a\sin u \\ z = bu \end{cases}$,

-implicit$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$, spre exemplu cercul în spaţiu ca intersecţia unei sfere cu un plan.

Altă situaţie este cazul $p = 2$; suvarietatea se numeşte atunci *suprafaţă în spaţiu*, pentru care avem una din următoarele trei reprezentări:

-parametric $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$, spre exemplu sfera $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r\sin u \sin v \\ z = r\sin v \end{cases}$,

-explicit $z = f(x, y)$, spre exemplu paraboloidul eliptic $z = x^2 + y^2$,

-implicit $F(x, y, z) = 0$, spre exemplu sfera $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$.

Ecuaţiile parametrice sunt întodeauna de preferat pentru că ne permite să obţinem o scriere vectorială prescurtată. Spre exemplu

$$\vec{r} = \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$$

pentru curbă, sau

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

pentru suprafaţă.

Observaţi că am folosit notaţii fără indici pentru coordonatele unui punct şi respectiv pentru parametrii. Nu am precizat în exemple intervalele în care iau valori parametrii din comoditate.

În continuare după această scurtă pregătire ne propunem să studiem modul de deducere a ecuaţiilor câtorva din cuadricele studiate. Vom obţine şi situaţii de suprafeţe de ecuaţii mult mai generale.

6.3.2 Suprafeţe cilindrice

Definiţie. Se numeşte *suprafaţă cilindrică*, suprafaţa generată de drepte, numite generatoare, ce rămân paralele cu o dreaptă dată şi se sprijină pe o curbă dată (curba directoare).

Fie (d) dreapta dată, de ecuaţii:

$$(d) \qquad \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}, \text{ unde } P, Q \text{ sunt două plane ce se intersectează.}$$

Presupunem (C) o curbă obţinută prin intersecţia a două suprafeţe (cazul implicit):

$$(C) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Toate dreptele paralele cu dreapta (d) vor fi de ecuaţii $\begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in$ **R**. Condiţia ca aceste drepte să se sprijine pe curba (C) este ca sistemul:

$$\begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases} \text{să admită soluţii.}$$

Sistemul este subdimensionat, are patru ecuaţii şi x, y, z, λ, μ necunoscute, deci în general este compatibil. Eliminând x, y, z din cele patru ecuaţii vom obţine o singură ecuaţie în λ şi μ :

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0, \tag{6.3.4}$$

numită condiţia de sprijin (de compatibilitate).

Pentru a găsi locul geometric căutat eliminăm parametrii $\lambda = P$ şi $\mu = Q$ în (6.3.4) şi se obţine ecuaţia suprafeţei cilindrice, adică:

$$\Phi(P, Q) = 0. \tag{6.3.5}$$

Aplicaţie. Să scriem ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu Oz şi curba directoare (C) $\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$ oarecare.

Axa Oz are ecuaţiile: $(d)\begin{cases} P \equiv x = 0 \\ Q \equiv y = 0 \end{cases}$, astfel că $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$ vor fi dreptele paralele cu Oz. Ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu Oz va fi $\Phi(x, y) = 0,$ ecuaţie în care lipseşte z.

Deci recunoaştem o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu Oz prin faptul că în ecuaţia sa lipseşte z.

Considerând acum subcazurile în care curba (C) este:

a) elipsa (C) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, se obţine cilindrul eliptic.

b) hiperbola (C) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, se obţine cilindrul hiperbolic.

c) parabola (C) $\begin{cases} y^2 = 2pz \\ z = 0 \end{cases}$, se obţine cilindrul parabolic.

Consideraţii asemănătoare pot fi făcute pentru cilindrii cu generatoare paralele cu Oy sau cu Ox.

Generalizare. Se numeşte $(p, q)-$cilindru într-un spaţiu afin $\mathcal{A}_n$ locul geometric al punctelor unui $p-$plan variabil, de subspaţiu director V_p dat, ce se sprijină pe o $q-$varietate $\mathcal{S}_q$ (varietate directoare).

Presupunând că V_p este generat de vectorii $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_p\}$ şi că subvarietatea directoare are ecuaţia vectorială $\vec{r} = \vec{r}_0(u^1, u^2, ..., u^q)$ atunci ecuaţia vectorială a $(p, q)-$cilindrului este

$$\vec{r} = \vec{r}_0(u^\alpha) + \sum_{a=1}^{p} u^{\alpha+a}\vec{\varepsilon}_a.$$

Consideraţii asemănătoare pot fi făcute în cazul când $p-$planul este dat ca intersecţia a $n-p$ hiperplane şi subvarietatea directoare dată implicit ca intersecţie de $n-q$ hipersuprafeţe. În acest caz se generalizează în mod direct discuţia din $\mathcal{E}_3$.

6.3.3 Suprafeţe conice

Definiţie. Se numeşte *suprafaţă conică*, suprafaţa generată de drepte ce trec printr-un punct fix şi se sprijină pe o curbă dată.

Fie V punct fix (vârful conului). Putem presupune că V este obţinut ca intersecţia a trei plane (eventual paralele cu planele de coordonate), adică: $V\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \\ R=0 \end{cases}$. Dacă $V(x_0, y_o, z_0)$, atunci evident: $\begin{cases} P\equiv x-x_0=0 \\ Q\equiv y-y_0=0 \\ R\equiv z-z_0=0 \end{cases}$.

Dreptele ce trec prin V pot fi obţinute prin intersectarea fascicolelor de plane:

$$\begin{cases} P=\lambda Q \\ R=\mu Q \end{cases}. \tag{6.3.6}$$

Fie (C) curba de sprijin (curba directoare), de ecuaţii:(C) $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

Condiţia ca dreptele (6.3.6) să se sprijine pe curba (C) este ca sistemul:

$$\begin{cases} P = \lambda Q \\ R = \mu Q \\ F = 0 \\ G = 0 \end{cases} \tag{6.3.7}$$

să fie compatibil.

Eliminând x, y, z din (6.3.7) se obţine condiţia de sprijin: $\Phi(\lambda, \mu) = 0$. Pentru a găsi locul geometric căutat revenim la λ şi μ din (6.3.6) şi obţinem ecuaţia suprafeţei conice cerute:

$$\Phi\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{Q}\right) = 0. \tag{6.3.8}$$

Caz particular: - conul cu vârful în $O(0,0,0)$. Atunci: $P \equiv x = 0$; $Q \equiv y = 0$ şi ecuaţia conului va fi :

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0. \tag{6.3.9}$$

Dacă particularizăm curba (C) , spre exemplu: $(C)\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c > 0 \end{cases}$ se obţine ecuaţia conului (eliptic) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

Legat de (6.3.8) să facem următoarea observaţie:

Dacă $\begin{cases} x' = t^\alpha x \\ y' = t^\alpha y \\ z' = t^\alpha z \end{cases}$ este o transformare omogenă de grad α în spaţiu, atunci: $\Phi\left(\frac{x'}{y'}; \frac{z'}{y'}\right) \equiv \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0$.

Astfel că ecuaţia (6.3.9) este o ecuaţie omogenă de grad α (oarecare). Efectuând, eventual translaţia $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$, unde $V(x_0, y_0, z_0)$, deducem că ecuaţia (6.3.9) a unei suprafeţe conice este o ecuaţie omogenă, abstracţie făcând de o translaţie în spaţiu. Spre exemplu ecuaţia, $xy + xz + yz = 0$ este o ecuaţie omogenă deci reprezintă o suprafaţă conică (chiar cuadrica con) cu vârful în O.

Şi aici putem generaliza noţiunea de suprafaţă conică la spaţiul $\mathcal{A}_n$.

Definiţie. Numim $(p, q)-$con, subvarietatea din $\mathcal{A}_n$ generată de un $p-$plan variabil ce trece printr-un $(p-1)-$plan fix şi se sprijină pe o $q-$ varietate.

Presupunem că, raportat la un reper afin $\mathcal{R}$, $(p-1)-$ planul fix are ecuaţia vectorială $\vec{r} = \vec{r}_0 + \sum_{a=1}^{p-1} u^a \vec{\varepsilon}_a$ şi ca $q-$varietatea $\mathcal{V}_q$ are ecuaţia vectorială $\vec{r} = \vec{r}_1(u^\alpha)$, $\alpha = \overline{1,q}$.

Atunci ecuaţia $(p,q)-$conului este

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \sum_{a=1}^{p-1} u^a \vec{\varepsilon}_a + u^p \vec{\varepsilon}_p$$

unde $\vec{\varepsilon}_p = \vec{r}_1(u^\alpha) - r_0$.

Deducerea acestei ecuaţii vectoriale rezultă din desenul de mai jos.

6.3.4 Suprafeţe conoide cu plan director

Definiţie. Se numeşte *suprafaţă conoidă cu plan director*, suprafaţa generată de drepte ce rămân paralele cu un plan (P), se sprijină pe o dreaptă (d) şi pe o curbă dată (C) .

Fie (d) intersecţia planelor (d) $\quad \begin{cases} Q = 0 \\ R = 0 \end{cases}$ şi (C) intersecţia suprafeţelor (C) $\quad \begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$. Planele paralele cu planul (P) vor avea ecuaţiile $P = \lambda$,

Planele ce trec prin dreapta (d) fac parte din fascicolul de plane $Q = \mu R$. Astfel că dreptele căutate vor fi printre dreptele:

$$\begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu R \end{cases} . \tag{6.3.10}$$

Impunem condiţia ca aceste drepte să se sprijine pe curba (C), obţinem sistemul:

$$\begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu R \\ F = 0 \\ G = 0 \end{cases} \tag{6.3.11}$$

care ne conduce la condiţia de compatibilitate: $\Phi(\lambda, \mu) = 0$.

Pentru a găsi locul geometric înlocuim λ şi μ din (6.3.10) şi obţinem ecuaţia suprafeţei conoide cu plan director:

$$\Phi\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0. \tag{6.3.12}$$

Şi aici se poate generaliza noţiunea la spaţii afine $\mathcal{A}_n$.

6.3.5 Suprafeţe de rotaţie.

Definiţie. Se numeşte *suprafaţă de rotaţie*, suprafaţa descrisă de cercurile din spaţiu ce au centrele situate pe o dreaptă, numit ax de rotaţie, sunt situate în plane perpendiculare pe axul de rotaţie şi se sprijină pe o curbă dată.

Fie $(d)\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, axul de rotatie şi $(C) \begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$ curba dată.

Cercurile cu centrul pe (d), situate în plane perpendiculare pe (d) se obţin intersectând sferele de rază variabilă cu centrul într-un punct de pe

(d) , $M_0(x_0, y_0, z_0)$, cu planele perpendiculare pe (d) şi de poziţie variabilă. Astfel că ecuaţiile acestor cercuri sunt:

$$\begin{cases} S \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ P \equiv l\,(x - x_0) + m\,(y - y_0) + n\,(z - z_0) = \mu \end{cases} . \tag{6.3.13}$$

Impunem condiţia ca cercurile (6.3.13) să se sprijine pe curba (C) şi obţinem condiţia de compatibilitate a sistemului: $\Phi\left(\lambda^2, \mu\right) = 0$.

Revenind cu λ^2 şi μ din (6.3.13), rezultă că ecuaţia unei suprafeţe de rotaţie este:

$$\Phi\,(S, P) = 0. \tag{6.3.14}$$

Să observăm că ecuaţia unei suprafeţe de rotaţie este o funcţie de ecuaţia sferei $S = 0$ şi a planului $P = 0$.

Exemplu: $xy + xz + yz = 0$ am văzut că este ecuaţia unui con şi acesta este de rotaţie, deoarece se scrie: $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Aplicaţie. Să se scrie ecuaţia suprafeţei obţinută prin rotirea în jurul axei Ox a elipsei:

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Cercurile (6.3.13) sunt cu centrul pe Ox, deci în plane $x = \mu$ şi se obţin prin intersecţia cu sfere de rază variabilă cu centrul O, adică:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x = \mu \end{cases} .$$

Impunem condiţia ca aceste cercuri să se sprijine pe (C) şi obţinem: $\Phi\left(\lambda^2, \mu\right) \equiv \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{b^2} - 1 = 0.$

Înlocuind λ^2 şi μ de mai sus, rezultă că ecuaţia suprafeţei de rotaţie este elipsoidul de rotaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Cu totul asemănător se pot obţine alte cuadrice de rotaţie.

-*Ecuaţii parametrice ale suprafeţelor de rotaţie*:

Să considerăm o suprafaţă de rotaţie în jurul lui Oz, M punct de pe suprafaţă, M' proiecţia sa pe planul xOy. Fie u unghiul dintre Ox şi OM',

$OM' = f(v)$ şi $MM' = g(v)$.

Ecuaţiile suprafeţei de rotaţie sunt: $\begin{cases} x = f(v)\cos u \\ y = f(v)\sin u \\ z = g(v) \end{cases}$.

Exemple: 1. Dacă $f(v) = R\sin v, g(v) = R\cos v$ se obţin ecuaţiile parametrice ale sferei.

2. Dacă $f(v) = a\sin v, g(v) = b\cos v$ se obţin ecuaţiile parametrice ale elipsoidului de rotaţie.

3. Dacă $f(v) = R\sin v, g(v) = R\left(\cos v + \ln tg\frac{v}{2}\right)$ se obţin ecuaţiile parametrice ale pseudosferei (titirezul).

6.3.6 Suprafeţe riglate şi desfăşurabile

Definiţie. Se numeşte *suprafaţ ă riglată* suprafaţa descrisă de o dreaptă ce se sprijină pe o curbă dată (curba directoare) şi se deplasează după o lege dată.

Să găsim ecuaţii vectoriale ale suprafeţelor riglate. Dacă $\vec{r} = \vec{r}_0(u)$ este ecuaţia vectorială a curbei date şi $\vec{r}_1(u)$ este vectorul director al dreptelor ce se mişcă în fiecare punct după o lege dată (deci depinde de u) atunci ecuaţia vectorială a suprafeţei riglate este

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0(u) + v\vec{r}_1(u). \qquad (6.3.15)$$

Această ecuaţie vectorială ne dă prin eliminarea parametrului v următoarele ecuaţii canonice:

$$\frac{x - x_0(u)}{l(u)} = \frac{y - y_0(u)}{m(u)} = \frac{z - z_0(u)}{n(u)}. \qquad (6.3.16)$$

-Dacă $\vec{r}_1$ este un vector constant (deci nu depinde de u), se obţine suprafaţa cilindrică.

-Dacă $\vec{r}_0$ este constant (deci curba directoare se reduce la un punct) se obţine suprafaţa conică.

-Dacă ecuaţiile parametrice (traducerea ecuaţiei vectoriale) sunt liniare în ambii parametri, se obţin ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe numită *dublu riglată*:

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 u + v(l_0 + l_1 u) \\ y = b_0 + b_1 u + v(m_0 + m_1 u) \\ z = c_0 + c_1 u + v(n_0 + n_1 u). \end{cases}$$

Acesta determină prin eliminarea parametrilor u şi v o ecuaţie algebrică de gradul al doilea, deci o cuadrică. Dintre cuadricele studiate am văzut că drepte în întregime conţin doar: hiperboloidul cu o pânză, paraboloidul hiperbolic, conul, cilindrii şi anumite cuadrice degenerate.

Definiţie. O suprafaţă riglată se numeşte *desfăşurabilă* dacă planul tangent de-a lungul unei generatoare oarecare este acelaşi.

Aici apare o noţiune care va fi aprofundată la cursul de teoria diferenţiabilă a curbelor şi suprafeţelor. Fără a intra în detalii, se va demonstra că planul tangent la o suprafaţă $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ este perpendicular pe vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ obţinuţi prin derivare parţială în raport cu u şi respectiv v.

În cazul suprafeţelor riglate, prin derivare în (6.3.15), aceşti vectori au componentele:

$\vec{r}_u \Rightarrow\ x_u = x_0' + vl'\ ;\ y_u = y_0' + vm'\ ;\ z_u = z_u' + vn';$

$\vec{r}_v \Rightarrow\ x_v = l\ ;\ y_v = m\ ;\ z_v = n.$

Prin semnul $'$ s-a notat derivata în raport cu variabila u.

Codiţiile ca un vector normal $\vec{N}(A, B, C)$ să fie perpendicular pe $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ se traduc prin

$Ax_u + By_u + Cz_u = 0$ şi respectiv $Ax_v + By_v + Cz_v = 0$, care ne dau că:

$$\begin{aligned} Ax_0' + By_0' + Cz_0' + v(Al' + Bm' + Cn') &= 0 \\ Al + Bm + Cn &= 0 \end{aligned}$$

Pe curbele $u = const$ aceste condiţii nu trebuie să depindă de v şi deci obligatoriu trebuie ca

$$\begin{cases} Ax_0' + By_0' + Cz_0' = 0 \\ Al' + Bm' + Cn' = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$$

astfel că sisitemul va admite soluţii nenule dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ l' & m' & n' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \tag{6.3.17}$$

condiţie necesară şi suficientă ca suprafaţa riglată să fie desfaşurabilă.

Partea II

Aplicaţii

Capitolul 7

Probleme rezolvate la Capitolul 1

7.1 Spaţii vectoriale

Exerciţiul 1. Fie $V = \mathbf{R}_+^*$ şi operaţiile definite pe V:

$$x \vee y = x \cdot y; \quad \alpha \perp y = y^\alpha \tag{7.1.1}$$

pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}, \quad x, y \in V$. Să se arate că $(V, \vee, \perp)$ are structură de spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale.

Rezolvare: Multimea numerelor reale şi pozitive este grup abelian în raport cu înmulţirea, deci prima condiţie din definiţia spaţiului vectorial este îndeplinită. Verificăm acum condiţiile referitoare la amplificarea cu scalari. Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, x, y \in V$, arbitrar aleşi. Membrul stâng al condiţiei care afirmă că amplificarea succesivă cu scalari este echivalentă cu amplificarea cu produsul scalarilor se scrie:

$$\alpha \perp (\beta \perp x) = \alpha \perp x^\beta = \left(x^\beta\right)^\alpha = x^{\alpha\beta},$$

iar membrul drept este

$$(\alpha\beta) \perp x = x^{\alpha\beta},$$

deci condiţia este îndeplinită. Verificăm condiţia de distributivitate a amplificării cu scalari faţă de adunarea vectorilor, calculând fiecare din cei doi membri:

$$\alpha \perp (x \vee y) = \alpha \perp (x \cdot y) = (x \cdot y)^\alpha,$$

$$\alpha \perp x \vee \alpha \perp y = x^{\alpha} \vee y^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha},$$

de unde, tinând cont de proprietăţile puterilor numerelor reale şi pozitive, rezultă egalitatea cerută. Următoarea condiţie, de distributivitate a amplificării cu scalari faţă de adunarea scalarilor, este satisfacută de asemenea, dupa cum urmează;

$$(\alpha + \beta) \perp x = x^{\alpha+\beta}$$

$$\alpha \perp x \vee \beta \perp x = x^{\alpha} \vee x^{\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{\alpha+\beta},$$

iar relaţiile

$$1 \perp x = x^1 = x,$$

reprezintă verificarea condiţiei ca amplificarea cu elementul unu al câmpului K să nu schimbe vectorii. Prin urmare $(V, \vee, \perp)$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$, cctd.

Exerciţiul 2: Care din următoarele perechi de operaţii defineşte pe $\mathbf{R}^2$ o structură de spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale?

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \quad \alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$;

b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)\,, \quad \alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$;

c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_2)\,, \quad \alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$;

d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \quad \alpha\,(x, y) = (0, \alpha y)$.

pentru orice $(x, y)\,, (x_1, y_1)\,, (x_2, y_2) \in \mathbf{R^2}$ şi orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

Rezolvare: Operaţiile de la punctul a) dau pe $\mathbf{R}^2$ structura standard de spaţiu vectorial real, verificarea condiţiilor din definiţia spaţiului vectorial fiind imediate. Adunarea definită la punctul b) nu admite element neutru, deci condiţia de grup abelian în raport cu operaţia internă din definiţia spaţiului vectorial nu este îndeplinită. La punctul c), adunarea nu este comutativă, iar elementul neutru este doar la stânga, deci din nou nu obţinem structura de grup abelian. Ultima variantă de operaţii satisface condiţiile de grup abelian din definiţia spaţiului vectorial, dar nu satisface ultima condiţie, cea prin care amplificarea cu elementul unu al câmpului de scalari nu schimbă vectorii, prin urmare nici aceste operaţii nu dau structură de spaţiu vectorial real pe $\mathbf{R}^2$.

7.2 Subspaţii vectoriale. Operaţii cu subspaţii

Exerciţiul 1: Determinaţi subspaţiile generate de următoarele submulţimi din $\mathbf{R}^n$:

1. $\{u_1, u_2, u_3\}$, unde $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, 3, 3), u_3 = (3, 7, 1), n = 3$
2. $\{u_1, u_2, u_3\}$, unde $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 2), u_3 = (0, -1, 2), n = 3$
3. $\{u_1, u_2\}$, unde $u_1 = (0, 1, 2), u_2 = (0, 2, 4), u_3 = (0, -1, 2), n = 3$
4. $\{u_1, u_2, u_3\}$, unde $u_1 = (1, 1, 0, 2), u_2 = (2, 1, 0, 2), u_3 = (0, -1, 2, 1), n = 4$

Rezolvare: 1. Din definiţia subspaţiului generat de o mulţime de vectori, mulţimea $U = [u_1, u_2, u_3]$ conţine toate combinaţiile de forma

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Observatie 7.2.1 *Dacă vectorii din sistemul U sunt liniar dependenţi, atunci subspaţiul $[U]$ este generat de o submulţime a lui U formată din vectori liniar independenţi. Reamintim că o mulţime de vectori este liniar independentă, sau mai spunem ca vectorii sunt liniar independenţi (prescurtat l.i.), dacă orice combinaţie liniară a acestora este nulă doar atunci când scalarii coeficienţi sunt toţi nuli.*

Tinând cont de observaţia anterioară, verificăm mai întâi liniar independenţa celor trei vectori. Aceasta revine la a calcula rangul matricei în care coloanele sunt exact vectorii implicaţi. În general, pentru a studia liniar independenţa a m vectori din $\mathbf{R}^n$, calculăm rangul matricei în care coloanele sunt cei m vectori. Valoarea acestui rang dă numărul de vectori l.i., aceştia fiind cei corespunzători coloanelor minorului principal ales. Aici, rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

fiind egal cu 3, rezultă că U conţine toate tripletele de forma

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3),$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$. Cautând altă exprimare pentru elementele din U, notam cu x, y, z componentele tripletului de mai sus şi încercăm să eliminăm parametii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ între cele trei ecuaţii obţinute. Sistemul obţinut este însă compatibil deterninat, matricea sa fiind exact cea de ami sus, deci orice element $(x, y, z) \in \mathbf{R^3}$, se poate scrie în mod unic ca o combinaţie liniară a vectorilor u_1, u_2, u_3, de unde rezultă că subspaţiul generat de cei trei vectori este chiar $\mathbf{R}^3$.

2. Studiem l.i. pentru vectorii daţi. Rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

fiind egal cu 2, alegând ca minor principal colţul din stânga sus al matricei, rezultă că $[u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2]$. Elementele acestui subspaţiu sunt toate combinaţiile liniare $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, deci toate tripletele de forma

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, 2\alpha_2).$$

Din relaţiile $\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_1 \\ z = 2\alpha_2 \end{cases}$ putem elimina parametrii şi obţinem subspaţiul vectorial generat de vectorii daţi ca fiind mulţimea tuturor tripletelor (x, y, z) care verifică

$$2x - 2y - z = 0,$$

ceea ce recunoaştem din clasa a XI-a ca fiind ecuaţia unui plan. Ţinând cont că acest plan a fost generat de doi vectori l.i., putem spune că are dimensiunea 2. Astfel, mulţimea tripletelor care reprezintă coordonatele punctelor din acest plan este un subspaţiu de dimensiune doi al spaţiului $\mathbf{R}^3$. În general, mulţimea tripletelor reprezentând coordonatele unui plan care conţine originea în spatiul ambient este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbf{R}^3$.

3. Rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

fiind 1, alegem minorul principal colţul stânga jos şi obţinem $[u_1, u_2] = [u_1]$, deci conţine tripletele $(0, \alpha_1, 2\alpha_1), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Altfel spus, subspaţiul generat de u_1, u_2 este mulţimea tripletelor (x, y, z) care verifică ecuaţia

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$$

Subspaţiul căutat este deci mulţimea coordonatelor punctelor dreptei a cărei ecuaţie este dată prin relaţia de mai sus. Ţinând cont că acest subspaţiu a fost generat de un singur vector, acesta fiind deci bază a subspaţiului, făcând un abuz de limbaj, spunem că dreapta care trece prin origine este subspaţiu de dimensiune unu a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

Observatie 7.2.2 *Subspaţiile vectoriale ale spaţiului* $\mathbf{R}^3$ *sunt: mulţimea formată din (0,0,0), singurul subspaţiu de dimensiune 0; mulţimi de triplete care reprezintă coordonatele punctelor apartinând dreptelor care trec prin origine, subspaţii de dimensiune 1; mulţimi de triplete reprezentând coordonatele punctelor apartinând planelor care trec prin origine, subpaţii de dimensiune 2; spaţiul* $\mathbf{R}^3$*, singurul subspaţiu de dimensiune 3.*

4.Rangul mnatricei

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

este egal cu trei, minorul principal fiind de exemplu colţul stânga sus. Avem prin urmare cei trei vectori l.i., aşadar subspaţiul generat de ei conţine toate 4-upletele de forma:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3).$$

Egalând cu x, y, z, t cele patru componente de mai sus, putem elimina parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ şi obţinem că subspaţiul generat de vectorii daţi conţine toate 4-upletele (x, y, z, t) care verifică

$$y + z - t = 0.$$

În capitolul "Spaţii afine" vom comenta ce reprezintă din punct de vedere geometric acest tip de subspaţii vectoriale ale lui $\mathbf{R}^4$.

Exerciţiul 2: Studiaţi care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathbf{R}^3$ este subspaţiu vectorial al $\mathbf{R}$-spaţului vectorial standard $\mathbf{R}^3$, precizând cate un sistem de generatori pentru acestea:

$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$;
$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$;
$S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 = x_2 = 2x_3\}$;
$S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 - 1 = x_2 + 1 = x_3\}$.

Rezolvare: Ţinând cont de faptul că o condiţie necesară ca o submulţime a unui spaţiu vectorial V să fie subspaţiu este să fie subgrup al grupului aditiv $(V, +)$, deci să conţină elementul zero al acestui grup, vom verifica de la inceput care dintre cele cinci submulţimi ale lui $\mathbf{R}^3$ conţine originea spaţiului, adică tripletul $(0, 0, 0)$. Se observă că acest elelment nu aparţine mulţimilor S_3 şi S_5, deci acestea cu siguranţă nu sunt subspaţii vectoriale, în timp ce celelalte trei mulţimi ar putea fi. Sugerăm ca exerciţiu verificarea directă a faptului că sunt subspaţii pentru fiecare din acestea. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca S sa fie subspaţiu vectorial a K-spaţiului vectorial V este ca odată cu două elemente (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) din S, orice combinaţie liniaă a acestora cu scalari din K să fie în S.

În continuare vom căuta să scriem fiecare multime ca fiind generată de niste vectori concreţi. Dacă reusim acest lucru, dovedim că sunt subspaţii vectoriale ca fiind subspaţiile generate de vectorii găsiţi. Observăm că fiecare mulţime dată reprezintă mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii cu trei necunoscute.

Pentru S_1, rezolvăm sistemul cu o ecuaţie:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Este un sistem dublu nedeterminat, a cărui soluţie generală este

$$(\alpha, \beta, -\alpha - \beta) = (\alpha, 0, -\alpha) + (0, \beta, -\beta) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ arbitrari. Prin urmare, orice element din S_1 este o combinaţie liniară a vectorilor $u_1 = (1, 0, -1)$ si $v_1 = (0, 1, -1)$, deci S_1 este subspaţiul vectorial generat de aceşti vectori.

Pentru multimea S_2 rezolvăm sistemul

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

şi găsim soluţia generală:

$$(2\alpha, \beta, \alpha) = (2\alpha, 0, \alpha) + (0, \beta, 0) = \alpha(2, 0, 1) + \beta(0, 1, 0).$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ arbitrari. Prin urmare, orice element din S_2 este o combinaţie liniară a vectorilor $u_2 = (2, 0, 1)$ si $v_2 = (0, 1, 0)$, deci S_2 este subspaţiul vectorial generat de aceşti vectori.

Remarcăm faptul că în ambele cazuri generatorii sunt şi liniar independenţi, aşadar reprezintă baze ale spaţiilor vectoriale S_1, respectiv S_2, aceste spaţii vectoriale având astfel dimensiunea 2. Din punct de vedere geometric, mulţimile S_1 şi S_2 conţin coordonatele punctelor a două plane ale căror ecuaţii sunt date mai sus. Conform unei observaţii anterioare, am fi putut afirma direct ca aceste sunt subspatii vectoriale ale lui $\mathbf{R}^3$. De asemenea, cum ecuaţiile ce definesc mulţimea S_4 reprezintă o dreaptă care trece prin origine, putem afirma că S_4 este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$. Să găsim şi aici un sistem de generatori, rezolvând sistemul:

$$x_1 = x_2 = 2x_3,$$

a cărui soluţie generală este

$$(2\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 2),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Am obţinut că orice element al mulţimii S_4 este generat de vectorul $u_4 = (1, 1, 2)$, astfel că are loc egalitatea $S_4 = [u_4]$.

Revenim în final la mulţimile S_3 şi S_5 despre care am dovedit că nu sunt subspaţii vectoriale. Încercând să găsim şi pentru aceste mulţimi câte un sistem de generatori aşa cum am procedat mai sus, avem forma generală a elementelor din S_3

$$(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) + (0, 0, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Nu putem spune că S_3 este generat de vectorii $u_3 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, -1)$ deoarece intervine vectorul (0,0,1). În schimb, $S_3 - (0, 0, 1) = [u_3, v_3]$, deci este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$. Am găsit exact definiţia noţiunii de varietate liniară. Aşadar mulţimea S_3 este o varietate liniară în $\mathbf{R}^3$.

Analog, forma generală a elementelor din S_5 este

$(\alpha + 1, \alpha_1, \alpha) = \alpha(1, 1, 1) + (1, -1, 0)$, deci $S_5 - (1, 1, 0) = [(1, 1, 1)]$. Mulţimea S_5 este de asemenea varietate liniară.

Observatie 7.2.3 *Varietăţile liniare de mai sus conţin triplete care reprezintă coordonatele punctelor dintr-un plan, respectiv de pe o dreaptă care nu trec prin origine. În general, mulţimile coordonatelor planelor şi dreptelor care trec prin originea spaţiului geometric cu trei dimensiuni sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbf{R}^3$, pe cand mulţimile coordonatelor punctelor planelor şi dreptelor care nu trec prin origine sunt varietăţi liniare.*

Exerciţiul 3: Determinaţi subspaţiile vectoriale $S_1 \cap S_2$, $S_1 + S_2$, $S_1 \cap S_4$, $S_1 + S_4$, $S_2 \cap S_4$, $S_2 + S_4$, unde mulţimile S_1, S_2, S_4 sunt definite în exerciţiul anterior.

Rezolvare: Intersecţia subspaţiilor S_1 şi S_2 se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Soluţia generală este

$(2\alpha, -3\alpha, \alpha) = \alpha(2, -3, 1),\ \alpha \in \mathbf{R}$,

deci avem $S_1 \cap S_2 = [(2, -3, 1)]$. O altă formă pentru acest subspaţiu o obţinem notând cu x, y, z componentele unui element general al său. Avem

$S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}\}.$,

Pentru a determina $S_1 + S_2$, folosim rezultatul care afirmă că suma a două subspaţii vectoriale este subspaţiul generat de reunuiunea lor. Dar S_1 este generat de vectorii u_1, v_1, deci orice element al său este o combinaţie liniară a acestor vectori; subspaţiul S_2 este generat de vectorii u_2, v_2., orice element al său fiind o combinaţie liniară a vectorilor u_2, v_2. Rezultă că un element arbitrar din spaţiul $[S_1 \cup S_2]$, fiind o combinaţie liniară de elemente din S_1 şi/sau S_2 este o combinaţie liniară de vectorii u_1, v_1, u_2, v_2. Astfel avem egalitatea

$$[S_1 \cup S_2] = [u_1, v_1, u_2, v_2].$$

Studiem liniar independenţa vectorilor u_1, v_1, u_2, v_2. Rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este egal cu trei, deci subspaţiul $S_1 + S_2$ este un subspaţiu de dimensiune trei al spaţiului $\mathbf{R}^3$. Rezultă $S_1 + S_2 = \mathbf{R^3}$.

Determinăm în continuare intersecţia subspaţiilor S_1 şi S_4, rezolvând sistemul liniar şi omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Soluţia este (0,0,0), sistemul fiind compatibil determinat. Am găsit subspaţiul $S_1 \cap S_4 = \{(0, 0, 0)\}$. Ca mai înainte, avem egalităţile:

$$S_1 + S_4 = [S_1 \cup S_4] = [u_1, v_1, u_4],$$

unde am ţinut cont de rezultatele din exerciţiul anterior. Dar vectorii u_1, v_1, u_4 sunt liniar independenţi, deci găsim $S_1 + S_4 = \mathbf{R^3}$. Deoarece $S_1 \cap S_4$ conţine doar vectorul nul, suma este chiar directă. Lăsăm ca aplicaţie determinarea subspaţiilor $S_2 \cap S_4$, $S_2 + S_4$.

Tema 1: Găsiţi câte un sistem de generatori pentru subspaţiile vectoriale S_1, S_2, S_3 ale lui $\mathbf{R}^3$, apoi determinaţi subspaţiile vectoriale $S_1 \cap S_2$, $S_1 + S_2$, $S_1 \cap S_3$, $S_1 + S_3$, $S_2 \cap S_3$, $S_2 + S_3$, unde

$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$,

$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_2 - x_3 = 0\}$,

$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid 3x_1 = 3x_2 = x_3\}$.

Tema 2: Demonstraţi că suma directă a subspaţiilor D_1 şi D_2 ale spaţiului vectorial $\mathbf{R}$ este întreg spaţiul, unde

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \mid x + 2y = 0\}$,

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \mid x - y = 0\}$.

7.3 Schimbarea bazei. Lema substituţiei

Exerciţiul 1: Găsiti baza *B'*=$\{e'_1.e'_2,e'_3\}$din $\mathbf{R}^3$ în raport cu care vectorii $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 3), v_3 = (4, 3, 2)$ au respectiv componentele (0,1,2), (1,1,1),(2,1,-1).

Rezolvare: Condiţia ca v_1 să aibă componenetele (0,1,2) în raport cu *B'* înseamnă că $0e'_1 + 1e'_2 + 3e'_3 = v_1$. Scriind şi celelalte două condiţii, obţinem sistemul

$$\begin{cases} e'_2 + 2e'_3 = v_1 \\ e'_1 + e'_2 + e'_3 = v_2 \\ 2e'_1 + e'_2 - e'_3 = v_3 \end{cases}$$

cu necunoscutele $e'_1.e'_2, e'_3$. Găsim

$$\begin{cases} e'_1 = -2v_1 + 3v_2 - v_3 = (-3, -5, 7) \\ e'_2 = 3v_1 - 4v_2 + 2v_3 = (7, 9, -8) \\ e'_3 = -v_1 + 2v_2 - v_3 = (-3, -4, 4) \end{cases}$$

Exerciţiul 2: Folosind lema substituţiei, să se determine componentele vectorului x=(6,-5,3) în baza *B'*=$\{e'_1.e'_2, e'_3\}$ din $\mathbf{R}^3$ cu $e'_1 = (1, 1, 0)$, $e'_2 = (0, 0, 1)$, $e'_3 = (0, 1, 1)$.

Rezolvare: Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică în $\mathbf{R}^3$. Urmând lema substituţiei, completăm Tabelul 1. În prima parte am introdus datele, adică componentele

Tabel 1.

	e'$_1$	e'$_2$	e'$_3$	x
e$_1$	**1**	0	0	6
e$_2$	1	0	1	-5
e$_3$	0	1	1	3
e'$_1$	1	0	0	6
e$_2$	0	0	1	-11
e$_3$	0	**1**	1	3
e'$_1$	1	0	0	6
e$_2$	0	0	**1**	-11
e'$_2$	0	1	1	3
e'$_1$	1	0	0	6
e'$_3$	0	0	1	-11
e'$_2$	0	1	0	14

vectorilor e_1', e_2', e_3', x în raport cu baza canonică. Cifra îngroşată reprezintă pivotul, element care arată aici că substituim vectorul e_1 prin e_1'. Regulile după care se completează tabelul după fiecare substituţie sunt: linia pivotului se împarte la pivot; coloana pivotului devine unitară (are 1 pe poziţia pivotului şi 0 în rest); elementul a_{kl} din tabelul anterior se înlocuieşte cu $\frac{a_{ij}\cdot a_{kl}-a_{il}\cdot a_{kj}}{a_{ij}}$, unde a_{ij} este pivotul.

În fiecare parte a tabelului, coloanele reprezintă componentele vectorilor de pe linia de sus în raport cu vectorii din prima coloanâ. Am obţinut deci $x = 6e_1' + 14e_2' - 11e_3'$.

Exerciţiul 3: Găsiţi matricea schimbării de bază de la baza B'={e'$_1$,e'$_2$,e'$_3$} la baza$B$"={e"$_1$,e"$_2$,e"$_3$} din $\mathbf{R}^3$ cu $e_1' = (1,-1,1)$, $e_2' = (3,2,1)$, $e_3' = (0,1,0)$ şi $e_1'' = (1,1,1)$, $e_2'' = (1,1,0)$, $e_3'' = (1,0,0,)$, folosind lema substituţiei.

Rezolvare: Conform lemei substituţiei, avem Tabelul 2. Matricea schimbării de baza are coloanele formate din componentele vectorilor din a doua bază în raport cu prima bază, deci este

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1/2 & -3/2. \end{pmatrix}$$

Tabel 2.

	e'$_1$	e'$_2$	e'$_3$	e"$_1$	e"$_2$	e"$_3$
e_1	**1**	3	0	1	1	1
e_2	-1	2	1	1	1	0
e_3	1	1	0	1	0	0
e'$_1$	1	3	0	1	1	1
e_2	0	**5**	1	2	2	1
e_3	0	-2	0	0	-1	-1
e'$_1$	1	0	-3/5	-1/5	-1/5	2/5
e'$_2$	0	1	1/5	2/5	2/5	1/5
e_3	0	0	**2/5**	4/5	-1/5	-3/5
e'$_1$	1	0	0	1	-1/2	-1/2
e'$_2$	0	1	0	0	1/2	1/2
e'$_3$	0	0	1	2	-1/2	-3/2

Tabel 3

	e'$_1$	e'$_1$	e'$_1$	e'$_1$	
e_1	**1**	1	-1	0	0
e_2	1	-1	0	1	5
e_3	2	0	1	-2	-3
e_4	0	1	0	1	6
e'$_1$	1	1	-1	0	0
e_2	0	**-2**	1	1	5
e_3	0	-2	3	-2	-3
e_4	0	1	0	1	6
e'$_1$	1	0	-1/2	1/2	5/2
e'$_2$	0	1	-1/2	-1/2	-5/2
e_3	0	0	**2**	-3	-8
e_4	0	0	1/2	3/2	17/2
e'$_1$	1	0	0	-5/4	1/2
e'$_2$	0	1	0	-5/4	-9/2
e'$_3$	0	0	1	-3/2	-4
e_4	0	0	0	**9/4**	21/2
e'$_1$	1	0	0	0	5/3
e'$_2$	0	1	0	0	4/3
e'$_3$	0	0	1	0	3
e'$_4$	0	0	0	1	14/3

Exerciţiul 4: Să se rezolve cu lema substituţiei sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Rezolvare: Sistemul este echivalent cu următoarea ecuaţie din $\mathbf{R}^3$:

$$x_1(1,1,2,0) + x_2(1,-1,0,1) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,1,-2,1) = (0,5,-3,6)$$

sau altfel spus, trebuie să găsim componentele vectorului $x = (0,5,-3,6)$ în raport cu baza B'={e'$_1$.e'$_2$,e'$_3$,e'$_4$} din $\mathbf{R}^4$, unde $e'_1 = (1,1,2,0)$, $e'_2 = (1,-1,0,1)$, $e'_3 = (-1,0,1,0)$, $e'_4 = (0,1,-2,1)$. Folosind lema substituţiei, avem Tabelul 3 din care rezultă soluţia $(5/3, 4/3, 3, 14/3)$.

Exerciţiul 5: Folosind lema substituţiei găsiti inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: Fie $e'_1 = (1,-1,1)$, $e'_2 = (-0,1,1)$, $e'_3 = (1,2,3)$ coloanele matricei date, şi e_1, e_2, e_3 elementele bazei canonice. A găsi inversa matricei date este echivalent cu a găsi matricea de trecere de la baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ la baza canonică. Folosind lema substituţiei avem Tabelul 4, de unde inversa matricei este $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Tema 1: Găsiţi matricea schimbării de bază de la $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ la $B'' = \{e''_1, e''_2, e''_3\}$, unde $e'_1 = (1,2,1)$, $e'_2 = (2,3,3)$, $e'_3 = (3,7,1)$ şi $e''_1 = (3,1,4)$, $e''_2 = (-5,2,1)$, $e''_3 = (1,1,-6)$. Găsiţi componentele vectorului $v = 2e'_1 + 5e'_2 - 2e'_3$ în baza B".

Tabel 4.

	e'$_1$	e'$_2$	e'$_3$	e$_1$	e$_2$	e$_3$
e$_1$	**1**	0	1	1	0	0
e$_2$	-1	1	2	0	1	0
e$_3$	1	1	3	0	0	1
e'$_1$	1	0	1	1	0	0
e$_2$	0	**1**	3	1	0	1
e$_3$	0	1	2	-1	0	1
e'$_1$	1	0	1	1	0	0
e'$_2$	0	1	3	1	1	0
e$_3$	0	0	**-1**	-2	-1	1
e'$_1$	1	0	0	-1	-1	1
e'$_2$	0	1	0	-5	-2	3
e'$_3$	0	0	1	2	1	-1

7.4 Spaţii euclidiene

Exerciţiul 1: În spaţiul vectorial $\mathbf{R}^2$ se defineşte aplicaţia

$$g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Să se arate că g este un produs scalar. Determinaţi în spaţiul euclidian ($\mathbf{R}^2$,g) normele vectorilor $u = (1, 0)$ si $v = (0, 1)$ şi unghiul dintre aceşti vectori.

Rezolvare: Trebuie să verificăm faptul că g este un produs scalar în $\mathbf{R}^2$, adică este o aplicaţie biliniară, simetrică şi pozitiv definită. Simetria este evidentă, $g(y, x) = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2 = g(x, y)$. Ştiind că aplicaţia este simetrică, este suficient să verificăm liniaritatea în primul argument. Fie $z = (z_1, z_2)$ şi avem:

$$g(x+z, y) = (x_1+z_1)y_1+(x_1+z_1)y_2+(x_2+z_2)y_1+2(x_2+z_2)y_2 = g(x, y)+g(z, y),$$

c.c.t.d. Pozitiv definirea revine la a demonstra că $g(x, x)$ este pozitiv pentru orice x şi egal cu zero doar pentru $x = 0$. Avem

$$g(x, x) = x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2x_2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2)^2,$$

deci pozitiv. Din $g(x, x) = 0$ rezultă $x_1 + x_2 = 0, x_2 = 0$, de unde $x_1 = x_2 = 0$. Prin urmare g este un produs scalar în $\mathbf{R}^2$, deci ($\mathbf{R}^2$,g)) este un spaţiu euclidian.

Normele vectorilor daţi sunt:

$$\| u \|= \sqrt{g(u,u)} = \sqrt{(1+0)^2+0^2} = 1,$$
$$\| v \|= \sqrt{g(v,v)} = \sqrt{(0+1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Calculăm cosinusul unghiului dintre cei doi vectori cu formula

$$\cos(u,v) = \frac{g(u,v)}{\| u \| \cdot \| v \|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

deci unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{4}$.

Considerând spaţiul euclidian standard ($\mathbf{R}^2$,$<,>$), avem $\| u \|= 1$,$\| v \|= 1$, şi unghiul dintre ei $\frac{\pi}{2}$. Despre aceşti vectori putem spune că sunt ortonormaţi în raport cu produsul scalar canonic. Produsul scalar fiind un "instrument" de măsură a lungimilor şi unghiurilor, rezultatele depind de alegerea sa.

Exerciţiul 2: În spatiul euclidian ($\mathbf{R}^2$,g)) de la exerciţiul anterior, determinaţi subspaţiul ortogonal subspaţiului $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R^2} \mid x_1+x_2 = 0\}$.

Rezolvare: Prin definiţie, subspaţiul ortogonal subspaţiului S conţine toţi vectorii din $\mathbf{R}^2$ ortogonali pe orice vector din S, adică

$$S^\perp = \{y \in \mathbf{R^2} \mid g(x,y) = 0, \ (\forall)x \in S\}.$$

Este suficient să punem condiţia de ortogonalitate pe baza subspaţiului S. Avem $S = \{(\alpha,-\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\} = [e = (1,-1)]$, de unde $S^\perp$ conţine toti vectorii $y = (y_1,y_2)$ pentru care $g(y,e) = 0$, adică $y_1 - y_1 + y_2 - 2y_2 = 0$. Am obţinut $S^\perp = \{(y_1,0) \mid y_1 \in \mathbf{R}\}$. Geometric, S conţine coordonatele punctelor de pe a doua bisectoare din plan. Rezultatul obţinut spune că în raport cu produsul scalar dat, axa Ox este perpendiculară pe a doua bisectoare!

Exerciţiul 3: În spaţiul euclidian standard ($\mathbf{R}^3$,$<,>$) se dă sistemul de vectori $\{v_1 = (1,-2,3), \ v_2 = (0,3,2)\}$. Verificaţi că $v_1 \perp v_2$ şi completaţi la o bază ortogonală în $\mathbf{R}^3$.

Rezolvare: Calculăm produsul scalar al vectorilor din sistemul dat:

$$< v_1, v_2 >= 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0,$$

deci v_1 şi v_2 sunt ortogonali. Fie acum $v_3 = (a, b, c)$ vectorul care completează sistemul dat la o bază ortogonală. Avem $v_3 \perp v_1$ şi $v_3 \perp v_2$, adică

$$\begin{cases} a - 2b + 3c = 0 \\ \quad 3b + 2c = 0, \end{cases}$$

sistem simplu nedeterminat a cărui soluţie este $\{13\alpha, 2\alpha, -3\alpha) \mid (\forall)\alpha \in \mathbf{R}\}$. Generatorul acestui subspaţiu fiind vectorul $(13, 2, -3)$, acesta este vectorul v_3 căutat.

Exerciţiul 4: În spaţiul euclidian standard $(\mathbf{R}^3,<,>)$ se consideră vectorul $v = (0, 2, 3)$ şi subspaţiul $S = \{(x_1.x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Să se determine subspaţiul ortogonal lui S şi proiecţia vectorului v pe S.

Rezolvare: Subspaţiul S conţine soluţiile ecuaţiei $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, adică $S = \{(\alpha, \beta, 2\beta - \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Aşadar, baza în S este $\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, 2)\}$. Subspaţiul $S^\perp$ ortogonal lui S este format din vectorii (y_1, y_2, y_3) ortogonali pe baza lui S, deci care verifică sistemul

$$\begin{cases} y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 + 2y_3 = 0, \end{cases}$$

Am găsit $S^\perp = \{\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ sau, echivalent, $S^\perp$ conţine coordonatele punctelor de pe dreapta

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1}.$$

Pentru a găsi proiecţia vectorului $v = (0, 2, 3)$ pe acest subspaţiu trebuie să calculăm componentele lui v in raport cu baza formată din reuniunea bazelor din S ş din $S^\perp$, adică $\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (1, -2, 1)\}$.. Folosim lema substituţiei şi găsim

$$v = \frac{1}{6}v_1 + \frac{5}{3}v_2 + (-\frac{1}{6})v_3.$$

Proiecţia lui v pe S este

$$\frac{1}{6}v_1 + \frac{5}{3}v_2 = (\frac{1}{6}, \frac{5}{3}, \frac{19}{6}).$$

Exerciţiul 5: Să se ortonormeze folosind procedeul de ortonormare Gram-Schmidt următoarele sisteme de vectori din spaţiul euclidian standard $(\mathbf{R}^3,<,>)$:

a) $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 2, -2)\}$
b) $\{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (2, 0, 1), v_3 = (1, -1, 2)\}$.

Rezolvare: a). Urmăm algoritmul de ortonormare şi calculăm norma primului vector: $\| v_1 \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Apoi îl normăm şi avem primul vector din sistemul ortonormat

$$e_1 = \frac{1}{\| v_1 \|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Pornind de la vectorul v_2 găsim un vector f_2 ortogonal pe e_1 astfel:

$$f_2 = v_2 - < v_2, e_1 > e_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).$$

Observăm de aici că proiecţia vectorului v_2 pe e_1 este $< v_2, e_1 > e_1$. Vectorul f_2 îl normăm şi obţinem al doilea vector din sistemul ortonormat:

$$e_2 = \frac{1}{\| f_2 \|} f_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}).$$

Din vectorul v_3 găsim un vector f_3 ortogonal pe vectorii e_1, e_2 găsiţi anterior:

$$f_3 = v_3 - < v_3, e_1 > e_1 - < v_3, e_2 > e_2 =$$

$$= (1, 2, -2) - \frac{3}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - (-\frac{5}{\sqrt{6}}(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}).$$

Observăm de aici că proiecţia vectorului v_3 pe sistemul de vectori $\{e_1, e_2\}$ este $< v_3, e_1 > e_1 + < v_3, e_2 > e_2$. Ultimul vector din sistemul ortonormat este

$$e_3 = \frac{1}{\| f_3 \|} f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}).$$

b) Cu acelaşi algoritm aplicat celui de al doilea sistem de vectori, găsim:

$$e_1 = \frac{1}{\| v_1 \|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

$$f_2 = v_2 - < v_2, e_1 > e_1 = (2, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}).$$

$$e_2 = \frac{1}{\| f_2 \|} f_2 = \frac{3}{\sqrt{42}}(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} = (\frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}).$$

$$f_3 = v_3 - < v_3, e_1 > e_1 - < v_3, e_2 > e_2 =$$
$$= (1,-1,2) - (-\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) - (-\frac{14}{\sqrt{42}}(\frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}) = 0$$

Sistemul ortonormat conţine doar doi vectori, e_1, e_2, deoarece sistemul dat iniţial nu era liniar independent.

Exerciţiul 6: Găsiţi proiecţia vectorului $v = (-1, 3, 2)$ pe subspaţiul $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ din spaţiul euclidian standard $(\mathbf{R}^3, <,>)$. Verificaţi teorema lui Pitagora.

Rezolvare: În rezolvarea exerciţiului 4 de mai sus am determinat baza $\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, 2)\}$ a subspaţiului S. Ortonormăm acastă bază şi obţinem

$$e_1 = \frac{1}{\| v_1 \|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1),$$

$$f_2 = v_2 - < v_2, e_1 > e_1 = (0, 1, 2) - (-\frac{2}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (1, 1, 1),$$

$$e_2 = \frac{1}{\| f_2 \|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Proiecţia vectorului v pe sistemul de vectori $\{e_1, e_2\}$ este

$$w = < v, e_1 > e_1 + < v, e_2 > e_2 = (-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6}).$$

Pentru a verifica teorema lui Pitagora, calculăm vectorul $w^\perp = v - w = (\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6})$ şi pătratele normelor vectorilor $v, w, w^\perp$:

$$\| v \|^2 = 14, \ \| w \|^2 = \frac{354}{36}, \ \| w^\perp \|^2 = \frac{150}{36},$$

şi se verifică

$$\| v \|^2 = \| w \|^2 + \| w^\perp \|^2 .$$

În exerciţiul 4 se cerea proiecţia vectorului $v' = (0, 2, 3)$ pe acelaşi subspaţiu. Folosind formula de mai sus, regăsim proiecţia:

$$< v', e_1 > e_1 + < v', e_2 > e_2 = (\frac{1}{6}, \frac{5}{3}, \frac{19}{6}).$$

Dacă am calcula proiecţia vectorului $v'' = (1, 2, 3)$ pe acelaşi subspaţiu, am găsi acelaşi vector v'', deoarece acest vector aparţine lui S. Dacă calculăm însă proiecţia vectorului $v''' = (1, -2, 1)$ pe S obţinem vectorul nul, deoarece v''' aparţine subspaţiului ortogonal lui S..

Sugerăm rezolvarea următoarelor exerciţii ca temă:

Tema 1: În spaţiul vectorial $\mathbf{R^3}$ se defineşte $g : \mathbf{R^3} \times \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ prin

$$g\,(x, y) = \frac{3}{4}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - \frac{1}{4}(x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2).$$

Să se arate că $(\mathbf{R^3}, g)$ este spaţiu euclidian. Demonstraţi că sistemul de vectori $\{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0)\}$ este ortonormat în raport cu g şi completaţi-l la o bază ortonormată a spaţiului.

Tema 2: Determinaţi proiecţia vectorului $v = (1, -2, 0)$ pe fiecare din subspaţiile vectoriale S_1, S_2, S_3 de la Tema 1 din paragraful 2 (Subspaţii vectoriale).

Capitolul 8

Probleme rezolvate la Capitolul 2

8.1 Calcul vectorial

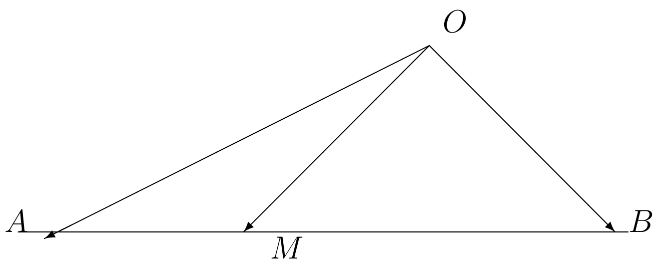
În acest paragraf prezentăm câteva exerciţii considerate de noi de bază în rezolvarea vectorială a problemelor de geometrie.

Exerciţiul 1: Fiind dat punctul M pe dreapta AB astfel încât $\frac{AM}{AB} = k$, pentru orice punct O din spaţiu are loc

$$\overrightarrow{OM} = (1-k)\,\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}.$$

Reciproc, fiind date dreapta AB şi punctul M, dacă pentru orice punct O din spaţiu are loc relaţia de mai sus, atunci $M \in AB$ şi $\frac{AM}{AB} = k$.

Rezolvare: Vom considera, fără a restrânge generalitatea, că punctul M este interior segmentului AB, adică avem figura de mai jos.



Conform regulii triunghiului de adunare a vectorilor liberi, avem relaţia:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

Din ipoteză şi ţinând cont de orientarea vectorilor, avem relaţia $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Dar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ care înlocuită mai sus conduce exact la ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, având relaţia din enunţ valabilă pentru orice punct O, vom considera $O = A$. Obţinem $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, de unde rezultă că vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci $M \in AB$ şi, mai mult, relaţia metrică $\frac{AM}{AB} = k$.

Exerciţiul 2: În triunghiul ABC se consideră M mijlocul segmentului BC. Să se demonstreze că:

a) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

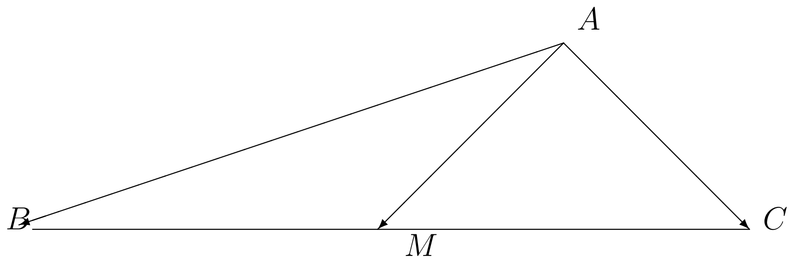
b) Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă pentru orice punct O din spaţiu are loc relaţia

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

c) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

Rezolvare: Avem figura de mai sus.



a) Punctul M fiind mijlocul segmentului BC, aparţine acestuia şi $\frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$. Suntem în ipoteza problemei anterioare pentru $O = A$, deci $\overrightarrow{AM} = (1 - \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, de unde rezultatul cerut.

b) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi O un punct arbitrar din spaţiu. Se stie că $G \in AM$ şi $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$. Conform exerciţiului 1,

$$\overrightarrow{OG} = (1 - \frac{2}{3})\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}.$$

Dar OM este mediană în triunghiul OBC şi conform punctului *a)* rezultă $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Înlocuind în relaţia de mai sus obţinem

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

c.c.t.d.

Reciproc, fie G un punct din spaţiu astfel încât pentru orice O are loc relaţia dată. Particularizând $O = A$ găsim $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Dar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, deci $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM}$, de unde rezultă că vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AG}$ sunt coliniari, deci punctele A, G, M sunt coliniare, şi că G împarte segmentul AM în raportul $\frac{2}{3}$, adică G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

c) Ştiind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC, avem relaţia de la punctul *b)* pentru orice punct O din spaţiu. Particularizând $O = G$ rezultă exact relaţia cerută.

Următoarea problemă o lăsăm ca exerciţiu pentru acasă, ideea de rezolvare fiind aceeaşi ca la exerciţiul anterior.

Tema 1: Se dă tetraedreul $ABCD$ şi G_1 centrul de greutate al triunghiului BCD. Să se arate că:

a) Punctul G este centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$ dacă şi numai dacă pentru orice punct O din spaţiu are loc relaţia

$$4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Amintim că centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$ se găseşte pe segmentul AG_1 astfel încât $\frac{AG}{AG_1} = \frac{3}{4}$.

b) Dacă G este centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$, atunci

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0.$$

Bazate pe exerciţiile prezentate sunt şi rezolvările exerciţiilor următoare:

Tema 2: Se prelungesc laturile AB şi AD ale paralelogramului $ABCD$ cu segmentele $BM \equiv AD$, $DN \equiv AB$. Să se arate că punctele M, C, N sunt coliniare.

Tema 3: În cercul de centru O se dau coardele perpendiculare AB şi CD concurente în punctul P. Să se arate că are loc egalitatea vectorială

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

Tema 4: În triunghiul ABC se dau G centrul de greutate şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (AC)$ astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}.$$

Dacă notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, respectiv CNP, atunci demonstraţi că G este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$.

Următoarele aplicaţii se referă la produsul scalar şi vectorial al vectorilor geometrici.

Exerciţiul 3: În triunghiul ABC să se demonstreze că H este ortocentrul dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

Rezolvare: Se ştie că produsul scalar a doi vectori este nul dacă şi numai dacă vectorii sunt ortogonali. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Din $AH \perp BC$ rezultă $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. Scriind $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$ în relaţia anterioară, aplicând distributivitatea produsului scalar, obţinem prima egalitate. Analog se obţine a doua egalitate plecând de la $HC \perp AB$.

Reciproc, dacă se dau egalităţile din enunţ, din $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$ ducând în primul membru avem $\overrightarrow{HA}\cdot(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) = 0$, adică $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$, de unde $AH \perp BC$. Din a doua egalitate găsim $HC \perp AB$, deci punctul H se află pe înălţimea din$A$ şi pe cea din C, deci este ortocentrul triunghiului.

Exerciţiul 4: Să se stabilească teorema cosinusului, adică într-un triunghi ABC are loc relaţia:

$$\| \overrightarrow{BC} \|^2 = \| \overrightarrow{AB} \|^2 + \| \overrightarrow{AC} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{AB} \| \| \overrightarrow{AC} \| cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Rezolvare: Din regula triunghiului pentru adunarea vectorilor geometrici avem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. Calculăm:

$$\| \overrightarrow{BC} \|^2 = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) =$$

$$\| \overrightarrow{BA} \|^2 + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} + \| \overrightarrow{AC} \|^2 .$$

Din comutativitatea produsului scalar,din definiţia cosinusului unghiului dintre doi vectori,

$$cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AB} \| . \| \overrightarrow{AC} \|},$$

şi ţinând cont că $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, obţinem rezultatul cerut.

Exerciţiul 5: Să se stabilească formula pentru lungimea medianei într-un triunghi.

Rezolvare: Fie triunghiul ABC cu mediana AM. Notăm cu m lungimea medianei, adică $m = \| \overrightarrow{AM} \| = \sqrt{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}}$. Conform exerciţiului 2 punctul *a)* avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Aplicând distributivitatea produsului scalar, calculăm:

$$4m^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \| \overrightarrow{AB} \|^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \| \overrightarrow{AC} \|^2 .$$

Ţinem cont de comutativitatea produsului scalar şi din teorema cosinusului avem $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \| \overrightarrow{AB} \|^2 + \| \overrightarrow{AC} \|^2 - \| \overrightarrow{BC} \|^2$, deci obţinem

$$4m^2 = 2(\| \overrightarrow{AB} \|^2 + \| \overrightarrow{AC} \|^2) - \| \overrightarrow{BC} \|^2,$$

formula cunoscută pentru lungimea medianei.

Exerciţiul 6: În tetraedrul $ABCD$ avem $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Să se arate că $AD \perp BC$ şi că

$$\| \overrightarrow{AB} \|^2 + \| \overrightarrow{CD} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} \|^2 + \| \overrightarrow{BD} \|^2 = \| \overrightarrow{BC} \|^2 + \| \overrightarrow{AD} \|^2 .$$

Rezolvare: Condiţiile de perpendicularitate din enunţ se exprimă vectorial prin $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$. Din regula triunghiului pentru adunarea vectorilor geometrici, avem $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$. Calculăm:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC} =$$

$$= \overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0,$$

deci $AD \perp BC$. Un astfel de tetraedru se numeşte ortogonal. Avem şi:

$$\| AD \|^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}) = \| AB \|^2 + \| BD \|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

$$\| BC \|^2 = (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}) = \| BD \|^2 + \| DC \|^2 + 2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}.$$

Calculăm

$$\| AD \|^2 + \| BC \|^2 = \| AB \|^2 + \| DC \|^2 + 2\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}) =$$

$$= \| AB \|^2 + \| DC \|^2 + 2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC},$$

de unde ţinând cont că $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ rezultă una din egalităţile cerute. Analog se obţine cea de a doua egalitate.

Lăsăm ca temă următoarele exerciţii:

Tema 5: Să se demonstreze concurenţa înălţimilor unui triunghi.

Tema 6: Să se demonstreze teorema lui Euler: Într-un patrulater convex suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor plus de patru ori pătratul segmentului ce uneşte mijloacele acestora.

Exerciţiul 7: Să se demonstreze că în triunghiul ABC are loc

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}.$$

Rezolvare: Pentru a demonstra egalitatea a doi vectori trebure să arătăm că au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime. Din definiţia produsului vectorial norma (lungimea) fiecărui vector din cei trei de mai sus este egală cu dublul ariei triunghiului ABC, deci au aceeaşi lungime. Direcţia produsului vectorial a doi vectori este perpendiculară pe planul celor doi vectori. Aici, direcţia fiecărui vector din cei trei este perpendiculară pe planul (ABC), deci au aceeaşi direcţie. Fie triungiul ABC din figura de la exerciţiu 2. Sensul vectorului $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ este dat de regula burghiului, adică este sensul în care înaintează un burghiu dacă îl învârtim astfel încât să suprapunem primul vector peste al doilea, deci iese din planul (ABC). Analog găsim acelaşi sens pentru ceilalţi doi vectori.

8.2 Vectori liberi. Produsul scalar, vectorial, mixt şi dublul produs vectorial

Vom prezenta la început aplicaţii fără reper, în care pentru calcularea produselor ce intervin vom folosi definiţiile şi propietăţile acestora.

Exerciţiul 1: Să se demonstreze identitatea lui Lagrange:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \parallel \vec{a} \times \vec{b} \parallel^2 = \parallel \vec{a} \parallel^2 . \parallel \vec{b} \parallel^2 .$$

Rezolvare: Prin definiţie, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \parallel \vec{a} \parallel . \parallel \vec{b} \parallel cos(\vec{a}, \vec{b})$ şi $\parallel \vec{a} \times \vec{b} \parallel = \parallel \vec{a} \parallel . \parallel \vec{b} \parallel sin(\vec{a}, \vec{b})$. Calculând acum primul membru al identităţii cerute şi ţinând cont de formula fundamentală a trigonometriei, obţinem c.c.t.d.

Exerciţiul 2: Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ şi $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, unde $\| \vec{m} \| = 1$, $\| \vec{n} \| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze lungimile vectorilor $\vec{a}, \vec{b}$, cosinusul unghiului dintre ei şi aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.

Rezolvare: Avem egalităţile:

$$\| \vec{a} \|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (2\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (2\vec{m} + 3\vec{n}) = 4 \| \vec{m} \|^2 + 6\vec{m} \cdot \vec{n} + 6\vec{n} \cdot \vec{m} + 9 \| \vec{n} \|^2 .$$

Am folosit definiţia normei unui vector şi distributivitatea produsului scalar. Aplicând în continuare comutativitatea produsului scalar şi apoi definiţia acestuia, avem:

$$\| \vec{a} \|^2 = 4 \| \vec{m} \|^2 + 12\vec{m} \cdot \vec{n} + 9 \| \vec{n} \|^2 = 4 \| \vec{m} \|^2 + 12 \| \vec{m} \| . \| \vec{n} \| .cos(\vec{m}, \vec{n}) +$$

$$+9 \| \vec{n} \|^2 = 4.1 + 12.1.2.cos(\frac{\pi}{3}) + 9.4 = 52.$$

Am găsit $\| \vec{a} \| = \sqrt{52}$. Analog, calculăm

$$\| \vec{b} \|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (\vec{m} - 2\vec{n}) = \| \vec{m} \|^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{n} - 2\vec{n} \cdot \vec{m} + 4 \| \vec{n} \|^2 =$$

$$= \| \vec{m} \|^2 - 4\vec{m} \cdot \vec{n} + 4 \| \vec{n} \|^2 = \| \vec{m} \|^2 - 4 \| \vec{m} \| . \| \vec{n} \| .cos(\vec{m}, \vec{n}) + 4 \| \vec{n} \|^2 =$$

$$= 1 - 4.1.2.cos(\frac{\pi}{3}) + 4.4 = 13.$$

Deci $\| \vec{b} \| = \sqrt{13}$. Avem şi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} - 2\vec{n}) = 2 \| \vec{m} \|^2 - \vec{m} \cdot \vec{n} - 6 \| \vec{n} \|^2 =$$

$$= 2 \| \vec{m} \|^2 - \| \vec{m} \| . \| \vec{n} \| .cos(\vec{m}, \vec{n}) - 6 \| \vec{n} \|^2 = -25.$$

Putem calcula acum

$$cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\| \vec{a} \| . \| \vec{b} \|} = \frac{-25}{\sqrt{52}\sqrt{13}}.$$

Se ştie că aria paralelogramului construit pe doi vectori este egală cu norma produsului vectorial al celor doi vectori. Aşadar vom calcula

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{m} + 3\vec{n}) \times (\vec{m} - 2\vec{n}) = 2\vec{m} \times \vec{m} + 3\vec{n} \times \vec{m} - 4\vec{m} \times \vec{n} - 6\vec{n} \times \vec{n},$$

aplicând distributivitatea produsului vectorial faţă de adunarea vectorilor. Cum produsul vectorial a doi vectori coliniari este nul, primul şi ultimul termen din egalitatea de mai sus se anulează. Ţinând cont şi de anticomutativitatea produsului vectorial, obţinem

$$\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{n} \times \vec{m}.$$

Aria cerută este

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = 7 \| \vec{n} \times \vec{m} \| = 7. \| \vec{m} \| . \| \vec{n} \| .sin(\vec{m}, \vec{n}) = 7\sqrt{3}.$$

Exerciţiul 3: Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii

$$\begin{gathered} \vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{w} = \vec{b} + \vec{c} \end{gathered}$$

unde $\| \vec{a} \| = 1$, $\| \vec{b} \| = 2$, $\| \vec{c} \| = 3$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$.

Rezolvare: Volumul paralelipipedului este egal cu modulul produsului mixt al celor trei vectori. Prin definiţie, produsul mixt este

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Calculăm

$$\vec{v} \times \vec{w} = (2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}) = 2\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) =$$
$$= 2\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + 2\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + 2\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + 2\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) +$$
$$+ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Termenii din ultimul membru al egalităţilor de mai sus sunt produse mixte. Se ştie că produsul mixt a trei vectori coplanari este nul, deci termenii 1, 2, 4, 6, 8, 9 se anulează şi obţinem

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})..$$

Aplicăm acum proprietatea produsului mixt de invarianţă la permutări circulare a vectorilor şi de egalitate cu semn contrar la celelalte permutări, şi rezultă

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 5\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 5 \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \times \vec{c} \| .cos(\angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})) =$$

$$= 5 \parallel \vec{a} \parallel . \parallel \vec{b} \parallel . \parallel \vec{c} \parallel .sin\angle(\vec{b},\vec{c}).cos\angle(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}) = 5.1.2.3.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

Exerciţiul 4 Calculaţi în funcţie de produsul mixt al vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ următoarele produse mixte:

a) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

b) $(\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

c) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a})$

d) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a})$

Rezolvare: Primul produs mixt este zero deoarece cei trei vectori sunt coplanari. Pentru al doilea produs, aplicăm definiţia produsului mixt şi proprietăţile acestuia folosite în exerciţiul anterior ş avem:

$$(\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})] = \vec{a}\cdot[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}]$$

Anticomutativitatea produsului vectorial duce la reducerea primului termen din paranteză cu al treilea şi avem

$$(\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot[\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}] = (\vec{a},\vec{a},\vec{c}) + (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Al treilea produs se calculează în mod analog şi obţinem rezultatul $2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Pentru al patrulea produs vom folosi formula lui Gibs pentru calcularea dublului produs vectorial, $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$. Avem

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c}]\times(\vec{c}\times\vec{a})].$$

Aplicând formula lui Gibs cu $\vec{u}=\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{v}=\vec{c}$ şi $\vec{w}=\vec{a}$, obţinem

$$(\vec{b}\times\vec{c}]\times(\vec{c}\times\vec{a}) = [(\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a}]\vec{c} - [(\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{c}]\vec{a} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{c} - (\vec{c},\vec{b},\vec{c})\vec{a} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{c},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{c}.$$

Dar produsul mixt $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ fiind un scalar iese în fatţa produsului scalar, deci

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.] = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2.$$

Exerciţiul 5: Să se demonstreze că

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Produsul scalar din primul membru poate fi văzut ca produsul mixt $((\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. Ştiind că produsul mixt este invariant la permutări circulare, avem următoarele egalităţi:

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = (\vec{d},\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) = \vec{d}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}] = -\vec{d}\cdot[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})] = -\vec{d}\cdot[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}],$$

unde am folosit succesiv definiţia produsului mixt, anticomutativitatea produsului vectorial şi formula lui Gibs. Aplicând în continuare distributivitatea produsului scalar faţă de adunarea vectorilor şi scoţând scalarii $(\vec{c}\cdot\vec{b})$ şi $(\vec{c}\cdot\vec{a})$ în faţă, găsim

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}).(\vec{d} \cdot \vec{b}) - (\vec{c} \cdot \vec{b}).(\vec{d} \cdot \vec{a}),$$

c.c.t.d.

Lăsăm ca temă următoarele aplicaţii:

Tema 1: Să se calculeze lungimile diagonalelor şi unghiul dintre ele în paralelogramul construit pe vectorii $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, ştiind că $\| \vec{m} \|=\| \vec{n} \|= 2$ şi $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Tema 2: Se cere aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, ştiind că $\| \vec{m} \|= 1$, $\| \vec{n} \|= 2$ şi $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Tema 3: Calculaţi volumul tetraedrului construit pe vectorii $\vec{a} = \vec{m}-\vec{n}+2\vec{p}$, $\vec{b} = -\vec{m}+\vec{n}+3\vec{p}$, $\vec{c} = \vec{m}+\vec{p}$, ştiind că $\| \vec{m} \|=\| \vec{n} \|= 2$, $\| \vec{p} \|= 3$ şi $\angle(\vec{n},\vec{p}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{m},\vec{n} \times \vec{p}) = \frac{\pi}{4}$.

In continuare considerăm prezenţa unui reper $R = \{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ în raport cu care sunt daţi toţi vectorii.

Exerciţiul 6: Calculaţ expresia $E = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$, ştiind că $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\| \vec{a} \|= 2$, $\| \vec{b} \|= 3$, $\| \vec{c} \|= 1$.

Rezolvare: Calculăm norma vectorului $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ în două moduri. Pe de o parte

$$\| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \|=\| 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \|= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Pe de altă parte, definiţia normei unui vector şi proprietăţile produsului scalar conduc la:

$$\| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \|^2= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =\| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 + \| \vec{c} \|^2 +2E.$$

Avem egalitatea
$$\| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 + \| \vec{c} \|^2 + 2E = 6,$$
de unde $E = -4$.

Exerciţiul 7: În reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se dau punctele $A(-1, 2, 0)$, $B(3, -2, 2)$, $C(1, 0, 4)$. Să se determine lungimile laturilor, măsurile unghiurilor şi aria triunghiului ABC.

Rezolvare: Calculăm componentele vectorilor laturi ale triunghiului ABC şi avem:
$$\begin{array}{c} \overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \\ \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \\ \overrightarrow{BC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{array}$$
Lungimile laturilor triunghiului sunt:
$$\begin{array}{c} \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6 \\ \| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{array}$$
Calculăm cosinusurile unghiurilor triunghiului dat:
$$cos(A) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AB} \| . \| \overrightarrow{AC} \|} = \frac{4.2 + (-4).(-2) + 2.4}{6.2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$
$$cos(B) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\| \overrightarrow{BA} \| . \| \overrightarrow{BC} \|} = \frac{(-4).(-2) + 4.2 + (-2).2}{6.2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
$$cos(C) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\| \overrightarrow{CA} \| . \| \overrightarrow{CB} \|} = \frac{(-2).2 + 2.(-2) + (-4).(-2)}{2\sqrt{3}.2\sqrt{6}} = 0.$$
Din ultimul calcul rezultă că unghiul C este drept, deci triunghiul ABC este dreptunghic în C. De aici putem calcula aria triunghiului ca fiind semiprodusul catetelor, deci
$$A_{\Delta ABC} = \frac{2\sqrt{6}.2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Exerciţiul 8: În reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se dau punctele $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 2, 1)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din A. Să se determine un vector $\vec{v}$ perpendicular pe planul (ABC) ş având lungimea egală cu 2.

Rezolvare: Aria triunghiului determinat de doi vectori este seminorma produsului vectorial al celor doi vectori. În cazul nostru, triunghiul ABC îl putem considera determinat de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Avem

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

Produsul vectorial se calculeză

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Obţinem

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} = \sqrt{3}.$$

Pe de altă parte, notând cu h_A lungimea înălţimii din A,

$$A_{\Delta ABC} = \frac{h_A . \| \overrightarrow{BC} \|}{2},$$

de unde calculăm h_A. Cum $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + \vec{j}$ rezultă

$$h_A = \frac{2A_{\Delta ABC}}{\| \overrightarrow{BC} \|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Din relaţia $\vec{v} \perp (ABC)$ rezultă că vectorul $\vec{v}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, deci există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\vec{v} = \lambda(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 2\lambda(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}),$$

parametrul λ urmând să îl determinăm din condiţia $\| \vec{v} \| = 2$. Obţinem ecuaţia

$$2\,|\lambda|\,\sqrt{3} = 2,$$

deci $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Avem două soluţii, $\vec{v}_{1,2} = \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$,

Exerciţiul 9 Să se rezolve ecuaţia vectorială $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{b}$ ştiind că $\vec{v} \perp \vec{c}$, unde $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rezolvare: Din definiţie, vectorul produs vectorial a doi vectori este perpendicular pe cei doi vectori, deci $\vec{b} \perp \vec{v}$. Avem şi $\vec{v} \perp \vec{c}$, de unde rezultă că vectorul $\vec{v}$ este coliniar cu produsul vectorial $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
Există atunci un scalar $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $\vec{v} = \lambda(-3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$. Inlocuind în ecuaţie, avem

$$\lambda . \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k},$$

de unde rezultă $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Exerciţiul 10: Se dau punctele $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-2, 3, 1)$ în reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Să se calculeze volumul tetraedrului $OABC$ şi lungimea înălţimii din O în acest tetraedru. Determinaţi coordonatele unui punct D de pe axa Ox astfel înât punctele A, B, C, D să fie coplanare, sau, altfel spus, determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a axei Ox cu planul (ABC).

Rezolvare: Tetraedrul $OABC$ este construit pe vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Volumul său este egal cu $\frac{1}{6}$ din modulul produsului mixt $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. Având un reper, produsul mixt se calculează ca fiind determinantul componentelor celor trei vectori.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 19.$$

Am obţinut $V_{OABC} = \frac{19}{6}$. Acelaşi volum se calculează cu formula $V_{OABC} = \frac{h_O . A_{\Delta ABC}}{3}$, de unde vom determina lungimea h_O a înălţimii din O. Aria triunghiului ABC este seminorma produsului vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Avem:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k},$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k}.$$

$$h_O = \frac{3\,V_{OABC}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{3.19.2}{6.\sqrt{6^2 + 7^2 + 10^2}} = \frac{19}{\sqrt{185}}.$$

Fie D punctul de pe axa Ox cu proprietatea că punctele A, B, C, D sunt coplanare. Din $D \in Ox$ rezultă coordonatele lui D de forma $(\alpha, 0, 0)$. Coplanareitatea punctelor A, B, C, D este echivalentă cu coplanareitatea vectorilor $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, care se caracterizează prin anularea produsului mixt al celor trei vectori.

Avem $\overrightarrow{AD} = (\alpha - 1)\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ şi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ \alpha - 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\alpha - 19.$$

Ecuaţia $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$ conduce la $\alpha = \frac{19}{6}$, deci obţinem $D(\frac{19}{6}, 0, 0)$.

Tema 4: În reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se dau punctele $A(1, -4, 3)$, $B(3, 1, -4)$, $C(1, 1, 1)$. Se cere:

a) Să se demonstreze că ΔABC este isoscel şi ΔAOC este dreptunghic;

b) Să se calculeze perimetrul, unghiurile, aria şi lungimile înălţimilor în triunghiul ABC;

c) Determinaţi coordonatele unui punct situat pe axa Oz coplanar cu A, B, C;

d) Determinaţi coordonatele unui punct D cu proprietatea că $ABCD$ este paralelogram;

e) Calculaţi volumul tetraedrului $OABC$ şi lungimea înălţimii din A în acesta.

Tema 5: Să se calculeze în două moduri dublul produs vectorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, unde

$$\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

8.3 Subspaţii afine ale spaţiului $\mathbf{R^n}$

Exerciţiul 1: În spaţiul afin $\mathbf{R^4}$ se dau punctele $A(1, -1, 2, 1)$, $B(2, 1, -1, -1)$, $C(0, -3, 5, 3)$. Să se demonstreze că sunt coliniare.

Rezolvare: Putem verifica dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari. Avem

$$\overrightarrow{AB} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 3\vec{e_3} - 2\vec{e_4},\ \overrightarrow{AC} = -\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3} + 2\vec{e_4},$$

unde $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ este reperul din $\mathbf{R^4}$. Întradevăr, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$, deci vectorii sunt coliniari. Având punctul A comun, dreptele suport ale celor doi vectori coincid, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

O a doua metodă este să scriem ecuaţia dreptei AB şi să verificăm dacă punctul C aparţine acesteia. Dreapta AB are vectorul director $\overrightarrow{AB}$, deci ecuaţia ei este:

$$(AB): \quad \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^3 - 2}{-3} = \frac{x^4 - 1}{-2},$$

unde (x^1, x^2, x^3, x^4) sunt coordonatele punctului curent de pe dreapta AB în reperul considerat. Se verifică faptul că coordonatele punctului C satisfac ecuaţia de mai sus, deci $C \in AB$, c.c.t.d.

Exerciţiul 2: În spaţiul afin $\mathbf{R^3}$ se dau planele

$$\begin{gathered}(P): x + y - z + 1 = 0\\ (Q): 3x - 3y + z - 5 = 0\\ (R): x + y + 2z = 0\end{gathered}$$

şi punctul $M(1, -1, 1)$. Să se determine ecuaţia planului care conţine intersecţia planelor P şi Q şi care:

a) trece prin M;

b) este perpendicular pe planul R ;

c) este paralel cu axa Oy;

d) formează cu planul R un unghi egal cu $\frac{\pi}{3}$;

e) formează cu dreapta $(d'): \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$ un unghi de $\frac{\pi}{3}$.

Rezoplvare: Intersecţia planelor P şi Q este dreapta de ecuaţie

$$(d): \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Pentru a găsi ecuaţia canonică a unei drepte dată ca intersecţie a două plane putem fie să rezolvăm sistemul format din ecuaţiile celor două plane, obţinând mai întâi euaţiile parametrice ale dreptei din care eliminăm apoi parametrul, fie să determinăm vectorul director al dreptei ca fiind produsul vectorial al normalelor celor două plane, apoi un punct de pe dreaptă rezolvând sistemul pentru una din necunoscute fixată, de exemplu $x = 0$.

Prin prima metodă, rezolvând sistemul găsim coordonatele punctelor de pe dreaptă de forma $(\alpha, 2\alpha - 2, 3\alpha - 1)$. Ecuaţiile parametrice ale dreptei d de intersecţie a celor două plane sunt

$$(d) : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 2 \\ z = 3\alpha - 1 \end{cases}$$

$(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$. Eliminând parametrul α, găsim ecuaţia canonică a dreptei:

$$(d) : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3},$$

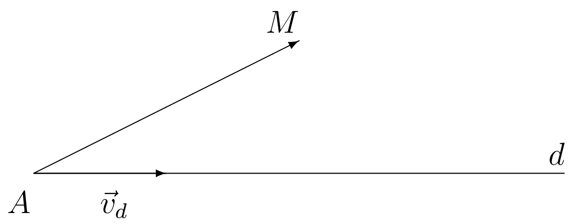
unde (x, y, z) sunt coordonatele punctului curent de pe dreapta d.

Prin a doua metodă, fie $\vec{N}_P$, $\vec{N}_Q$ normalele planelor P şi Q. Avem $\vec{N}_P = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{N}_Q = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ şi vectorul director al dreptei d:

$$\vec{v}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Componentele direcţiei dreptei d sunt aşadar $(1, 2, 3,)$, împărţind componentele vectorului de mai sus prin -2. Amintim că un vector indică aceeaşi direcţie dacă amplificăm sau simplificăm componentele sale prin orice scalar. Mai avem de găsit un punct de pe dreapta d. Facem acest lucru rezolvând sistemul pentru $x = 0$. Obţinem $y = -2, z = -1$, deci dreapta d trece prin punctul de coordonate $(0, -2, -1)$. Scriind acum ecuaţia dreptei printr-un punct şi direcţie date, rezultă aceeaşi ecuaţie de mai sus.

Trecem acum la rezolvarea exerciţiului. La punctul *a)* se cere ecuaţia unui plan determinat de punctul $M(1, -1, 1)$ şi de dreapta $(d) : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$. Observăm ca punctul nu aparţine dreptei. Fie $A(0, -2, -1)$ un punct de pe d. Planul cerut este determinat de punctul A şi de vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\vec{v}_d$, ale căror



componente sunt $(1, 1, -2)$, respectiv $(1, 2, 3)$.
Ecuaţia planului este

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

deci $7x - 5y + z = 9$.

La punctul *b)* planul S cerut este perpendicular pe planul R. De aici rezultă că normala $\vec{N}_R(1, 1, 2)$ este un vector din planul S. Planul S conţine dreapta d, deci este determinat de punctul A şi vectorii $\vec{v}_d$ şi $\vec{N}_R$:

$$(S) : \begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

Ecuaţia planului S este $x + y - z + 1 = 0$, deci este exact planul P.

Punctul *c)* se rezolvă analog, cu vectorul director al axei Oy în locul normalei $\vec{N}_R$.

Pentru punctul *d)* vom considera fasciculul de plane prin dreapta d şi vom determina dintre aceste plane pe cel cu proprietatea din ipoteză. Dreapta d fiind intersecţia planelor P şi Q, fasciculul de plane prin d se scrie $\alpha P + \beta Q = 0$, cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, nu ambele nule. Presupunând α diferit de zero, putem împărţi ecuaţia fasciculului prin α şi obţinem $P + \lambda Q = 0$. Prin presupunerea făcută pierdem însă din fasciculul dat prin ultima ecuaţie planul Q, care nu se obţine pentru nici o valoare a lui λ. De aceea suntem obligaţi să verificăm dacă acest plan nu este soluţie. Unghiul dintre două plane este egal cu unghiul format de normalele lor, deci vom calcula $\angle(\vec{N}_Q, \vec{N}_R)$, de fapt cosinusul acestui unghi:

$$cos\angle(Q, R) = \frac{\vec{N}_Q \cdot \vec{N}_R}{\| \vec{N}_Q \| . \| \vec{N}_R \|} = \frac{2}{\sqrt{114}}.$$

Planul Q nu este soluţie. Soluţiile rămân a se găsi printre planele de ecuaţie

$$(x + y - z + 1) + \lambda(3x - 3y + z - 5) = 0,$$

adică cu normala de forma $\vec{N}_\lambda(1+3\lambda, 1-3\lambda, -1+\lambda)$. Din condiţia $\angle(\vec{N}_\lambda, \vec{N}_R) = \frac{\pi}{3}$ rezultă

$$\frac{\vec{N}_\lambda \cdot \vec{N}_R}{\| \vec{N}_\lambda \| . \| \vec{N}_R \|} = \frac{1}{2},$$

deci scalarul λ verifică ecuaţia $49\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, ecuaţie care nu are soluţii. Problema nu are soluţie.

La ultimul punct avem de ales din fasciculul de plane de la punctul anterior un plan pentru care unghiul dintre $\vec{N}_\lambda$ şi vectorul director al dreptei d' este $\frac{\pi}{6}$. Amintim că unghiul dintre o dreaptă şi un plan este complementul unghiului dintre normala la plan şi direcţia dreptei. Din ecuaţia

$$cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\vec{N}_\lambda \cdot \vec{v}_{d'}}{\| \vec{N}_\lambda \| . \| \vec{v}_{d'} \|},$$

obţinem $4(9\lambda + 1)^2 = 15(19\lambda^2 - 2\lambda + 3)$, de unde rezultă două valori pentru λ.

Exerciţiul 3: Scrieţi ecuaţia hiperplanului care trece prin punctul $A(1, -1, 2, 3)$ şi este perpendicular pe dreapta

$$(d) : \begin{cases} (P_1) : x + y - z + t - 3 = 0 \\ (P_2) : x - y + z - 5 = 0 \\ (P_3) : x + y + 2z - t - 4 = 0 \end{cases}$$

din spaţiul afin $\mathbf{R^4}$.

Rezolvare: Dreapta d este dată ca intersecţia a trei hiperplane. Vectorul său director este produsul vectorial al normalelor celor trei hiperplane. Normalele au componentele coeficienţii lui x, y, z, t din fiecare ecuaţie de hiperplan. Considerând reperul $R = \{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ în spaţiul afin $\mathbf{R^4}$, avem:

$$\vec{v}_d = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3e_1 + e_2 + 4e_3 + 6e_4,$$

Fie $M(x,y,z,t)$ punctul curent al hiperplanului cerut. Vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\vec{v}_d$ sunt ortogonali, deci produsul lor scalar este zero şi găsim astfel ecuaţia hiperplanului:

$$-3.(x-1)+1.(y+1)+4(z-2)+6(t-3)=0.$$

sau, echivalent, $-3x+y+4z+6t=21$.

O primă temă la acest paragraf este:

Tema 1: În spaţiul afin $\mathbf{R^3}$ se dau dreapta $(d)\begin{cases}(P_1): x-y-3z+2=0\\(P_2): 2x+y+2z-3=0\end{cases}$ şi planul $(P): x+y+z+1=0$. Se cere planul care:

a) este paralel cu d, perpendicular pe P şi trece prin punctul $A(1,1,1)$;

b) trece prin punctul de intersecţie al dreptei d cu planul P şi este perpendicular pe d;

c) conţine dreapta d şi este perpendicular pe P;

d) conţine dreapta d şi face un unghi egal cu $\frac{\pi}{3}$ cu planul P;

e) conţine dreapta d şi face un unghi egal cu $\frac{\pi}{6}$ cu dreapta $(d'): \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$.

Exerciţiul 4: În spaţiul afin cu trei dimensiuni se dau punctele $A(1,1,0)$, $B(2,0,0)$ şi planele $(P): 2x+y+2=0$, $(Q): x-z+2=0$, $(R): x+y+z=2$ şi se cer:

a) Ecuaţia dreptei d_1 care trece prin A, este perpendiculară pe dreapta d de intersecţie a planelor P şi Q şi intersectează acestă dreaptă;

b) Ecuaţia dreptei d_2 care trece prin B, este paralelă cu planul P ş este inclusă în planul R;

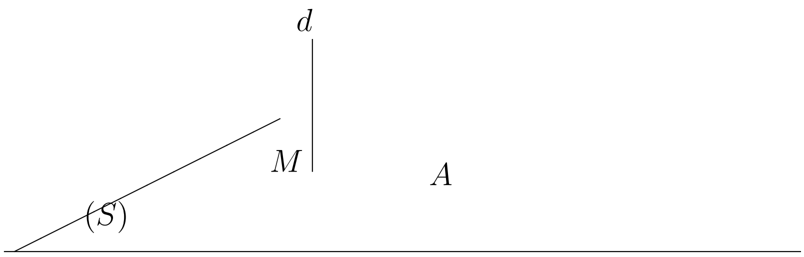
c) Precizaţi în ce poziţie se află dreptele d_1 şi d_2 şi calculaţi distanţa dintre ele.

d) Calculaţi unghiul format de dreptele d_1 şi d_2.

Rezolvare: Direcţia dreptei d este produsul vectorial al normalelor planelor P şi Q:

$$\vec{v}_d=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},$$

a) Dreapta d_1 fiind perpendiculară pe d şi conţinând punctul A, este inclusă în planul S care trece prin A perpendicular pe d, deci în planul de ecuaţie $-1(x-1)+2(y-1)-1(z-0)=0$, adică $-x+2y-z-1=0$.



Notăm cu M punctul de intersecţie a dreptei d cu planul S. Coordonatele lui M se găsesc rezolvând sistemul

$$\begin{cases} -x+2y-z-1=0 \\ 2x+y+2=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$$

Obţinem $M(-\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6})$

Dreapta d_1 este inclusă în planul S şi intersectează dreapta d, deci trece prin punctul M. Cum conţine şi punctul A, rezultă că dreapta d_1 coincide cu AM, a cărei ecuaţie este:

$$(d_1) : \frac{x-1}{-\frac{13}{6}} = \frac{y-1}{\frac{-2}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{6}},$$

sau, echivalent,

$$(d_1) : \frac{x}{-13} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-5}.$$

b) Dreapta d_2 cerută este paralelă cu planul P şi inclusă în R. Conform unei binecunoscute teoreme de geometrie rezultă că d_2 este paralelă cu dreapta de intersecţie a celor două plane. De aici găsim direcţia dreptei d_2 ca fiind produsul vectorial al normalelor planelor P şi R:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},$$

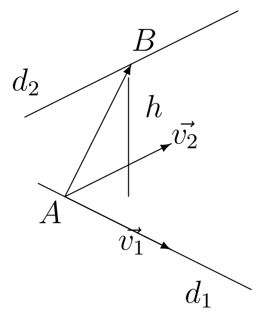
Ecuaţia dreptei d_2 se scrie folosind formula dreptei printr-un punct şi direcţie:

$$(d_2) : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

c) Studiem acum poziţia relativă a celor două drepte d_1 şi d_2. Vectorii lor directori $\vec{v}_1(-13, 4, -5)$, $\vec{v}_2(1, -2, 1)$ nu sunt coliniari neavând componentele proporţionale, deci dreptele nu sunt paralele. Cele două drepte sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{AB}$ sunt coplanari, deci vom calcula produsul mixt al acestor 3 vectori:

$$\begin{vmatrix} -13 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 12,$$

Valoarea produsului mixt fiind nenulă, rezultă că dreptele d_1 şi d_2 sunt necoplanare. Distanţa dintre ele este egală cu lungimea înălţimii paralelipipedului construit cu vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{AB}$, cu baza formată cu $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.



Volumul paralelipipedului este egal cu modulul produsului mixt al celor trei vectori de mai sus, deci egal cu 12. Totodată volumul este $V = h.A_{bazei}$. Aria bazei este norma produsului vectorial al vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Avem

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 18\vec{j} - 30\vec{k},$$

Obtinem lungimea înălţimii şi deci distanţa între cele două drepte

$$h = \frac{V}{\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \|} = \frac{12}{\sqrt{1000}} = \frac{3\sqrt{10}}{25}.$$

e) Unghiul format de două drepte este egal cu unghiul format de vectorii lor directori, deci avem:

$$cos\angle(d_1, d_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\| \vec{v}_1 \| . \| \vec{v}_2 \|} = 0,$$

deci dreptele sunt perpendiculare.

Exerciţiul 5: Se dau dreptele

$$(d_1) : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1},$$

$$(d_2) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3},$$

în spaţiul afin tridimensional. Se cere:

a) Ecuaţia dreptei d care trece prin punctul $A(1, 1, 1)$ şi se "sprijină" pe cele două drepte (adică le intersectează).

b) Ecuaţia dreptei d' care este perpendiculară pe cele două drepte şi le intersectează (este perpendiculara comună).

Rezolvare: În primul rând vom satbili poziţia relativă a celor două drepte. Remarcăm că nu sunt paralele, vectorii lor directori nefiind coliniari şi studiem dacă sunt coplanare. După cum am văzut în exerciţiul anterior, aceasta revine la a studia dacă vectorii directori ai drepetelor împreună cu vectorul determinat de un punct de pe prima dreaptă şi unul de pe a doua sunt coplanari. Fie $O(0, 0, 0) \in d_1$ şi $B(1, -1, -1) \in d_2$. Vec torul $\overrightarrow{OB}$ are componentele $(1, -1, -1)$, iar diercţiile dreptelor d_1, d_2 sunt $\vec{v}_1(2, 3, 1,)$, respectiv $\vec{v}_2(1, 2, 3)$. Calculăm produsul mixt

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -11,$$

neci dreptele sunt necoplanare.

a) dreapta d intersectează d_1, deci determină un plan, fie el π_1. Scriem ecuaţia acestui plan ţinând cont că trece prin $O(0, 0, 0)$ şi conţine vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\vec{v}_1$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Obţinem $(\pi_1) : -2x + y + z = 0$.

Un raţionament analog conduce la planul π_2 determinat de drepta d ş d_2, cu ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ 1-1 & 1+1 & 1+1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -0,$$

de unde avem $(\pi_2) : x + y - z = 1$.

Dreapta cerută d se găseşte în ambele plane π_1 şi π_2, deci este dreapta lor de intersecţie:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Dreapta d' fiind perpendiculară pe d_1 şi pe d_2, direcţia ei este dată de vectorul produs vectorial al dvectorilor directori ai celor două drepte:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k},$$

Perpendiculara comună se determină analog cu modul de determinare a dreptei d, cu singura modificare faptul că ecuaţiile palnelor π_1, π_2 vor fi determinate de punctul O şi vectorii $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, respectiv punctul B şi vectorii $\vec{v}$, $\vec{v}_2$.

Tema 2: Se cere ecuaţia dreptei care se sprijină pe dreptele

$$(d_1) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4},$$

$$(d_2) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3},$$

şi care este paralelă cu planele $(P_1) : 2x - y - z = 1$, $(P_2) : x + 2y + 3z + 1 = 0$. Pentru dreptele de mai sus găsiţi perpendiculara comună şi calculaţi în două moduri distanţa dintre d_1 şi d_2.

Indicaţie: Prima metodă se referă la aplicarea formulei distanţei dintre două drepte, ca la exerciţiul 4, iar a doua metodă constă în calcularea distanţei dintre pnctele de intersecţie a perpendicularei comune cu cele două drepte.

Tema 3: Să se arate că dreptele

$$(d_1) : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-3}{-5},$$

$$(d_2) : \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1},$$

sunt coplanare şi să se scrie ecuaţia planului determinat de ele. Găsiţi ecuaţia planului care trece prin $A(1, 2, 3)$ şi este perpendicular pe d_1.

Exerciţiul 6 În spaţiul afin cu patru dimensiuni se dau dreptele

$$(d_1) : \frac{x^1+1}{-1} = \frac{x^2}{0} = \frac{x^3+1}{-1} = \frac{x^4-1}{1},$$

$$(d_2) : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3}{0} = \frac{x^4}{1}.$$

Se cere subspaţiul afin care conţine dreptele d_1 şi d_2 şi ecuaţia bisectoarei unghiului determinat de cele două drepte.

Rezolvare: Verificăm dacă cele două drepte sunt paralele. Vectorii lor directori au componentele $\vec{v}_1(-1,0,-1,1)$, respectiv $\vec{v}_2(1,-1,0,1)$, nu sunt coliniari, deci dreptele nu sunt paralele. Fiind în spaţiul cu patru dimensiuni, tehnica de verificare a coplanareităţii din exerciţiul anterior nu mai este valabilă, deoarece în spaţiul cu patru dimensiuni orice trei vectori sunt liniar dependenţi, aşa cum în spaţiul tridimensional orice doi vectori sunt coplanari. Metoda anulării produsului mixt ca şi condiţie necesară şi suficientă de liniar dependenţă (coplanareitate) este aici pentru patru vectori.

Vom studia direct dacă cele două drepte sunt concurente detreminând punctul de intersecţie prin rezolvarea sistemului format de ecuaţiile lor. Cea mai simplă metodă de a determina intersecţia unei drepte cu orice alt subspaţiu afin este să scriem dreapta parametric. Aici vom scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2:

$$(d_2) : \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = -\alpha \\ x^3 = 0 \\ x^4 = \alpha \end{cases}$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$. Formând sistem din ecuaţiile de mai sus şi ecuaţia dreptei d_1, avem de rezolvat sistemul

$$\frac{\alpha+1}{-1} = \frac{-\alpha}{0} = \frac{0+1}{-1} = \frac{\alpha-1}{1},$$

a cărui soluţie este $\alpha = 0$, deci cele două drepete au în comun originea reperului, punctul $O(0,0,0,0)$. Fiind concurente, determină un 2-paln a cărui ecuaţie o găsim astfel. Fie $M(x^1,x^2,x^3,x^4)$ un punct arbitrar din acest 2-plan. Atunci vectorii $\overrightarrow{OM}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ sunt liniar dependenţi, deci există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2.$$

Aceasta este ecuaţia vectorială a 2-planului. Scriind pe componente, obţinem ecuaţiile parametrice ale 2-palnului:

$$\begin{cases} x^1 = -\alpha + \beta \\ x^2 = -\beta \\ x^3 = -\alpha \\ x^4 = \alpha + \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Eliminând parametrii găsim ecuaţia 2-palnului ca intersecţie de hiperplane:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 = 0 \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

Bisectoarea unghiului format de dreptele d_1 şi d_2 este o dreaptă care trece prin punctul de intersecţie a celor două drepte, deci prin originea reperului, şi a cărei direcţie urmează să o determinăm. Punctele de pe bisectoare fiind egal depărtate de laturile unghiului, rezultă că am obţine direcţia bisectoarei dacă am aduna doi vectori de lungimi egale, unul coliniar cu $\vec{v}_1$, iar celălalt coliniar cu $\vec{v}_2$. Calculând normele vectorilor $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ găsim că au aceeaşi lungime $\sqrt{3}$, deci vectorul director al bisectoarei este

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (0, -1, -1, 2),$$

de unde ecuaţia bisectoarei este:

$$\frac{x^1}{0} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3}{-1} = \frac{x^4}{2}.$$

Exerciţiul 7: În spaţiul afin cu patru dimensiuni se dau dreptele

$$(d_1) : \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3 - 2}{1} = \frac{x^4 + 1}{1},$$

$$(d_2) : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{x^3}{2} = \frac{x^4}{1}.$$

Se cere subspaţiul afin care conţine dreptele d_1 şi d_2. Calculaţi distanţa de la punctul $A(1, 2, -1, -2)$ la subspaţiul afin determinat.

Rezolvare: Cele două drepte nu sunt paralele. Verificăm dacă sunt concurente. Scriem dreapta d_1 parametric:

$$(d_1) : \begin{cases} x^1 = \alpha + 1 \\ x^2 = -\alpha \\ x^3 = \alpha + 2 \\ x^4 = \alpha - 1 \end{cases}$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$. Formând sistem din ecuaţiile de mai sus şi ecuaţia dreptei d_2, avem de rezolvat sistemul

$$\frac{\alpha+1}{1} = \frac{\alpha-1}{2} = \frac{\alpha+2}{2} = \frac{\alpha-1}{1},$$

care este incompatibil. Rezultă că dreptele d_1 şi d_2 nu sunt concurente. Prin urmare ele nu determină un 2-plan, ci un hiperplan. Alegem două puncte $M_1(1,0,2,-1) \in d_1$, $M_2(0,1,0,0) \in d_2$. Fie $M(x^1,x^2,x^3,x^4)$ un punct arbitrar din hiperplanul determinat de d_1 şi d_2. Atunci vectorii $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ sunt liniar dependenţi, ultimii doi fiind vectorii directori ai dreptelor date. Condiţia ca patru vectori să fie liniar dependenţi se exprimă prin anularea produsului lor mixt, deci obţinem ecuaţia hiperplanului

$$(H) : \begin{vmatrix} x^1-1 & x^2 & x^3-2 & x^4+1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, echivalent, $(H) : -3x^1 - 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2 = 0$. Distanţa de la punctul $A(1,2,-1,-2)$ la H se calculează după formulă astfel:

$$d(A,H) = \frac{|-3.1 - 2.2 + 2.(-1) + 3.(-2) + 2|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Tema 4: În spaţiul afin $\mathbf{R^4}$ se dau dreptele:

$$(d_1) : \frac{x^1-1}{-1} = \frac{x^2-2}{1} = \frac{x^3-1}{-1} = \frac{x^4-3}{0},$$

$$(d_2) : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2-1}{1} = \frac{x^3+1}{2} = \frac{x^4-1}{2},$$

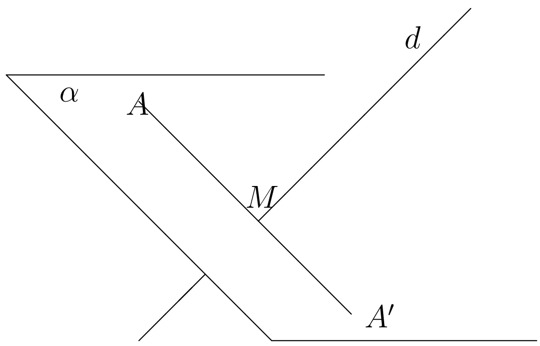
$$(d_3) : \frac{x^1}{0} = \frac{x^2-1}{-1} = \frac{x^3}{1} = \frac{x^4+1}{0}.$$

Se cere subspaţiul afin determinat de dreptele d_1 şi d_2.; subspaţiul afin determinat de dreptele d_2 şi d_3. Verificaţi dacă cele trei drepte aparţin aceluiaşi hiperplan. Găsiţi punctul de intersecţie a dreptei d_1 cu subspaţiul afin determinat de celelalte două drepte.

Indicaţie: Primele două drepte determină un 2-plan, ultimele două determină un hiperplan. Dacă toate dreptele ar aparţine aceluiaşi hiperplan, ar trebui ca d_1 să fie inclusă în hiperplanul determinat de d_2 şi d_3. Scriind parametric dreapta d_1, găsim că punctele acestei drepte nu satisfac ecuaţia hiperplanului.

Exerciţiul 8: În spaţiul afin $\mathbf{R^3}$ se dau punctul $A(1,-1,2)$, dreapta $(d) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ şi planul $(P) : x+y+z+2=0$. Se cere simetricul punctului A faţă de dreapta d, simetricul lui A faţă de planul P şi simetrica dreptei d faţă de planul P. Calculaţi distanţa de la A la dreapta d.

Rezolvare: Observăm că punctul A nu aparţine nici dreptei, nici



planului. Fie A' simetricul lui A faţă de d

Notăm cu M intersecţia dreptei AA' cu d. Dreapta AA' este perpendiculară pe d, deci se află în planul α care trece prin A perpendicular pe d. Ecuaţia acestui plan este

$$(\alpha) : 1(x-1) + (-1)(y+1) + 1(z-2) = 0,$$

adică $(\alpha) : x-y+z=4$. Coordonatele punctului M sunt date de soluţia sistemului:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1} \\ x-y+z=4 \end{cases}$$

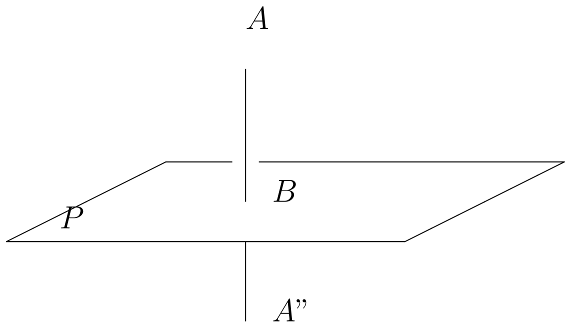
Scriem dreapta parametric şi sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\beta - 1 \\ z = \beta \\ x-y+z=4 \end{cases}$$

deci M are coordonatele $(\frac{5}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3})$. Punctul M este mijlocul segmentului AA', de unde rezultă coordonatele punctului A'::

$$\begin{array}{c} x_{A'} = 2x_M - x_A = \frac{7}{3} \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = -\frac{7}{3} \\ z_{A'} = 2z_M - z_A = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Deci $A'(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$.



Fie A” simetricul punctului A faţă de planul P.
Dreapta AA” este perpendiculară pe planul P, deci direcţia ei este dată de normala la plan $\vec{N}(1, 1, 1)$, şi trece prin $A(1, -1, 2)$. Ecuaţia ei este:

$$(AA”) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

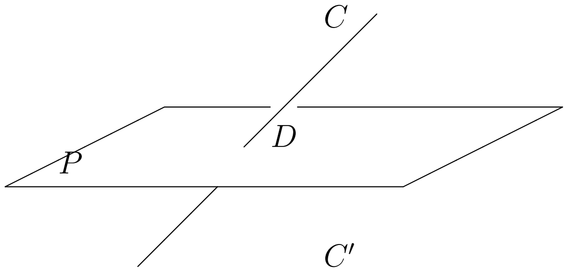
Fie B punctul de intersecţie a dreptei AA” cu planul P. Coordonatele lui B le găsim din sistemul:

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha + 2 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

unde primele trei ecuaţii reprezintă ecuaţiile parametrice ale dreptei AA”, cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Obţinem $B(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$. Punctul B este mijlocul segmentului AA”, deci coordonatele punctului A” sunt:

$$\begin{array}{c} x_{A”} = 2x_B - x_A = -\frac{5}{3} \\ y_{A”} = 2y_B - y_A = -\frac{11}{3} \\ z_{A”} = 2z_B - z_A = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Vom determina acum simetrica dreptei d faţă de planul P. Studiem mai întâi poziţia dreptei faţă de plan. Produsul scalar dintre normala la plan $\vec{N}(1, 1, 1)$ şi vectorul director al dreptei $\vec{v}_d(1, -1, 1)$ fiind egal cu 1, d nu este



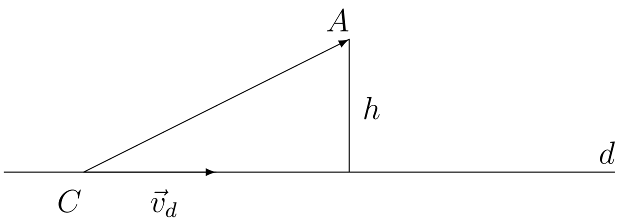
nici paralellă cu P, nici inclusă în P.
Rezultă că au un punct comun D, coordonatele acestuia fiind soluţia sistemului:

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -\alpha - 1 \\ z = \alpha \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

unde primele trei ecuaţii reprezintă ecuaţiile parametrice ale dreptei AA”, iar $\alpha \in \mathbf{R}$. Obţinem $\alpha = -2$ şi $D(-1, 1, -2)$. Fie $C(1, -1, 0) \in d$. Simetrica dreptei faţă de plan este dreapta care trece prin D şi prin simetricul lui C faţă de plan. Printr-un calcul analog celui de mai sus găsim simetricul lui C faţă de P punctul $C'((-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3})$. Ecuaţia simetricei este:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{1}.$$

Mai avem de calculat distanţa de la A la d. Fie h distanţa de la puncul



A la dreapta d. Distanţa cerută este egală cu lungimea înălţimii din A în triunghiul format cu vectorii $\overrightarrow{CA}$ şi $\vec{v}_d$, deci

$$h = \frac{2A}{\parallel \vec{v}_d \parallel} = \frac{\parallel \overrightarrow{CA} \times \vec{v}_d \parallel}{\parallel \vec{v}_d \parallel},$$

unde A este aria triunghiului format cu vectorii $\overrightarrow{CA}$ şi $\vec{v}_d$. Avem $\overrightarrow{CA}(0, 0, -2)$

şi

$$\overrightarrow{CA} \times \vec{v}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j},$$

Prin urmare obţinem $h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lăsăm ca temă următoarele exerciţii:

Tema 5: Se cere ecuaţia dreptei d' care trece prin simetricul punctului $A(2,-1,0)$ faţă de planul $(P_1): x - 2y + z = 0$, este paralelă cu planul $(P_2): 2x + y + 3z - 1 = 0$ şi perpendiculară pe dreapta $(d): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$. Calculaţi distanţa de la A la planul P_1, apoi la dreapta d. Găsiţi măsura unghiului format de dreptele d şi d'. Calculaţi unghiul dintre dreapta d şi planul P_2. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de dreapta d.

Tema 6: Scrieţi ecuaţia m-planului determinat de punctele A, B, C, unde:

a) $A(1,0,1)$, $B(3,2,1)$, $C(4,2,0)$;

b) $A(-1,0,1,3)$, $B(4,1,1,0)$, $C(-1,1,2,1)$.

Indicaţie: În spaţiul cu trei dimensiuni trei puncte necoliniare determină un plan, pentru a cărui ecuaţie folosim formula planului printr-un punct şi doi vectori, punctul A şi vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. În spaţiul cu partu dimensiuni trei puncte necoliniare determină un 2-plan, a cărui ecuaţie vectorială este $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, unde M este punctul curent al 2-planului.

Tema 7: Scrieţi ecuaţia m-planului determinat de dreptele d_1 şi d_2, unde:

a) $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$, $(d_2): \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$;

b) $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$, $(d_2): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$;

c) $(d_1): \frac{x^1+1}{1} = \frac{x^2-1}{1} = \frac{x^3+1}{2} = \frac{x^4}{-1}$, $(d_2): \frac{x^1-1}{2} = \frac{x^2+1}{-1} = \frac{x^3}{1} = \frac{x^4}{0}$;

Exerciţiul 9: În spaţiul afin $\mathbf{R^3}$ cu produsul scalar g dat prin

$$g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2),$$

se cer:

a) Normala la planul $(P): 2x + y - z + 1 = 0$ şi distanţa de la origine la acest plan în raport cu produsul scalar g.

b) Măsura unghiului format de dreptele $(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{0}$ şi (d_2): $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ în raport cu g.

Rezolvare: *a)* Fie $\vec{N}(l, m, n)$ normala la plan în raport cu produsul scalar g. Alegem arbitrar doi vectori din planul P, de exemplu cei care generează subspaţiul vectorial $\{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid \quad 2x + y - z = 0\}$, adică vectorii $\vec{v}_1(1, 0, 2)$, $\vec{v}_2(0, 1, 1)$. Subspaţiul considerat este un plan paralel cu P, deci vectorii liberi consideraţi sunt şi în P. Altfel, alegem trei puncte A, B, C arbitrare din planul P şi considerăm vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Condiţia de ortogonalitate a vectorului $\vec{N}$ pe plan este echivalentă cu

$$g(\vec{N}, \vec{v}_1) = 0, \quad g(\vec{N}, \vec{v}_2) = 0,$$

care conduc la sistemul

$$\begin{cases} 4l + 3m + 5n = 0 \\ 2l + 3m + 3n = 0 \end{cases}$$

a cărui soluţie generală este $(3\alpha, \alpha, -3\alpha)$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Deci normala la plan este $\vec{N}(3, 1, -3)$. Fie O' proiecţia originii pe P în raport cu g, adică O' este intersecţia cu planul a dreptei care trece prin origine şi are direcţia $\vec{N}$ de mai sus:

$$(d'): \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = -3\alpha \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

obţinem $O'(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}, -\frac{3}{10})$. Distanţa de la O la plan este egală cu distanţa dintre punctele O şi O', adică

$$d(O, P) = d(O, O') = \sqrt{g(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OO'})} = \frac{\sqrt{34}}{10}.$$

b) Unghiul format de cele două drepte este unghiul format de vectorii lor directori, $\vec{v}_1(1, 2, 0)$, $\vec{v}_2(1, 1, 1)$. Calculăm cosinisul acestui unghi cu formula

$$cos\angle(d_1, d_2) = \frac{g((1, 2, 0), (1, 1, 1))}{\sqrt{g((1, 2, 0), (1, 2, 0))}\sqrt{g((1, 1, 1), (1, 1, 1))}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

8.4 Mulţimi convexe. Semispaţii. Raport simplu

Exerciţiul 1: Să se demonstreze că interiorul unui cub este o mulţime convexă.

Rezolvare: Fără a restrânge generalitatea, vom demonstra rezultatul pentru interiorul cubului cu centrul în origine şi de latură 2, adică pentru mulţimea

$$\mathbf{M} = \{M(x, y, z) \mid \mid x \mid < 1, \quad \mid y \mid < 1, \quad \mid z \mid < 1\}.$$

Amintim că o mulţime este convexă dacă odată cu două puncte conţine şi segmentul determinat de cele două puncte. Fie deci $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $\in \mathbf{M}$. Ecuaţiile parametrice ale dreptei M_1M_2 sunt:

$$(M_1M_2) : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases}$$

cu $\lambda \in \mathbf{R}$. Segmentul $[M_1M_2]$ este mulţimea punctelor de pe dreapta M_1M_2 pentru care $\lambda \in [0, 1]$. Fie $M \in [M_1M_2]$, arbitrar ales. Trebuie să demonstrăm că $M \in \mathbf{M}$, deci că coordonatele (x, y, z) de forma de mai sus, cu $\lambda \in [0, 1]$, ale punctului M verifică condiţiile din definiţia mulţimii $\mathbf{M}$. Folosind proprietăţile modulului avem

$$\begin{array}{c} \mid x \mid = \mid (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \mid \leq \mid 1-\lambda \mid . \mid x_1 \mid + \mid \lambda \mid . \mid x_2 \mid \\ \mid y \mid = \mid (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \mid \leq \mid 1-\lambda \mid . \mid y_1 \mid + \mid \lambda \mid . \mid y_2 \mid \\ \mid z \mid = \mid (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \mid \leq \mid 1-\lambda \mid . \mid z_1 \mid + \mid \lambda \mid . \mid z_2 \mid \end{array}$$

Dar $\lambda \in [0, 1]$, deci $\mid 1 - \lambda \mid = 1 - \lambda$ şi $\mid \lambda \mid = \lambda$. Din faptul că $M_1, M_2 \in M$ rezultă $\mid x_1 \mid < 1$, $\mid x_2 \mid < 1$, $\mid y_1 \mid < 1$, $\mid y_2 \mid < 1$, $\mid z_1 \mid < 1$, $\mid z_2 \mid <!$, şi obţinem:

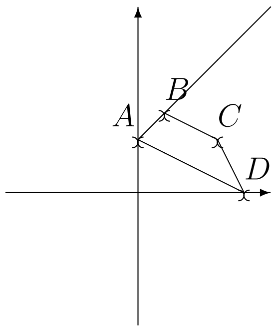
$$\begin{array}{l} \mid x \mid < (1-\lambda).1 + \lambda.1 = 1 \\ \mid y \mid < (1-\lambda).1 + \lambda.1 = 1 \\ \mid z \mid < (1-\lambda).1 + \lambda.1 = 1 \end{array}$$

deci $M \in \mathbf{M}$.

Exerciţiul 2: În spaţiul afin cu două dimensiuni se dau punctele $A(0, 2)$, $B(1, 3)$, $C(3, 2)$, $D(4, 0)$. Descrieţi următoarele mulţimi: semidreapta

$[AB$, semidreapta $(CB$, segmentul $[BC]$, semiplanul determinat de dreapta BD şi care conţine punctul C, interiorul patrulaterului $ABCD$.

Rezolvare: Avem figura de mai sus.



Ecuaţiile parametrice ale dreptei AB sunt

$$(AB) : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 + \alpha \end{cases} (\forall)\alpha \in \mathbf{R}.$$

Ţinând cont că abscisa punctului B este mai mare decât abscisa punctului A, semidreapta $[AB$ conţine acele puncte ale dreptei AB ale căror abscise sunt mai mari sau egale cu abscisa lui A, deci $x \geq 0$. Aceasta revine la $\alpha \geq 0$ din ecuaţia dreptei, deci semidreapta este:

$$([AB) = \{M(x,y) \mid \quad x = \alpha, \;\; y = 2 + \alpha, \;\; \alpha \geq 0\}.$$

Ecuaţiile parametrice ale dreptei BC sunt

$$(BC) : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \end{cases} (\forall)\alpha \in \mathbf{R}.$$

Ţinând cont că abscisa punctului B este mai mică decât abscisa punctului C, semidreapta $(CB$ conţine acele puncte ale dreptei BC ale căror abscise sunt mai mici decât abscisa lui C, deci $x < 3$. Axeasta revine la $1 + 2\alpha < 3$ din ecuaţia dreptei, deci semidreapta este:

$$((CB) = \{M(x,y) \mid \quad x = 1 + 2\alpha, \;\; y = 3 - \alpha, \;\; \alpha < 1\}.$$

Segmentul $[BC]$ conţine toate punctele dreptei BC ale căror abscise sunt cuprinse între abscisele punctelor B şi C, deci în intervalul $[1,3]$. Obţinem $1 + 2\alpha \in [1,3]$, echivalent cu $\alpha \in [0,1]$. Deci

$$([BC]) = \{M(x,y) \mid \quad x = 1 + 2\alpha, \;\; y = 3 - \alpha, \;\; \alpha \in [0,1]\}.$$

Ecuaţia carteziană a dreptei BD este

$$(BD) : x + y - 4 = 0.$$

Dreapta BD împarte planul în două semiplane. Punctele situate în unul dintre acestea satisfac inecuaţia $x + y - 4 < 0$, pe când punctele situate în celălalt satisfac $x + y - 4 => 0$. Verificăm care inecuaţie este satisfăcută de coordonatele lui $C(3, 2)$ şi găsim că semiplanul cerut este

$$x + y - 4 > 0.$$

Interiorul patrulaterului $ABCD$ este dat de intersecţia a patru semiplane, şi anume:S_1, semiplamul mărginit de dreapta AB şi care conţine punctul C, S_2, semiplamul mărginit de dreapta BC şi care conţine punctul A, S_3, semiplamul mărginit de dreapta CD şi care conţine punctul A şi S_4, semiplamul mărginit de dreapta DA şi care conţine punctul C. Ecuaţiile laturilor patrulaterului sunt:

$$\begin{array}{ll} (AB) : x - y + 2 = 0, & (BC) : x + 2y - 7 = 0 \\ (CD) : 2x + y - 8 = 0, & (DA) : x + 2y - 4 = 0 \end{array}$$

Obţinem ecuaţiile semiplanelor:

$$\begin{array}{ll} (S_1) : x - y + 2 > 0, & (S_2) : x + 2y - 7 < 0 \\ (S_3) : 2x + y - 8 < 0, & (S_4) : x + 2y - 4 > 0 \end{array}$$

şi $Int(ABCD) = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$, deci este mulţimea punctelor ale căror coordonate verifică sistemul format din cele patru inecuaţii de mai sus.

Exerciţiul 3: În spaţiul afin cu trei dimensiuni se dau punctele $A(0, 1, 5)$, $B(1, 1, -1)$, $C(1, 2, 6)$, $D(0, 1, 0)$. Caracterizaţi următoarele mulţimi: segmentul $[AB]$, semispaţiul mărginit de planul (BCD) şi conţine punctul A, interiorul tetraedrului $ABCD$.

Rezolvare: Ecuaţiile parametrice ale dreptei AB sunt

$$(AB) : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \qquad (\forall)\alpha \in \mathbf{R}. \\ z = 5 + 6\alpha \end{cases}$$

Segmentul $[AB]$ conţine toate punctele dreptei AB care au prima coordonată (de exemplu; la fel de bine putem să ne ghidăm după a doua sau a treia coordonată) între coordonatele x_A şi x_B, deci $\alpha \in [0,1]$. Dacă am fi pus condiţia pentru atreia coordonată să fie între z_A şi z_B, aveam $5+6\alpha \in [5,-1]$ de unde obţineam acelaşi rezultat, $\alpha \in [0,1]$. Deci

$$[AB] = \{M(x,y,z) \mid \; x = \alpha, \; y = 1, \; z = 5 + 6\alpha, \; \alpha \in [0,1]\}$$

Ecuaţia planului (BCD) o scriem ca fiind ecuaţia planului prin B care conţine vectorii $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{BD}$, adică avem:

$$(BCD) : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, echivalent, $(BCD) : x - 7y + z + 7 = 0$. Planul (BCD) împarte spaţiul în două semispaţii. Coordonatele punctelor aflate într-unul dintre ele satisfac inecuaţia $x + 7y + z - 7 < 0$, iar ale celor din celălalt satsfac inecuaţia $x - 7y + z + 7 > 0$. Coordonatele lui A sunt$(0,1,5)$, deci satisfac a doua inecuaţie. Semiplanul cerut este aşadar

$$(S_1) : x + 7y + z - 7 > 0$$

Interiorul tetraedrului este intersecţia următoarelor semispaţii: S_1 de mai sus, S_2 mărginit de planul (ABC) şi care conţine punctul D, S_3 mărginit de planul(ABD) şi care conţine punctul C şi S_4 mărgint de planul (ACD) şi conţine B. Lăsăm ca temă determinarea acestor semispaţii.

Remarcăm faptul că inecuaţiile care definesc semispaţii devin nestricte dacă includem şi planele respective, deci dacă vorbim de semispaţii închise.

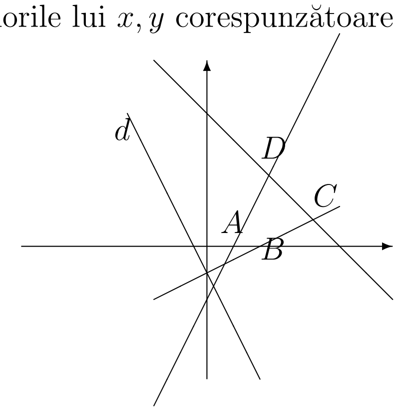
Exerciţiul 4: Să se rezolve programul liniar:

$$minf(x,y) = 2x + y$$

$$\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare: Vom reprezenta dreptele care mărginesc semiplanele din condiţiile problemei. Intersecţia semiplanelor date reprezintă un domeniu plan peste care venim cu un fascicul de drepte paralel cu dreapta $2x + y = c$

(cerinţa programului), pentru orice $c \in \mathbf{R}$ ales arbitrar. Coordonatele primului, respectiv ultimului punct de intersecţie dintre acest fascicul şi domeniu sunt valorile lui x, y corespunzătoare extremelor funcţiei f.



Domeniul este interiorul patrulaterului $ABCD$ din figura de mai sus. Fasciculul de drepte paralele cu dreapta d inersectează acest domeniu în punctele extreme A şi C. Valorile extreme ale funcţiei f sunt deci $f(A) = f(1,0) = 2$, respectiv $f(C) = f(4,1) = 9$.

Sugerăm rezolvarea următoarelor exerciţii ca temă:

Tema 1: În spaţiul afin cu trei dimensiuni se dau punctele $A(1,2,-2)$, $B(3,-1,0)$, $C(-1,-1,2)$, $D(2,0,1)$. Caracterizaţi următoarele mulţimi:

semidreapta $(AB$, segmentul $[CD]$, interiorul tetraedrului $ABCD$.

Tema 2: Rezolvaţi programul liniar:

a)

$$max f(x,y) = x - 2y$$

$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ x + 2y \leq 2 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$min f(x,y) = 4x + 5y$$

$$\begin{cases} x + 3y \geq 9 \\ 3x - 5y \leq 2 \\ 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Exerciţiul 5: Se dau pe o dreaptă patru puncte $A < B < C < D$ aşezate în această ordine şi egal depărtate între ele. Se cer rapoartele simple $(A, B; C)$ şi $(A, B; D)$ şi biraportul celor patru puncte, definit prin:

$$[A, B; C, D] = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)}.$$

Rezolvare: Fie un reper pe dreapta dată astfel încât $x_A = 0$. Considerând distanţa dintre primele două puncte egală cu α, avem coordonatele punctelor: $x_B = \alpha$, $x_C = 2\alpha$, $x_D = 3\alpha$. Raporartele cerute se calculează:

$$(A, B; C) = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{2\alpha}{-\alpha} = -2.$$

$$(A, B; D) = \frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} = \frac{3\alpha}{-2\alpha} = -\frac{3}{2}.$$

$$[A, B; C, D] = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)} = \frac{4}{3}.$$

Capitolul 9

Probleme rezolvate la Capitolul 3

9.1 Transformări liniare

Exerciţiul 1: Verificaţi care dintre următoarele aplicaţii este transformare liniară:

a) $T_1 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, $\quad T_1(x) = (x^1 + 2x^2, -x^3, x^1 + x^3)$, $\ x = (x^1, x^2, x^3)$;

b) $T_2 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^4}$, $T_2(x) = (x^1+x^2-x^3, x^2-x^3, -x^1-x^2+x^3, x^2-x^3)$, $\ x = (x^1, x^2, x^3)$;

c) $T_3 : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^3}$, $\quad T_3(x) = (x^1+2x^2, x^2-x^3, 3x^3+x^4)$, $\ x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$;

d) $T_4 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$, $\quad T_4(x) = (x^1.x^2, x^1 + x^3)$, $\ x = (x^1, x^2, x^3)$.

Pentru acestea determinaţi $KerT$, ImT şi matricea transformării în raport cu bazele canonice din domeniul şi codomeniul său.

Rezolvare: Avem de verificat dacă aplicaţiile date satisfac condiţiile

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\alpha x) = \alpha T(x),$$

sau, echivalent,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),$$

pentru orice doi vectori x, y din domeniul de definiţie a lui T şi pentru orice scalari α, β. Aici, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

a) Fie $x = (x^1, x^2, x^3), y = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R^3}$, arbitrar aleşi. Vectorul $x + y$ are componentele $(x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$. Conform definiţiei lui T_1 avem

$$T_1(x + y) = ((x^1 + y^1) + 2(x^2 + y^2), -(x^3 + y^3), (x^1 + y^1) + (x^3 + y^3)),$$

care, ţinând cont de operaţiile de adunare şi amplificare cu scalari din $\mathbf{R^3}$, conduce la

$$T(x+y) = (x^1+2x^2, -x^3, x^1+x^3)+(y^1+2y^2, -y^3, y^1+y^3) = T_1(x)+T_1(y).$$

Fie acum $\alpha \in \mathbf{R}$ arbitrar ales. Vectorul αx are componentele $(\alpha x^1, \alpha x^2, \alpha x^3)$ şi obţinem

$$T_1(\alpha x) = (\alpha x^1+2\alpha x^2, -\alpha x^3, \alpha x^1+\alpha x^3) = \alpha(x^1+2x^2, -x^3, x^1+x^3) = \alpha T_1(x).$$

Deci T de la punctul *a)* este transformare liniară (morfism liniar).

Mulţimea $KerT$ se numeşte nucleul transformării şi este subspaţiul vectorial al domeniului lui T format din vectorii a căror imagine prin T este vectorul zero al codomeniului:

$$KerT_1 = \{x \in \mathbf{R^3} \mid \ T(x) = 0\}.$$

Fie $x \in KerT_1$. Ecuaţia $T_1(x) = 0$ este echivalentă cu sistemul liniar

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 = 0 \\ -x^3 = 0 \\ x^1 + x^3 = 0 \end{cases}$$

care este omogen compatibil determinat. Rezultă $KerT_1 = \{(0, 0, 0)\}$. O consecinţă a acestui rezultat este faptul că morfismul T_1 este injectiv.

Mulţimea ImT este subspaţiul vectorial al codomeniului lui T format din toţi vectorii de forma $T(x)$, deci exact imaginea aplicaţiei T.

$$ImT_1 = \{T_1(x) \mid \ x \in \mathbf{R^3}\} = \{(x^1 + 2x^2, -x^3, x^1 + x^3) \mid \ x^1, x^2, x^3 \in \mathbf{R}\}.$$

Subspaţiul ImT_1 al lui $\mathbf{R^3}$ este generat de vectorii $(1, 0, 1), (2, 0, 0), (0, -1, 1)$, care sunt şi liniar independenţi. Obţinem $dim(ImT_1) = 3$, de unde $ImT_1 = \mathbf{R^3}$.

Baza canonică în domeniu, cât şi în codomeniu este $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Matricea transformării liniare T_1 în raport cu baza B are pe coloane componentele vectorilor $T_1(e_i)$ în raport cu B.

$$T_1(e_1) = T_1(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$$
$$T_1(e_2 = T_1(0, 1, 0) = (2, 0, 0) = 2e_1$$
$$T_1 e_3) = T_1(0, 0, 1) = (0, -1, 1) = -e_2 + e_3$$

deci matricea transformării este

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Se verifică faptul că T_2 este transformare liniară (temă). Fie $x = (x^1, x^2, x^3) \in KerT_2$. Ecuaţia $T_2(x) = 0$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 = 0 \\ x^2 - x^3 = 0 \\ -x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, soluţia generală fiind $KerT = \{(0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$, deci nucleul transformării T_2 este un subspaţiu de dimensiune 1 al spaţiului $\mathbf{R^3}$, generat de vectorul $(0, 1, 1)$. Imaginea aplicaţiei T_2 este

$$ImT_2 = \{T_2(x)\ ,\ x \in \mathbf{R^3}\} = \{(x^1 + x^2 - x^3, x^2 - x^3, -x^1 - x^2 + x^3, x^2 - x^3)\}.$$

Generatorii acestui subspaţiu al lui $\mathbf{R^4}$ sunt vectorii $(1, 0, -1, 0)$, $(1, 1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1, -1)$, vectori liniar dependenţi (rangul matricei care are pe coloane cei trei vectori este 2), de unde rezultă că ImT_2 este subspaţiu de dimensiune 2.

Bazele canonoce în domeniu, respectiv codomeniu sunt
$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$,
$B' = \{f_1 = (1, 0, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0, 0), f_3 = (0, 0, 1, 0), f_4 = (0, 0, 0, 1)\}$. Matricea transformării liniare T în raport cu bazele B şi B' are pe coloane componentele vectorilor $T_2(e_i)$ în raport cu B':

$$\begin{gathered} T_2(e_1) = (1, 0, -1, 0) = f_1 - f_3 \\ T_2(e_2) = (1, 1, -1, 1) = f_1 + f_2 - f_3 + f_4 \\ T_2(e_3) = (-1, -1, 1, -1) = - - f_1 - f_2 + f_3 - f_4 \end{gathered}$$

şi este:

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Punctul *c)* îl lăsăm temă. Aici se va obţine matricea

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Verificând a doua condiţie din definiţia unei transformări liniare, avem

$$T_4(\alpha x) = (\alpha x^1 . \alpha x^2, \alpha x^1 + \alpha x^3) \neq \alpha T_4(x), \;\; x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R^3},$$

deci T_4 nu este o transformare liniară.

Exerciţiul 2: Scrieţi matricea transformării liniare T_1 de al exerciţiul anterior, în raport cu baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, unde $e'_1 = (1, -1, 1)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$, $e'_3 = (1, 2, 3)$.

Rezolvare: Exerciţiul se poate rezolva prin două metode. Prima metodă constă în aplicarea formulei care dă matricea unei transformări liniare la schimbarea bazei:

$$A' = S^{-1}.A.S,$$

unde S este matricea schimbării de bază de la B la B', A este matricea transformării în raport cu B iar A' matricea transformării în raport cu B'. La exerciţiul anterior am determinat matricea lui T_1 în raport cu baza canonică, A_{T_1} de mai sus. Matricea schimbării de la baza canonică la B' din enunţ este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Inversa sa este

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obţinem

$$A'_{T_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 13 & -5 & -7 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Prin a doua metodă folosim definiţia matricei unei transformări liniare. Calculăm

$$T_1(e'_1) = (-1, -1, 2)$$
$$T_1(e'_2) = (2, -1, 1)$$
$$T_1(e'_3) = (5, -2, 4)$$

Tabel 1.

	e'$_1$	e'$_2$	e'$_3$	T$_1$(e$_1$)	T$_1$(e$_2$)	T$_1$(e$_3$)
e$_1$	**1**	0	1	-1	2	5
e$_2$	-1	1	2	-1	-1	-3
e$_3$	1	1	3	2	1	4
e'$_1$	1	0	1	-1	2	5
e$_2$	0	**1**	3	-2	1	2
e$_3$	0	1	2	3	-1	-1
e'$_1$	1	0	1	-1	2	5
e'$_2$	0	1	3	-2	1	2
e$_3$	0	0	**-1**	5	-3	-4
e'$_1$	1	0	0	4	0	2
e'$_2$	0	1	0	13	-5	-7
e'$_3$	0	0	1	-5	2	3

Pentru a găsi componentele vectorilor de mai sus în raport cu baza B' vom folosi lema substituţiei şi avem Tabelul 1, deci matricea este

$$A'_{T_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 13 & -5 & -9 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tema 1: Demonstraţi că următoarele aplicaţii sunt transformări liniare. Determinaţi nucleul şi imaginea fiecărei transformări şi matricea în raport cu bazele canonice din domeniu şi codomeniu:

a) $T_1 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, $T_1(x) = (-x^1+2x^2-x^3, 2x^1-x^3, x^1+x^2+x^3)$, $x = (x^1, x^2, x^3)$;

b) $T_2 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^4}$, $T_2(x) = (x^1-2x^2+x^3, x^2+2x^3, 3x^1-x^2+2x^3, x^2+x^3)$, $x = (x^1, x^2, x^3)$;

c) $T_3 : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^3}$, $T_3(x) = (x^1-x^2, x^2-x^3, 3x^3+x^4)$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$;

d) $T_4 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$, $T_4(x) = (x^1-x^2, x^1+x^3)$, $x = (x^1, x^2, x^3)$.

Tema 2: Găsiţi matricea transformării T_1 de la Tema 1 în raport cu baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, unde $e'_1 = (1, 2, 1)$, $e'_2 = (2, 3, 3)$, $e'_3 = (3, 7, 1)$, prin două metode. Aceeaşi problemă pentru transformarea T_2 de la exerciţiul 1 şi baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, unde $e'_1 = (0, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 0, 1)$, $e'_3 = (1, 1, 0)$.

Exerciţiul 3: Să se determine transformarea liniară $T : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ care satisface $T(v_i) = w_i$, $(\forall)i \in \{1, 2, 3\}$, unde $v_1 = (2, 4, 6)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0)$, $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 0, 1)$, $w_3 = (0, 0, 6)$.

Rezolvare: Fie A matricea transformării T în raport cu baza canonică. Notând cu V_i coloana componentelor vectorului v_i, respectiv cu W_i coloana componentelor vectorului w_i, $(\forall)i \in \{1, 2, 3\}$, egalităţile $T(v_i) = w_i$ se scriu matricial $A.V_i = W_i$, $(\forall)i \in \{1, 2, 3\}$, sau, echivalent,

$$A. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

de unde

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & -18 & 4 \end{pmatrix}.$$

Componentele lui $T(x)$ pentru un $x = (x_1, x_2, x_3)$ arbitrar sunt elementele coloanei $A.X$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,deci

$$T(x) = \frac{1}{4}(-11x_2 + 8x_3, 0, 24x_1 - 18x_2 + 4x_3).$$

Exerciţiul 4: Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K. O transformare liniară $P : V \to V$ se numeşte proiecţie dacă $P^2 = P$. Să se arate că dacă $T : V \to V$ este o transformare liniară cu proprietatea că $T^2 = I$, atunci transformările $P_1 = \frac{1}{2}(I - T)$ şi $P_2 = \frac{1}{2}(I + T)$ sunt proiecţii şi V este suma directă a subspaţiilor ImP_1 şi ImP_2. Prin puterea a doua a unei transformări înţelegem compusa cu ea însăşi, iar cu I am notat aplicaţia identică.

Rezolvare: Verificăm direct că P_1, P_2 sunt proiecţii:

$$P_1^2 = \frac{1}{4}(I - T)(I - T) = \frac{1}{4}(I - T - T + T^2) = \frac{1}{2}(I - T) = P_1,$$

$$P_2^2 = \frac{1}{4}(I + T)(I + T) = \frac{1}{4}(I + T + T + T^2) = \frac{1}{2}(I + T) = P_2.$$

Avem

$$ImP_1 = \{\frac{1}{2}(x - T(x)) \mid \ x \in V\}, \quad ImP_2 = \{\frac{1}{2}(x + T(x)) \mid \ x \in V\}.$$

şi fie $y \in ImP_1 \cap ImP_2$. Există $x, z \in V$ astfel încât

$$\begin{array}{l} y = P_1(x) = \frac{1}{2}(x + T(x)), \\ y = P_2(z) = \frac{1}{2}(z - T(z)). \end{array}$$

Calculăm

$$\begin{array}{rl} P_2(y) = P_2(P_1(x)) = & \frac{1}{2}(P_1(x) - T(P_1(x))) = \frac{1}{4}(x + T(x) - T(x + T(x))) = \\ = & \frac{1}{4}(x + T(x) - T(x) - T^2(x)) = 0, \\ P_1(y) = P_1(P_2(z)) = & \frac{1}{2}(P_2(z) + T(P_2(z))) = \frac{1}{4}(x - T(x) + T(x - T(x))) = \\ = & \frac{1}{4}(x - T(x) + T(x) - T^2(x)) = 0. \end{array}$$

Rezultă că y aparţine nucleului proiecţiei P_1 şi nucleului proiecţiei P_2, deci

$$\begin{array}{l} y + T(y) = 0, \\ y - T(y) = 0 \end{array}$$

de unde obţinem $y = 0$. Prin urmare suma $ImP_1 + ImP_2$ este directă. Fie $x \in V$, arbitrar ales, şi $x_1 = P_1(x)$, $x_2 = P_2(x)$. Se verifică imediat că $x = x_1 + x_2$, deci $V = ImP_1 + ImP_2$, c.c.t.d.

9.2 Vectori şi valori proprii

Exerciţiul 1: Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători acestora pentru următoarele matrici. Precizaţi dacă mnatricile date admit formăa diagonală şi dacă da, în raport cu ce bază se obţine aceasta.

$$a)A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad b)A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad c)A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Valorile proprii ale unei matrici sunt rădăcinile polinomului caracteristic, $det(A - \lambda I)$. La punctul *a)*, ecuaţia caracteristică este:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ -6 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sau, echivalent, $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Obţinem valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

Determinăm acum subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii găsite:

Subspaţiul $V_{(1)}$ corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$ conţine vectorii pentru care coloana componentelor verifică ecuaţia $A.X = \lambda X$, deci soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Avem

$$V_{(1)} = \{(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta) \mid \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = [(1,0,2),(0,1,1)].$$

Analog determinăm subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 0$, ca fiind soluţiile sistemului

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Avem

$$V_{(0)} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \mid \ \alpha \in \mathbf{R}\} = [(1,2,3)].$$

Valorile proprii sunt reale, deci din câmpul scalarilor spaţiului vectorial $\mathbf{R^3}$. Multiplicitatea algebrică a valorii proprii 1 este egală cu 2, (este rădăcină dublă a polinomului caracteristic) şi egală cu $dimV_{(1)}$, numită multiplicitatea geometrică a valorii proprii date. Analog, multiplicitatea algebrică şi cea geometrică a valorii proprii 0 coincid, fiind ambele egale cu 1. Toate condiţiile pentru existenţa formei diagonale sunt astfel îndeplinite, deci există forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a matricei A. Dacă T este transformarea liniară care are matricea A în raport cu baza canonică, atunci A' este matricea aceleiaşi transformări în raport cu baza formată din reuniunea bazelor subspaţiilor proprii, în ordinea în care apar valorile proprii pe diagonala lui A', deci în baza $B' = \{(1,0,2),(0,1,1),(1,2,3)\}$. Notând cu S matricea de trecere de la baza canonică la B', verificaţi relaţia $A' = S^{-1}AS$.

Punctul *b)* se rezolvă analog, găsind valorile proprii 3, rădăcină dublă şi -3, rădăcină simplă, subspaţiile proprii $V_{(3)} = [(1, 0, -1), (0, 1, 2)]$, $V_{(-3)} = [(1, -2, 1)]$. Există şi aici forma diagonală, de exemplu

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

în raport cu baza $B' = \{(1, 0, -1), (1, -2, 1), (0, 1, 2)\}$. Remarcăm din nou că o modificare a ordinii valorilor proprii pe diagonala matricei A' implică o modificare a ordinii vectorilor în baza B'.

La ultimul punct determinăm valorile proprii 3, rădăcină dublă şi 6, rădăcină simplă, şi subspaţiile proprii $V_{(3)} = [(0, 1, -1)]$, $V_{()} = [(3, 6, 2)]$. Multiplicitatea algebrică a valorii proprii 3 nu este egală cu multiplicitatea geometrică, deci A nu admite formă diagonală.

Tema 1: Aceleşi enunţ de mai sus pentru:

$$a)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 2: Calculaţi A^n şi A^{-1} folosind polinomul caracteristic şi forma diagonală a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

deci $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$. Teorema Hamilton-Cayley afirmă că $P(A) = 0$, deci avem egalitatea matricială

$$-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3 = 0_3,$$

unde I_3 este matricea unitate, iar 0_3 este matricea nulă. Cum $det(A) = 6 \neq 0$, există A^{-1} şi înmulţind relaţia de mai sus cu aceastua matrice, rezultă:

$$-6A^{-1} = -A^2 + 6A - 11I_3,$$

deci am determinat $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

Valorile proprii ale matricei A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice $P(\lambda) = 0$, de unde rezultă $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Subspaţiile proprii sunt: $V_{(1)} = [(1,1,1)]$, $V_{(2)} = [(1,0,1)]$. $V_{(3)} = [(1,1,0)]$. Sunt îndeplinite condiţiile pentru existenţa formei diagonale, deci A admite forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

în raport cu baza $B' = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$. Între matriciele A şi A' există relaţia $A' = S^{-1}AS$ unde S este matricea schimbării de bază de la baza canonică la B'. Din ultima relaţie se poate demonstra prin inducţie matematică că $A'^n = S^{-1}A^nS$. Se ca;lculează imediat

$$A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

astfel că

$$A^n = SA'^nS^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n - 1 & 1 - 2^n & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 1 & 1 - 3^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

9.3 Transformări ortogonale

Exerciţiul 1: Se dau următoarele transformări în spaţiul $\mathbf{R^3}$.

a) $T(x) = \frac{1}{3}(2x^1 + 2x^2 - x^3, 2x^1 - x^2 + 2x^3, -x^1 + 2x^2 + 2x^3)$,

b) $T(x) = \frac{1}{7}(-3x^1 + 6x^2 + 2x^3, -2x^1 - 3x^2 + 6x^3, 6x^1 + 2x^2 + 3x^3)$.

unde $x = (x^1, x^2, x^3)$. Demonstraţi că prima transformare este o simetrie faţă de un plan, precizând ecuaţia planului. Demonstraţi că a doua transformare este o rotaţie; precizaţi axa şi unghiul de rotaţie.

Rezolvare: Simetriile şi rotaţiile sunt transformări ortogonale, deci vom arăta mai întâi că T este ortogonală, pentru fiecare din transformările date. Aceasta revine la a verifica dacă matricea transformării în raport cu baza canonică este ortogonală, adică dacă $A.A^t = I_3$. O transformare ortogonală este simetrie dacă este antideplasare, deci $det(A) = -1$, şi dacă matricea A este simetrică, $A = A^t$. Este rotaţie dacă $det(A) = 1$.

a) Scriem matricea lui T în raport cu baza canonică

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculăm produsul dintre A şi transpusa ei, A^t şi obţinem matricea unitate, deci A este ortogonală. Avem $det(A) = -1$, deci T este antideplasare. Cum $A = A^t$, rezultă T simetrie. Determinăm axa/planul de simetrie ca fiind locul geometric al punctelor invariate de transformarea T. Ecuaţia $T(x) = x$ conduce la sistemul dublu nedeterminat

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 - x^3 = 3x^1 \\ 2x^1 - x^2 + 2x^3 = 3x^2 \\ -x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 3x^3 \end{cases}$$

Obţinem ecuaţia planului de simetrie $x^1 - 2x^2 + x^3 = 0$.

b) Matricea transformării T în raport cu baza canonică este

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Este o matrice ortogonală, deci T este transformare ortogonală. Determinantul lui A este egal cu 1, deci este matricea unei rotaţii. Axa de rotaţie este locul geometric al punctelor invariante la transformarea T. Coordonatele acestor puncte verifică ecuaţia $T(x) = 0$, deci sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} -3x^1 + 6x^2 + 2x^3 = 7x^1 \\ -2x^1 - 3x^2 + 6x^3 = 7x^2 \\ 6x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 7x^3 \end{cases}$$

Găsim ecuaţia axei de rotaţie: $(d) : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3}{2}$. Pentru a găsi unghiul de rotaţie alegem un punct arbitrar M al spaţiului şi fie M' punctul obţinut prin rotirea lui M în jurul axei d. De fapt M' se obţine prin rotirea lui M în jurul proiecţieie lui M pe d, în planul prin M perpendicular pe d. Fie A proiecţia punctului M pe d. Unghiul căutat este unghiul format de vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM'}$. Alegem convenabil coordonatele lui M, de exemplu $M(7,0,0)$ (desigur căutăm un punct care nu este pe d). Coordonatele lui M' sunt $T((7,0,0)) = (-3,-2,6)$. Planul prin M perpendicular pe d este de ecuaţie $(\pi) : 1.(x^1 - 7) + x^2 + 2x^3 = 0$. Punctul A este $\pi \cap d$, deci coordonatele sale verifică sistemul

$$\begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = \alpha \\ x^3 = 2\alpha \\ x^1 + x^2 + 2x^3 = 7 \end{cases}$$

de unde $A(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{3})$. Cosinusul unghiului de rotaţie se calculează (temă) din formula

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'}}{\| \overrightarrow{AM} \| . \| \overrightarrow{AM'} \|}.$$

Exerciţiul 2: În reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se dă dreapta $(d) : x^1 = x^2 = x^3$. Să se determine transformarea ortogonală care realizează:

a) Simetria faţă de dreapta d.

b) O rotaţie de unghi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ în jurul dreptei d.

Rezolvare: *a)* Fie S transformarea care realizeaă simetria faţă de d. Vom determina mai întâi transformarea Pr care realizează proiuecţia pe d, iar pentru determinarea lui S folosim formula $S = 2Pr - I$, unde I este transformarea identică, $I(x) = x$. Fie $M(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ un punct arbitrar nesituat pe d şi M' proiecţia lui pe d. Ecuaţia planului prin M perpendicular pe d este

$$x^1 + x^2 + x^3 = x_0^1 + x_0^2 + x_0^3,$$

iar coordonatele lui M' se găsesc rezolvând sistemul format din ecuaţia anterioară şi ecuaţia dreptei d. Obţinem

$$Pr(x) = \frac{1}{3}(x^1 + x^2 + x^3, x^1 + x^2 + x^3, x^1 + x^2 + x^3),$$

$$S(x) = 2Pr(x) - I(x) = \frac{1}{3}(-x^1 + 2x^2 + 2x^3, 2x^1 - x^2 + 2x^3, 2x^1 + 2x^2 - x^3).$$

b) O abordare directă, în maniera de mai sus pentru ecuaţia rotaţiei este prea greoaie. Vom alege o bază $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ adaptată dreptei d, adică e'_1 este versorul dreptei d, iar , e'_2, e'_3 reprezintă o bază ortonormată a subspaţiului $d^\perp$ ortogonal spaţiului care conţine coordonatele punctelor de pe d. Elementele acestiu subspaţiu sunt coordonatele punctelor din planul prin origine perpendicular pe d, $(P) : x^1+x^2+x^3 = 0$. Baza acestui subspaţiu este $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$. Avem $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ şi alegem $e'_3 = e'_1 \times e'_2$.

$$e'_1 \times e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Am obţinut $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$. Ţinând cont că matricea unei transformări liniare are pe coloane componentele vectorilor $T(e'_i)$ în raport cu baza $\{e'_i\}_{i=1,2,3}$, matricea unei rotaţii de unghi α în jurul lui d are următoarea matrice în raport cu baza B' de mai sus:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

pentru $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Pentru a scrie ecuaţia rotaţiei avem nevoie de matricea sa în raport cu baza canonică, matrice pe care o găsim din

$$A = SA'S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Se obţine matricea

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

de unde ecuaţia rotaţiei este $T : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$,

$$T(x) = \frac{1}{3}((1+\sqrt{3})x^1 + (1-\sqrt{3})x^2 + x^3, x^1 + (1+\sqrt{3})x^2 + (1-\sqrt{3})x^3,$$

$$(1-\sqrt{3})x^1 + x^2 + (1+\sqrt{3})x^3).$$

Observaţie. Metoda de mai sus o puteam folosi şi la punctul *a)* pentru a găsi proiecţia pe d. Matricea transformării care realizează proiecţia pe dreapta d, în raport cu baza B' de mai sus este

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deoarece proiecţia vectorului e'_1 pe d este chiar el însuşi, iar proiecţiile vectorilor e'_2, e'_3 sunt un punct, deci vectorul nul, aceşti vectori fiind ortogonali pe d.

Remarcăm faptul că proiecţiile nu sunt transformări ortogonale, ele nepăstrând nici lungimile, nici unghiurile.

9.4 Transformări afine

Exerciţiul 1: Scrieţi transformările care realizează:

a) Simetria faţă de $B(1, 2, 3)$;

b) Omotetia de centru $C(-1, 2, 1)$ şi raport $k = 2$;

c) Proiecţia pe planul $x + y + z = 3$.

în reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Rezolvare: *a)* Fie $M(x^1, x^2, x^3)$ un punct arbitrar ales şi M' simetricul lui M faţă de B. Transformarea căutată asociază tripletului (x^1, x^2, x^3) coordonatele lui M', adică este $T : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$,

$$T(x) = (2 - x^1, 4 - x^2, 6 - x^3), \quad x = (x^1, x^2, x^3)$$

Evident, nu este o transformatre liniară (de exemplu $T(\alpha x) \neq \alpha T(x)$). Există totuşi o transformare liniară care poate fi asociată acestei transformări, $T'(x) = (-x^1, -x^2, -x^3)$. Notând cu X_0 coloana coordonatelor lui B, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, cu X coloana $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ şi cu Y coloana coordonatelor lui M', ecuaţia matricială a transformării cerute este

$$Y = A.X + X_0,$$

unde A este matricea transformării liniare T' în raport cu baza canonică. Prin urmare T este o transformare afină. Faptul că T este transformare afină se poate verifica şi direct, deoarece avem

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad (\forall)\alpha + \beta = 1.$$

b) Omotetia din enunţ este transformarea $T : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, care asociază coordonatelor unui punct $M(x^1, x^2, x^3)$ oarecare coordonatele punctului $M'(y^1, y^2, y^3)$ pentru care

$$\overrightarrow{CM'} = k.\overrightarrow{CM}$$

Obţinem

$$\begin{cases} y^1 + 1 = 2(x^1 + 1) \\ y^2 - 2 = 2(x^2 - 2) \\ y^3 - 1 = 2(x^3 - 1) \end{cases}$$

$$T(x) = (2x^1 + 1, 2x^2 - 2, 2x^3 - 1), \quad x = (x^1, x^2, x^3),$$

care de asemenea este o transformare afină.

c) Fie $M(x^1, x^2, x^3)$ un punct arbitrar al spaţiului. Determinând direct proiecţia lui M pe planul dat găsim ecuaţia transformării cerute:

$$T(x) = \frac{1}{3}(2x^1 - x^2 - x^3 + 3, -x^1 + 2x^2 - x^3 + 3, -x^1 - x^2 + 2x^3 + 3).$$

Este desigur cea mai simplă metodă în acest caz. Prezentă totuşi şi următoarea metodă care se va dovedi singura utilă în cazul rotaţiilor.

Fie $O'(1, 1, 1)$ un punct fixat arbitrar din planul dat. Facem o schimbare de coordonate astfel încât noua origine a reperului să fie O'. Aceasta este translaţia

$$X = X' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

în urma căreia originea noului reper, deci pentru coloana X' matricea nulă, este punctul ale cărui coordonate dau $X = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, adică O'. În noul reper $R' = \{O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ găsim matricea transformării în raport cu baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde B' este o bază adaptată planului π: vectorul e'_1 este versorul normalei la π, deci de componente $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, iar vectorii e'_2, e'_3 reprezintă o bază ortonormată a lui π. Avem $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$. Matricea transformării în raport cu baza canonică este

$$A = SA'S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

unde S este matricea schimbării de bază de la baza canonică la B', adică matricea ale cărei coloane sunt componentele vectorilor din B'. Ambele baze fiind ortonormate, S este matrice ortogonală, deci $S^{-1} = S^t$.

În reperul R' ecuaţia matricială a transformării este $Y' = AX'$, unde $Y' = Y - X_0$, $X' = X - X_0$. În raport cu baza canonică găsim ecuaţia matricială a proiecţiei pe planul π

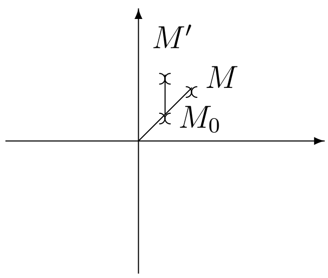
$$Y = AX + X_0 - AX_0 = AX + X_0$$

de unde rezultă ecuaţia găsită şi prin prima metodă.

Remarcăm faptul că schimbarea reperului în urma căreia originea este un punct din π transformă varietatea liniară π îtr-un subspaţiu vectorial. În acest nou reper proiecţia fiind o transformare liniară, determinarea ei se face ca şi în paragraful anterior (vezi ultima observaţie de acolo).

Exerciţiul 2: În spaţiul afin bidimensional, scrieţi ecuaţia rotaţiei de unghi $\frac{\pi}{4}$ în jurul punctului $M_0(1,1)$. Găsiţi imaginea punctului $M(2,2,)$ prin această transformare.

Rezolvare:



Matricea rotaţiei de unghi α în jurul originii reperului $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ este

$$A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pentru a scrie rotaţia cerută facem o translaţie a reperului R altfel încât originea noului reper să fie M_0:

$$X = X' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notăm cu X_0 coloana $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. În noul reper $R' = \{M_0, \vec{i}, \vec{j}\}$, rotaţia de unghi $\frac{\pi}{4}$ are ecuaţia matricială

$$Y' = AX' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $Y' = Y - X_0$, $X' = X - X_0$. Obţinem ecuaţia

$$Y = AX + X_0 - AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia transformării este

$$T(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 1 - \sqrt{2}), \ \ x = (x^1, x^2).$$

Imaginea punctului $M(2, 2)$ prin această transformare este punctul de coordonate $T(2, 2) = (1, 1 + \sqrt{2})$.

Exerciţiul 3: Găsiţi ecuaţia transformării care realizează rotaţia de unghi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ în jurul dreptei

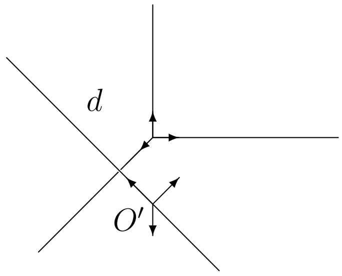
$$(d) : \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 - 1}{-1} = \frac{x^3 + 1}{2}.$$

Rezolvare: Facem schimbarea de reper $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \to \{O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, unde $O'(1, 1, -1)$ este un punct ales arbitrar pe dreapta d. Schimbarea anunţată este translaţia

$$X = X' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

În noul reper ecuaţia dreptei este $\frac{x'^1}{1} = \frac{x'^2}{-1} = \frac{x'^3}{2}$.

Facem acum o schimbare de bază, trecând de la baza canonică la o bază $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ adaptată dreptei d: e_1' este versorul direcţiei dreptei d, deci de componente $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$, iar vectorii e_2', e_3' reprezintă o bază ortonormată a subspaţiului ortogonal subspaţiului format din coordonatele punctelor de pe d. Obţinem $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_3' = e_1' \times e_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.



Matricea rotaţiei cerute în raport cu noua bază este

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

Matricea în raport cu baza canonică este

$$A = SA'S^{-1}$$

unde S este matricea schimbării de bază de la baza canonică la B'. Ambele baze fiind ortonormate, S este matrice ortogonală, deci $S^{-1} = S^t$. Ecuaţia matricială a transformării este:

$$Y = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}..$$

Lăsăm calculul ca temă. Ca metodă de verificare sugerăm să se aleagă un punct arbitrar $(\alpha+1, -\alpha+1, 2\alpha_1)$ de pe d şi să se demonstreze că este invariant la transformarea găsită. Adică pentru $X = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -\alpha+1 \\ 2\alpha-1 \end{pmatrix}$, obţinem $Y = X$.

Tema 1: Scrieţi ecuaţia rotaţiei de unghi $\frac{\pi}{3}$ în jurul punctului $M_0(2,1)$. Găsiţi imaginea punctului $M(3,1)$ prin această transformare.

Tema 2: Scrieţi ecuaţia rotaţiei de unghi $\frac{\pi}{2}$ în jurul dreptei $(d): x = -y = -z$.

Tema 3: În reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, scrieţi ecuaţiile transformărilor care realizează:

a) Simetria faţă de dreapta $(d) : \frac{x^1-1}{2} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3}{0}$;

b) Rotaţia de unghi $\frac{\pi}{3}$ în jurul dreptei de la punctul anterior;

c) Omotetia de centru $M(3, 2, 4)$ şi raport $k = -2$;

d) Proiecţia pe planul $(\pi) : 2x^1 - x^2 + 2x^3 = 5$.

Găţi imaginea originii prin fiecare din aceste transformări.

Exerciţiul 4: Fie $M(x, y)$ un punct din plan care verifică ecuaţia

$$5x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0.$$

Se cere transformarea afină în urma căreia ecuaţia de mai sus nu are termeni de gradul întâi. Se cere apoi transformarea afină în urma căreia ecuaţia obţinută anterior nu mai are termen de tip $x'y'$.

Rezolvare: Termenii liniari pot să dispară în urma unei translaţii. Fie (a, b) coordonatele punctului în care translatăm originea. Ecuaţia translaţiei este $X = X' + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, sau, echivalent,

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

În noul reper ecuaţia dată în enunţ devine:

$$5(x'^2+2x'a+a^2)-2(x'y'+x'b+y'a+ab)+y'^2+2by'+b^2+6(x'+a)+2(y'+b)-3 = 0$$

Impunem anularea coeficienţilor lui x' şi y', de unde avem sistemul

$$\begin{cases} 10a - 2b + 6 = 0 \\ -2a + 2b + 2 = 0 \end{cases}$$

Rezultă $a = -1, b = -2$. Prima transformare cerută este $T_1 : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$, de ecuaţie $T_1(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Ecuaţia din enunţ are forma

$$5x'^2 - 2x'y' + y'^2 - 8 = 0$$

Pentru a doua cerinţă trebuie să facem o rotaţie. Fie α unghiul de rotaţie. Coordonatele în noul reper vor fi

$$\begin{cases} x" = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y" = x'sin\alpha + y'sin\alpha \end{cases}$$

Ecuaţia obţinută nu are termeni $x'y'$ dacă impunem

$$cos(2\alpha) + 2sin(2\alpha) = 0$$

de unde $tg(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Tema 4: Aceeaşi problemă pentru

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$$

Capitolul 10

Probleme rezolvate la Capitolul 4

10.1 Forme biliniare şi pătratice

Exerciţiul 1: Se dă aplicaţia $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$,

a) $f(x, y) = 2x^1y^1 + x^2y^1 + x^2y^2 + 3x^3y^3, \ \ x = (x^1, x^2, x^3), \ \ y = (y^1, y^2, y^3)$.

b) $f(x, y) = x^1y^1 + 2x^2y^1 + 2x^1y^2 + x^2y^2 - x^3y^3, \ \ x = (x^1, x^2, x^3), \ \ y = (y^1, y^2, y^3)$.

Arătaţi că este o formă biliniară şi determinaţi matricea sa în baza canonică, apoi în baza $B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 0)\}$. Verificaţi dacă este o formă simetrică şi dacă da, scrieţi forma pătratică definită de f.

Rezolvare: *a)* Se verifică prin calcul direct că

$$f(\alpha x + \beta z, y,) = \alpha f(x, y) + \beta f(z, y), \ \ f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z),$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R^3}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ arbitrar aleşi. Deci f este o formă biliniară.

Elementele matricei formei f într-o bază $\{e_1, e_2, e_3\}$ sunt $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Obţinem matricea lui f în baza canonică:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

iar matricea aceleiaşi forme în baza B' este

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 8 & 13 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Această ultimă matrice se poate obţine şi din formula $A' = S^t AS$, unde S este matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza B'.

Forma biliniară f nu este simetrică deoarece

$$f(y,x) = 2y^1x^1 + y^2x^1 + y^2x^2 + 3y^3x^3 \neq f(x,y).$$

La aceeaşi concluzie ajungem privind matricea A care ar fi trebuit să fie simetrică dacă f era simetrică.

Remarcăm faptul că dată fiind matricea A, forma f se obţine din

$$f(x,y) = X^t AY,$$

unde $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$.

b) Ca şi la punctul *a)* lăsăm ca temă verificarea faptului că f este formă biliniară. Matricea lui f în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

matrice simetrică, deci forma f este simetrică. Rezultă că ea defineşte o formă pătratică prin

$$h(x) = f(x,x) = (x^1)^2 + 4x^1x^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Matricea formei pătratice h este aceeaşi cu cea a formei sale polare, forma biliniară f din care provine, deci este tot A.

Exerciţiul 2: Fie formele pătratice din $\mathbf{R^3}$:

a) $h(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 4(x^3)^2 + 2x^1x^2 - 4x^1x^3$;

b) $h(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3$;

c) $h(x) = x^1x^2 + 2x^1x^3 + x^2x^3$;

d) $h(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + x^1x^2 + x^1x^3$;

e) $h(x) = -(x^2)^2 + (x^3)^2 + -x^1x^2 + 2x^1x^3 - 3x^2x^3$;

f) $h(x) = -2x^1x^2 + 3x^1x^3$;

unde $x = (x^1, x^2, x^3)$.

Scrieţi forma polară şi matricea în baza canonică pentru fiecare formă pătratică de mai sus. Reduceţi aceste forme pătratice la forma canonică folosind metoda Gauss.

Rezolvare: Forma polară a unei forme pătratice h se determină din formula

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(h(x + y) - h(x) - h(y)).$$

La punctul *a)* obţinem forma polară

$$f(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 - 4x^3y^3 + x^1y^2 + x^2y^1 - 2x^1y^3 - 2x^3y^1.$$

Matricea formei pătratice h este matricea formei biliniare f, deci calculăm $f(e_i, e_j)$, pentru e_i elemente;le bazei canonice, cu $i, j \in \{1, 2, 3\}$.Obţinem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Observatie 10.1.1 *Observăm că forma biliniară f se poate obţine din expresia lui h prin dedublare. De asemenea, matricea A de mai sus are pe diagonala principală coeficienţii pătratelor din h, iar elementul de pe orice poziţie (i, j), cu $i \neq j$ este jumătate din coeficientul termenului x^ix^j din expresia lui h. În cele ce urmează vom folosi aceste reguli pentru a scrie forma polară, respectiv matricea în baza canonică a unei forme pătratice.*

A determina forma canonică a unei forme pătratice înseamnă să găsim o bază în raport cu care expresia lui h să conţină doar pătrate. Metoda lui Gauss de determinare a formei canonice constă în completarea de pătrate perfecte după cum urmează: identificăm primul pătrat din expresia lui h; este $(x^1)^2$; subliniem toţi termenii care conţin x^1 şi completăm un pătrat perfect, restabilind desigur egalitatea; continuăm apoi cu următorul pătrat.

$$h(x) = \underline{(x^1)^2} + (x^2)^2 - 4(x^3)^2 + 2\underline{x^1x^2} - 4\underline{x^1x^3} =$$

$$= (x^1 + x^2 - 2x^3)^2 - (x^2)^2 - 4(x^3)^2 + 4x^2x^3 + (x^2)^2 - 4(x^3)^2 =$$
$$= (x^1 + x^2 - 2x^3)^2 - 8\underline{(x^3)^2} + 4\underline{x^2x^3} =$$

$$= (x^1 + x^2 - 2x^3)^2 - 8(x^3 - \frac{1}{4}x^2)^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2.$$

Facem schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 + x^2 - 2x^3 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 - \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

Această schimbare de componente este urmarea unei schimbări de bază, căci se ştie că dacă S este matricea schimbării de bază, între componentele vechi şi cele noi există relaţia $X = SX'$. Pentru a citi direct matricea S, prelucrăm sistemul anterior exprimând necunoscutele x^i în funcţie de x'^i, $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{cases} x^1 = x'^1 - \frac{1}{2}x'^2 + 2x'^3 \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = \frac{1}{4}x'^2 + x'^3 \end{cases} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Fiind vorba despre matricea de trecere de la baza canonică la altă bază, aceasta din urmă are vectorii de componente coloanele lui S. Am obţinut deci forma canonică

$$h(x') = (x'^1)^2 + \frac{1}{2}(x'^2)^2 - 8(x'^3)^2,$$

în raport cu baza $B' = \{(1, 0, 0), (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}), (2, 0, 1)\}$.

b) Forma polară a lui h o scriem prin dedublarea expresiei lui h, deci este:

$$f(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + 3x^3y^3 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + x^1y^3 + x^3y^1 + x^2y^3 + x^3y^2.$$

Matricea lui h în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Reducem la forma canonică folosind metoda Gauss:

$$h(x) = \underline{(x^1)^2} + (x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4\underline{x^1x^2} + 2\underline{x^1x^3} + 2x^2x^3 =$$

$$= (x^1 + 2x^2 + x^3)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 - 4x^2x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 2x^2x^3 =$$
$$= (x^1 + 2x^2 + x^3)^2 - 3\underline{(x^2)^2} + 2(x^3)^2 - 2\underline{x^2x^3} =$$

$$= (x^1 + 2x^2 + x^3)^2 - 3(x^2 + \frac{1}{3}x^3)^2 + \frac{7}{3}(x^3)^2.$$

Facem schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 + 2x^2 + x^3 \\ x'^2 = x^2 + \frac{1}{3}x^3 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = x'^1 - 2x'^2 - \frac{1}{3}x'^3 \\ x^2 = x'^2 - \frac{1}{3}x'^3 \\ x^3 = x'^3 \end{cases} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obţinem forma canonică

$$h(x') = (x'^1)^2 - 3(x'^2)^2 + \frac{7}{3}(x'^3)^2,$$

în raport cu baza $B' = \{(1,0,0), (-2,1,0), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\}$.

c) Forma polară este

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^1y^2 + \frac{1}{2}x^2y^1 + x^1y^3 + x^3y^1 + \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{1}{2}x^3y^2.$$

Matricea lui h în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Conform metodei Gauss, în cazul în care expresia lui h nu conţine nici un pătrat, se face următoarea schimbare de componente

$$\begin{cases} x^1 = \tilde{x}^1 - \tilde{x}^2 \\ x^2 = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 \\ x^3 = \tilde{x}^3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În baza formată din vectorii de componente coloanele lui S_1, expresia formei pătratice h este

$$h(\tilde{x}) = \underline{(\tilde{x}^1)^2} - (\tilde{x}^2)^2 + 3\underline{\tilde{x}^1\tilde{x}^3} - \tilde{x}^2\tilde{x}^3 =$$

$$= (\tilde{x}^1 + \frac{3}{2}\tilde{x}^3)^2 - \frac{9}{4}(\tilde{x}^3)^2 - \underline{(\tilde{x}^2)^2} - \underline{\tilde{x}^2\tilde{x}^3} =$$

$$= (\tilde{x}^1 + \frac{3}{2}\tilde{x}^3)^2 - (\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}x^3)^2 - 2(\tilde{x}^3)^2.$$

Facem acum schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'^1 = \tilde{x}^1 + \frac{3}{2}\tilde{x}^3 \\ x'^2 = \tilde{x}^2 + \frac{1}{2}x^3 \\ x^3 = \tilde{x}^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^1 = x'^1 - \frac{3}{2}x'^3 \\ \tilde{x}^2 = x'^2 - \frac{1}{2}x'^3 \\ \tilde{x}^3 = x^3 \end{cases}$$

Înlocuind în prima schimbare de componente găsim

$$\begin{cases} x^1 = x'^1 - x'^2 - x'^3 \\ x^2 = x'^1 + x'^2 - 2x'^3 \\ x^3 = x'^3 \end{cases} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obţinem forma canonică

$$h(x') = (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - 2(x'^3)^2,$$

în raport cu baza $B' = \{(1,1,0), (-1,1,0), (-1,-2,1)\}$.

Lăsă ca temă rezolvarea în mod analog a ultimelor trei puncte.

Exerciţiul 3: Să se reducă la forma canonică prin metodele Gauss, transformări ortogonale, Jacobi, următoarea forma pătratică

$$h(x) = 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3.$$

Rezolvare: Prin metoda Gauss avem:

$$h(x) = 2\underline{(x^1)^2} + (x^2)^2 - 4\underline{x^1x^2} - 4x^2x^3 =$$

$$= 2(x^1 - x^2)^2 - 2(x^2)^2 + (x^2)^2 - 4x^2x^3 =$$
$$= 2(x^1 - x^2)^2 - \underline{(x^2)^2} - 4\underline{x^2x^3} =$$

$$= 2(x^1 - x^2)^2 - (x^2 + 2x^3)^2 + 4(x^3)^2.$$

Facem schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 - x^2 \\ x'^2 = x^2 + 2x^3 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = x'^1 + x'^2 - 2x'^3 \\ x^2 = x'^2 - 2x'^3 \\ x^3 = x'^3 \end{cases} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obţinem forma canonică

$$h(x') = 2(x'^1)^2 - (x'^2)^2 + 4(x'^3)^2,$$

în raport cu baza $B' = \{(1,0,0), (1,1,0), (-2,-2,1)\}$.

Metoda transformărilor ortogonale are la bază observaţia faptului că matricea unei forme pătratice h în raport cu o bază are pe diagonala principală coeficienţii pătratelor din expresia lui h. Prin urmare este suficient să găsim forma diagonală a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

a formei pătratice date. Ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda I) = 0$ este $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$ şi are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii de mai sus sunt:

$$V_{(1)} = [(2, 1, -2)],$$
$$V_{(4)} = [(2, -2, 1)],$$
$$V_{(-2)} = [(1, 2, 2)].$$

Fiind vorba despre transformări ortogonale vom alege o bază ortonormată formată din generatori ai celor trei subspaţii de mai sus, în raport cu care matricea A admite forma diagonală

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Această bază este $B" = \{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$. Rezultă că în raport cu baza B'' forma pătratică h are forma canonică

$$h(x'') = (x''^1)^2 + 4(x''^2)^2 - 2(x''^3)^2.$$

Metoda Jacobi constă în calcularea următorilor determinanţi:

$$\Delta_1 = |2| = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8,$$

care, fiind nenuli, conduc la forma canonică

$$h(x''') = \frac{1}{2}(x'''^1)^2 - (x'''^2)^2 + \frac{1}{4}(x'''^3)^2.$$

Baza în raport cu care avem această formă este $B''' = \{e_1''', e_2''', e_3'''\}$, de forma

$$\begin{cases} e_1''' = s_1^1 e_1, \\ e_2''' = s_2^1 e_1 + s_2^2 e_2 \\ e_3''' = s_3^1 e_1 + s_3^2 e_2 + s_3^3 e_3, \end{cases}$$

care satisface condiţiile

$$\begin{array}{lll} f(e_1''', e_1) = 1, & f(e_2''', e_1) = 0, & f(e_2''', e_2) = 1, \\ f(e_3''', e_1) = 0, & f(e_3''', e_2) = 0, & f(e_3''', e_3) = 1, \end{array}$$

unde f este forma polară a lui h, iar $\{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonică. Avem

$$f(x, y) = 2x^1y^1 + x^2y^2 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2.$$

Condiţiile de mai sus conduc la $s_1^1 = \frac{1}{2}$, $s_2^1 = s_2^2 = -1$,$s_3^1 = s_3^2 = -\frac{1}{2}$, $s_3^3 = \frac{1}{4}$. Prin urmare forma canonică găsită este în raport cu baza $B''' = \{(\frac{1}{2}, 0, 0), (-1, -1, 0), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})\}$.

În concluzie, prin fiecare metodă se obţine câte o formă canonică a formei pătratice h. Evident aceste forme sunt diferite, ele constituind expresia lui h în baze diferite. Ceea ce este invariant în toate cele trei forme este numărul termenilor pozitivi şi numărul termenilor negativi, fapt afirmat de Teorema Sylvester.

Tema 1: Să se reducă la forma canonică prin cele trei metode următoarele forme pătratice din spaţiul euclidian $(\mathbf{R^3}, <,>)$::

a) $h(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$;

b) $h(x) = (x^1)^2 - 2(x^2)^2 - 2(x^3)^2 - 4x^1x^2 + 4x^1x^3 + 8x^2x^3$;

c) $h(x) = 2(x^1)^2 + 5(x^2)^2 + 5(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 4x^1x^3 - 8x^2x^3$;

Capitolul 11

Probleme rezolvate la Capitolul 5

11.1 Conice

Exerciţiul 1: Se dă conica

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0.$$

Se cer natura şi genul conicei, forma canonică şi reprezentarea grafică.

Rezolvare: Forma matricială a conicei este

$$X^t AX + 2BX + a_{33} = 0,$$

de unde avem $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (-3 \quad -1)$, $a_{33} = 9$. Invarianţii conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B^t \\ B & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\delta = det(A) = 0, \;\; I = trace(A) = 2.$$

Deoarece $\Delta \neq 0$, conica este nedegenerată (acesta este natura conicei). Genul conicei este dat de $\delta = 0$, care pentru conice nedegenerate înseamnă parabolă. Ecuaţia ei diferă de ecuaţia unei parabole aşa cum este cunoscută din liceu deoarece axele de simetrie ale sale sunt altele decât axele de coordonate.

Pentru a găsi forma canonică a conicei determinăm mai întâi valorile proprii ale matricei A. Ecuaţia caracteristică se scrie $\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$ şi se numeşte ecuaţia seculară. Aici ecuaţia seculară este

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

şi are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt:

$V_{(0)} = [(1, 1)]$, $\quad V_{(11)} = [(-1, 1)]$.

Alegem o bază ortonormată formată din reuniunea bazelor subspaţiilor proprii, deci $B' = \{e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\}$. În raport cu această bază forma pătratică $x^2 - 2xy + y^2$ are expresia $2y'^2$, unde legătura dintre noile coordonate şi cele vechi este dată de $X = SX'$,

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

fiind matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza B':

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

Înlociund x şi y de mai sus în ecuaţia conicei găsim că în raport cu baza B' ecuaţia conicei este:

$$2y'^2 - 4\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 9 = 0.$$

În continuare restrângem pătratele şi obţinem:

$$(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2\sqrt{2}(x' - \sqrt{2}).$$

Cu schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{2} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

găsim forma canonică a parabolei

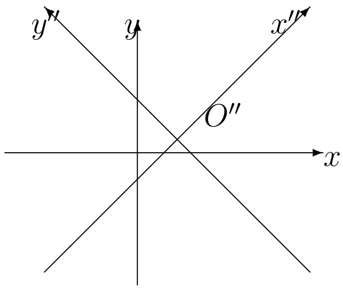
$$(y'')^2 = 2\sqrt{2}x''.$$

Reprezentarea grafică o obţinem interpretând din punct de vedere geometric demersul algebric de mai sus. Ecuaţia iniţială a conicei era dată în raport cu baza canonică, deci în reperul xOy.

Următoarea ecuaţie, cea în x', y', era în raport cu B', deci am făcut o schimbare de reper, originea fiind aceeaşi, dar axele având direcţiile e'_1, e'_2. Totuşi nici în acest reper forma nu este cea canonică, trecerea la coordonatele

x'', y'' semnificând din punct de vedere geometric o translaţie a ultimului reper $x'Oy'$ în acel punct O''care reprezintă originea noului reper, deci în care x'' şi y'' se anulează:

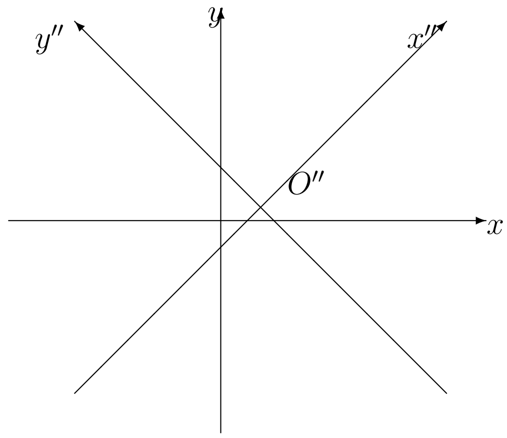
$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \sqrt{2} \\ y'' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow O''(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$



În reperul $x''O''y''$ conica este dată prin ecuaţia $(y'')^2 = 2\sqrt{2}x''$, deci o putem reprezenta. Pentru o reprezentare cât mai corectă găsim punctele de intersecţie ale conicei cu axele de coordonate Ox, Oy. Rezolvând sistemele

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \end{cases}$$

rezultă că parabola este tangentă axei Ox în pnctul de coordonate $(3, 0)$ şi nu intersectează axa Oy.



Exerciţiul 2: Aceeaşi problemă pentru conica

$$4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0.$$

Rezolvare: Avem $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = (2 \quad -7)$, $a_{33} = -7$. Invarianţii conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -7 \\ 2 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\delta = det(A) = -4, \ \ I = trace(A) = -3.$$

Deoarece $\Delta \neq 0$, conica este nedegenerată (acesta este natura conicei). Genul conicei este dat de $\delta < 0$, care pentru conice nedegenerate înseamnă hiperbolă. Ecuaţia ei diferă de ecuaţia unei hiperbole aşa cum eeste cunoscută din liceu deoarece axele de simetrie ale sale sunt altele decât axele de coordonate.

Metoda I pentru determinarea formei canonice şi reprezentare grafică

Pentru a găsi forma canonică a conicei determinăm mai întâi valorile proprii ale matricei A. Ecuaţia seculară este

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$

şi are rădăcinile $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 11$. Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt:

$V_{(-4)} = [(1, -2)], \quad V_{(1)} = [(2, 1)].$

Alegem o bază ortonormată formată din reuniunea bazelor subspaţiilor proprii, deci $B' = \{e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)\}$. În raport cu această bază forma pătratică $4xy - 3y^2$ are expresia $-4x'^2 + y'^2$, unde legătura dintre noile coordonate şi cele vechi este dată de $X = SX'$,

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

fiind matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza B':

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') \end{cases}$$

Înlociund x şi y de mai sus în ecuaţia conicei găsim că în raport cu baza B' ecuaţia conicei este:

$$-4x'^2 + y'^2 + \frac{32}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 7 = 0.$$

În continuare restrângem pătratele şi obţinem:

$$-4(x' - \frac{4}{\sqrt{5}})^2 + (y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 + 4 = 0.$$

Cu schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

găsim forma canonică a hiperbolei

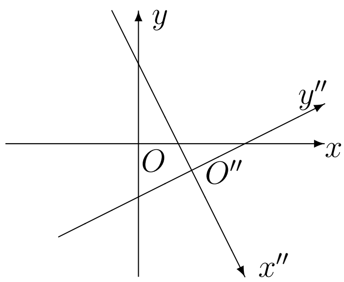
$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{4} = 1.$$

Ca şi la exerciţiul anterior, reprezentarea grafică o obţinem interpretând din punct de vedere geometric demersul algebric de mai sus. Ecuaţia iniţială a conicei era dată în raport cu baza canonică, deci în reperul xOy.

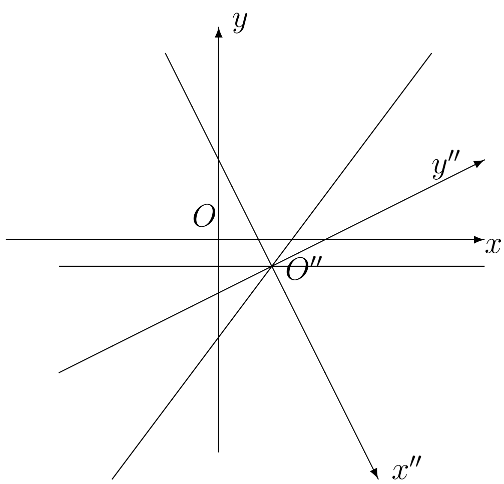
Următoarea ecuaţie, cea în x', y', era în raport cu B', deci am făcut o schimbare de reper, originea fiind aceeaşi, dar axele având direcţiile e_1', e_2'.

Trecerea la coordonatele x'', y'' semnifică din punct de vedere geometric o translaţie a ultimului reper $x'Oy'$ în acel punct O''care reprezintă originea noului reper, deci în care x'' şi y'' se anulează:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y'' = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow O''(2, -1)$$



În reperul $x''O''y''$ conica este dată prin ecuaţia $(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{4} = 1$, deci o putem reprezenta. Vârfurile hiperbolei au coordonatele $x'' = 1, y'' = 0$, respectiv $x'' = -1, y'' = 0$, iar asimptotele au ecuaţiile $y'' = 2x''$, respectiv $y'' = -2x''$. Hiperbola intersectează axa Ox în punctul de abscisă $\frac{7}{2}$, iar axa Oy în punctele de ordonate $\frac{-14-\sqrt{112}}{6}$, $\frac{-14+\sqrt{112}}{6}$. Reprezentarea hiperbolei este cea din figură.



Înlocuind x'', y'' în funcţie de x, y în ecuaţiile asimptotelor, găsim ecuaţiile acestora în reperul iniţial, $y = -1$, respectiv $4x - 3y + 5 = 0$. Aceleaşi ecuaţii le puteam găsi direct, aplicâd teoria din curs. Mai exact, asimptotele sunt drepte care trec prin centrul hiperbolei şi ale căror pante sunt soluţiile ecuaţiei:

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0,$$

unde coeficienţii sunt elementele matricei A. Avem $-3m^2 + 4m = 0$, cu soluţiile $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{4}{3}$. Centrul conicei are coordonatele soluţiile sistemului

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2, -1),$$

unde f_x, f_y sunt semiderivatele ecuaţiei conicei în raport cu x, respectiv y. Obţinem ecuaţiile asimptotelor $y + 1 = 0$, $y + 1 = \frac{4}{3}(x - 2)$, exact cele găsite anterior. Ecuaţiile axelor de simetrie ale conicei se pot determina de asemenea direct, înlocuind x'', y'' în functie de x, y în ecuaţiile $x'' = 0$, respectiv $y'' = 0$, sau scriindu-le ca acele drepte care trec prin centrul conicei şi care au pantele soluţiile ecuaţiei

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0,$$

deci $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -2$. Ecuaţiile axelor de coordonate sunt:

$$x - 2y - 4 = 0, \quad 2x + y - 3 = 0.$$

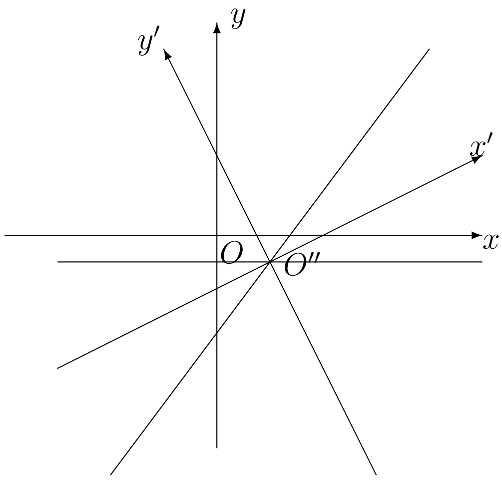
Metoda a II-a pentru determinarea formei canonice şi reprezentarea grafică

Această metodă nu implică schimbări de coordonate. Se stabilesc natura şi genul conicei, se detremină soluţiile ecuaţiei seculare, $\lambda_{1,2} = -4, 1$. Se alege $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -4$ pentru a respecta regula $\lambda_1 - \lambda_2$ are acelaşi semn cu a_{12}, aici pozitiv. Această alegere asigură faptul că reperul final se obţine din cel iniţial printr-o rotaţie de unghi $< \frac{\pi}{2}$.

Forma canonică se scrie direct, din formula $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, formulă valabilă pentru elipse şi hiperbole. Obţinem forma canonică

$$(x')^2 - 4(y')^2 + \frac{-16}{-4} = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x')^2}{4} + (y')^2 = 1.$$

Se determină ecuaţiile axelor de simetrie şi ale asimptotelor ca mai sus. Pentru sensurile pozitive ale axelor ţinem cont că reperul final se obţine din cel iniţial printr-o rotaţie de unghi $< \frac{\pi}{2}$, deci avem figura de mai jos.



Remarcăm faptul că prin cele două metode am obţinut forme canonice diferite deoarece ele sunt raportate la repere diferite. Obiectul geometric, hiperbola, este însă aceeaşi.

Exerciţiul 3: Se dă conica

$$2x^2 - 6xy + 10y^2 - 8x + 12y + 2 = 0.$$

Se cer natura şi genul conicei, forma canonică şi reprezentarea grafică.

Rezolvare: Pentru conica dată avem $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, $B = (-4 \quad 6)$, $a_{33} = 2$. Invarianţii conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 10 & 6 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -66,$$

$$\delta = det(A) = 11, \quad I = trace(A) = 12.$$

Deoarece $\Delta \neq 0$, conica este nedegenerată. Genul conicei este dat de $\delta > 0$ şi de $\Delta \cdot I > 0$, care pentru conice nedegenerate înseamnă elipsă reală.

Ecuaţia seculară este

$$\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0,$$

şi are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$.

Metoda I pentru determinarea formei canonice şi reprezentare grafică

Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt:

$V_{(1)} = [(3,1)], \quad V_{(11)} = [(-1,3)]$.

Alegem o bază ortonormată formată din reuniunea bazelor subspaţiilor proprii, deci $B' = \{e'_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)\}$. În raport cu această bază forma pătratică $2x^2 - 6xy + 10y^2$ are expresia $x'^2 + 11y'^2$, unde legătura dintre noile coordonate şi cele vechi este dată de $X = SX'$,

$$S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fiind matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza B':

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \end{cases}$$

Înlociund x şi y de mai sus în ecuaţia conicei găsim că în raport cu baza B' ecuaţia conicei este:

$$x'^2 + 11y'^2 - \frac{12}{\sqrt{10}}x' + \frac{44}{\sqrt{10}}y' + 2 = 0.$$

În continuare restrângem pătratele şi obţinem:

$$(x' - \frac{6}{\sqrt{10}})^2 + 11(y' + \frac{2}{\sqrt{10}})^2 - 6 = 0.$$

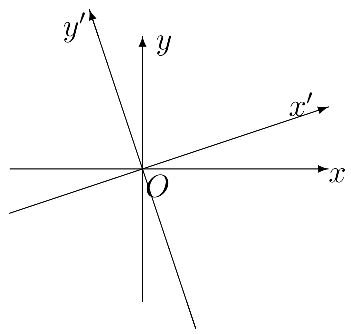
Cu schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{6}{\sqrt{10}} \\ y'' = y' + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

găsim forma canonică a elipsei

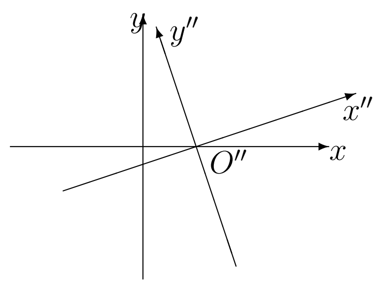
$$(x'')^2 + 11(y'')^2 = 6.$$

Reprezentarea grafică o obţinem ca şi la exerciţiile anterioare interpretând din punct de vedere geometric demersul algebric de mai sus. Ecuaţia iniţială a conicei era dată în raport cu baza canonică, deci în reperul xOy. Următoarea ecuaţie, cea —în x', y', era în raport cu B', deci am făcut o schimbare de reper, originea fiind acceaşi, dar axele având direcţiile e'_1, e'_2.

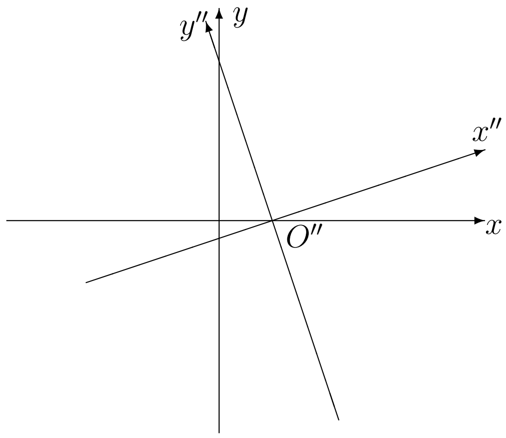


Trecerea la coordonatele x'', y'' semnifică din punct de vedere geometric o translaţie a ultimului reper $x'Oy'$ în acel punct O''care reprezintă originea noului reper, deci în care x'' şi y'' se anulează:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{6}{\sqrt{10}} \\ y'' = -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O''(2, 0)$$



Elipsa intersectează axele iniţiale în punctele de coordonate $(2+\sqrt{3}, 0)$, $(2-\sqrt{3}, 0)$, $(0, -1)$, $(0, -\frac{1}{5})$. În reperul $x''O''y''$ conica este dată prin ecuaţia $(x'')^2 + 11(y'')^2 = 6$, deci o putem reprezenta. Semiaxele au lungimile $\sqrt{6}$, respectiv $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$, aşadar reprezentarea ei este cea din figură.



Metoda a II-a pentru determinarea formei canonice şi reprezentare grafică Am stabilit natura şi genul, s-au determinat valorile proprii $\lambda_{1,2} = 1, 11$. Alegem $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 11$ ca să respectăm $sgn(\lambda_1 - \lambda_2) = sgn(a_{12}$. Forma canonică a elipsei este $(x')^2 + 11(y')^2 + \frac{-66}{11} = 0$, exact cea găsită şi prin prima metodă. Determinăm centul conicei:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 4 = 0 \\ -3x + 10y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0)$$

Pantele axelor de simetrie sunt soluţiile ecuaţiei

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0 \Leftrightarrow -3m^2 - 8m + 3 = 0,$$

deci $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = -6$. Ecuaţiile axelor sunt: $y = \frac{2}{3}(x - 2)$, respectiv $y = -6(x - 2)$. Sensul pozitiv al fiecărei axe se determină stiind că reperul final este obţinut printr-o rotaţie de unghi $< \frac{\pi}{2}$ a celui iniţial. Obţinem exact figura de mai sus, de la metoda I.

Exerciţiul 4: Aceleaşi cerinţe pentru conica

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$$

Rezolvare: Pentru conica dată avem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = (-3 \quad -4)$,

$a_{33} = 8$. Invarianţii conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta = det(A) = 0, \;\; I = trace(A) = 5.$$

Deoarece $\Delta = 0$, conica este degenerată. Genul conicei este dat de $\delta = 0$ şi care pentru conice degenerate înseamnă două drepte paralele sau confundate.

Ecuaţia seculară este

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0,$$

şi are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt:

$V_{(0)} = [(-2, 1)], \quad V_{(5)} = [(1, 2)]$.

Alegem o bază ortonormată formată din reuniunea bazelor subspaţiilor proprii, deci $B' = \{e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\}$. În raport cu această bază forma pătratică $x^2 + 4xy + 4y^2$ are expresia $5y'^2$, unde legătura dintre noile coordonate şi cele vechi este dată de $X = SX'$,

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

fiind matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza B':

$$\begin{cases} 0x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$

Înlociund x şi y de mai sus în ecuaţia conicei găsim că în raport cu baza B' ecuaţia conicei este:

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}y' + 8 = 0.$$

În continuare restrângem pătratele şi obţinem:

$$5(y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 - 1 = 0.$$

Cu schimbarea de componente

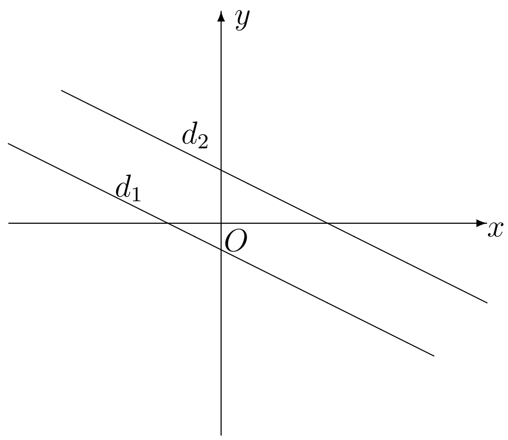
$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

găsim forma canonică a conicei

$$5(y'')^2 = 1 \Leftrightarrow (d_1) : y'' = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (d_2) : y'' = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Este vorba deci de două drepte paralele. Reprezentarea grafică o putem obţine ca şi la exerciţiile anterioare interpretând din punct de vedere geometric demersul algebric de mai sus, sau, mai simplu, putem găsi ecuaţiile celor două drepte în reperul xOy şi le reprezentăm direct . Înlociund y'' în funcţie de x, y găsim:

$$(d_1) : x + 2y - 4 = 0, \quad (d_2) : x - +2y - 2 = 0.$$



Reprezentarea grafică este cea de mai sus.

Tema 1: Să se determine natura, genul şi forma canonică pentru următoarele conice:

a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0;$

b) $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0;$

c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0;$

d) $4x^2 + 4xy + y^2 - 13x - 4y + 8 = 0;$

e) $xy - y^2 + y = 0.$

Reprezentaţi grafic fiecare conică.

Tabel *a)*.

α	-3 -1 2
Δ	- - - - - - - - - - - - - 0 + +
δ	- - - - - - - - 0 + + 0 - - - -
I	- - - 0 + + + + + + + + +

Exerciţiul 5: Studiaţi natura şi genul conicelor din familia:
a) $x^2 - 2\alpha xy + (\alpha + 2)y^2 - 2x - 2\alpha y - 3 = 0$;
b) $x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$;
c) $x^2 - 2xy + (1 - \alpha)y^2 + 2\alpha x = 0$;
d) $x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 2\alpha x + 2y + 2 = 0$,
unde α este un parametru real. Precizaţi dacă există cercuri sau hiperbole echilatere în fiecare din aceste familii. Găsiţi locul geometric al centrelor conicelor din fiecare familie.

Rezolvare: *a)* Forma matricială a conicei este

$$X^t AX + 2BX + a_{33} = 0,$$

de unde avem $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha + 2 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \quad -\alpha)$, $a_{33} = -3$. Invarianţii conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B^t \\ B & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & \alpha + 2 & -\alpha \\ -1 & -\alpha & -3 \end{vmatrix} = 4\alpha - 8,$$

$$\delta = det(A) = -\alpha^2 + \alpha + 2, \;\; I = trace(A) = \alpha + 3.$$

Natura conicei este: nedegenerată, când $\Delta \neq 0$, sau degenerată, pentru $\Delta = 0$. Genul este dat de tabelul din curs, în funcţie de semnele invarianţilor. Avem următoarea discuţie în funcţie de α:

Dacă $\alpha \in (-\infty, -3)$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta < 0$, deci este o hiperbolă.

Dacă $\alpha = -3$, atunci rezultatul este similar cu cel anterior; analog pentru $\alpha \in (-3, -1)$.

Dacă $\alpha = -1$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta = 0$, deci este o parabolă.

Dacă $\alpha \in (-1, 2)$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta > 0$ şi $\Delta \cdot I < 0$, deci este o elipsă reală.

Dacă $\alpha = 2$, atunci $\Delta = 0$, deci conica este degenerată; $\delta = 0$, deci este formtă din două drepte paralele sau confundate.

Dacă $\alpha \in (2, \infty)$, atunci $\Delta > 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta < 0$, deci este o hiperbolă.

Căutăm cercuri în această familie de conice. Acestea ar trebui sa fie elipse cu semiaxele egale, deci în formua canonică $\frac{x^1}{\lambda_1} + \frac{x^2}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta}$ să avem $\lambda_1 = \lambda_2$. Cum λ_1 şi λ_2 sunt soluţiile ecuaţiei seculare $\lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = 0$, rezultă că aceasta trebuie sa aibă discriminantul nul, de unde avem ecuaţia

$$5\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$$

care nu are soluţii reale. Rezultă că nu există cercuri în această familie.

Condiţia necesară pentru a exista hiperbole echilatere este ca $\lambda_1 = -\lambda_2$, deci $I = 0$. Aici găsim $\alpha = -3$, aşadar există o hiperbolă echilateră,

$$x^2 + 6xy - y^2 - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Pentru a găsi locul geometric al centrelor conicelor din familia dată eliminăm parametrul α din sistemul

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \alpha y - 1 = 0 \\ -\alpha x + (\alpha + 2)y - \alpha = 0 \end{cases}$$

Înmulţind a doua ecuaţie cu y şi înlocuind din prima ecuaţie $\alpha y = x - 1$, obţinem locul geometric căutat ca fiind conica

$$-x^2 + xy + 2y^2 - y + 1 = 0.$$

b) Pentru familia de conice de la punctul *b)* avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \quad -2)$, $a_{33} = 4$. Invarianţii conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B^t \\ B & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -(2\alpha - 1)^2,$$

$$\delta = det(A) = 1 - \alpha^2, \ \ I = trace(A) = 2.$$

Interpretăm tabelul *b)* şi obţinem:

Tabel *b)*.

α	-1 $\quad\frac{1}{2}\quad$ 1
Δ	- - - - - - - - 0 - - - - - -
δ	- - - - 0 + + + + 0 - - - -
I	+ + + + + + + + + + +

Dacă $\alpha \in (-\infty, -1)$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta < 0$, deci este o hiperbolă.

Dacă $\alpha = -1$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta = 0$, deci este o parabolă.

Dacă $\alpha \in (-1, \frac{1}{2})$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta > 0$ şi $\Delta \cdot I < 0$, deci este o elipsă reală.

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, atunci $\Delta = 0$, deci conica este degenerată; $\delta > 0$, deci este formată din un punct dublu.

Dacă $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta > 0$, şi $\Delta \cdot I < 0$, deci este o elipsă reală.

Dacă $\alpha \in (1, \infty)$, atunci $\Delta < 0$, deci conica este nedegenerată; $\delta < 0$, deci este o hiperbolă.

Punând condiţiile necesare ca la punctul anterior, găsim că în familia de conice există un cerc, corespunzător lui $\alpha = 0$ şi nu există hiperbole echilatere (deoarece $I = 2$, deci nenul). Pentru a găsi locul geometric al conicelor din familia dată eliminăm parametrul α din sistemul

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y - 1 = 0 \\ \alpha x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Înmulţind a doua ecuaţie cu y şi înlocuind din prima ecuaţie $\alpha y = 1 - x$, obţinem locul geometric căutat ca fiind conica

$$-x^2 + y^2 + x - 2y = 0,$$

care este o hiperbolă echilateră, ecuaţia de mai sus scriindu-se

$$-(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{3}{4}.$$

Lăsăm temă ultimele două puncte ale exerciţiului.

Exerciţiul 6: Se dă conica

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0.$$

Se cere:

a) Să se determine mijlocul coardei determinată de conică pe dreapta $(d) : x - y + 1 = 0$.

b) Scrieţi ecuaţia polarei punctului $M(-1, 0)$ faţă de conica dată.

c) Polul dreptei $(d') : 2x + y + 2 = 0$ în raport cu conica.

d) Ecuaţiile tangentelor la conică în punctele de intersecţie cu axa Ox.

e) Ecuaţiile tangentelor la conică paralele cu dreapta d de la punctul *a)*.

Rezolvare: În rezolvarea exerciţiului intervin expresiile f_x, f_y şi f_0, pe care le scriem folosind invariantul Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -16 \\ -2 & -16 & -6 \end{vmatrix},$$

astfel:

$$f_x = 6x - 2y - 2, \quad f_y = -2x + 9y - 16, \quad f_0 = -2x - 16y - 6.$$

a) Se şie că diametrul conjugat unei direcţii este locul geometric al mijloacelor coardelor determinate de conică pe fasciculul de drepte care au acea direcţie. Vom scrie deci diametrul cunjugat direcţiei dreptei d, punctul cerut fiind intersecţia acestui diametru cu d. Panta dreptei d este $m = 1$, iar formula diametrului conjugat este

$$f_x + mf_y = 0 \Leftrightarrow f_x + f_y = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 18 = 0.$$

Coordonatele punctului cerut sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + 7y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 2).$$

Problema se putea rezolva şi direct, găsind punctele de intersecţie ale dreptei cu conica şi apoi mijlocul segmentului determinat de aceste puncte (temă).

b) Polara unui punct M faţă de conică este dată de formula

$$f_x(M)x + f_y(M)y + f_0(M) = 0,$$

unde coeficienţii $f_x(M)$, $f_y(M)$ şi $f_0(M)$ sunt valorile expresiilor f_x,f_y, respectiv f_0 în coordonatele punctului M. Obţinem ecuaţia polarei:

$$8x + 14y + 4 = 0.$$

c) Polul dreptei d' în raport cu conica este acel punct $M_0(x_0, y_0)$ a cărei polară faţă de conică este chiar dreapta d'. Polara punctului M_0 este

$$f_x(M_0)x + f_y(M_0)y + f_0(M_0) = 0,$$

care coincide cu d' dacă şi numai dacă are loc

$$\frac{f_x(M_0)}{2} = \frac{f_y(M_0)}{1} = \frac{f_0(M_0)}{2}.$$

Găsim polul $B(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

d) Punctele de intersecţie a conicei cu axa Ox sunt $M_1(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, 0)$ şi $M_2(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, 0)$. Ecuaţia tangentei în M_1 la conică este

$$f_x(M_1)x + f_y(M_1)y + f_0(M_1) = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{10}x - (50+2\sqrt{10})y - 20 - 2\sqrt{10} = 0.$$

Ecuaţia tangentei în M_2 la conică este

$$f_x(M_2)x + f_y(M_2)y + f_0(M_2) = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{10}x + (50-2\sqrt{10})y + 20 - 2\sqrt{10} = 0.$$

e) Tangentele la conică paralele cu $(d) : x - y + 1 = 0$ sunt acele drepte din fasciculul de drepte paralel cu d care au un singur punct comun cu conica. Ecuaţia fasciculului de drepte paralele cu d este $x - y = \alpha$. Sistemul

$$\begin{cases} x = y + \alpha \\ 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0 \end{cases}$$

conduce la ecuaţia

$$11y^2 + 4(2\alpha - 9)y + 6\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0,$$

pentru care impunem soluţie unică, deci $\Delta = 0$. Rezultă ecuaţia

$$5\alpha^2 + 10\alpha - 39 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{55}}{5}.$$

Tangentele cerute sunt:

$$(t_1) : x - y = -1 + \frac{2\sqrt{55}}{5}, \quad (t_2) : x - y = -1 - \frac{2\sqrt{55}}{5}.$$

Tema 2: Se consideră conica $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$, dreapta $(d) : x - y + 2 = 0$ şi punctele $A(0, 2)$, $B(-1, 2)$. Se cere:

a) Natura şi genul conicei;

b) Centrul, axele şi asimptotele;

c) Polara punctului B în raport cu conica;

d) Tangenta în A la conică;

e) Tangentele la conică paralele cu d;

f) Polul dreptei d în raport cu conica.

Tema 3: Se consideră conica $x^2 - y^2 - 3x + 2y + 2 = 0$ şi punctul $A(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$. Se cer ecuaţiile tangentelor duse din A la conică.

Încheiem capitolul cu câteva aplicaţii la conice prin condiţii iniţiale.

Exerciţiul 7: Se dau punctele $A(3,0)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$, $D(0,2)$. Se cere familia de conice circumscrise patrulaterului $ABCD$.

Rezolvare: Ecuaţia fasciculului este

$$\alpha(AB)(CD) + \beta(AD)(BC) = 0,$$

unde parametrii reali α şi β nu sunt ambii nuli. Presupunem $\alpha \neq 0$ şi ecuaţia fasciculului are forma

$$(AB)(CD) + \lambda(AD)(BC) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Prin presupunerea făcută pierdem din fascicul conica degenetată $(AD)(BC) = 0$, care nu se obţine din ecuaţia fasciculului pentru nici o valoare a lui λ. Ecuaţiile dreptelor sunt:

$$\begin{array}{ll} (AB): x - y - 3 = 0, & (CD): x - 2y + 4 = 0, \\ (AD): 2x + 3y - 6 = 0, & (BC): x + y - 5 = 0. \end{array}$$

Ecuaţia fasciculului de conice circumscris patrulaterului este

$$(1+2\lambda)x^2 + (5\lambda - 3)xy + (3\lambda + 2)y^2 + (1 - 16\lambda)x + (2 - 21\lambda)y + 30\lambda - 12 = 0.$$

Exerciţiul 8: Scrieţi ecuaţia fasciculului de conice tangente axelor de coordonate în $A(1,0)$ şi $B(0,2)$, punând în evidenţă parabolele. Găsiţi conica din fascicul care are centrul $C(1,2)$.

Rezolvare: Fasciculul de conice bitangent axelor în A şi B este

$$\alpha(AB)^2 + \beta(Ox)(Oy) = 0,$$

cu α, β reali nu ambii nuli. Semnalând absenţa din următoarea ecuaţia a conicei degenerate formată din reuniunea axelor, avem ecuaţia fasciculului

$$(AB)^2 + \lambda xy = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + (\lambda - 4)xy + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Parabolele din fascicul se determină din condiţiile $\Delta \neq 0, \delta = 0$ impuse invarianţilor conicei. Din $\delta = 0$ rezultă $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 8$, ambele verificând şi condiţia de nedegenerare.

Pentru a găsi conica cu centrul $C(1, 2)$ impunem ca perechea $(1, 2)$ să fie soluţia sistemului

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\lambda-4}{2}y - 4 = 0 \\ \frac{\lambda-4}{2}x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

de unde obţinem $\lambda = 4$. Conica cerută este deci elipsa $4x^2+y^2-8x-4y+4 = 0$.

Exertciţiul 9: Se cere conica tangentă în $A(0, 2)$ la Oy, care trece prin $B(\frac{5}{2}, 0)$ şi are centrul $C(1, 1)$.

Rezolvare Fie Γ conica cerută şi $(t) : y = m(x-\frac{5}{2})$, $m \in \mathbf{R}$, tangenta în B la Γ Atunci Γ este bitangentă la Oy şi t în A, respectiv B. Rezultă că Γ face parte din fasciculul bitangent la Oy şi t în A, respectiv B. Ecuaţia acestui fascicul este

$$\lambda(AB)^2+(Oy)(t) = 0 \Leftrightarrow (\frac{4}{25}\lambda+m)x^2+(\frac{\lambda}{5}-1)xy+\frac{\lambda}{4}y^2-(\frac{4}{5}\lambda+\frac{5}{2}m)x-\frac{\lambda}{2}y+\lambda = 0,$$

cu λ, m parametri reali. Punând condiţia ca $(1, 1)$ să fie soluţia sistemului $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, obţinem $\lambda = 5$ şi $m = 8$.

Capitolul 12

Probleme rezolvate la Capitolul 6

12.1 Sfera

Exerciţiul 1: Să se scrie ecuaţia sferei cu centrul $C(1, -2, 1)$ tangentă planului $(P) : 2x + y + 2z - 5 = 0$. Determinaţi un cerc mare al sferei situat într-un plan perpendicular pe dreapta $(d) : x = y = -z$.

Rezolvare: Raza sferei este egală cu distanţa de la centrul C la planul P, deci

$$r = \frac{|2 - 2 + 2 - 5|}{3} = 1.$$

Ecuaţia sferei este

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

Cercul cerut fiind un cerc mare, centrul său coincide cu centrul sferei, deci este situat într-un plan care trece prin C şi este perpendicular pe d. Ecuaţia acestui plan este $(\pi) : (x - 1) + (y + 2) - (z - 1) = 0$. Ecuaţia cercului este:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Exerciţiul 2: *a)* Să se determine centrul şi raza cercului

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

b) Determinaţi sfera care conţine cercul de la punctul anterior şi punctul $M(1,0,2)$.

Rezolvare: În primul rând ne vom asigura că cercul din enunţ există, adică planul $(P): 2x+y-2z-2=0$ intersectează sfera $(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-5=0$. Condiţia necesară şi suficientă este ca distanţa de la centrul sferei la planul P să fie mai mică decât raza sferei. Pentru aceasta determinăm mai întâi centrul şi raza sferei, completând pătarte perfecte după cum urmează:

$$(S): (x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16.$$

Rezultă că centrul sferei S este $C(3,-1,1)$, iar raza este $R=4$. Distanţa de la C la planul P fiind $d=\frac{1}{3}<R$, cercul exisă. Mai mult, raza sa se calculează din teorema lui Pitagora

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{\sqrt{143}}{3}$$

Centrul cercului se află la intersecţia planului P cu dreapta care trece prin centrul sferei, perpendiculară pe planul P. Ecuaţia acestei drepte este

$$(d): \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2},$$

iar coordonatele centrului cercului sunt

$$\begin{cases} x=2\lambda+3 \\ y=\lambda-1 \\ z=-2\lambda+1 \\ 2x+y-2z-2=0 \end{cases} \Rightarrow C'(\frac{25}{9},-\frac{10}{9},\frac{11}{9}).$$

b) Sfera cerută face parte din fasciculul de sfere prin cercul C, ecuaţia acestui fascicul fiind

$$(S_\lambda): S+\lambda P=0 \Leftrightarrow (S_\lambda): x^2+y^2+z^2+2(\lambda-3)x+(2+\lambda)y-2(\lambda+1)z-2\lambda-5=0.$$

Punând condiţia $M\in S_\lambda$, obţinem $\lambda=-\frac{5}{2}$.

Exerciţiul 3: Scrieţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC, unde $A(1,0,2)$, $B(0,1,0)$, $C(1,-1,0)$.

Rezolvare: Cercul cerut se află la intersecţia planului (ABC) cu orice sferă care trece prin punctele A, B, C, de exemplu sfera circumscrisă tetraedrului $ABCO$. Ecuaţia acestei sfere este

$$(S):\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-3x-y-2z=0.$$

Ecuaţia planului (ABC) este

$$(ABC):\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (ABC): 4x+2y-z-2=0.$$

Ecuaţia cercului circumcsris triunghiului ABC este

$$(C):\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x-y-2z=0 \\ 4x+2y-z-2=0 \end{cases}$$

Exerciţiul 4: Să se afle raza şi centrul cercului de intersecţie al sferelor

$$(S_1): x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-12=0$$
$$(S_2): (x-3)^2+y^2+z^2=9$$

Rezolvare: Cercul de inetrsecţie al celor două sfere este situat în planul radical al acestora:

$$(\pi): S_1-S_2=0 \Leftrightarrow (\pi): 2x+2y-2z-3=0.$$

În continuare rezolvarea este analoagă celei de exerciţiul 2.

Tema1: Se dau punctul $A(2,4,-2)$, dreapta $(d): \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$, sfera S de rază $R=7$ şi centru C, unde C este simetricul punctului A faţă de d. Se mai dă şi planul P care trece prin A perpendicular pe dreapta AC. Să se determine centrul şi raza cercului Γ de inersecţie a sferei S cu planul$P$. Determinaţi ecuaţia sferei care trece perin cercul Γ şi prin punctul $M(7,5,-5)$. Scrieţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului ACM.

12.2 Cuadrice pe formă generală

Exerciţiul 1: Folosind metoda transformărilor ortogonale reduceţi la forma canonică următoarea cuadrică. Precizaţi ce tip de cuadrică este.

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0.$$

Rezolvare: Matricea formei pătratice $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz$ din ecuaţia cuadricei este $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale matricei A. Ecuaţia caracteristică este $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0$ şi are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ şi $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt:

$$V_{(0)} = [(1, -2, -2)], \quad V_{(3)} = [(-2, -2, 1)], \quad V_{(6)} = [(-2, 1, -2)].$$

Alegem o bază ortonormată formată din reuniunea bazelor subspaţiilor proprii, deci $B' = \{e'_1 = \frac{1}{3}(1, -2, -2), e_2 = \frac{1}{3}(-2, -2, 1), e'_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, -2)\}$. În raport cu această bază forma pătratică $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz$ are expresia $3y'^2 + 6z'^2$, unde legătura dintre noile coordonate şi cele vechi este dată de $X = SX'$,

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

fiind matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza B':

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' - 2y' - 2z') \\ y = \frac{1}{3}(-2x' - 2y' + z') \\ z = \frac{1}{3}(-2x' + y' - 2z') \end{cases}$$

Înlocuind x, y şi z de mai sus în ecuaţia cuadricei găsim ecuaţia sa în raport cu baza B':

$$3y'^2 + 6z'^2 - 6x' - 4y' - 8z' + 2 = 0.$$

În continuare restrângem pătratele şi obţinem:

$$(y' - \frac{2}{3})^2 + 2(z' - \frac{2}{3})^2 = 2(x' + \frac{1}{3}).$$

Cu schimbarea de componente

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{3} \\ y'' = y' - \frac{2}{3} \\ z'' = z' - \frac{2}{3} \end{cases}$$

găsim forma canonică a cuadricei

$$(y'')^2 + 2(z'')^2 = 2x'',$$

deci este un paraboloid eliptic.

Tema 1: Acelaşi enunţ pentru următoarele cuadrice:

a) $36x^2 + y^2 + 4z^2 + 72x + 6y - 40z + 109 = 0;$

b) $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0;$

c) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0;$

d) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2x + y - z - 1 = 0.$

Exerciţiul 2: Să se determine unghiul generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$ care trec prin punctul $A(6, -2, 2)$.

Rezolvare: Ecuaţia hiperboloidului cu o pânză o prelucrăm astfel:

$$(\frac{x}{3} - z)(\frac{x}{3} + z) = (1 - \frac{y}{2})(1 + \frac{y}{2}).$$

Putem obţine ecuaţia hiperboloidului dacă înmulţim ecuaţiile

$$(d_\lambda) : \begin{cases} \frac{x}{3} - z = \lambda(1 - \frac{y}{2}) \\ \frac{x}{3} + z = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{y}{2}) \end{cases} \textit{ sau } \quad (d'_\mu) : \begin{cases} \frac{x}{3} - z = \mu(1 + \frac{y}{2}) \\ \frac{x}{3} + z = \frac{1}{\mu}(1 - \frac{y}{2}) \end{cases}$$

Ecuaţiile de mai sus sunt ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului., parametrii λ şi μ fiind reali.

Din condiţia $A \in d_\lambda$ determinăm parametrul $\lambda = 0$. Din condiţia $A \in d_\mu$ determinăm parametrul $\mu = \frac{!}{2}$. Generatoarele rectilinii care trec prin punctul A sunt:

$$(d) : \begin{cases} \frac{x}{3} - z = 0 \\ 1 + \frac{y}{2} = 0 \end{cases} \qquad (d') : \begin{cases} \frac{x}{3} - z = \frac{1}{2}(1 + \frac{y}{2}) \\ \frac{x}{3} + z = 2(1 - \frac{y}{2}) \end{cases}$$

Dreptele de mai sus fiind date ca intersecţii de plane, direcţiile lor se determină prin produsul vectorial al normalelor planelor:

$$\vec{v}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(3\vec{i} + \vec{k}). \quad \vec{v}_{d'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}(21\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}).$$

Având cele două direcţii, unghiul dintre generatoare se calculează cu formula $cos\angle(d, d') = \frac{\vec{v}_d \cdot \vec{v}_{d'}}{\|\vec{v}_d\| \|\vec{v}_{d'}\|}$.

Exerciţiul 3: Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z^2$, care sunt paralele cu planul $(P) : 2x - y - 2z = 0$.

Rezlovare: Ecuaţia paraboloidului hiperbolic $x^2 - 4y^2 = 16z$ o putem scrie şi astfel: $(x - 2y)(x + 2y) = 16z$, ecuaţie care se poate obţine din înmulţirea ecuaţlor

$$(d_\lambda) : \begin{cases} x - 2y = \lambda z \\ x + 2y = \frac{16}{\lambda} \end{cases} \; sau \quad (d'_\mu) : \begin{cases} x - 2y = \mu \\ x + 2y = \frac{16}{\mu} z \end{cases}$$

Ecuaţiile de mai sus sunt ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului, parametrii λ şi μ fiind reali, λ nenul. Direcţiile dreptelor din cele două familii sunt

$$\vec{v}_\lambda = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -\lambda \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda\vec{i} - \lambda\vec{j} + 4\vec{k}. \quad \vec{v'}_\mu = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{16}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{32}{\mu}\vec{i} + \frac{16}{\mu}\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Din condiţia $d_\lambda \parallel P$ rezultă $v_\lambda \perp \vec{N}_P$, de unde $\lambda = 4$. Din $\vec{v'}_\mu \perp \vec{N}_P$ rezultă $\mu = 8$.

Tema 2: Să se determine generatoarele cuadricei $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$, paralele cu planul $6x + 3y - 2z + 6 = 0$.

Tema 3: Fie punctul $M(0, 2, -1)$ şi cuadrica $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale cuadricei care trec prin M şi să se calculeze unghiul dintre ele.

12.3 Generări de suprafeţe

Exerciţiul 1: Se cere suprafaţa cilindrică a cărei curbă directoare este $(C) : \begin{cases} y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, iar generatoarea are ecuaţia $(d) : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}$.

Rezolvare: Suprafaţa cilindrică este formată din drepte paralele cu d şi care se "sprijină" (intersectează) pe curba C. Vom scrie fasciculul de drepte paralele cu d. Fasciculul respectiv se poate obţine scriind prin fiecare punct de coordonate $(\lambda, \mu, 0)$ o dreaptă de direcţie $\vec{v}(3, 4, 5)$:

$$(d_{\lambda\mu}) : \frac{x - \lambda}{3} = \frac{y - \mu}{4} = \frac{z}{5}.$$

Acelaşi fascicul se obţine dacă, considerând dreapta d scrisă ca intersecţie a două plane $(d) : \begin{cases} (P) : 5x - 3z + 1 = 0 \\ (Q) : 5y - 4z + 13 = 0 \end{cases}$, scriem dreptele obţinute prin intersecţia planelor paralele cu P cu plane paralele cu Q:

$$(d_{\lambda\mu}) : \begin{cases} 5x - 3z + 1 = \lambda \\ 5y - 4z + 13 = \mu \end{cases}$$

Dintre aceste drepte le alegem pe cele care intersectează curba C, deci pentru care sistemul

$$\begin{cases} \frac{x-\lambda}{3} = \frac{y-\mu}{4} = \frac{z}{5} \\ y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

este compatibil. Din cele mai simple trei ecuaţii (aici sunt prima, a doua şi a patra) calculăm x, y, z în funcţie de parametrii λ, μ:

$$x = 0, \quad y = \mu - \frac{4}{3}\lambda, \quad z = -\frac{5}{3}\lambda,$$

şi înlocuind în a treia ecuaţie găsim condiţia de compatibilitate (de sprijin):

$$(\mu - \frac{4}{3}\lambda)^2 - (\frac{5}{3}\lambda)^2 - 1 = 0.$$

În condiţia de mai sus revenim cu expresiile parametrilor din ecuaţiile în care au fost introduşi:

$$\lambda = x - \frac{3}{5}z, \quad \mu = y - \frac{4}{5}z.$$

Ecuaţia obţinută este ecuaţia suprafeţei cilindrice cerute:

$$(y - \frac{4}{3}x)^2 - (\frac{5}{3}x + z)^2 - 1 = 0$$

Exerciţiul 2: Se dă suprafaţa $(E) : 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 1 = 0$ şi planul $(\pi) : x + y + z - 1 = 0$. Se cere proiecţia curbei $C = E \cap \pi$ pe planul xOy.

Rezolvare: Vom scrie suprafaţa cilindrică cu generatoarea perpendiculară pe planul xOy şi cu curba de sprijin C. Intersecţia acestei suprafeţe cu planul xOy reprezintă exact proiecţia cerută.

Fasciculul de drepte perpendiculare pe xOy, deci paralele cu Oz, este

$$(d_{\lambda\mu}) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$$

Dintre aceste drepte le alegem pe cele care intersectează C, deci pentru care sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

este compatibil. Avem $x = \lambda, y = \mu, z = 1 - \lambda - \mu$, deci condiţia de sprijin este

$$4\lambda^2 + 9\mu^2 + (1 - \lambda - \mu)^2 - 1 = 0$$

În condiţia de mai sus revenim cu expresiile parametrilor din ecuaţiile în care au fost introduşi:

$$\lambda = x, \quad \mu = y.$$

Ecuaţia obţinută este ecuaţia suprafeţei cilindrice care se sprijină pe C, perpendiculară pe xOy:

$$4x^2 + 9y^2 + (1 - x - y)^2 - 1 = 0.$$

Proiecţia curbei C pe planul xOy are prin urmare ecuaţia

$$(pr_{xOy}C) : \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + (1 - x - y)^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Tema 1: Găsiţi proiecţiile curbei C din exerciţiul anterior pe planele yOz, xOz, $(P) : x - y - z = 0$.

Exerciţiul 3: Se cere suprafaţa cilindrică cu generatoarea $(D) : x = y = z$ şi tangentă sferei $(S) : (x - 3)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Rezolvare: Suprafaţa cilindrică aparţine fasciculului de drepte paralele cu D:

$$(d_{\lambda\mu}) : \begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

Metoda I Identificăm curba de sprijin. Din moment ce suprafaţa cerută trebuie să fie tangentă sferei, rezultă că se sprijină pe un cerc mare al sferei, situat într-un plan perpendicular pe D. Prin urmare curba de sprijin are ecuaţia

$$(C) : \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Condiţia de sprijin o obţinem din condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Exprimăm x, y, z în funcţie de parametri:

$$x = 1 + \frac{\lambda + \mu}{3}, \quad y = 1 + \frac{-2\lambda + \mu}{3}, \quad z = 1 + \frac{\lambda - 2\mu}{3},$$

şi găsim condiţia de sprijin

$$2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu - 6\lambda - 6\mu + 15 = 0.$$

Înlocuind $\lambda = x - y$ şi $\mu = x - z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 12x + 6y + 6z + 15 = 0.$$

Metoda a II-a Determinăm direct acele drepte din fasciculul $d_{\lambda\mu}$ care intersectează sfera într-un singur punct, adică pentru care sistemul

$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

are soluţie unică. Scriind $y = x - \lambda$, $z = x - \mu$, obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$3x^2 - 2x(\lambda + \mu + 3) + \lambda^2 + \mu^2 + 8 = 0$$

Condiţia de soluţie unică ceste condiţia de sprijin, $\Delta = 0$:

$$(\lambda + \mu + 3)^2 - 3(\lambda^2 + \mu^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu - 6\lambda - 6\mu + 15 = 0,$$

adică exact condiţia de sprijin găsită şi prin prima metodă.

Tema 2: Să se determine suprafeţele cilindrice pentru care se dau generatoarea şi curba de sprijin:

a) $(d): x = y = z$, $(C): \begin{cases} x = y^2 \\ z = 0 \end{cases}$;

b) $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$, $(C): \begin{cases} xy = 4 \\ z = 0 \end{cases}$;

c) $(C): \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$, iar generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei.

Exerciţiul 4: Se cere suprafaţa conică cu vârful $V(-1, 1, 1)$ şi curba directoare $(C): \begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Rezolvare: Suprafaţa cerută este formată din drepte care trec prin punctul V şi care se sprijină pe (intersectează) curba C. Vom scrie fasciculul de drepte prin V. Punctul V poate fi văzut ca intersecţia a trei plane, $(P): x+1 = 0$, $(Q): y-1 = 0$, $(R): z-1 = 0$. Dreptele prin V se pot scrie astfel:

$$(d_{\lambda\mu}): \begin{cases} x + 1 = \lambda(z-1) \\ y - 1 = \mu(z-1) \end{cases}$$

O altă modalitate de a scrie fasciculul de mai sus este să scriem dreptele prin V şi având orice direcţie, deci

$$(d_{\lambda\mu}): \frac{x+1}{\lambda} = \frac{y-1}{\mu} = \frac{z-1}{1}.$$

Alegem din fasciculul de mai sus acele drepte care intersectează curba C, deci pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + 1 = \lambda(z-1) \\ y - 1 = \mu(z-1) \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

este compatibil. Ca şi la supprafeţe cilindrice, din cele mai simple trei ecuaţii exprimăm necunoscutele x, y, z în funcţie de parametrii λ, μ:

$$x = -\lambda - 1, \quad y = -\mu + 1, \quad z = 0,$$

şi le înlocuim în cea de a patra ecuaţie. Ceea ce obţinem este condiţia de sprijin:

$$-(\lambda + 1)^3 + (1-\mu)^3 + 3(\lambda + 1)(1 - \mu) = 0.$$

Înlocuind acum parametrii $\lambda = \frac{x+1}{z-1}$, $\mu = \frac{y-1}{z-1}$ în condiţia de sprijin, găsim ecuaţia suprafeţei conice:

$$-(x+z)^3 + (z-y)^3 + 3(x+z)(z-y)(z-1) = 0.$$

Exerciţiul 5: Să se determine locul geometric al tangentelor duse din origine la sfera $(S) : (x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$.

Rezolvare: Fasciculul de drepte prin origine este

$$(d_{\lambda\mu}) : \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{1}.$$

Alegem dintre aceste drepte pe acelea care intersectează sfera într-un singur punct, deci pentru care sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ y = \mu z \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

are soluţie unică. Sistemul de mai sus conduce la ecuaţia de gradul II în z:

$$(1 + \lambda^2 + \mu^2)z^2 + 2(5\lambda - \mu)z + 10 = 0,$$

pentru care condiţia de soluţie unică $\Delta = 0$ este condiţia de sprijin a dreptelor din fascicul pe sferă:

$$15\lambda^2 - 9\mu^2 - 10\lambda\mu - 10 = 0.$$

Înlocuind acum $\lambda = \frac{x}{z}$ şi $\mu = \frac{y}{z}$, obţinem ecuaţia suprafeţei conice care este locul geometric căutat:

$$15x^2 - 9y^2 - 10z^2 - 10xy = 0$$

Remarcăm faptul că o suprafaţă conică cu vârful în origine are ecuaţia de forma $\Phi(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$. De aceea, la întrebarea: ”Ce reprezintă ecuaţia

$$x^2 + y^2 - 2xy - 5yz + 3xz = 0\text{”},$$

răspunsul este :”O suprafaţa conică cu vârful în origine”, justificarea fiind faptul că ecuaţia se poate scrie

$$(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 - 2\frac{x}{z}\frac{y}{z} - 5\frac{y}{z} + 3\frac{x}{z} = 0.$$

Pentru demonstraţie se determină un punct $V(a, b, c)$ cu proprietatea că ecuaţia suprafaţei conice cu vârful V şi curba de sprijin inersecţia suprafeţei date cu planul xOy (de exemplu; se poate alege şi alt plan), se identifică cu ecuaţia dată.

Tema 3: Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful şi curba de sprijin precizate mai jos:

a) $V(1,1,1)$, $(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$;

b) $(V) : \begin{cases} x + 3z - 10 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$, $(C) : \begin{cases} x^2 + z^2 - 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;

c) $V(0,2,0)$, $(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$.

Exerciţiul 6: Să se găsească ecuaţia suprafeţei obţinută prin rotirea dreptei $(d) : x = y = z + 3$ în jurul dreptei $(D) : -x = y = -z$.

Rezolvare: În primul rând să observăm faptul că la rotirea unei drepte în jurul alteia putem obţine un cilindru, un con sau un hiperboloid cu o pânză, după cum dreptele sunt paralele, concurente sau necoplanare.

În exerciţiul dat dreptele fiind necoplanare (vezi capitolul 2 pentru verificare), vom obţine un hiprboloid cu o pânză.

Suprafaţa de rotaţie cerută este formată din toate cercurile cu centrul pe axa de rotaţie D, situate în plane perpendiculare pe aceasta şi care se sprijină pe dreapta d. După se ştie, un cerc în spaţiu se poate da ca intersecţie a unei sfere cu un plan. Vom scrie deci toate sferele din spaţiu având centrul pe D, de exemplu în origine şi raza variabilă, şi le vom intersecta cu toate planele perpendiculare pe D. Obţinem familia de cercuri:

$$(C_{\lambda\mu}) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ -x + y - z = \mu \end{cases}$$

cu λ, μ parametri reali. Alegem din acest fascicul acele cercuri care se sprijină pe dreapta d., deci pentru care sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ -x + y - z = \mu \\ x = y = z + 3 \end{cases}$$

este compatibil. Din cele mai simple ecuaţii determinăm $x = 3-\mu$, $y = 3-\mu$, $z = -\mu$ şi obţinem condiţia de sprijin:

$$2(3-\mu)^2 + \mu^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow 3\mu^2 - 12\mu + 18 - \lambda^2 = 0.$$

Avem $\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2$ şi $\mu = -x + y - z$, pe care înlocuindu-le mai sus, rezultă ecuaţia suprafeţei de rotaţie cerute:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6xy + 6xz - 6yz + 12x - 12y + 12z + 18 = 0.$$

Lăsăm temă reducerea la forma canonică a cuadricei de mai sus.

Tema 4: Să se scrie ecuaţia suprafeţei obţinută prin rotirea curbei C în jurul dreptei d precizate mai jos:

a) $(C) : \begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$, $(d) : x = y = z.$

b) $(C) : \begin{cases} x^2 + -4y^2 - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $d = Ox$, apoi $d = Oy$.

Bibliografie

[1] G. Atanasiu, G. Munteanu, *Curs de algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială şi ecuaţii diferenţiale,* Univ. Braşov, Partea I, 1992, Partea II, 1993.

[2] G. Atanasiu, G. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi difernţială. Ecuaţii difernţiale,* Editura All, Bucureşti, 1994.

[3] G. Atanasiu, E. Stoica, *Algebră liniară, Geometrie analitică*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[4] M. Craioveanu, I. Albu, *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1982.

[5] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, E.D.P. Bucureşti, 1973.

[6] G. Galbură, F. Rado, *Geometrie*, E.D.P., Bucureşti, 1979.

[7] R. Miron, *Geometrie analitică*, E.D.P., Bucureşti 1976.

[8] E. Murgulescu şi colectiv, *Geometrie analitică şi diferenţială*, E.D.P., Bucureşti, 1965.

[9] V. Obădeanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[10] L. Ornea, A. Turtoi, *O introducere în geometrie*, Editura Theta, Bucureşti 2000.

[11] V. Pescaru, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Univ. Transilvania Braşov, 2000.

[12] I. Pop, *Curs de algebră*, Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, 1978.

[13] I. Pop, *Culegere de probleme de algebră liniară*, Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, 1982.

[14] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, C. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, E.D.P., Bucureşti 1982.

[15] C. Udrişte, *Algebră liniară, Geometrie analitică*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1996.

[16] G. Vrânceanu, G. Mărgulescu, *Geometrie anlitică*, E.D.P., Bucureşti, 1973.