CAP.1. DEFINIȚIE; SCOP; LEGĂTURILE CU ALTE DISCIPLINE, ISTORIC.

Definiții. *Geodezia* este ştiința care se ocupă cu măsurarea şi reprezentarea suprafețelor (Helmert-1880).

De menționat că definiția lui Helmert este discutată în multe cercuri de specialitate, dar acceptată, până la urmă, aproape fără excepții. Tendințele de modificare existente în trecut, ca şi în prezent, a acestei definiții, au întrunit la fel de multe contraargumente, astfel încât propunerile respective au fost retrase.

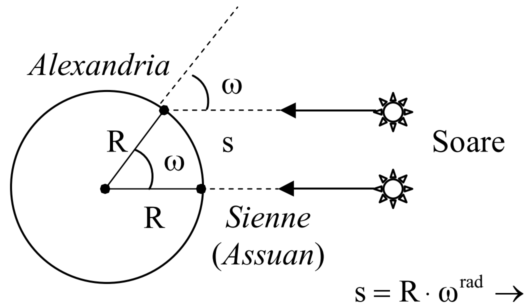
Rezolvarea problemei fundamentale a geodeziei, şi anume determinarea formei şi dimensiunilor Pământului, se poate realiza, în principiu prin următoarele metode:

- *metode geometrice*, care au constat la început din măsurători de arce de meridian şi de paralel, apoi din măsurători complexe în rețele de triangulație în scopul deducerii parametrilor de bază care definesc suprafața de referință;
- *metode dinamice (*fizice);
- *metode astronomo-geodezice şi cu sateliții artificiali ai Pământului;*

Astfel de lucrări complexe presupun înțelegeri şi cooperări internaționale care sunt coordonate de *Uniunea Internațională de Geodezie şi Geofizică* (UIGG).

Primele afirmații scrise în legătură cu forma Pământului (imaginat ca un disc) sunt legate de istoria *Mesopotamiei* (sec XXX î.C.), forma de disc fiind întâlnită şi în poemele homerice (sec X î.C.). Ipoteza formei sferice a Pământului a fost emisă după uni istoriografi, de către *Thales din Milet* (anul 600 î.C.), iar după alții, de *Pitagora* (anul 550 î. C.).

Prima determinare a razei unei sfere care aproximează figura Pământului se face mult mai târziu, de către *Eratostene* (276 – 195 î.C.), care a determinat raza sferei terestre după principiul Măsurătorilor graduale. Acesta a observat că în perioada soltițiului de vară (3 iulie), la amiază, Soarele se proiecta în centrul unei fântâni din localitatea Assuan (denumită în vechime Sienne). Într-o altă localitate, *Alexandria*, la aceeaşi oră, razele Soarelui făceau un unghi (ω) în raport de axa oricărei fântâni. Eratostene şi-a propus să măsoare lungimea (s) cuprinsă între cele două localități şi unghiul dîntre ele (ω). Cu ajutorul relației simple cunoscută din trigonometrie urma să se deducă raza Pământului.



$$s = R \cdot \omega^{rad} \rightarrow R = \frac{s}{\omega^{rad}}$$

Pe baza acestui principiu s-a calculat, pentru prima dată, raza Pământului ca fiind de 7350 km față de cca 6370 km cât se acceptă astăzi ca valoare medie. Deci prima determinare mentionată în scrieri a avut o eroare de aproximativ 16%.

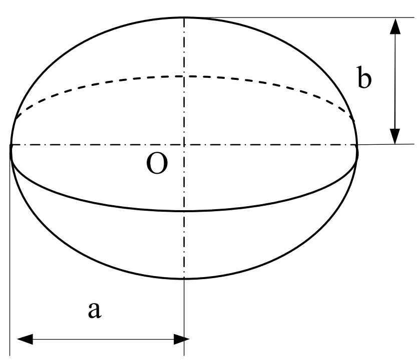
Desigur, rezultatul obținut de **Eratostene** nu era exprimat în sistemul metric, care a fost fondat mult mai târziu.

Ulterior, **W. Snellius** (1617) fondează *metoda triangulației* care va îndeplini, în continuare, un rol deosebit în cadrul metodelor pentru determinarea formei şi dimensiunilor Pământului.

În anul 1666 ia ființă *Academia de ştiințe din Paris*, care îşi propune, printre alte obiective primordiale, determinarea mărimii razei Pământului, lucrări pe care le încredințează astronomului **Jean Picard**. Acesta determină, pe baza observațiilor într-o rețea de triangulație desfăşurată în *meridianul Parisului*, între *Malvoisine* şi *Amiens*, lungimea sfertului de meridian ca fiind 10009 km. Acest rezultat este considerat ca *prima determinare din istoria geodeziei, care poate fi comparată cu rezultatele actuale, datorită preciziei de măsurare şi metodelor folosite.*

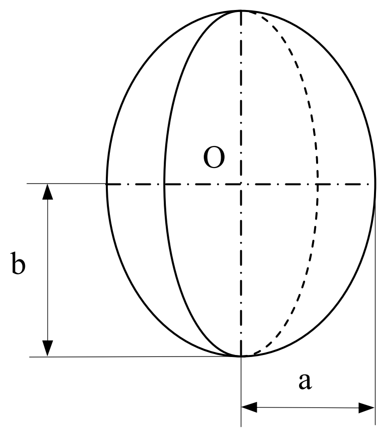
Disputa Newton – Cassini

În anul 1687, **Newton** fundamentează teoria sa asupra *atracției universale* pe baza căreia deduce că forma Pământului este reprezentată de un elipsoid, cu turtire la poli (turtirea f estimată în lucrările sale ar fi egală cu 1:231).



$$f = \frac{a-b}{a}$$

În schimb, măsurătorile efectuate de **J. D. Cassini** (1683-1718) conduc la un rezultat surpriză pentru lumea ştiinţifică de atunci: Pământul avea forma unui elipsoid, însă cu turtirea la ecuator, adică cu turtirea negativa f = – 1:95.



Aceste rezultate se datorau erorilor sistematice de măsurare şi imperfecţiunii metodelor de prelucrare a observaţiilor efectuate

Disputa a fost clarificată mult mai târziu, prin efectuarea unor noi măsurători, întreprinse la însărcinarea *Academiei de ştiinţe din Paris* în cadrul următoarelor două mari expediţii astronomo-geodezice:

- *Peru* (1735-1744) – emisfera sudică;
- *Laponia* (1736-1737) – emisfera nordică.

Urmarea acestor expediţii a fost confirmarea afirmaţiilor lui **Newton**, turtirea la poli determinată atunci având valoarea 1:210.

Măsurătorile graduale au continuat şi în secolele XVIII-XX prin determinarea, directă sau din reţele de triangulaţie, a unor arce de meridian, de paralel sau oarecari, de mari dimensiuni. Dintre aceste determinări, datorită importanţei, se menţionează măsurătorile graduale conduse de geodezul rus **V. I. Sturve**, întinse pe o foarte mare lungime (peste 2000 km) care porneşte de la *Hammerfest* (*Norvegia*) şi se termină în *Sulina* (*România*). Această lucrare s-a efectuat între anii 1816-1852 şi în urma ei s-a dedus turtirea de 1:298,6. Valoarea merită o atenţie deosebită fiind extrem de apropiată de valoarea recomandată în anul 1980 de **AIG** (1:298,26), dovedind o tehnică de măsurare şi de prelucrare cu totul remarcabile pentru acea vreme.

Începând cu anul 1957, în geodezie se folosesc rezultatele obținute cu ajutorul sateliților artificiali geodezici ai Pământului pentru determinarea formei şi dimensiunilor planetei noastre.

În țara noastră, începutul utilizării triangulației este legat de desfăşurarea lucrărilor de întocmire a hărților diverselor regiuni ale țării. Este de remarcat faptul că învățământul geodezic referitor la această metodă a premers acestei lucrări, putându-se menționa în acest sens lecțiile de *gheodezie* de la şcoala lui **Gh. Asachi** (1813) şi cea a lui **Gh. Lazar** (1818).

În *Transilvania* şi în *Țara Românească*, primele lucrări de triangulație s-au desfăşurat la mijlocul secolului al XIX-lea. Deosebit de interesantă apare triangulația executată în *Țara Românească* în perioada 1856-1867, formată din cinci lanțuri de triangulație primordială, în interiorul cărora s-au efectuat lucrări de triangulație de îndesire, de ordinele II şi III, potrivit tehnologiei clasice franceze. Acestă triangulație a servit ca rețea de sprijin pentru executarea unei hărți fundamentale topografice a *Munteniei* la scara 1:57600, care poate fi considerată ca prima hartă modernă pentru această parte a țării noastre.

Despre o activitate geodezică organizată la noi în țară se poate vorbi însă după anul 1861 si, în special, după anul 1868 când se înființează *Depositul sciintific de resbel*, care, sub diferite denumiri ulterioare, a fost coordonatorul marilor lucrări geodezice din țara noastră (*Institutul geografic al armatei* în 1895, apoi *Institutul geografic militar* în 1930 şi din 1951 până în prezent *Direcția topografică militară*). Au fost abordate lucrări importante, dintre care planul topografic fundamental la scara 1:20000 şi pentru celelalte regiuni ale țării a fost obiectivul principal (*Moldova* între anii 1873-1893, *Dobrogea* 1880-1884, *Muntenia de Est* 1893-1899).

Este de menționat că țara noastră făcea parte din anul 1861 din *Asociația Europeană pentru măsurători graduale*, precursoare a actualei *Asociații Internaționale de Geodezie*, sub impulsul căreia s-au desfăşurat primele lucrări de triangulație la mijlocul secolului al XIX-lea (1856-1867) în *Transilvania* şi *Țara Românească*, terminate cu rezultate remarcabile pentru acea vreme.

Planul unei triangulații moderne pentru întreaga țară este conceput în 1930, prevăzându-se printre altele: trecerea la elipsoidul internațional **Hayford** (1909), proiecția stereografică, desfăşurarea rețelei de triangulație în lungul meridianelor şi paralelelor. În acelaşi sens trebuie menționată rețeaua de nivelment realizată după primul război mondial şi compensată riguros în anul 1933.

După anul 1951 se poate vorbi de o nouă perioadă în dezvoltarea geodeziei românesti. În acest an s-a adoptat elipsoidul **Krasovski** (1942) şi sistemul de proiecție **Gauss-Krüger**, creându-se o nouă rețea de triangulație de stat de ordinul I-IV şi o rețea de ridicare de ordinul V. Rețeaua de trriangulație astronomo-geodezică, primordială, a țării a fost continuu îmbunătățită prin efectuarea unor măsurători geodezice, astronomice, gravimetrice de mare precizie, potrivit principiilor moderne de măsurare şi compensare a vastelor rețele de triangulație. În aceeaşi perioadă de timp (1955-1968) s-a creat rețeaua modernă de nivelment geodezic din țara noastră. Coordonatorul şi realizatorul principal al acestor ample lucrari a fost *Direcția Topografică Militară*. Un rol important în dezvoltarea geodeziei contemporane româneşti revine, de asemenea, *Institutului de Geodezie, Fotogrammetrie, Cartografie şi Organizarea Teritoriului*, înființat în anul 1958.

Deşi nu are legatură directă cu disciplina *geodezie*, apreciem că este necesar să se puncteze rolul acesteia în activitatea de *cadastru* care constituie specialitatea de bază a secției.

Cadastrul reprezintă sistemul unitar şi obligatoriu de evidență tehnică, economică şi juridică a terenurilor, cu sau fără construcții, pe întregul teritoriu al țării, indiferent de destinația lor şi de proprietar.

Baza legală de organizare şi funcționare în prezent a Cadastrului şi Cărții Funciare, ca instituții ale statului, este reglementată de Hotărârea Guvernulului României privind organizarea si funcționarea Agenției Naționale de Cadastru şi Publicitate Imobiliară publicată în Monitorul Oficial al României la 9 august 2004.

În baza legii menționate, cadastrul – constituie în exclusivitate atributul Agenției Naționale de Cadastru şi Publicitate Imobiliară(**ANCPI**).

Prin Oficiile de Cadastru şi Publicitate Imobiliară (**OCPI**), organizate la nivelul județelor şi al Municipiului Bucureşti, precum şi prin *Centrul Național de Geodezie, Cartografie, Fotogrametrie şi Teledețectie* (**CNGCFT**), organizat la nivel central, ca unități de specialitate din subordinea **ANCPI**, se asigură întocmirea documentelor cadastrale scrise, desenate şi/sau stocate pe suporturi informatice.

Geodezia participă la dezvoltarea şi modernizarea cadastrului prin realizarea, modernizarea şi întreținerea unui sistem de referință necesar pentru poziționarea oricărui obiect sau fenomen în spațiul terestru. Sistemul rspectiv este materializat în fiecare țară – inclusiv *România* – prin *Rețeaua Natională Geodezică de Referință*, formată dintr-un ansamblu de puncte geodezice repartizate cât mai uniform posibil pe întreaga suprafață a teritoriului național, determinate în sisteme de coordonate corespunzătoare. Această rețea reprezintă infrastructura care permite pozitionarea exactă în spațiul terestru a fiecărei parcele, a activităților desfăşurate în teritoriu, precum şi a studiilor necesare proiectării şi executării obiectivelor de investiții din toate ramurile economiei naționale.

Datele Geodezice de Referință sunt acele mărimi care conduc la încadrarea rețelei geodezice considerate în sistemul de coordonate corespondent. În prezent se folosesc în *România* următoarele *Date Geodezice de Referință oficiale*, care urmează a se folosi în lucrările de specialitate care se desfaşoară în prezent în țara noastră, inclusiv cele executate în domeniul cadastrului.

Rețeaua de Triangulație de Stat

- *elipsoidul de referință* **Krasovski** (1940), orientat pe pilastrul mare al Observatorului astronomic din *Pulkovo (Federația Rusă)*;
- *planul de proiecție stereografică* 1970 (cu plan unic secant *Braşov*);

Rețeaua de Nivelment de Stat

- *sistemul de nivelment Marea Neagră* 1975, cu punct zero fundamental în reperul de adâncime protejat situat în *Capela militară din Municipiul Constanța*;
- *sistemul de altitudini normale* (**Molodenski**).

Rețeaua de Triangulație de Stat de ordinele I, II, III şi IV a fost constituită, la momentul inițial, din cca 17150 puncte şi completată cu o rețea de îndesire de ordinul V, constituită din cca 4700 puncte. Pe această rețea se pot sprijini operațiunile cadastrale, începând de la nivelul parcelelor, până la nivelul diviziunilor administrativ-teritoriale şi la nivel național. Precizia în poziție planimetrică (x, y) pentru rețeaua de triangulație de stat, în ansamblul său, este estimată la ± 10-15 cm, asigurându-se o densitate inițială de aproximativ 1 punct la 20 km^2.

Este de menționat că în multe municipii există rețele geodezice de sprijin, determinate cu precizii mai mari decât cea specificată pentru rețeaua geodezică de stat. Aceste rețele au fost create, în decursul anilor, de ministere economice sau de administrațiile locale, pentru scopuri proprii. Rezultatele finale au fost predate, de regulă, oficiilor județene care răspundeau la acea vreme de activitățile geodezice, pentru a fi utilizate pe plan local.

Din informațiile obținute în teritoriu, cca 50% din punctele geodezice menționate mai înainte au fost distruse, astfel încât, deşi rețeaua de triangulație a fost bine configurată inițial, se situează în prezent sub nivelul standardelor internaționale. Din aceeste motive, sunt necesare fonduri anuale pentru refacerea şi completarea retelei geodezice, în zonele considerate ca prioritare de către fiecare județ, prin utilizarea tehnologiilor moderne, care sunt mai puțin costisitoare, comparativ cu tehnologiile clasice.

Rețeaua de Nivelment de Stat de ordinele I, II, III şi IV a fost constituită, la momentul inițial, din cca 14000 repere şi mărci de nivelment, completată cu o Rețea de îndesire de ordinul V, constituită, la momentul inițial, din cca 250 repere şi mărci de nivelment.

Rețeaua altimetrică de ordinul I a României acoperă uniform teritoriul țării, fiind una dintre cele mai apreciate din *Europa*. Chiar dacă multe mărci şi/sau repere de nivelment au fost distruse, rețeaua existentă este suficient de densă pentru a fi folosită ca rețea de sprijin în efectuarea lucrărilor topografice şi cadastrale realizate în diverse sectoare ale economiei naționale.

În anii de după Revoluția din 1989, s-a introdus, sporadic, tehnologia de determinare a punctelor geodezice în *sistemul poziționării globale* **GPS** (***G****lobal* ***P****ositioning* ***S****ystem*). Există, pe teritoriul României, o serie de puncte determinate cu tehnologia GPS, atât în scopuri civile cât şi militare, aparținând unor rețele europene, dar care nu sunt constituite încă într-o rețea GPS omogenă pe teritoriul țării.

De aceea este necesară realizarea Rețelei Naționale GPS a României, compatibilă cu rețelele similare existente de mai mulți ani în celalte țări din Europa, inclusiv în unele țări vecine. În anul 2003, **ICGFC** a început crearea acestei rețele, cu determinarea unui număr de cca 300 puncte geodezice. Se preconiza că la finele anului 2005 rețeaua să cuprindă un număr de cca 3500 puncte geodezice, uniform răspândite în teritoriu şi cu multiple legături la actuala rețea geodezică de sprijin precum şi la stații **GPS** permanente, situate în mai multe țari europene, ceea ce, din păcate, nu s-a realizat.

Triangulația, denumită uneori şi *geodezia geometrică* este o metodă de determinare a coordonatelor geodezice-geografice B;L -φ,λ, (pe elipsoidul de referință) sau a coordonatelor x, y (în planul de proiecție) a unei rețele de puncte situate pe suprafața Pământului.

Pentru determinarea celei de-a treia coordonată, aşa numită cotă a punctelor de triangulație (H), se utilizează nivelmentul trigonometric, nefiind însă exclusă şi posibilitatea de determinare a cotelor prin nivelment geometric.

În acest fel, poziția în spațiu a unui punct din rețeaua de triangulație este definită, în mod curent, în raport cu doua suprafețe de referință: pe de o parte *elipsoidul* pentru coordonatele (B; L -φ,λ), sau planul de proiecție pentru coordonatele (x,y) şi pe de altă parte, *geoidul* pentru altitudinea (H), în funcție de sistemul de cote acceptat oficial.

De aceea, una din problemele ştiințifice pusă din nou în actualitate de o serie de specialişti,este determinarea celor trei coordonate în raport cu o singură suprafață, eventual în raport cu elipsoidul de referință.

În metoda *trilaterației*, pozițiile punctelor de pe suprafața fizică a Pământului, sunt determinate în anumite sisteme de referință numai pe baza măsurătorilor de distanțe.

Denumirea de *trilaterație* se justifică prin acea că la baza metodei respective stă configurația elementară, triunghiul cu toate cele trei laturi măsurate.

CAP.2 SUPRAFEȚE DE REFERINȚĂ

Reprezentarea suprafeței Pământului, cu neregularitățile deosebit de variate pe care le prezintă, nu se poate realiza fidel, ci doar prin intermediul unor generalizări, bazate pe anumite legi sau convenții, astfel încât suprafața considerată să fie cât mai apropiată de realitate.

Suprafața matematică care aproximează cel mai bine, suprafața reală a Pământului, s-a considerat a fi cea a unui elipsoid de rotație (în jurul semiaxei mici).

2.1*Suprafața de nivel .Geoidul. Elipsoidul. Planul de proiecție.*

Un punct situat pe suprafața fizică a Pământului este supus la acțiunea a două forțe principale: forța centrifugă, datorită rotației Pământului în jurul axei sale, şi forței de atracție terestră. Rezultanta acestor forțe principale , la care trebuie să adăugăm şi forțele de atracție ale altor planete, este o forță denumită *gravitate* sau greutate, a cărei direcție este dată de poziția firului cu plumb, după care se realizează întotdeauna calarea instrumentelor geodezice.

Această primă direcție fundamentală din natură, la care se referă orice măsurătoare geodezică, trebuie luată în considerare la adoptarea şi folosirea diferitelor sisteme de referință.

Suprafața construită astfel încât să fie perpendiculară, în oricare din punctele sale, pe direcția gravitații, se numeşte, ***suprafață de nivel***.(Clairaut şi Laplace).

Din infinitatea acestor suprafețe de nivel cea mai importantă o constituie geoidul.

Geoidul este s*uprafața de nivel zero şi având ca imagine fizică, într-o aproximație destul de mare, suprafața medie şi liniştită a mărilor şi oceanelor, prelungită pe sub continente*

Elipsoidul este *figura geometrică, convențională, față de a cărei suprafață se defineşte geoidul cu toate elementele sale proiectate pe suprafața elipsoidului.*

De aceea elipsoidul se numeşte de referință. Pe elipsoidul de referință se definesc pozițiile tuturor punctelor în sistemul internațional al coordonatelor geografice – geodezice.

Există posibilitatea înlocuirii elipsoidului de referință (pentru suprafețe mici) prin *sfera de rază medie* (sfera Gauss) de rază R=$\sqrt{M * N}$. (M = raza de curbură a elipsei meridiane şi N = raza de curbură a primului vertical, calculate pentru un punct situat în centrul teritoriului considerat.)

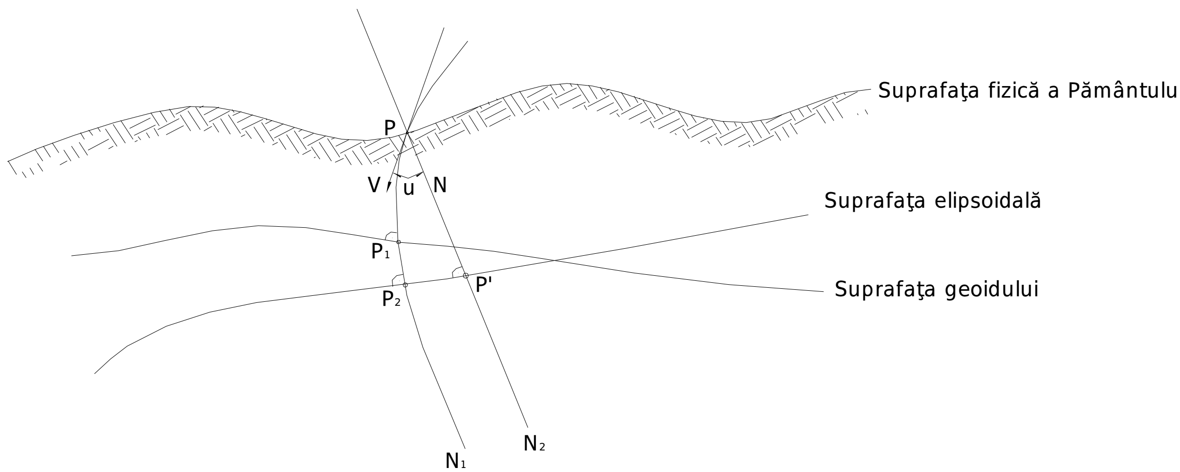


Fig.1-Reprezentarea punctelor pe elipsoidul de referință

În caz general, verticala V la suprafața geoidului, care trece printr-un punct oarecare P situat pe suprafața Pământului, nu coincide cu normala N la suprafața elipsoidului care trece prin acelaşi punct,ci formează cu aceasta un unghi oarecare „u”, denumit unghi de deviație a verticalei.

În metoda proiectării se procedează la aducerea elementelor măsurat (direcții, lungimi) pe suprafața elipsoidului, prin aplicarea unor corecții.

Există două posibilități în acest sens, care pot fi sintetizate astfel:

Metoda Pizzetti. Punctul P de pe suprafața fizică a Pământului (fig.1) este proiectat mai întâi, cu ajutorul verticalei V, pe suprafața geoidului în P_1, urmând ca apoi, cu ajutorul normalei N_1 la elipsoid, să fie proiectat în P_2, pe suprafața elipsoidului de referință. Metoda presupune cunoaşterea curburilor verticalelor, necesare corecțiilor şi de aceea nu a cunoscut a aplicabilitate practică deosebită.

Metoda Bruns-Helmert. Punctul P de pe suprafața fizică a Pământului este proiectat în P’ pe suprafața elipsoidului, cu ajutorul normalei N_2 la această suprafață. Această metodă este mult mai practică.

Coordonatele tuturor punctelor triangulației de stat din țara noastră se determină prin metoda proiectării Bruns-Helmert. Calculele se bazează pe coordonatele rețelei astronomo – geodezice, compensată în 1958 în următorul sistem:

1 Elipsoidul de referință este elipsoidul Krasovski 1942 cu următorii parametri: a = 6378245 (m) şi f = 1:298,3;

2 Punctul fundamental este punctul Pulkovo cu următoarele coordonate: latitudinea = $59^o46'15'',359$, longitudinea = $30^o19'28'',318$. Azimutul geodezic din Pulkovo (piramida A) spre punctul Bugrî este $121^o06'42'',305$.

Planul de proiecție. În rețelele de triangulație de îndesire, datorită numărului extrem de mare al punctelor, nu se mai pot folosi comod calculele pe elipsoid sau pe sfera medie, fiind necesară adoptarea unei suprafețe plane, prin adoptarea unui anumit *sistem de proiecție cartografică.*

Din anul 1951, în țara noastră a fost folosit sistemul de *proiecție conformă Gauss – Kruger,* suprafața țării fiind cuprinsă în fusele 34 şi 35 cu meridianele axiale de 21^o şi 27^o, iar din anul 1970 s-a trecut la *proiecția stereografică 1970* .

Dimensiunile unor elipsoizi de referință Tabelul .1

Elipsoid	Anul	Semiaxa mare a(m)	Semiaxa mică b(m)	Turtirea numerică f
Delambre	1800	6.375.653	6.356.564	1:334.0
Bessel	1841	6.377.397	6.356.079	1:299.2
Clarke	1880	6.378.243	6.356.515	1:293.5
Hayford	1909	6.378.388	6.356.912	1:297.0
Krasovski	1940	6.378.245	6.356.863	1:298.3
Sistemul geodezic de referință 1980	1980	6.378.137		1:298.257
WGS'84 (World Geodetic System)	1986	6.378.137.		1:298.257

CAP.3 SISTEME DE COORDONATE

În vederea determinării locului pe care-l ocupă un anumit punct pe suprafaţa terestră, trebuie definită poziţia acestuia faţă de un anumit sistem de referinţă. Aceasta se face prin *coordonate geografice* sau *coordonate plane* (rectangulare, polare).

3.1.Coordonate geografice. Cu ajutorul lor se indică poziţia unui punct în orice moment (t), cu precizie foarte mare. Considerăm Pământul ca fiind o sferă. Planul de referinţă al coordonatelor geografice îl constituie *planul ecuatorial.* Acesta are o poziţie normală faţă de axa de rotaţie a pământului (N-S) şi-l împarte în două părţi egale. Intersecţia dintre planul ecuatorial şi sfera „Pământului" este un cerc mare numit *cerc ecuatorial.* Dacă intersectăm sfera terestră cu planul care conţine axa de rotaţie a Pământului obţinem tot cercuri mari numite *cercuri longitudinale sau meridiane*. Dacă intersectăm sfera terestră cu planuri paralele cu planul ecuatorial obţinem cercuri mici, numite *cercuri de latitudine sau paralele.*

Cercurile meridiane şi paralele sunt perpendiculare între ele. Cercul ecuatorial are 360^o, având originea la intersecţia acestuia cu cercul meridian ce trece prin Greenwich. Gradarea începe co 0^o spre E şi V. Arcul de cerc meridian ce porneşte de la ecuator către polul N şi S se împarte în 90^o determinând latitudini nordice şi sudice.

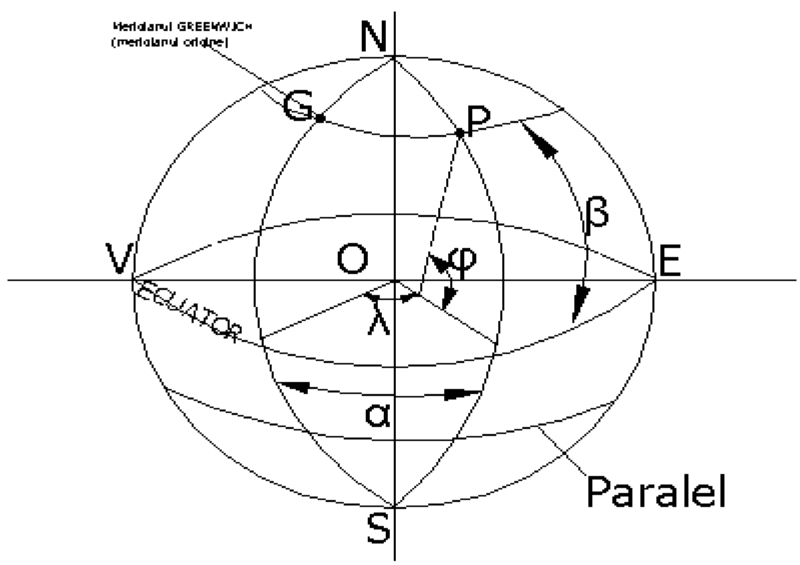


Fig.2 COORDONATE GEOGRAFICE

Poziţia unui punct poate fi definită prin :

a) coordonate geografice unghiulare: φ şiλ;

b) coordonate curbilinii: α şi β;.

φ = latitudine geografică şi reprezintă unghiul făcut de verticala punctului „P" cu planul ecuatorial.

λ = longitudine geografică şi reprezintă unghiul diedru dintre planul *meridianului origine* şi planul meridianului ce trece prin punctul „P".

α = longitudinea = lungimea arcului ecuatorial cuprins între intersecția meridianului origine şi ecuatorul şi intersecția meridianului punctului „P" cu ecuatorul.

β = latitudinea = arcul din cercul meridian ce trece prin punctul considerat (P), cuprins între ecuator şi punctul „P".

OBSERVAȚIE: Coordonatele geografice nu se folosesc în topografie, însă stau la baza calcului coordonatelor punctelor de triangulație de ordinul I din rețeaua țării.

3.2.Coordonate plane - (X,Y)

Pentru determinarea coordonatelor absolute X şi Y se folosesc şi coordonatele relative:

X_A ; Y_A –coordonate absolute cunoscute pentru punctul „A";

X_B ; Y_B –coordonate absolute ce trebuie determinate pentru punctul „B";

ΔX_{AB} ; ΔY_{AB} - coordonatele relative ale punctelor „A;B".

$X_B = X_A + \Delta X_{AB}$; $\Delta X_{AB} = d_{AB} * \cos\theta_{AB.}$

$Y_B = Y_A + \Delta Y_{AB}$; $\Delta Y_{AB} = d_{AB} * \sin\theta_{AB.}$

Sisteme rectangulare folosite la noi în țară au fost: sistemul matematic, sistemul geodezic, sistemul astronomic şi sistemul cadastral.

Harta veche a țării a folosit şi sistemul cadastral. În Banat şi Ardeal s-a folosit şi sistemul astronomic.

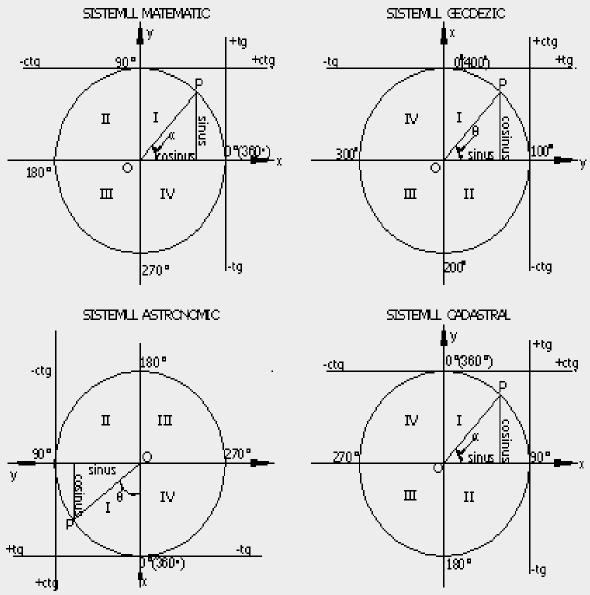


Fig.3.SISTEME DE REFERINŢĂ

Poziția în spațiu a oricărui punct poate fi definită prin coordonate rectangulare sau prin coordonate polare.

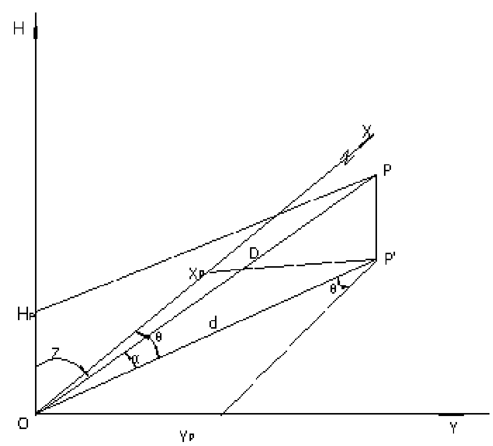


Fig. 4 Sisteme de coordonate în spațiu

Coordonate rectangulare:

X_P - abscisa punctului;

Y_P- ordonata punctului;

H_P – cota punctului (măsurată pe verticală în punctul P, deasupra planului de cotare)

Coordonate polare:

D – distanța polară, (distanța măsurată în teren după panta acestuia);

d – distanța în plan;

θ = azimutul (orientarea geografică)

α - unghiul de pantă al terenului;

z – unghiul zenital.

$z + \alpha = 100^g$

Relații între coordonate:

Din triunghiul OP'P $\Rightarrow$ $d = D*\cos\alpha = D*\sin z$;

Din triunghiul OP'X_P $\Rightarrow$ $X_P = d*\cos\theta = D*\cos\alpha*\cos\theta = D*\sin z*\cos\theta$;

Din triunghiul OP'Y_P $\Rightarrow$ $Y_P = d*\sin\theta = D*\cos\alpha*\sin\theta = D*\sin z*\sin\theta$;

Din triunghiul OPP' $\Rightarrow$ $H_P = D*\sin\alpha = D*\cos z$;

$$H_P = d*\mathrm{tg}\,\alpha = d*\mathrm{ctg}\,z\ ;$$

Se observă deci că pentru stabilirea poziției unui punct în cadrul unei rețele este nevoie să facem măsurători unghiulare şi liniare.

3.3 Sisteme de coordonate naturale

Denumirea de coordonate naturale, cu care se lucrează în geodezie, urmăreşte îndeplinirea unui dublu deziderat: pe de o parte se exprimă modalitatea de definire a sistemului sau coordonatelor respective (în raport de **mărimi naturale),** iar pe de altă parte se indică legăturile directe dintre acestea şi **procedeele de măsurare(determinare).**

3.3.1 Sistemul cartezian geocentric

Sistemul natural global cartezian geocentric este considerat drept sistemul fundamental al geodeziei. Coordonatele carteziene ***X, Y, Z*** sau diferențe de aceste coordonate, obținute în geodezia satelitară, definesc poziția punctului ***P*** (fig.5) situat pe suprafața fizică a Pământului.

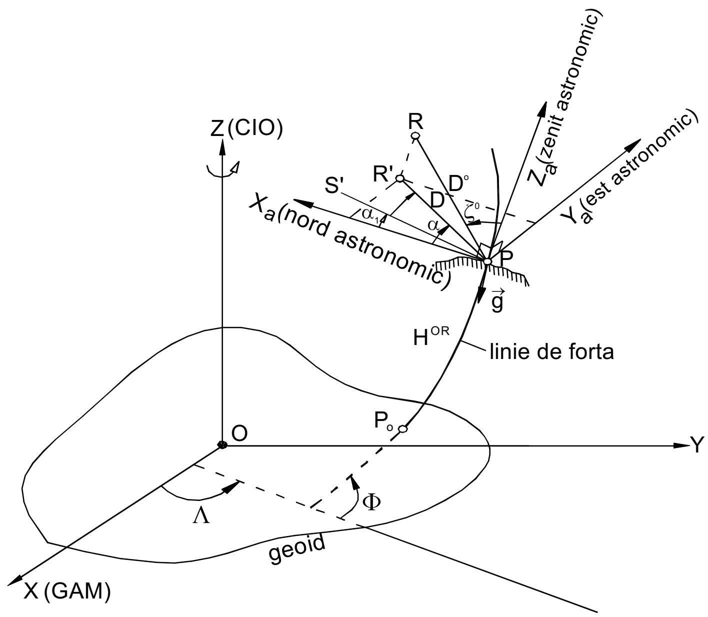


Fig. 5 Sisteme de coordonate naturale

Poziția punctului *P* poate fi definită, de asemenea, prin alte coordonate globale şi anume **coordonatele astronomice** Φ, Λ (latitudine şi longitudine astronomică) completate cu altitudinea ortometrică H^{OR}. Aceste coordonate vor fi denumite **coordonate astronomice globale** (deşi H^{OR} nu este dedusă prin metode astronomice).

Latitudinea astronomică Φ este unghiul format de verticala punctului *P* cu planul geoidului.

Longitudinea astronomică L este unghiul diedru format de planul meridianului astronomic al punctului *Greenwich*, cu planul meridianului astronomic al punctului P.

Coordonatele astronomice ***Φ*** şi ***L*** determină poziția verticalei în punctul considerat.

Odată cu aducerea axei principale a oricărui instrument geodezic în poziție verticală, se încadrează observațiile geodezice în sistemul natural de referință menționat**.**

3.3.2 Sistemul astronomic local

Sistemul în care punctul de stație ***P*** îndeplineşte rolul de origine a sistemului *(topocentru)* se nume;te **sistem local**. Sensul pozitiv al axelor de coordonate este considerat când:

- axa $\boldsymbol{Z_a}$ este îndreptată după tangenta la linia de forță, către zenitul astonomic;

- planul $\boldsymbol{X_a Y_a}$ este perpendicular pe direcția gravității (este numit şi *plan orizontal*);
- axa $\boldsymbol{X_a}$ este situată în meridianul astronomic al punctului considerat (direcția nord), iar axa $\boldsymbol{Y_a}$ este îndreptată spre direcția estului astronomic.

Evident, fiecărui punct de stație îi corespunde un alt sistem astronomic. În raport cu topocentrul, poziția oricărui punct învecinat poate fi exprimată prin *coordonatele carteziene astronomice* locale $X_a Y_a Z_a$.

În sistemul astronomic local poziția unui punct ***R***, aflat în legătură directă cu punctul de stație care îndeplineşte rolul de topocentru, poate fi exprimată şi în funcție de următoarele observații geodezice (fig.5):
- D^o - *distanța înclinată* dintre cele două puncte
- α - *azimutul astronomic*, care este unghiul dintre direcția *PR* şi meridianul astronomic al punctului de stație
- ζ^0 - *unghiul zenital*, care este unghiul dintre verticala locului şi direcția *PR*

Măsurătorile $D^o, \alpha,$ ζ^0 (completate, după caz, cu β) sunt denumite şi *coordonate astronomice polare locale.*

Legătura dintre cele două categorii de coordonate naturale locale este:

$$X_a = \begin{Vmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{Vmatrix} = D^0 \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \cdot \sin\zeta^0 \\ \sin\alpha \cdot \sin\zeta^0 \\ \cos\zeta^0 \end{Vmatrix}$$

3.4 Sisteme de coordonate convenționale

Sistemele de coordonate denumite *convenționale* sunt definite în raport cu elipsoidul de referință (fig. 6) pe care se proiectează rețelele geodezice de sprijin de ordin superior. În comparație cu sistemele naturale de coordonate, care se raportau direct la procesele de măsurare, se consideră că sistemele convenționale de coordonate se raportează, de regulă, la procesele de calcul.

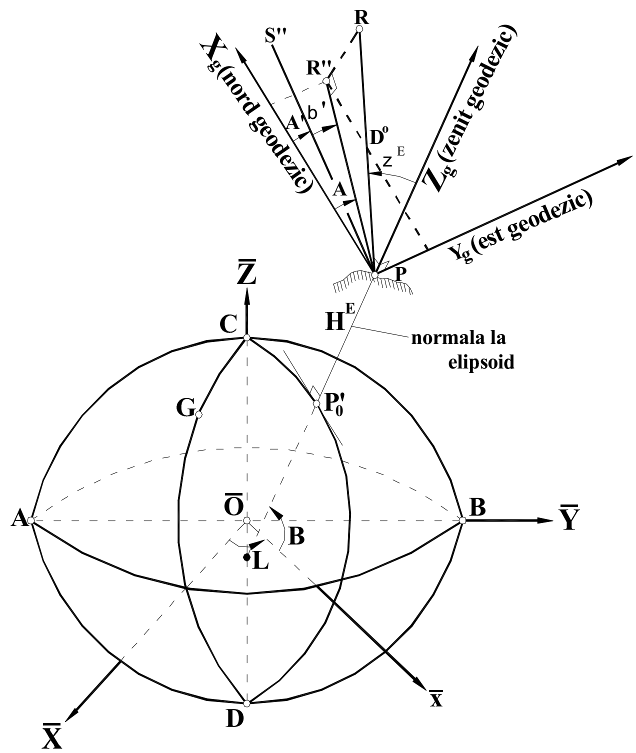


Fig. 6 Sisteme de coordonate convenționale

3.4.1 Sistemul global elipsoidal

Sistemul cartezian global elipsoidal $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, (fig. 6) este omolog cu sistemul cartezian global geocentric. Având în vedere modalitatea de determinare a oricărui elipsoid de referință, rezultă o apropiere mare, până aproape de coincidență, a originilor $\bar{O}$ şi O ale celor două sisteme de coordonate şi de asemenea a axelor de coordonate $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ *şi X, Y, Z* (fig. 5 şi 6).

Poziția punctului *P,* situat pe suprafața fizică a pământului, poate fi definită prin coordonatele carteziene $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, în raport cu originea $\bar{O}$.

Prin analogie cu coordonatele naturale *F, L,* H^{OR} se definesc *coordonatele elipsoidale B, L,* H^E, prin care se poate descrie, de asemenea, poziția punctului *P* în sistemul global elipsoidal:

- *latitudinea geodezică* ***B*** este unghiul format de normala la elipsoid în punctul *P* cu planul ecuatorului elipsoidului de referință
- *longitudinea geodezică* ***L*** este unghiul diedru format de meridianul geodezic al punctului *P* cu meridianul geodezic al punctului Greenwich

- *altitudinea elipsoidală* $\boldsymbol{H}^E$ este segmentul de normală cuprins între poziția punctului pe suprafața fizică (P) şi proiecția sa pe suprafața elipsoidului *(P_o')*.

3.4.2 Sistemul elipsoidal local

Prin analogie cu sistemul astronomic local descris se poate defini sistemul elipsoidal local (fig. 6), în care punctul de stație *P* îndeplineşte rolul de origine, iar axele de coordonate au sensul pozitiv după cum urmează:

- axa Z_g este orientată după normala la elipsoid în punctul *P* considerat, către zenitul geodezic
- axa X_g este situată în meridianul geodezic al punctului *P* (direcția nordului geodezic)
- axa Y_g este orientată spre estul geodezic

Din compararea fig. 5 şi 6, rezultă că măsurătorilor α şi ζ^0 le corespund, în sistemul elipsoidal local:

- azimutul geodezic *A*
- unghiul zenital elipsoidal ζ^E

Distanța înclinată (măsurată) D^o este preluată fără modificări şi în sistemul elipsoidal local. Prin urmare, poziția punctului *R* poate fi descrisă în acest sistem prin utilizarea mărimilor *A,* ζ^E şi D^o. Acestea sunt denumite şi *coordonate elipsoidale polare locale*.

CAP.4 DATE GEODEZICE FUNDAMENTALE DE REFERINȚĂ

Datele geodezice fundamentale de referință determină poziționarea sistemului de coordonate utilizat în interiorul sistemului cartezian geocentric. Deşi în principiu operațiunea menționată poate fi realizată pentru oricare dintre sistemele de coordonate posibile, în geodezie intervine în mod deosebit, şi aproape exclusiv, încadrarea sistemului de coordonate global elipsoidal $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ (fig.6) în sistemul cartezian geocentric *X, Y, Z* (fig.5).

La noi în țară punctul geodezic care a îndeplinit rolul principal în operațiunea menționată a fost numit ***punct geodezic fundamental***. În plus, sistemul *X,Y,Z* de referință, este denumit şi sistem fundamental geodezic, ca urmare a rolului pe care îl îndeplineşte.

Determinarea datelor geodezice fundamentale de referință, precum şi a punctului geodezic fundamental constituie una din problemele importante şi în acelaşi timp dificile, ale geodeziei, pentru care se cunosc diferite rezolvări (*Helmert 1880* şi *1962*, *Krasovski 1955, Heiskanen - Moritz 1967*, *Torge 1975*, *Groten 1979* etc.).

Dificultățile de rezolvare a problemei menționate sunt funcție directă de complexitatea acceptată la formularea problemei însăşi. Astfel, sub forma sa cea mai generală, determinarea datelor geodezice fundamentale de referință ar include determinarea următorilor parametri (fig. 7):

1 coordonatele $X_{\bar{0}}, Y_{\bar{0}}, Z_{\bar{0}}$ ale originii sistemului global elipsoidal în interiorul sistemului cartezian geocentric;

2 unghiurile de rotație $\varepsilon_{\overline{X}}, \varepsilon_{\overline{Y}}, \varepsilon_{\overline{Z}}$ ale axelor sistemului elipsoidal în raport cu sistemul geocentric;

3 deoarece se anticipează utilizarea elipsoidului ca suprafață de referință la rezolvarea problemelor geodezice, la cei 6 parametri menționați se adaugă parametri ***a*** (semiaxa mare) şi ***f*** (turtirea) care definesc elipsoidul (optim) corespondent.

4.1.Datele geodezice fundamentale de referință servesc la încadrarea optimă a elipsoidului de referință în interiorul geoidului, pentru suprafața avută în vedere (o țară, un grup de țări, un continent ş.a.).

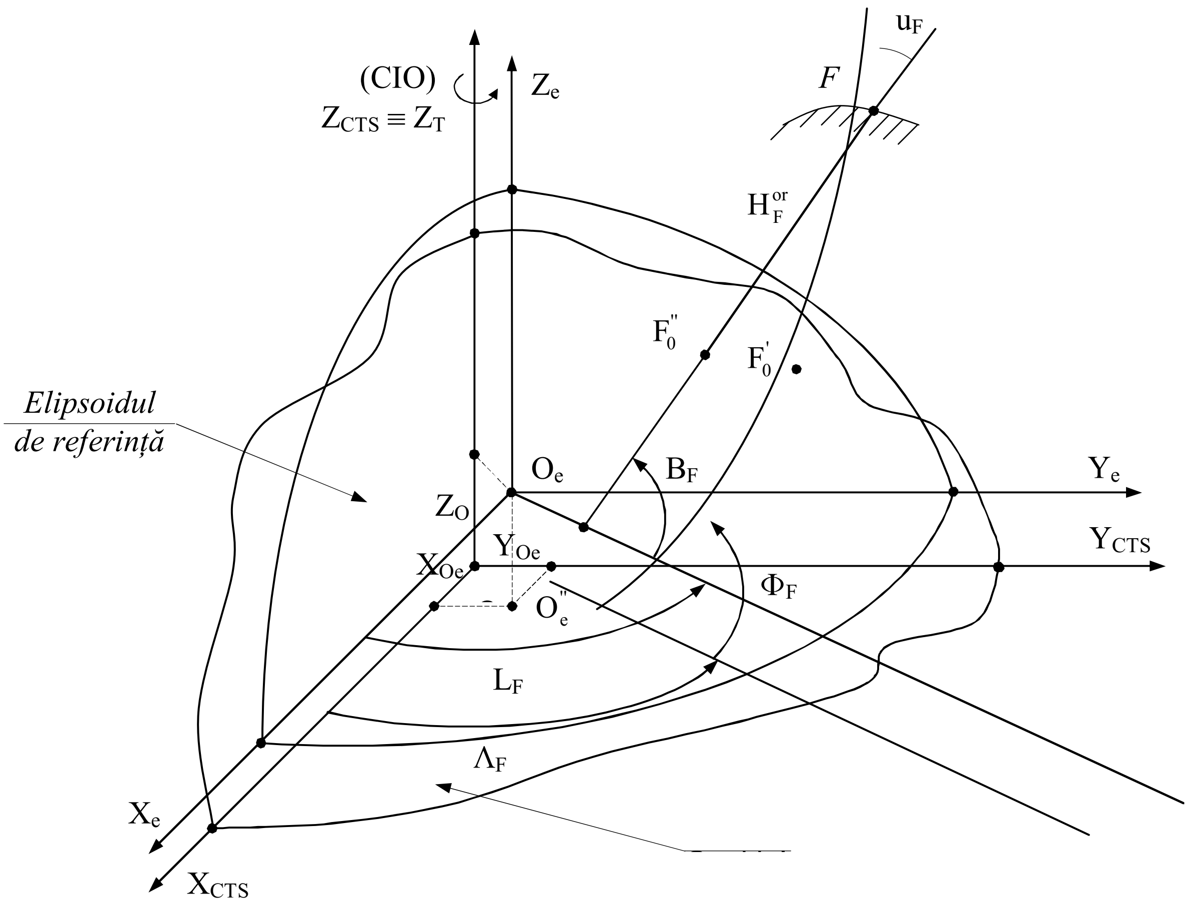


Fig. 7. Datele geodezice fundamentale de referință.

Se consideră F un *punct fundamental* pentru care se cunosc atât coordonatele astronomice de poziție (Φ_F, Λ_F) cât şi coordonatele geodezice elipsoidale (B_F, L_F).

Punctul F este un punct de la care se încep calculele în rețeaua geodezică considerată şi de aceea el este denumit *punct fundamental*. De regulă, punctul fundamental este reprezentat de un observator astronomic cu mare tradiție (cu peste 100 ani vechime sau chiar mult mai mult) în care există un pilastru principal al cărui centru reprezintă aşa numitul *punct fundamental*.

Exemple:

1. În anul 1930 s-a adoptat ca *punct fundamental* pentru *România* observatorul astronomic militar din *Dealul Piscului* cu o vechime de 120 ani. Acest observator ca punct fundamental al rețelei de triangulație a *României* a fost folosit în perioada 1930-1950.

2. Observatorul de la *Pulkovo*, situat în *Federația Rusă*, la cca 2000 km de *Bucureşti*, are o vechime de cca 200 ani. A fost folosit ca punct fundamental pentru rețeaua *Europei de est*, iar pentru *România* între 1950 şi până în prezent.

Asa cum se observa din fig. 7:

$$\begin{cases} B_F \neq \Phi_F \\ L_F \neq \Lambda_F \end{cases} \tag{4.1}$$

F_0'' = punctul în care *verticala locului* intersectează *geoidul*;

F_0' = punctul în care *normala la elipsoid* intersectează *elipsoidul*.

Legătura dintre coordonatele astronomice şi coordonatele elipsoidale se poate urmări efectuând o secțiune verticală prin *punctul fundamental F*.

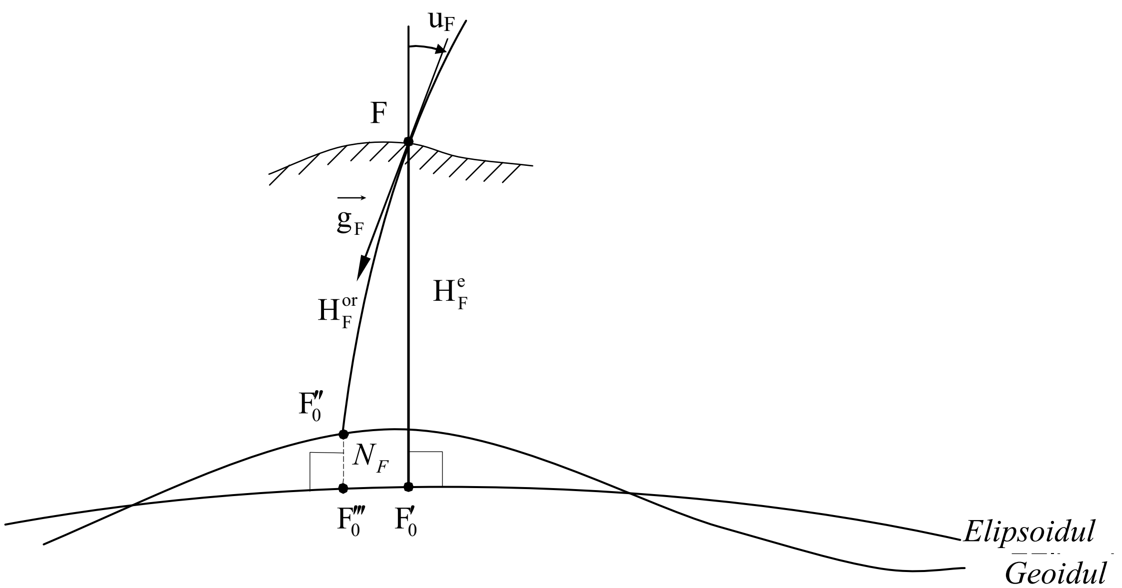


Fig.8. Secțiune verticală prin punctul fundamental F.

Pe figură s-au notat:

u_F – *deviația verticalei* în punctul F, cu componentele astronomo-geodezice:

N_F – *ondulația geoidului* in punctul fundumental F;

Se demonstrează în geodezia superioară următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \Phi_F &= B_F + \xi_F^{ag}; \\ \Lambda_F &= L_F + \eta_F^{ag} \sec \Phi_S; \end{aligned} \tag{4.2}$$

ξ_F^{ag} – *componenta astronomo-geodezică în meridian*;

η_F^{ag} – *componenta astronomo-geodezică în primul vertical.*

Pe altitudini:

$$H_F^e = H_F^{or} + N_F = H_F^n + \zeta_F, \quad (4.3)$$

N_F – ondulatia geoidului în punctul fundamental F;

ζ_F – perturbanța (anomalia) altitudinii în sistemul normal al lui **Molodensk** folosit actualmente oficial în *România* .

Aşa cum este reprezentat şi în figurile 7 şi 8, în realitate $u_F \neq 0$, $N_F \neq 0$.

4.1 Principiile metodei Helmert

Această metodă a fost folosită de către *Hayford* în anul *1909* la determinarea parametrilor primului elipsoid internațional, care îi poartă numele. În *metoda Helmert* se neglijează unghiurile de rotație dintre axele de coordonate ale celor două sisteme menționate.

$\varepsilon_{\bar{X}} = \varepsilon_{\bar{Z}} = \varepsilon_{\bar{Y}} = 0$;

În continuare, este înlocuită determinarea coordonatelor $X_{\bar{0}}, Y_{\bar{0}}, Z_{\bar{0}}$ cu determinarea componentelor deviației verticalei ξ_0, η_0 şi a ondulației geoidului N_0 în punctul geodezic fundamental P_0.

Prin intermediul celor trei mărimi ξ_0, η_0, N_0 se realizează, de asemenea, *poziționarea şi orientarea* elipsoidului de referință în interiorul geoidului.

Deci, parametri care definesc datele geodezice fundamentale de referință în metoda Helmert sunt: ξ_0, η_0, N_0, a, f.

Pentru a putea efectua prelucrarea datelor pe suprafața elipsoidului de referință, este necesară, în principiu, cunoaşterea unui azimut geodezic inițial A_{01}**,** precum şi lungimea unei linii geodezice inițiale s_{01} din punctul fundamental P_0 spre un alt punct P_1 din rețea. Deoarece scara rețelei considerate se poate determina şi ulterior în etapa de prelucrare a datelor, prin utilizarea unui număr oarecare de distanțe măsurate, de obicei se face abstracție de lungimea s_{01} în acest stadiu al calculelor.

Metoda Helmert presupune o rețea geodezică de suprafață, în care s-au efectuat determinări astronomice *Φ, Λ* şi *α* , măsurători de baze geodezice, observații unghiulare sau de direcții. Punctele în care s-au efectuat determinări astronomice complete sunt denumite **puncte**

Laplace şi numărul lor este mai mic în comparaţie cu numărul total al punctelor geodezice din reţeaua considerată. Calculele se vor efectua pe un elipsoid oarecare, ai cărui parametri *a* şi *f* sunt consideraţi ca valori provizorii. Metoda caută să determine alţi parametri (*a* şi *f*), pentru un elipsoid care să corespundă în mod optim reţelei considerate:

$$a = a^0 + da \quad \text{şi} \quad f = f^0 + df$$

Mărimile "*da*" şi "*df* " urmează a fi determinate pe baza algoritmului de calcul elaborat de Helmert şi sunt exprimate:

da - în metri,

df - mărime adimensională

Triangulaţia veche a României (până la al II-lea război mondial) s-a bazat pe existenţa punctului fundamental în Bucureşti, pe Dealul Piscului la observatorul astronomic militar(OAM). S-a acceptat tangenţa elipsoidului la geoid în punctul fundamental, iar orientarea elipsoidului Hayford folosit s-a bazat doar pe determinările astronomice.

Actuala triangulaţie a României (şi a altor ţări europene) se bazează pe următoarele date geodezice fundamentale:

1 **elipsoidul de referinţă este elipsoidul KRASOVSKI**

2 **punctul fundamental al reţelei este punctul PULKOVO** (Rusia) având orientarea spre punctul BUGRÎ şi are următoarele coordonate :

B = 59°46'15", 359

L = 30°19'28", 318

A = 121°06'42", 305

În funcţie de mărimea suprafeţei acoperite de observaţiile geodezice şi astronomice avute la dispoziţie, determinările datelor geodezice de referinţă au un caracter local (când reţeaua astronomo - geodezică acoperă o anumită zonă dintr-o ţară sau o ţară de suprafaţă mică sau medie) sau un caracter regional continental (când reţeaua astronomo - geodezică acoperă astfel de teritorii). Rezultatul final este diferit de la caz la caz, constând în determinarea unui anumit elipsoid specific care prin dimensiuni, poziţie şi orientare, aproximează geoidul în mod optim, dar numai pentru suprafaţa considerată (sau cel mult pentru zone învecinate).

În determinarea datelor geodezice fundamentale se mai ţine cont şi de diferenţele existente între mărimile astronomice şi mărimile geodezice.

Pentru rețelele locale ca date de referință pot fi folosite următoarele: coordonatele unui punct preluate din rețeaua de stat precum şi orientarea unei laturi din rețea.

4.2 Punctul fundamental în rețeaua de nivelment (punctul zero)

Rețelele de nivelment de stat sunt racordate la un punct fundamental numit şi **punct zero fundamental** sau **punct origine**. Stabilirea şi utilizarea punct fundamental implică în principiu următoarele probleme:

1.Problema amplasamentului punctului zero fundamental

Soluționarea acestei probleme se poate face prin :

a) Amplasarea punctului zero fundamental în imediata apropiere a coastelor mărilor şi oceanelor care oferă avantajul unor legături directe cu volum minim de lucrări între acest punct şi instrumentele prin care se controlează şi se înregistrează variația în timp a nivelului mării respective. Stabilitatea reperului însă este mică din cauză că în zonele de coastă se produc mişcări pe verticală destul de însemnate în decursul anilor.

b) Amplasarea punctului zero fundamental în zone stabile (zone stâncoase) din punct de vedere geologic la o depărtare oarecare de nivelul mării.

2.Problema verificării stabilității punctului zero fundamental

În acest sens se prezintă următoarele soluții practice:

a) Stabilitatea reperului este urmărită în raport cu nivelul mării cu care reperul se află în legătură. Rezultatele nu sunt însă exacte deoarece nivelul mărilor este în continuă modificare în timp.

Înregistrarea variațiilor temporale ale nivelului mării se realizează prin dispozitive speciale numite *maregrafe* sau *mire maritime*. Fiecare maregraf este racordat la *3 - 5* repere de nivelment (unul dintre acestea fiind denumit reper principal) amplasat în apropierea maregrafului, iar prin intermediul "nivelmentului de coastă" datele sunt transmise la rețeaua de nivelment de stat. În plus sunt necesare informații cu privire la condițiile climaterice, temperatură şi densitatea apei mării pentru a putea efectua prelucrările matematice ulterioare. La noi în țară sunt instalate maregrafe în portul Constanța, Tomis şi Mangalia. Pe baza datelor înregistrate la maregraful din Constanța, pe o perioadă de aproximativ *40* de ani, s-a determinat viteza de creştere a nivelului Mării Negre ca fiind de ≈ + *4 mm / an.*

b) Maregrafe instalate în lungul coastei la intervale de *100 - 300 km* racordate între ele printr-o rețea de nivelment geodezic repetat la anumite intervale de timp.

c) Pentru punctele ”zero - fundamentale” amplasate în zone continentale cu mişcări crustale verticale mici, problema stabilității nu se mai pune. **Sistemul de nivelment folosit în prezent în țara noastră este denumit *sistem Marea Neagră „0” 1975***

CAP.5 TIPURI DE MĂSURĂTORI EFECTUATE ÎN REȚELELE GEODEZICE

Lucrările efectuate în rețelele geodezice de sprijin au ca obiectiv final determinarea coordonatelor punctelor rețelei într-un anumit sistem de referință. Pentru a realiza acest obiectiv în rețelele geodezice se efectuează diferite măsurători, a căror natură depinde de tipul şi destinația rețelei. Prin urmare, într-o rețea dată nu pot fi întâlnite toate tipurile de măsurători geodezice posibile.

5.1 Unghiuri şi direcții azimutale

Unghiurile şi direcțiile azimutale pot determina o rețea de triangulație din punct de vedere geometric. Pentru un triunghi *ABC*, în care latura *AB* este cunoscută, ar fi necesar şi suficient să se cunoască unghiurile din punctele *A* şi *B*.

În lucrările de triangulație această determinare reprezintă un caz izolat, măsurându-se aproape întotdeauna şi unghiul din punctul *C* (fig. 8 b).

În acest fel, măsurătorile unghiulare din punctele *A, B, C* sunt caracterizate printr-un „grad de libertate" care poate fi anulat de necesitatea ca unghiurile *compensate* să satisfacă o anumită *condiție geometrică*.

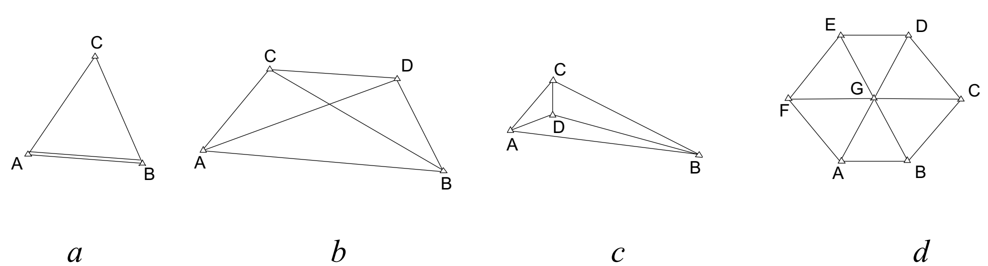


Fig. 8 Figuri elementare, componente ale rețelelor de triangulație

a – triunghi geodezic; b – patrulater geodezic; c,d – poligoane cu punct central.

Introducerea unor măsurători unghiulare suplimentare (fig. 8 b, c, d) conduce la crearea de noi grade de libertate în rețea, reclamând respectarea de către valorile compensate a unui număr corespunzător de condiții geometrice.

5.2 Lungimi

Lungimile măsurate determină scara rețelei de triangulație. În acest scop este strict necesară cunoaşterea unei singure lungimi, orice măsurătoare suplimentară conducând, ca şi în cazul precedent, la necesitatea respectării unei noi condiții geometrice.

Lungimile din rețelele de triangulație pentru care se acceptă ponderea $\boldsymbol{p} = \infty$ se numesc ***baze geodezice***. Asemenea valori provin din măsurători precise, efectuate cu firul de invar sau cu ajutorul instrumentelor electronice. Se pot introduce şi valori finite pentru ponderi, urmând ca valoarea cea mai probabilă a acestor lungimi să fie determinată prin compensarea rețelei de triangulație.

Este de menționat că măsurătorile de lungimi micşorează propagarea erorilor longitudinale din rețelele de triangulație.

În rețelele de triangulație de ordin inferior lungimile pot fi calculate din coordonatele punctelor de ordin superior existente eventual în rețea şi care sunt considerate ***puncte vechi***.

5.3 Azimute astronomice

În cazul rețelelor geodezice, azimutele astronomice $\boldsymbol{\alpha}$ se vor transforma în azimute geodezice ***A*****,** pe baza ecuației *Laplace*, determinând orientarea rețelei de triangulație.

Utilizarea azimutelor *Laplace* este specifică rețelelor mari de triangulație, denumite şi *rețele astronomo - geodezice*. Deoarece aceste rețele se realizează cu o precizie superioară rețelelor de stat, micşorarea posibilelor erori de rotație ale întregii rețele se poate realiza prin măsurarea unor azimute *Laplace*, la capetele rețelei.

Prin relații matematice, azimutele Laplace pot fi reduse la planul de proiecție transformându-se în orientări θ . În rețelele de ordin inferior, orientările θ pot fi calculate din coordonatele punctelor de ordin superior existente eventual în rețea, şi care sunt considerate puncte vechi.

5.4 Coordonate astronomice

Coordonatele astronomice $\boldsymbol{\Phi}$***,*** $\boldsymbol{\Lambda}$ se transformă în coordonate geodezice ***B*** şi ***L*** prin intermediul relațiilor:

$$B = \phi - \xi$$

$$L = \Lambda - \eta \sec\phi$$ în care:

B → latitudine geodezică → unghiul format de normala în punctul *P* cu planul ecuatorului terestru

L → longitudine geodezică → unghiul diedru format de planul meridianului geodezic al punctului *P* cu planul meridianului geodezic al punctului *Greenwich*

Φ → latitudine astronomică → unghiul format de verticala punctului *P* cu planul ecuatorului

Λ → longitudine astronomică → unghiul diedru format de planul meridianului astronomic al punctului *P* cu planul meridianului astronomic *Greenwich* (meridian origine).

5.5 Unghiuri zenitale

Determinarea altitudinilor în rețelele de triangulație se realizează de cele mai multe ori prin metoda nivelmentului trigonometric care presupune măsurători de unghiuri zenitale.

Prelucrarea observațiilor zenitale se efectuează, în mod obişnuit, independent de prelucrarea unghiurilor azimutale şi a lungimilor. În cadrul geodeziei tridimensionale, prelucrarea tuturor acestor măsurători se execută însă în bloc.

5.6 Diferențe de nivel

Rețeaua nivelmentului de stat, precum şi alte rețele de nivelment sunt determinate prin măsurători de diferențe de nivel. Metoda nivelmentului geometric este mai precisă în comparație cu metoda nivelmentului trigonometric, însă mult mai laborioasă de aceea, metoda este puțin utilizată în cadrul rețelelor geodezice planimetrice (triangulație, trilaterație), numai unde accesul la punctele geodezice prin nivelment geometric nu este prea dificil.

5.7 Măsurători gravimetrice

În cadrul rețelelor gravimetrice se fac determinări absolute şi relative ale accelerației gravității. Determinări relative intervin şi în rețelele de nivelment geometric, fiind necesare la calculul corecțiilor specifice sistemului de altitudini folosit.

Deşi nu în mod direct, determinările gravimetrice intervin şi în rețelele de triangulație de ordin superior, la calculul componentelor astonomo-geodezice ale deviației verticalei ξ_{ag}, η_{ag}, precum şi al ondulațiilor cvasigeoidului ζ necesare la reducerea observațiilor geodezice la suprafața elipsoidului de referință.

]

CAP.6. ELEMENTE DE TEORIA POTENȚIALULUI

"Geodezia fizică studiază câmpul gravitații şi figura Pământului"(H. Moritz-1980).

6.1 Câmpul gravitații

Orice punct material situat pe suprafața Pământului este supus acțiunii unor forțe cum ar fi:

- gravitația sau forța de atracție îndreptată spre centrul de masă al Pământului, $\vec{F}$ **;**
- forța centrifugă, $\vec{q}$ **;**
- forțele de atracție exercitate de alte corpuri cerești (cele mai importante fiind forțele de atracție ale Soarelui, datorită masei sale şi forțele de atracție ale Lunii, datorită apropierii sale de Pământ).

Rezultanta acestor forțe o reprezintă gravitatea ***g***.
Porțiunea din spațiu în care se extinde influența complexă a atracției gravitaționale şi rotației Pământului constituie câmpul gravitații sau câmpul gravific.

6.1.1 Forța de atracție (gravitația)

Conform legii atracției universale a lui Newton, forța de atracție reciprocă $\vec{F}$ dintre două mase punctiforme $\boldsymbol{m_1}$ şi $\boldsymbol{m_2}$, situate la distanța ***d***, este dată de relația:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \overrightarrow{d_0},$$

Unde:

d_0 = este versorul direcției care uneşte masele m_1 şi m_2

G= este coeficientul de proporționalitate denumit *constanta atracției universale.*

După recomandările *Asociației Internaționale de Geodezie* (AIG***)*** din anul *1980,* valoarea acestei constante este:

$$G = (6672 \pm 4{,}1) \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$$

în sistemul internațional *SI*

Constanta atracției universale este numeric egală cu forța cu care se atrag între ele două corpuri cu masele egale cu unitatea, situate unul față de celălalt la o distanță egală cu unitatea.
Noțiunea de "masă egală cu unitatea" sau, noțiunea de "punct material", sunt pur convenționale, utile doar în raționamente.
Aceste noțiuni indică faptul că dimensiunile, respectiv masa corpului considerat, sunt neglijabile față de dimensiunile, respectiv masa sistemelor cu care acel corp este în interacțiune (*ex:* dimensiunile sau masa unui punct geodezic situat pe suprafața Pământului, în raport cu dimensiunile sau masa Pământului).
Forța de atracție exercitată de Pământ asupra unui punct de masă egală cu unitatea poate fi exprimată, aproximativ cu relația:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{M}{R^2},$$

unde:

M = este masa Pământului;

R= este raza medie a Pământului;

GM =este constanta gravitațională geocentrică, pentru care AIG prevede (*1980)*:

$GM = (39860047 \pm 5) \times 10^{7} m^{3} s^{-2}$

Masa Pământului este considerată ca având valoarea: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg iar în ipoteza formei sferice a Pământului, raza acestuia se consideră a fi $R \approx 6378 \times 10^{3} m$ pentru latitudinea $B=45^{o}$ şi densitatea medie a Pământului:

$\rho_{m}^{s} \approx 5{,}50 \times 10^{3} kgm^{-3}$

În cazul ipotezei formei elipsoidale a Pământului, densitatea acestuia se va considera:

$$\rho_{m}^{e} \approx 5{,}52 \times 10^{3} kgm^{-3}$$

Caracterul aproximativ al relației ce defineşte forța de atracție $\vec{F} = G \cdot \frac{M}{R^{2}}$ este generat de imprecizia cu care se cunosc sau se pot determina elementele componente.

În cazul densității medii ρ_{m}, se poate face aceeaşi remarcă întrucât, această mărime este funcție de mai mulți parametri dintre care cel mai important este adâncimea față de suprafața terestră. Dacă se urmăreşte variația mărimii densității funcție de adâncime, se pot distinge mai multe zone, după cum urmează:

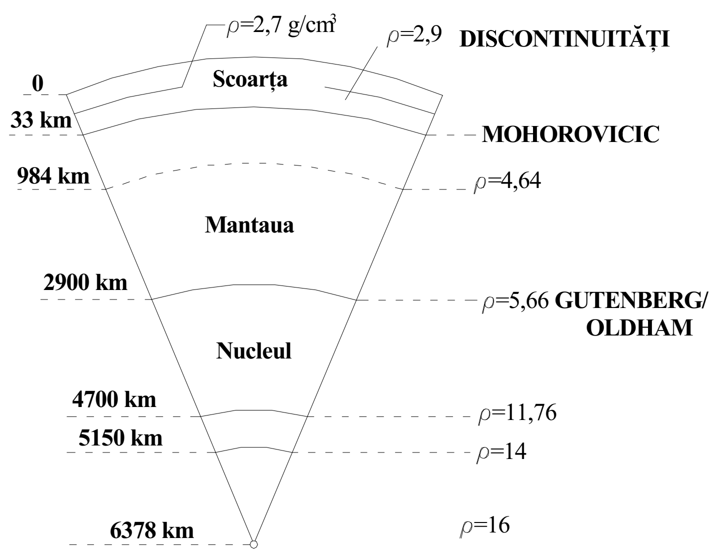


Fig.9 Variația densității

Într-o primă zonare, de ordinul I, structura internă a Pământului este reprezentată de trei geosfere: *scoarța, mantaua* şi *nucleul*. Limitele dintre aceste sfere se numesc *discontinuități de ordinul I*: *discontinuitatea Mohorovičič (Moho)* şi respectiv *discontinuitatea Oldham* sau *Gutenberg.*

Scoarța terestră este constituită din două straturi: stratul bazaltic continuu şi stratul granitic discontinuu, ambele de grosimi variabile. În continuare urmează şi alte subîmpărțiri numite *discontinuități de ordinul II.*

Pentru a putea exprima mai exact forța de atracție, se consideră un punct ***P(x,y,z)*** pe suprafața Pământului şi un punct curent ***A(a,b,c)*** situat la depărtarea ***l*** de punctul *P* (fig.10)**.** Pentru simplificare, se acceptă că punctul atras *P* are masa egală cu unitatea, iar masa punctului atractiv *A*, denumit şi punct sursă este *m*.

Într-un sistem de coordonate rectangular *XYZ* expresia forței de atracție este:

$$\vec{f} = -G \cdot \frac{m}{l^2} \cdot \vec{l}_{0,}$$

unde l_0 reprezintă versorul vectorului de poziție $\vec{l}$.

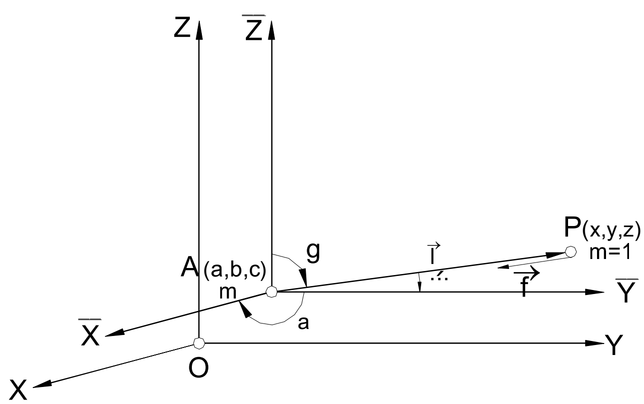


Fig.10 Forța de atracție

Componentele forței de atracție $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$ pe axele de coordonate se pot defini astfel:

$$f_x = f \cos(\vec{f}, X) = -G \cdot \frac{m}{l^2} \cdot \frac{x-a}{l} = -G \cdot m \cdot \frac{x-a}{l^3};$$

$$f_y = f \cos(\vec{f}, Y) = -G \cdot m \cdot \frac{y-b}{l^3};$$

$$f_z = f \cos(\vec{f}, Z) = -G \cdot m \cdot \frac{z-c}{l^3};$$

unde:

$$l = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Pentru stabilirea influenței de atracție a întregului glob terestru asupra punctului ***P***, trebuie ținut cont de variația densității pentru fiecare element de volum *dv*:

$$\rho = \rho(a,b,c,) = \frac{dm}{dv}$$

Integrând expresia forței de atracție $\vec{f} = -G \cdot \frac{m}{l^2} \cdot \vec{l_0}$ vom obține influența de atracție a globului asupra punctului ***P*** după cele 3 componente: F_x, F_y, F_z :

$$\vec{F} = -G\iiint_v \frac{dm}{l^2} \cdot \vec{l_0} = -G\iiint_v \frac{\rho \cdot dv}{l^2} \cdot \vec{l_0}$$

Componentele pe axele de coordonate vor fi:

$$F_x = -G\iiint_v \frac{x-a}{l^3}\rho \cdot dv$$

$$F_y = -G\iiint_v \frac{y-b}{l^3}\rho \cdot dv$$

$$F_z = -G\iiint_v \frac{z-c}{l^3}\rho \cdot dv$$

unde: $dv = da \cdot db \cdot dc$

6.1.2 Forța centrifugă

Datorită mişcării de rotație a Pământului în jurul axei sale, punctul ***P*** este supus unei forțe centrifuge $\vec{q}$ **,** ce acționează în planul paralelului de rază *r* al punctului *P*. Expresia de definiție a forței centrifuge în cazul punctului *P*, cu masa egală cu unitatea şi funcție de viteza liniară pe traiectorie *v*, este dată de:

$$\vec{q} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{r_o}$$

Se ştie că: $v = r \cdot \omega$ (ω = viteza unghiulară)

Deci:

$$\vec{q} = r\omega^2 \vec{r_0}$$

Fig. 11 Forța centrifugă

Viteza unghiulară medie în cazul Pământului, recomandată de *AIG (1980)* este:

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{rad } s^{-1}$$

Forța centrifugă este variabilă pe suprafața Pământului, având o valoare maximă pentru punctele situate pe ecuator şi fiind nulă pentru poli, unde *r = 0.*

Componentele forței centrifuge pe axele de coordonate $\vec{q}(q_x, q_y, q_z)$ vor fi:

$$q_x = q \cdot \cos(\vec{q}, X) = r \cdot \omega^2 \frac{x}{r} = x\omega^2;$$

$$q_y = q \cdot \cos(\vec{q}, Y) = y\omega^2;$$

$$q_z = q \cdot \cos(\vec{q}, Z) = 0$$

6.1.3 Gravitatea (Greutatea)

Gravitatea este rezultanta forțelor care acționează asupra punctului ***P.*** Componentele principale ale acestei mărimi sunt:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{q}$$

Lucrându-se frecvent cu puncte de masă egală cu unitatea, gravitatea este numeric egală cu accelerația sa.

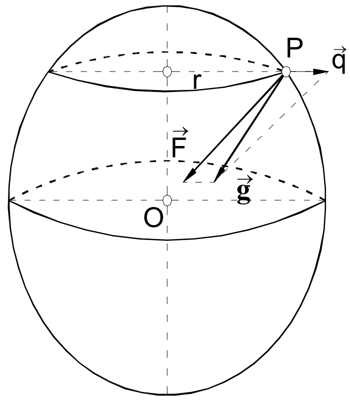


Fig. 12 Greutatea

Unitatea de măsură pentru gravitate(greutate) în amintirea învățatului italian Galileo Galilei este GALUL $\equiv \frac{cm}{s^2}$ (în sistemul CGS).

La pol valoarea gravitației este $\approx$ *983 gal*, iar la ecuator este de $\approx$ *978 gal*. Datorită diferenței nesemnificative în această unitate de măsură, se lucrează de obicei în *mgali (1mgal=10*$^{-3}$ *gal*).

Considerându-se proiecțiile pe cele trei axe de coordonate, se obțin componentele gravității:

$$g_x = F_x + q_x = -G\iiint_v \frac{x-a}{l^3}\rho \cdot dv + x\omega^2$$

$$g_y = F_y + q_y = -G\iiint_v \frac{y-b}{l^3}\rho \cdot dv + y\omega^2$$

$$g_z = F_z + q_z = -G\iiint_v \frac{z-c}{l^3}\rho \cdot dv$$

6.2 Suprafețe echipotențiale

În cazul potențialului gravității, avem următoarele expresii:

$$\frac{dW}{ds} = g_s = g\cos\left(\widehat{g,s}\right),$$

valabile pentru orice direcție *s*.

Dacă se consideră: $\cos\left(\widehat{g,s}\right) = 0$ adică, dacă se are în vedere o direcție *s* perpendiculară pe direcția gravității *g,* rezultă:

$dW = 0$

sau:

W(x, y, z,) = constant = *C*

Expresia reprezintă ecuaţia unei suprafeţe echipotenţiale, denumită, de către Laplace, *suprafaţă de nivel*. Rezultă că suprafaţa de nivel este perpendiculară, în oricare din punctele sale, pe direcţia gravităţii.

Schimbându-se valoarea constantei *C* se obţin diverse suprafeţe de nivel.

Dintre suprafeţele de nivel posibile, pentru geodezie prezintă o importanţă deosedită suprafaţa de nivel zero, denumită şi geoid, noţiune introdusă de către Listing în anul *1873.* Această suprafaţă echipotenţială a fost propusă de Gauss ca „***figură matematică a pământului***" :

$W(x, y, z) = W_0$

Fiind în permanenţă perpendicular la direcţia gravităţii, geoidul are o configuraţie foarte complexă. Modificările de densitate din interiorul Pământului conduc la schimbarea geometriei suprafeţelor de nivel (inclusiv a geoidului), curbura acestora depinzând de densitatea ρ **.**

Din acest motiv este imposibilă o formulare analitic - matematică a acestei suprafeţe complexe, dependentă în permanenţă de distribuţia şi densitatea maselor în interiorul Pământului.

Ecuatorul geoidului este curba definită ca fiind locul geometric al punctelor pentru care latitudinea astronomică Φ este zero. Paralelul, respectiv meridianul geoidului sunt definite de ecuaţiile: Φ = constant, respectiv, Λ = constant,

Λ fiind longitudinea astronomică. Datorită structurii interne a Pământului aceste curbe sunt foarte complexe, cu multe ondulaţii, fără muchii sau vârfuri.

Geoidul este definit uzual ca suprafaţa medie a mărilor "*linişţite*" (în echilibru) prelungită pe sub continente.

H. Bruns a formulat scopul principal al geodeziei fizice ca fiind determinarea suprafeţelor de nivel ale câmpului gravităţii, ceea ce echivalează cu determinarea funcţiei potenţial $W(x, y, z)$

Într-adevăr, cunoscând expresia potenţialului unui corp, se pot face estimări privind forma suprafeţei sale. Deoarece suprafeţele de nivel sunt suprafeţe echipotenţiale, diferenţa de potenţial dintre două suprafeţe de nivel este o mărime constantă. Rezultă că, creşterea de potenţial (deci de lucru mecanic) nu depinde de drumul parcurs, pentru trecerea unui punct de pe o suprafaţă de nivel pe alta (traseul 1 sau traseul 2 în figura 13).

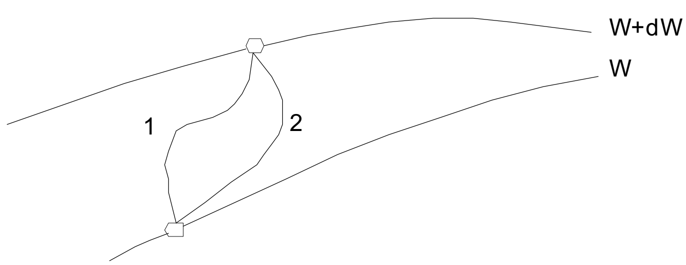


Fig.13 Secţiune prin suprafaţa de nivel

Prin urmare, suma creşterilor de potenţial pe un contur închis, indiferent de sensul de parcurgere, este zero:

$$\oint dW = 0$$

O altă direcţie importantă pentru geodezie este direcţia *h*, paralelă cu direcţia gravităţii, adică perpendiculară la suprafeţele de nivel:

$$\cos(\vec{g}, \vec{h}) = \pm 1$$

Pentru depărtarea dintre suprafețele de nivel se alege sensul crescător spre exteriorul suprafeței Pământului (sensul invers forței $\vec{g}$) şi ca urmare din relația anterioară se va lua semnul minus. Cu aceasta, se obține:

$$\frac{dW}{dh} = -g,$$

sau:

$$dh = -\frac{dW}{g},$$

unde: dh reprezintă distanța dintre suprafețele de nivel caracterizate prin potențialele *W* şi respectiv *W+dW*.

Relațiile prezentate reprezintă un exemplu de legătură dintre aspectul geometric *(h)* şi cel dinamic (*W*) în cadrul problematicii abordate în geodezia fizică. Deoarece $g_{ec} < g_{pol}$, rezultă că distanța dintre două suprafețe de nivel se micşorează de la ecuator spre pol, deci suprafețele de nivel nu sunt paralele înte ele. Din relația anterioară se mai poate deduce o proprietate importantă a suprafețelor de nivel: deoarece între două suprafețe de nivel, *g* nu poate lua niciodată valoarea infinit, rezultă că distanța *dh*, dintre aceste suprafețe nu poate fi niciodată zero. Aceasta înseamnă că suprafețele de nivel nu se ating şi nu se întretaie niciodată. Se poate demonstra că suprafețele de nivel sunt suprafețe continue, închise, fără muchii sau vârfuri. Rezultă că liniile care intersectează suprafețele de nivel sub unghiuri drepte, vor avea o anumită curbură. Ele se numesc *linii de forță.* Tangenta la linia de forță într-un punct *P* dă direcția gravității $\vec{g}$, care poate fi materializată prin direcția firului cu plumb. O imagine aproximativă, a suprafețelor de nivel şi a liniilor de forță este reprezentată în figura (2.6). Segmentul de linie de forță cuprins între poziția punctului *P* pe suprafața fizică a Pământului şi proiecția sa pe geoid P_0 se numeşte *altitudine ortometrică.*

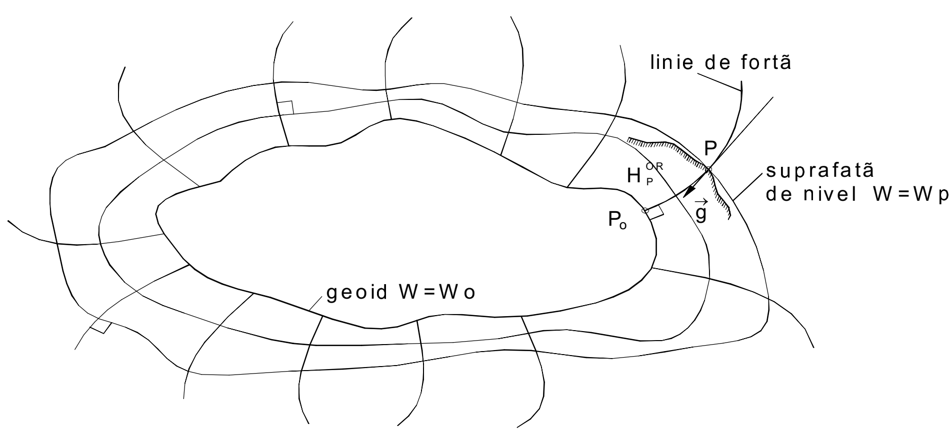


Fig.14 Suprafețe de nivel, linii de forță

CAP.7. SISTEME DE ALTITUDINI

7.1 Consecințele neparalelismului suprafețelor de nivel

Definirea unui sistem de altitudini constă, în principiu, în:
- alegerea unei suprafețe de referință;
- adoptarea unei definiții, cu semnificație fizică sau geometrică, prin care să se descrie poziția punctelor de pe suprafața Pământului în raport cu suprafața de referință.

După cum s-a stabilit în *cap.2*, suprafețele de nivel nu sunt suprafețe paralele. În fiecare punct din spațiu se poate scrie ecuația fundamentală:

$$dW = -gdh,$$

prin care se stabilește dependența dintre depărtarea ***dh*** și diferența de potențial ***dW*** existente între două suprafețe de nivel infinit apropiate.

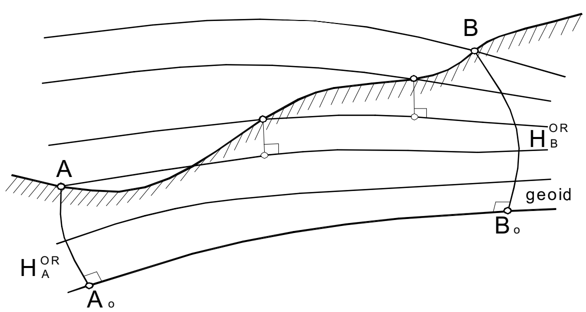
Pentru a urmări unele dintre consecințele neparalelismului suprafețelor de nivel pentru lucrările geodezice, ne vom referi la sistemul de altitudini ortometrice, în care geoidul este suprafața de referință iar altitudinea ortometrică este segmentul de linie de forță cuprins între poziția punctului pe suprafața terestră şi respectiv pe geoid. Din (fig.3.1,a), se observă că suma diferențelor de nivel elementare, măsurate pe traseul cuprins între punctele *A* şi *B*, notată:

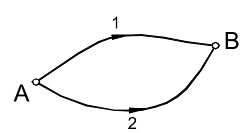
$$\sum_{A}^{B} \Delta h = \Delta h_{AB}$$

nu este egală cu diferența altitudinilor ortometrice ale punctelor *A* şi *B,* notate H_A^{OR} şi H_B^{OR}.

Cu această remarcă se pune în evidență faptul că rezultatul obținut direct prin lucrările de nivelment geometric $\sum_{A}^{B} \Delta h$ este dependent de traseul parcurs.

Generalizând (fig.3.1,b), rezultă că sumele diferențelor de nivel elementare măsurate pe traseele 1 şi 2 nu vor fi egale între ele, nici chiar în cazul ideal, al observațiilor geodezice perfecte, fără erori de măsurare. În consecință, în poligonul format, va rezulta o neînchidere care se mai numeşte şi *eroare de principiu a nivelmentului geometric geodezic.*





a b

Fig. 15 Consecințele neparalelismului suprafețelor de nivel asupra determinărilor nivelitice pe linii şi poligoane de mari dimensiuni

Pentru a obține un control corect în lucrările de nivelment geometric de ordin superior este necesar ca în paralel să se efectueze şi determinări gravimetrice, pentru calculul diferențelor de potențial:

$$\int_A^B g dh = -\int_A^B dW = W_A - W_B$$

sau, într-o aproximație impusă de posibilitățile practice:

$$W_A - W_B = \sum_A^B g\Delta h$$

Pe un contur închis:

$$\oint g dh = W_A - W_A = 0$$

Nivelmentul geometric superior fără determinări gravimetrice este lipsit de rigoarea necesară unor astfel de lucrări, controlul efectuat prin calcularea neînchiderilor în poligoane fiind afectat de erorile de principiu menționate anterior:

$$\oint dh \neq 0$$

Pentru liniile şi poligoanele de nivelment de mari dimensiuni, specifice rețelelor de nivelment geodezic de stat, simpla însumare a diferențelor de nivel măsurate nu este suficientă pentru transmiterea altitudinilor. Este necesar să se lucreze cu mărimi derivate corectate, în funcție de sistemul de altitudini adoptat.

7.2 Sistemul de altitudini dinamice

7.2.1 Numărul geopotențial

Notăm cu *O* punctul inițial (fundamental) în rețeaua de nivelment, de la care porneşte o linie de nivelment spre punctul *P,* în lungul căreia s-au măsurat atât diferențe de nivel cât şi accelerațiile greutății. Din formula fundamentală se obține:

$$\int_O^P g dh = -\int_O^P dW = W_0 - W_P = C_P$$

Diferența C_P dintre potențialul geoidului W_0 şi potențialul suprafeței de nivel W_P a punctului *P* este numărul geopotențial al punctului *P*, noțiune introdusă în anul 1955 în cadrul Asociației Internaționale de Geodezie. Deşi nu are dimensiuni metrice, numărul geopotențial caracterizează, în mod natural, o suprafață de nivel, fiind acelaşi pentru toate punctele situate pe această suprafață.

În cadrul Sistemului Geodezic de Referință 1980 se recomandă următoarea valoare pentru potențialul geoidului: $W_0 = (6\ 263\ 686 \pm 3) \times 10\ m^2 s^{-2}$

7.2.2 Altitudinea dinamică

Noțiunea de altitudine dinamică a fost introdusă de Helmert în anul 1873. Dacă ne referim însă la numărul geopotențial C_P, altitudinea dinamică notată H^D se obține prin împărțirea numărului geopotențial cu o valoare constantă şi anume cu valoarea gravității normale, la altitudinea de 45°, raportată la elipsoidul de referință:

$$H_P^D = \frac{C_P}{\gamma_{45^0}}$$

Din punct de vedere dimensional altitudinile dinamice sunt exprimate în metri, însă ele nu au o semnificație geometrică. Astfel, altitudinea dinamică a unui punct nu poate fi reprezentată ca o distanță de la o anumită suprafață la punctul considerat. Aceste altitudini păstrează, în continuare, semnificația fizică generată de împărțirea numerelor geopotențiale cu o constantă aleasă în mod convențional. Sistemul de altitudini dinamice este caracterizat printr-o proprietate importantă şi anume: punctele situate pe o anumită suprafață de nivel au aceeaşi altitudine dinamică.

7.2.3 Corecția dinamică

Pentru două puncte *A* şi *B* diferența de altitudini dinamice poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta H_{AB}^{D} = H_{B}^{D} - H_{A}^{D} = \frac{1}{\gamma_{45^0}}\left(C_B - C_A\right)$$

sau,

$$\Delta H_{AB}^{D} = \frac{1}{\gamma_{45^0}}\int_A^B g\, dh$$

Această relație se poate transforma în continuare:

$$\Delta H_{AB}^{D} = \frac{1}{\gamma_{45^0}}\int_A^B \left(g - \gamma_{45^0} + \gamma_{45^0}\right)dh = \int_A^B dh + \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}}\, dh,$$

astfel încât:

$$\Delta H_{AB}^{D} = \Delta h_{AB} + \delta_{AB}^{D},$$

unde: Δh_{AB} - diferența de nivel măsurată:

$$\Delta h_{AB} = \int_A^B dh \approx \sum_A^B \Delta h;$$

δ_{AB}^{D} - corecția dinamică pe traseul *AB*:

$$\delta_{AB}^{D} = \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}}\, dh \cong \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}}\, \Delta h$$

Sistemul de cote dinamice a stat la baza creării rețelei de nivelment din Europa de vest (*Réseau Européen Unifié de Nivelment*, prescurtat *REUN*).

7.3 Sistemul de altitudini ortometrice

7.3.1 Altitudinea ortometrică

Deoarece definiția numărului geopotențial nu depinde de traseul utilizat, se presupune că integrarea se efectuează în lungul liniei de forță (fig.15, a):

$$C_P = \int_O^{H_P^{OR}} g\, dH,$$

sau:

$$C_P = H_P^{OR}\,\frac{1}{H_P^{OR}}\int_0^{H_P^{OR}} g\, dH.$$

Această relație poate fi scrisă şi sub forma:

$C_P = \bar{g} \cdot H_P^{OR}$, (*)

unde $\bar{g}$ reprezintă media valorilor gravităţii în lungul liniei de forţă P_0P (în sensul unei medii ponderate generalizate):

$$\bar{g} = \frac{1}{H_P^{OR}} \int_0^{H_P^{OR}} g\, dH$$

Relaţia (*) reprezintă în acelaşi timp şi legătura dintre altitudinile ortometrice şi numerele geopotenţiale:

$$H_P^{OR} = \frac{1}{\bar{g}} \cdot C_P$$

7.3.2 Corecția ortometrică

Asemănător cu situaţia din cadrul sistemului de altitudini dinamice, este necesar să se stabilească o corecţie care să se adauge la diferenţele de nivel măsurate direct, în scopul deducerii diferenţelor de altitudini ortometrice.

Ținând seama de (fig.15), se poate scrie:

$$\Delta H_{AB}^{OR} = H_B^{OR} - H_A^{OR} = \Delta H_{AB}^{D} - \left(H_B^{D} - H_A^{D}\right) + H_B^{OR} - H_A^{OR}$$

sau, sub o altă formă:

$$\Delta H_{AB}^{OR} = \Delta H_{AB}^{D} + \left(H_B^{OR} - H_B^{D}\right) - \left(H_A^{OR} - H_A^{D}\right)$$

Diferenţa de altitudini dinamice ΔH_{AB}^{D} a fost determinată, în funcţie de diferenţa de nivel măsurată Δh_{AB}, cu relaţia (3.12). Pentru a calcula diferenţa existentă între altitudinile ortometrică şi dinamică ale punctului *A*, se imaginează un traseu de nivelment geometric care pleacă din A_0**,** exact în lungul liniei de forţă, ajungând în *A*. Evident că, în acest caz, suma diferenţelor de nivel măsurate va fi egală cu cota ortometrică a punctului *A*:

$$\sum_{A_0}^{A} \Delta h = H_A^{OR}$$

$$H_A^{D} = H_A^{OR} + \delta_{A_0A}^{D},$$

adică:

$$H_A^{OR} - H_A^{D} = -\delta_{A_0A}^{D};$$

şi analog pentru punctul *B*:

$$H_B^{OR} - H_B^{D} = -\delta_{B_0B}^{D}$$

Corecţiile dinamice din ultimele două expresii se calculează cu ajutorul relaţiei:

$$\delta_{A_0A}^{D} = \int_{A_0}^{A} \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} dH \quad ; \qquad \delta_{B_0B}^{D} = \int_{B_0}^{B} \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} dH$$

sau, prin introducerea unor valori medii, constante, $\bar{g}_A$ şi $\bar{g}_B$, calculate în lungul liniilor de forţă AA_0 şi BB_0, cu relaţiile:

$$\delta^{D}_{A_0A} = \frac{\overline{g}_A - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_A \quad ; \qquad \delta^{D}_{B_0B} = \frac{\overline{g}_B - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_B$$

Pentru H_A şi H_B pot fi folosite valori aproximative ale cotelor punctelor A şi B.
În final rezultă:

$$\Delta H^{OR}_{AB} = \Delta h_{AB} + \delta^{OR}_{AB},$$

unde: δ^{OR}_{AB} reprezintă corecția ortometrică pe traseul *AB*:

$$\delta^{OR}_{AB} = \sum_{A}^{B} \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} \Delta h + \frac{\overline{g}_A - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_A - \frac{\overline{g}_B - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_B$$

7.3.3 Altitudinea Helmert

Valoarea medie $\overline{g}$ prin care se defineşte altitudinea ortometrică în funcție de numărul geopotențial, nu poate fi determinată practic în mod riguros. De aceea, în locul acestei mărimi s-au introdus alte valori, în funcție de anumite ipoteze, rezultând diverse sisteme de altitudini.
Ținându-se cont că:

$$\overline{g} = g + 0{,}0424\, H,$$

rezultă că altitudinea ortometrică definită anterior poate fi scrisă şi sub forma:

$$H^{OR}_{P} = \frac{C_P}{g + 0{,}0424\, H}$$

Această relație a fost dedusă de Helmert în anul 1890 şi de aceea altitudinile corespondente poartă numele său.

7.3.4 Altitudinea ortometrică sferoidică

Sistemul de altitudini sferoidice este un sistem destul de frecvent folosit. Dacă se introduce $g \equiv \gamma$, se obține expresia corecției ortometrice sferoidice:

$$\delta^{ORS}_{AB} = \sum_{A}^{B} \frac{\gamma - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} \Delta h + \frac{\overline{\gamma}_A - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_A - \frac{\overline{\gamma}_B - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_B$$

Formula de calcul practic al corecției ortometrice sferoidice, folosită şi în țara noastră în trecut, precum şi în alte țări din Europa s-a dedus prin considerarea neparalelismului suprafețelor de nivel şi a aproximației menționate $g \equiv \gamma$. Astfel, pentru trasee de nivelment care merg dinspre sud spre nord, rezultă:

$$dH \approx -\frac{H}{\gamma} d\gamma$$

Expresia corecției ortometrice sferoidice este:

$$\delta^{ORS}_{AB} = -f^{*} \cdot H_{med} \cdot \Delta B^{rad} \cdot \sin 2B_{med}$$

Pentru calculul practic în țara noastră s-au considerat tronsoane în lungime de 1 km (ceea ce corespunde, aproximativ, pentru $\Delta B = 1^0$) obținându-se:

$$\left(\delta^{ORS}_{AB}\right)_{mm} = -K \cdot H^{(km)}_{med} \cdot \Delta B^{c},$$

unde:

$$K = 10^6 \frac{f^*}{q^c} \cdot \sin 2B_{med}$$

Acest coeficient poate fi extras şi din tabelele publicate de prof. M. Botez (1969) funcţie de latitudinea medie B_m (f^* *= 0,0053*).

7.4 Sistemul de altitudini normale

În ţara noastră este folosit, în prezent, ca sistem oficial de altitudini, sistemul de altitudini normale, fondat teoretic de *M.S. Molodenski* în anul 1945.
Plecând de la dificultăţile reale pe care le prezintă utilizarea altitudinilor ortometrice, dintre care cunoaşterea gravităţii medii $\bar{g}$ în lungul liniei de forţă reprezintă impedimentul principal, *Molodenski* propune ca în locul câmpului gravităţii să se utilizeze câmpul gravităţii normale.

7.4.1 Altitudinea normală

Acceptând această ipoteză, formulele de calcul se pot determina prin utilizarea formulelor corespondente de la sistemul de altitudini ortometrice. Astfel, definiţia altitudinii normale a punctului *P,* notată H_P^N, este:

$$H_P^N = \frac{1}{\bar{\gamma}} C_P ,$$

unde valoarea medie $\bar{\gamma}$ a acceleraţiei normale a gravităţii în lungul normalei la elipsoid $(P_0 P)$ se calculează riguros cu relaţia:

Diferenţa de altitudini normale între reperele *A* şi *B* va fi:

$$\Delta H_{AB}^N = H_B^N - H_A^N = \Delta h_{AB} + \delta_{AB}^N ,$$

unde Δh_{AB} reprezintă diferenţa de nivel măsurată în teren prin nivelment geometric, iar δ_{AB}^N este corecţia normală pe traseul *AB*. Această corecţie poate fi dedusă introducând $\bar{g} \equiv \bar{\gamma}$:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} \Delta h + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_B$$

Printr-un artificiu simplu se transformă primul termen al relaţiei astfel încât se obţine:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma_{45^0}} \Delta h + \sum_A^B \frac{\gamma - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} \Delta h + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} H_B$$

Comparând relaţiile rezultă:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma_{45^0}} \Delta h + \delta_{AB}^{ORS}$$

Această relaţie exprimă legătura care există între corecţiile normale şi corecţiile ortometrice sferoidice, punând în evidenţă posibilitatea de trecere de la un sistem la altul, în cazul în care se cunosc anomaliile gravităţii pe traseul considerat. Corecţia normală apare astfel ca formată din doi termeni principali:

- corecţia $\sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma_{45^0}} \Delta h$ datorată anomaliilor gravităţii;

- corecția δ_{AB}^{ORS} datorată neparalelismului suprafețelor de nivel (în concepția ortometrică sferoidică).

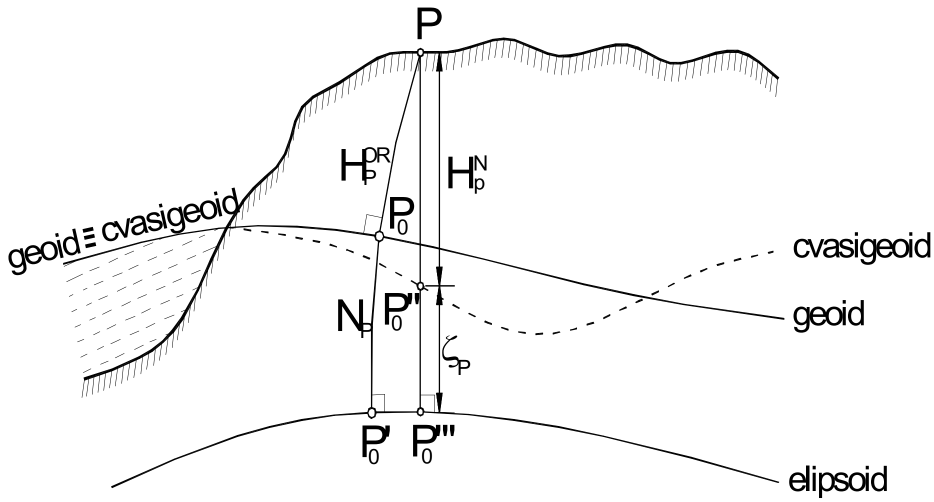


Fig. 16 Sistemele de altitudini ortometrice şi normale

Introducerea noțiunii de sistem normal a condus şi la necesitatea schimbării suprafeței de referință, în speță a geoidului, folosit în sistemul ortometric.
Pentru a înțelege mai uşor caracterul suprafeței de referință în cazul sistemului normal, ne bazăm pe altitudinile elipsoidice H^E, definite în raport de elipsoid, în cele două sisteme de altitudini avute în vedere (fig.16).
$H_P^E = H_P^{OR} + N_P$; $H_P^E = H_P^N + \xi_P$
Cu ***N*** se notează *ondulațiile geoidului*, care sunt specifice utilizării sistemului de altitudini ortometrice iar cu ξ *perturbațiile* sau *anomaliile altitudinilor*.
Se presupune o suprafață astfel construită (fig.16), încât segmentul de normală la elipsoid să fie egal cu ξ în orice punct în care se cunoaşte această cantitate. *M.S.Molodenski* a denumit această suprafață ***cvasigeoid***.
Pe suprafețe acvatice întinse (mări, oceane) cvasigeoidul coincide cu geoidul, sub continente existând diferențe care depind de structura internă a Pământului.

CAP.8. ELEMENTE DE GEODEZIE ELIPSOIDALĂ

Geodezia elipsoidală studiază metodele de rezolvare a problemelor geodezice pe suprafața elipsoidului de referință

Geodezia elipsoidală (sferoidală; geometrică; matematică) se ocupă cu studiul metodelor de rezolvare a problemelor care apar în geodezie pe suprafața elipsoidului considerat. Stabilirea acestor metode presupune şi studierea suprafeței matematice cu care este echivalată suprafața Pământului (elipsoidul), precum şi a metodelor de reducere a observațiilor geodezice pe elipsoidul de referință.

Elipsoidul de referință este elipsoidul utilizat la un moment dat pentru rezolvarea problemelor geodezice.

Axa de rotație a unui astfel de elipsoid este paralelă şi apropiată de axa de rotație a Pământului, iar centrul său geometric este în apropierea centrului de masă al Pământului.

Schimbarea elipsoidului de referință a fost posibilă, pe măsura trecerii timpului, datorită dezvoltării mijloacelor de măsurare şi de calcul care au permis utilizarea şi a altor metode şi relații de determinare a parametrilor elipsoidului. La aceasta s-au adăugat parametrul densitate şi modul de repartizare a punctelor pe suprafața terestră. Toate determinările au drept scop găsirea unui elipsoid de referință a cărui axă de rotație să coincidă cu axa de rotație a Pământului, iar centru său geometric să se identifice cu centrul de masă al Pământului. Un asemenea elipsoid există la ora actuală doar ca noțiune teoretică, fiind denumit elipsoid terestru general. Dimensiunile şi orientarea acestui elipsoid în raport cu geoidul sunt astfel determinate încât abaterile dintre cele două suprafețe să fie minime.

Deoarece au fost utilizați de-a lungul timpului mai mulți elipsoizi de rotație ca referință, o problemă importantă pentru geodezie o reprezintă transcalculul de coordonate de pe un elipsoid pe altul.

8.1 Parametri geometrici ai elipsoidului de rotație

Parametri geometrici ai elipsoidului de rotație sunt:

$a = \overline{OA} = \overline{OB} \rightarrow$ semiaxa mare (raza ecuatorială)

$b = \overline{OE} = \overline{OD} \rightarrow$ semiaxa mică

$f = \dfrac{a-b}{a} \rightarrow$ turtirea (geometrică) 8.1

$E = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow$ excentricitatea liniară

$e = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}} \rightarrow$ prima excentricitate (numerică)

$e' = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{b^2}} \rightarrow$ a doua excentricitate (numerică)

$c = \dfrac{a^2}{b} \rightarrow$ raza de curbură

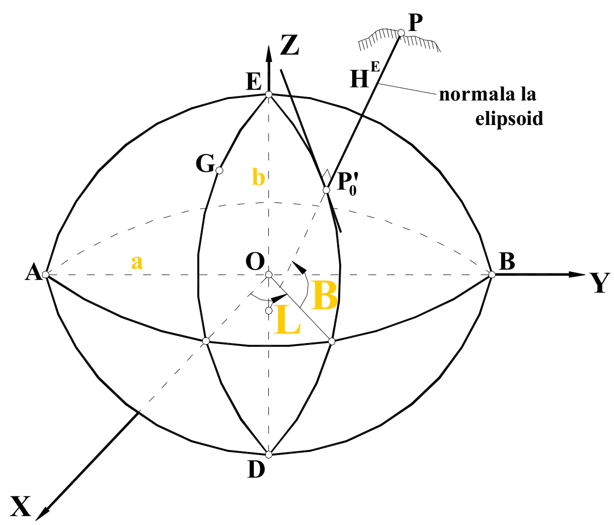


Fig. 17 Elipsoidul de rotație

Un elipsoid de rotație poate fi definit prin doi parametri dintre care unul trebuie să fie neapărat liniar. Parametri *a, b, f sunt denumiți parametri geometrici principali,* iar semiaxa mare şi turtirea *(a, f)* sunt cei doi parametri care definesc de regulă un elipsoid de rotație.

8.2 Relații între parametri geometrici

Pornind de la expresia turtirii geometrice:

$$f = \frac{a - b}{a} \qquad 8.2$$

sau :

$$a \cdot f = a - b$$

Rezultă : $$b = a \cdot (1 - f)$$ 8.3

Prima excentricitate numerică: $$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$ 8.4

sau: $$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow a^2 \cdot e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$$ 8.5

Din relația: $$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$ 8.6

Din relația: $$f = \frac{a - b}{a} \Rightarrow f = 1 - \frac{b}{a} \Rightarrow f = 1 - (1 - e^2)^{1/2}$$ 8.7

Având în vedere că mărimea "e" are o valoare mică, se poate face o dezvoltare în serie numai pentru primul termen:

Cazul general: $$(1 + x)^m \cong 1 + mx + \frac{m \cdot (m - 1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

În cazul nostru: $$(1 - e^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot e^2$$ 8.8

Deci, în 8.7: $$f = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^2\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot e^2$$ 8.9

$$f \cong \frac{1}{2} \cdot e^2 \rightarrow e^2 \cong 2f$$ 8.10

Din relația celei de a II-a excentricități:

$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \Rightarrow e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$ 8.11

Deci: $$e'^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1$$ 8.12

Din relația (8.6) $$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \frac{1}{1 + e'^2}$$ 8.13

Deci: $$e^2 = 1 - \frac{1}{1 + e'^2} = \frac{1 + e'^2 - 1}{1 + e'^2} \Rightarrow e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}$$ 8.14

Din relația (8.13): $$1 - e^2 = \frac{1}{1 + e'^2} \rightarrow 1 + e'^2 = \frac{1}{1 - e^2}$$ 8.15

$$e'^2 = \frac{1}{1-e^2} - 1 = \frac{1-1+e^2}{1-e^2} = \frac{e^2}{1-e^2} \qquad 8.16$$

Deci: $$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \qquad 8.17$$

8.3 Ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație

Elipsoidul de referință, adică elipsoidul folosit la un moment dat într-o țară sau în mai multe țări pentru rezolvarea problemelor geodezice, este un elipsoid de rotație cu turtire mică la poli. În tabelul 8.1 se prezintă valorile numerice ale parametrilor ***a*** şi ***f*** pentru elipsoizii de referință care au fost utilizați în decursul anilor în țara noastră, pentru elipsoidul recomandat de AIG în anul 1980 cât şi pentru elipsoidul mondial WGS'84 (World Geodetic System).

Tabelul 8.1

Denumirea elipsoidului de referință	**Anul determinării**	**Semiaxa mare a**[m]	**Turtirea numerică f**	**Perioada de utilizare în România**
Bessel	1841	6377397,155	1:299,128	1873-1916
Clarke	1880	6378243,000	1:293,465	1916-1930
Hayford	1909	6378388,000	1:297,0	1930-1951
Krasovski	1940	6378245,000	1:298,3	1951-prezent
Sistemul geodezic de referință 1980	1980	6378137,000	1:298,257	-
WGS' 84	1984	6378137,000	1:298,257	în prezent

Ecuația generală a unui elipsoid de rotație, exprimată sub formă implicită se poate scrie:

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad 8.18$$

Ea este puțin folosită în geodezia elipsoidală. În mod frecvent se operează cu ecuațiile parametrice, în funcție de coordonatele ***B*** şi ***L***, adică:

$$X = X(B,L) \qquad Y = Y(B,L) \qquad Z = Z(B)$$

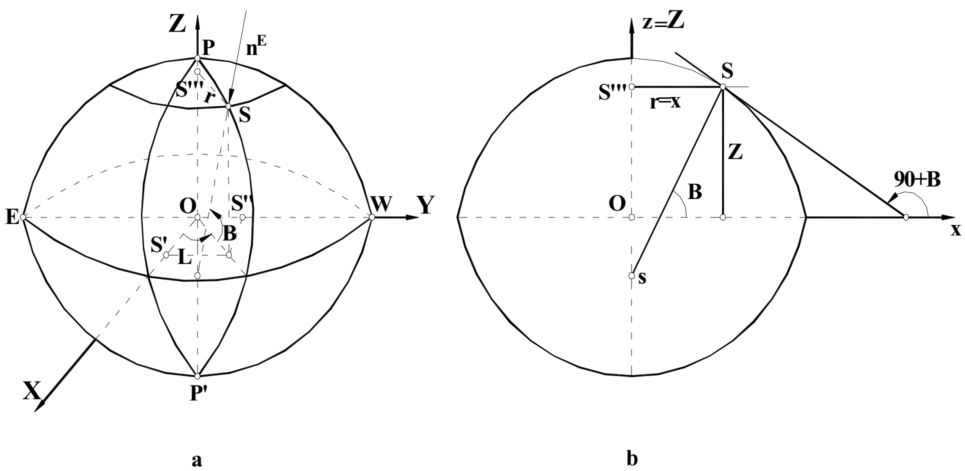


Fig. 18. Elipsoidul de rotație de referință

Pentru deducerea acestora este util să se determine, în prealabil, ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane:

$$x = x(B) \qquad\qquad z = z(B)$$

deoarece legătura dintre coordonatele *X,Y,Z* şi respectiv *x,z* (fig.8.2) este imediată:

$$X = x \cdot \cos L \qquad Y = x \cdot \sin L \qquad Z = z \qquad 8.19$$

Ecuația elipsei meridiane sub formă implicită este:

$$f(x,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad 8.20$$

sau, în funcție de relația 8.5 ($b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$:

$$f(x,z) = x^2 + \frac{z^2}{1 - e^2} - a^2 = 0 \qquad 8.21$$

Coeficientul unghiular al tangentei la elipsă în punctul ***S*** (fig.18, b) poate fi exprimat sub forma:

$$\frac{dz}{dx} = tg\left(90^0 + B\right) = -ctgB \qquad 8.22$$

sau sub forma:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f_x'}{f_z'} = -\frac{\left(1 - e^2\right)x}{z} \qquad 8.23$$

Din egalarea ultimelor două relații rezultă:

$$z = \left(1 - e^2\right)x \cdot tgB \qquad 8.24$$

introducând expresia (8.24) în (8.21) se obține:

$$x = \frac{a \cdot \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 B}} \qquad 8.25$$

iar în continuare, din relația (8.24):

$$z = \frac{a\left(1 - e^2\right)\sin B}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 B}} \qquad 8.26$$

Ultimele două relații reprezintă ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane în funcție de latitudinea geodezică ***B.*** Pentru scrierea mai concentrată a acestor ecuații, precum și pentru ușurarea calculelor, se folosesc frecvent următoarele funcții auxiliare:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \qquad 8.27$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} = \sqrt{1 + \eta^2} \qquad 8.28$$

unde: $\eta = e' \cdot \cos B$ 8.29

Funcțiile auxiliare W și V au fost dezvoltate în serie și tabelate. La noi în țară se pot folosi tabelele Tarczi - Hornoch - Hristov (1959) din care se extrag atât valorile naturale, cât și valorile logaritmice pentru W și V, în funcție de latitudinea geodezică B..

Folosind relațiile de legătură dintre parametri elipsoidului de referință, se obține:

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B = 1 - \frac{e'^2}{1 + e'^2}\sin^2 B = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B}{1 + e'^2} = \frac{V^2}{1 + e'^2} \qquad 8.30$$

precum și: $W^2 = \left(1 - e^2\right)V^2$ 8.31

$$\frac{a}{W} = \frac{c}{V} \qquad 8.32$$

În acest mod, ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane (8.25) și (8.26) se pot exprima și sub forma:

$$x = \frac{a \cdot \cos B}{W} = \frac{c \cdot \cos B}{V} \qquad 8.33$$

$$z = \frac{a\left(1 - e^2\right)\sin B}{W} = \frac{c\left(1 - e^2\right)\sin B}{V}$$

Utilizând aceste ecuații, precum şi relațiile (8.19) rezultă ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație:

$$X = \frac{a \cdot \cos B \cos L}{W} = \frac{c \cdot \cos B \cos L}{V}$$

$$Y = \frac{a \cdot \cos B \sin L}{W} = \frac{c \cdot \cos B \sin L}{V} \qquad 8.34$$

$$Z = \frac{a\left(1 - e^2\right) \sin B}{W} = \frac{c\left(1 - e^2\right) \sin B}{V}$$

8.4 Liniile de coordonate

Liniile de coordonate curbilinii pe suprafața elipsoidului de referință sunt reprezentate de familiile de meridiane ($L =$ const.) şi parale ($B =$ const.). În raport de liniile de coordonate se definesc anumite mărimi cu care se operează frecvent în geodezie (anumite sisteme de coordonate, azimutul geodezic, etc.).

Unghiul de intersecție a liniilor de coordonate este un unghi drept şi, ca urmare, în anumite calcule vor interveni simplificări în comparație cu situația generală întâlnită la studiul suprafețelor unde acest unghi poate avea o valoare oarecare.

8.4.1 Raza de curbură a elipsei meridiane

Fie două puncte S_1 şi S_2 situate pe aceeaşi elipsă meridiană, la o diferență de latitudine ΔB (fig. 19). Raza de curbură ***M*** a elipsei meridiane poate fi definită de relația 8.35:

$$M = \lim_{\Delta B \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta B} = \frac{ds}{dB} \qquad 8.35$$

în care ds este elementul de arc de elipsă: $ds^2 = dx^2 + dz^2$ 8.36

Rezultă astfel:

$$M = \sqrt{\left(\frac{dx}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dB}\right)^2} \qquad 8.37$$

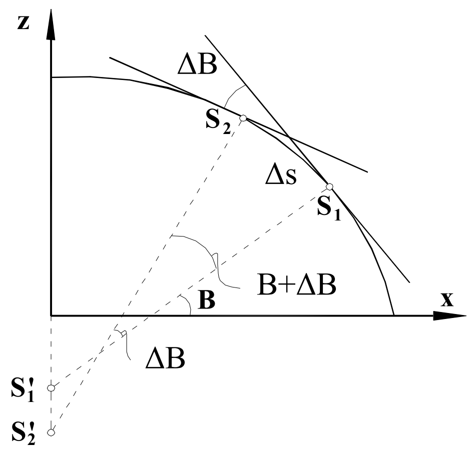


Fig. 19 Raza de curbură a elipsei meridiane

Calculul derivatelor necesare în expresia (8.37) se realizează prin considerarea relațiilor (8.33). Astfel, de exemplu, prima derivată va fi:

$$\frac{dx}{dB} = a\left[-\sin B \cdot \left(1 - e^2 \cdot \sin^2 B\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cos B \cdot \left(1 - e^2 \cdot \sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2e^2 \sin B \cdot \cos B\right] \quad 8.38$$

care, după transformări simple devine:

$$\frac{dx}{dB} = -\frac{a \cdot \sin B\left(1 - e^2\right)}{W^3} \quad 8.39$$

Analog, se poate calcula şi cealaltă derivată necesară în expresia (8.37):

$$\frac{dz}{dB} = \frac{a\left(1 - e^2\right)\cos B}{W^3} \quad 8.40$$

În acest fel se poate determina expresia razei de curbură a elipsei meridiane:

$$M = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \quad 8.41$$

Se observă că raza de curbură a elipsei meridiane creşte odată cu variația latitudinii geodezice *B*, de la ecuator spre pol:

$$M_{0^0} = a\left(1 - e^2\right) \qquad M_{90^0} = \frac{a}{\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}} = c \quad 8.42$$

Mărimea razei de curbură a elipsei meridiane se poate extrage din tabele în funcție de latitudinea geodezică a punctului considerat

8.4.2 Lungimea arcului de meridian

Lungimea arcului de meridian între punctele S_1 şi S_2, de latitudini B_1 şi respectiv B_2, se poate determina prin integrarea unei relații de forma (8.35):

$$s_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{B_1}^{B_2} M \ dB \tag{8.43}$$

sau, considerând formulele (8.41):

$$s_{1-2} = a\left(1-e^2\right)\int_{B_1}^{B_2}\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}} dB = c\int_{B_1}^{B_2}\left(1+e'^2\cos^2 B\right)^{-\frac{3}{2}} dB \tag{8.44}$$

8.4.3 Raza de curbură a paralelului

Raza de curbură a paralelului este egală cu coordonata *x* din figura 19:

$$r = x = \frac{a \cdot \cos B}{W} = \frac{c \cdot \cos B}{V} \tag{8.45}$$

având o variație, în funcție de latitudinea geodezică, de la ecuator spre pol:

$$r_{0^0} = a; \qquad r_{90^0} = 0 \tag{8.46}$$

8.4.4 Lungimea arcului de paralel

Fie două puncte S_1 şi S_2, situate pe paralelul de rază ***r*** (latitudinea ***B***) la longitudinile L_1 şi respectiv $L_2 = L_1 + dL$. Lungimea arcului de paralel ds_p, dintre cele două puncte va fi :

$$ds_p = r \ dL \tag{8.47}$$

Expresia de mai sus poate fi integrată imediat deoarece *r* = const. pentru un paralel dat:

$$s_p = r\left(L_2 - L_1\right)' \cdot arc1' \tag{8.48}$$

Aşa după cum s-a mai menționat, din tabele se poate extrage prin interpolare mărimea $r \cdot arc1'$, astfel încât lungimea arcului de paralel se poate determina cu suficientă uşurință.

8.4.5 Azimutul geodezic al unei curbe situate pe elipsoidul de referință

Una din mărimile frecvent folosite, azimutul geodezic ***A*** al unei curbe ***c*** este unghiul format de elementul de arc ***ds*** al acesteia cu direcția pozitivă a liniei de coordonate $L = const.$ (fig.20). Pentru deducerea unei expresii de calcul al azimutului se poate porni de la relația generală:

$$\cos A = \alpha\,\alpha_L + \beta\,\beta_L + \gamma\,\gamma_L \qquad 8.49$$

în care α, β, γ sunt cosinuşii directori ai tangentei la curba c:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial B}\cdot\frac{dB}{ds} + \frac{\partial x}{\partial L}\cdot\frac{dL}{ds}$$

$$\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial B}\cdot\frac{dB}{ds} + \frac{\partial y}{\partial L}\cdot\frac{dL}{ds} \qquad 8.50$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial B}\cdot\frac{dB}{ds} + \frac{\partial z}{\partial L}\cdot\frac{dL}{ds}$$

iar $\alpha_L, \beta_L, \gamma_L$ sunt cosinuşii directori ai tangentei la linia de coordonate $L = const.$

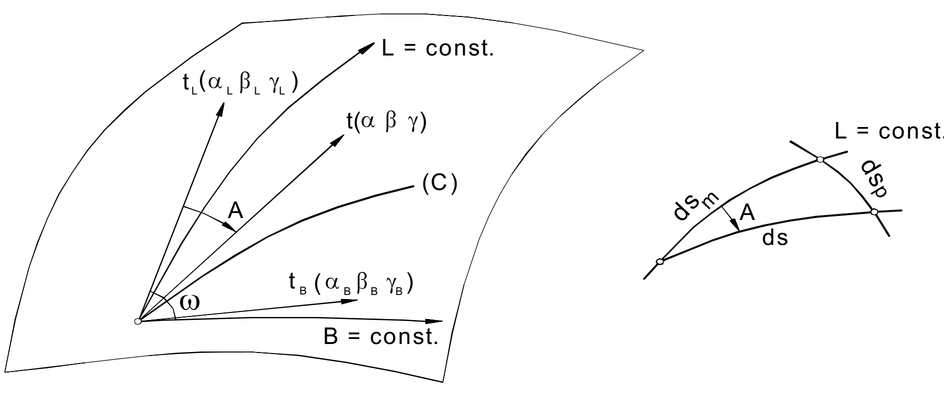


Fig.20 Azimutul geodezic al unei curbe situate pe elipsoidul de referință

Elementul de arc ds al unei curbe pe o suprafață oarecare poate fi exprimat sub forma:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \qquad 8.51$$

$$dX = \frac{\partial X}{\partial B} \cdot dB + \frac{\partial X}{\partial L} \cdot dL$$

unde:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial B} \cdot dB + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot dL \qquad 8.52$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial B} \cdot dB + \frac{\partial Z}{\partial L} \cdot dL$$

În acest fel rezultă:

$$ds^2 = E\ dB^2 + 2F\ dBdL + G\ dL^2, \qquad 8.53$$

expresie cunoscută sub denumirea de ***prima formă fundamentală pătratică***, unde:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial L}\right) \qquad 8.54$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial L}\right)^2$$

Expresiile de calcul ale coeficienților ***E, F, G*** pot fi prezentate şi mai concentrat prin utilizarea notațiilor Gauss:

$$E = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)^2$$

$$F = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right) \qquad 8.55$$

$$G = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)^2$$

În cazul elipsoidului de rotație, derivatele parțiale care intervin în ecuațiile de definiție (8.55) se obțin din relațiile (8.34):

$$\frac{\partial X}{\partial B} = -\frac{a \cdot \cos L \cdot \sin B\left(1 - e^2\right)}{W^{3/2}} \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = -\frac{a \cdot \cos B \cdot \sin L}{W}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -\frac{a \cdot \sin L \cdot \sin B\left(1 - e^2\right)}{W^{3/2}} \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{a \cdot \cos B \cdot \cos L}{W} \qquad 8.56$$

$$\frac{\partial Z}{\partial B} = \frac{a\left(1-e^2\right)\cos B}{W^{3/2}} \qquad \frac{\partial Z}{\partial L} = 0$$

rezultând următoarele posibilități de exprimare a coeficienților ***E, F, G*** :

$$E = \frac{a^2\left(1-e^2\right)^2}{W^3} = M^2 \; ; \quad F = 0 \; ; \quad G = \frac{a^2 \cdot \cos^2 B}{W^2} = r^2 \qquad 8.57$$

Observație: Ecuația $F = 0$ este valabilă în caz general, pe orice suprafață, atunci când sistemul de coordonate este ortogonal.

Cosinuşii directori ai tangentei la linia de coordonate L = const. pot fi deduşi din relația (8.53) prin introducerea condițiilor:

$dL = 0$ şi $ds \equiv ds_m$ 8.58

$$ds_m^2 = E\ dB^2 \qquad 8.59$$

rezultând:

$$\alpha_L = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial X}{\partial B} \qquad \beta_L = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial B} \qquad \gamma_L = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial Z}{\partial B} \qquad 8.60$$

Se dispune astfel de toate elementele necesare calculării azimutului curbei ***c***, cu relația (8.49), pe elipsoidul de rotație:

$$\cos A = \frac{\sqrt{E}dB}{ds} \qquad 8.61$$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{\sqrt{G}dL}{ds} \qquad 8.62$$

$$tgA = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{dL}{dB} \qquad 8.63$$

Ținând seama de relațiile (8.57) care exprimă mărimea coeficienților ***E*** şi ***G*** pe elipsoidul de rotație se obține:

$$\cos A = M\frac{dB}{ds} \qquad \sin A = r\frac{dL}{ds} \qquad 8.64$$

şi împreună cu (8.43), (8.47):

$$\cos A = \frac{ds_m}{ds} \quad \sin A = \frac{ds_p}{ds} \qquad 8.65$$

Ultimele relații sugerează posibilitatea aplicării relațiilor trigonometriei plane în triunghiul infinitesimal situat pe suprafața elipsoidului de rotație (fig.20,b).

Pentru calcule ulterioare se deduc:

$$tgA = \frac{r}{M} \cdot \frac{dL}{dB} \quad \rightarrow \quad \frac{dL}{dB} = \frac{M}{r} \cdot tgA \qquad 8.66$$

8.5 Elementul de arie pe suprafața elipsoidului de referință

Elementul de arie ***dS*** al suprafeței cuprinse între două meridiane situate la o diferență de longitudine *dL*, şi respectiv între două paralele, situate la o diferență de latitudine *dB*, poate fi exprimat astfel:

$$dS = ds_m \cdot ds_p = \sqrt{EG}\; dB\, dL = M\, r\, dB\, dL \qquad 8.67$$

Pentru calcule practice se particularizează formula (8.67) considerându-se $dL = 1'$. Se determină astfel aria suprafeței cuprinse între ecuator şi paralelul punctului considerat, de latitudine *B,* pe intervalul de longitudine de $1'$:

$$\Delta S_{\Delta L=1'} = arc1'\, a^2\left(1-e^2\right)\int_0^B \frac{\cos B}{W^{5/2}}\, dB \qquad 8.68$$

Analog, ca şi în cazurile precedente, această expresie poate fi dezvoltată în serie, rezultând:

$$\Delta S_{\Delta L=1'} = A^* \sin B - B^* \sin 3B + C^* \sin 5B - D^* \sin 7B + ... \qquad 8.69$$

Dacă se consideră parametri elipsoidului de referință Krasovski rezultă următoarea formulă de calcul a ariei elementare, în km^2:

$$\Delta S_{\Delta L=1'} = 11\,794,24561 \sin B - 13,21261 \sin 3B + 0,01997 \sin 5B - 0,00003 \sin 7B \qquad 8.70$$

mărime ce poate fi extrasă din tabele în funcție de latitudinea geodezică *B* (tabelul 8.3).

Aria ***S*** a suprafeței cuprinsă între paralelele de latitudini $B_{i,} B_j$ şi meridianele de longitudini L_m, L_n poate fi determinată cu ajutorul mărimilor extrase din tabele prin utilizarea următoarei formule de calcul:

$$S = \left[\Delta S\left(B_j\right) - \Delta S\left(B_I\right)\right]\left(L_m - L_n\right)' \qquad 8.71$$

8.6 Secțiuni normale

Intersecția dintre un plan normal (un plan care conține normala la elipsoid într-un punct ***S****(X,Z,Y))* şi suprafața elipsoidului se numeşte *secțiune normală* (fig.8.5). Pentru studierea secțiunilor normale este necesară utilizarea unor noțiuni din geometria diferențială. Se consideră o suprafață *F* oarecare, presupunând, de asemenea, curba ***C*** ca fiind o curbă strâmbă (curbă care nu se află în nici un plan). Secțiunea normală nu este o curbă strâmbă.

În punctul ***S*** amplasat pe suprafața normală se pot construi (fig.21):

- normala la suprafață $n_s(X',Y',Z')$;
- normala principală la curbă $n_c(\xi,\eta,\zeta)$;
- tangenta la curbă $t(\alpha,\beta,\gamma)$;
- binormala la curbă $b(\lambda,\mu,\upsilon)$.

Dintre toate planele care trec prin punctul considerat, trei sunt de o importanță deosebită pentru geodezie:

847planul osculator, care conține tangenta în punctul considerat este format de (***t, n****c*)

*848*planul normal la curbă, care este format de (***n****c* ***, b***)

*849*planul rectifiant, care conține tangenta şi binormala (***t, b***)

Cele trei plane menționate determină *triedrul mobil* sau *triedrul fundamental.*

Vectoru*l b* este denumit *binormală* şi este perpendicular pe planul osculator, deci şi pe normala principală $n_{c.}$

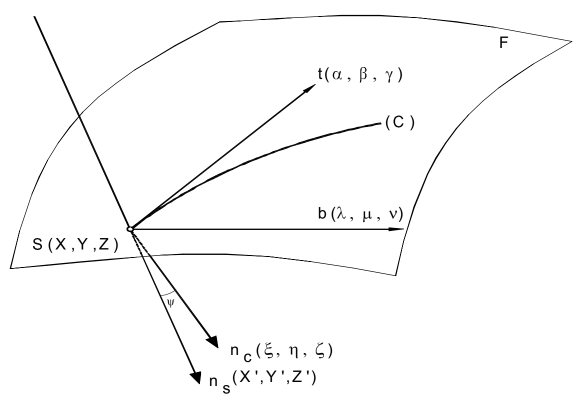


Fig. 21 Secțiuni normale pe elipsoidul de referință

În calculele care urmează este necesară utilizarea formulelor Fręnet, cunoscute de la cursul de analiză matematică:

$$\alpha = \frac{dX}{ds} \qquad \beta = \frac{dY}{ds} \qquad \gamma = \frac{dZ}{ds}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho} \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\rho} \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\rho} \qquad 8.72$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau} \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{\tau} \qquad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{\tau}$$

Raza de curbură ρ şi raza de torsiune τ ale curbei ***C*** se definesc prin relațiile:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta s} \qquad \frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varepsilon'}{\Delta s} \qquad \mathbf{8}.73$$

unde $\Delta\varepsilon$ este unghiul format de două tangente infinit apropiate, iar $\Delta\varepsilon'$ unghiul format de două plane osculatoare infinit apropiate.

Condiția de ortogonalitate dintre n_c şi t poate fi scrisă sub forma:

$$\alpha\, X' + \beta\, Y' + \gamma\, Z' = 0 \qquad 8.74$$

sau, mai concentrat:

$$\sum \alpha\, X' = 0 \qquad 8.75$$

Derivând, rezultă expresia:

$$\sum \frac{d\alpha}{ds} X' + \sum \alpha \frac{dX'}{ds} = 0 \qquad 8.76$$

care poate fi transformată cu primele formule Fręnet:

$$\frac{1}{ds^2} \sum dX\, dX' + \frac{1}{\rho} \sum X' \xi = 0 \qquad 8.77$$

deoarece:

$$\sum X' \xi = \cos\psi\,, \qquad 8.78$$

rezultă:

$$\frac{1}{\rho}\cos\psi = -\frac{1}{ds^2} \sum dX\, dX'\,, \qquad 8.79$$

unghiul ψ fiind unghiul dintre normalele n_s şi n_c.

Deoarece:

$$X = X(B, L) \qquad X' = X'(B, L)$$

$$Y = (B, L) \qquad Y' = Y'(B, L) \qquad 8.80$$

$$Z = (B, L) \qquad Z' = Z'(B, L)$$

se obțin alături de (8.52) şi următoarele expresii:

$$dX^{'} = \frac{\partial X^{'}}{\partial B}dB + \frac{\partial X^{'}}{\partial L}dL$$

$$dY^{'} = \frac{\partial Y^{'}}{\partial B}dB + \frac{\partial Y^{'}}{\partial L}dL \qquad 8.81$$

$$dZ^{'} = \frac{\partial Z^{'}}{\partial B}dB + \frac{\partial Z^{'}}{\partial L}dL$$

Cu acestea, relația (8.79) devine: $\frac{1}{\rho}\cdot\cos\psi = \frac{D\ dB^2 + 2D^{'}dB\ dL + D^{"}dL^2}{E\ dB^2 + 2F\ dB\ dL + G\ dL^2}$ 8.82

unde noii coeficienți sunt dați de:

$$D = -\sum\frac{\partial X}{\partial B}\cdot\frac{\partial X^{'}}{\partial B} \qquad 8.83$$

$$D^{'} = -\sum\frac{\partial X}{\partial B}\cdot\frac{\partial X^{'}}{\partial L} = -\sum\frac{\partial X}{\partial L}\cdot\frac{\partial X^{'}}{\partial B} \qquad 8.84$$

$$D^{"} = -\sum\frac{\partial X}{\partial L}\cdot\frac{\partial X^{'}}{\partial L} \qquad 8.85$$

Expresia:

$$D\ dB^2 + 2D^{'}dB\ dL + D^{"}dL^2 \qquad 8.86$$

se numeşte ***cea de a doua formă fundamentală pătratică***.

Pentru a calcula coeficientul $D^{"}$ pentru elipsoidul de rotație din (figura 18,a) se deduc cu uşurință cosinuşii directori ai normalei la suprafață:

$$X^{'} = -\cos B\cdot\cos L$$

$$Y^{'} = -\cos B\cdot\sin L \qquad 8.87$$

$$Z^{'} = -\sin B$$

astfel încât se pot calcula derivatele parțiale corespondente, care intervin în expresia coeficientului $D^{"}$: $\frac{\partial X^{'}}{\partial L} = \cos B\cdot\sin L$ $\quad \frac{\partial Y^{'}}{\partial L} = -\cos B\cdot\cos L$ $\quad \frac{\partial Z^{'}}{\partial L} = 0$ 8.88

Relațiile (8.88) şi (8.56) dau posibilitatea calculării coeficientului $D^{"}$:

$$D^{"} = -\sum\frac{\partial X}{\partial L}\frac{\partial X^{'}}{\partial L} = \frac{a\cos^2 B}{W} = r\cos B \qquad 8.89$$

În mod analog se obține pentru acelaşi elipsoid de rotație:

$D = M \qquad D^{'} = 0$ 8.90

Curbura unei secțiuni normale ρ_n, în punctul ***S*** situat pe suprafața oarecare ***F***, se poate obține din relația (8.82) sub condiția $\psi = 0^0$ (secțiunea normală fiind o curbă plană, normalele n_s şi n_c coincid):

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{D\ dB^2 + 2D^{'} dB\ dL + D^{"} dL^2}{E\ dB^2 + 2F\ dB\ dL + G\ dL^2} \qquad 8.91$$

Coeficienții *E, F, G*, şi respectiv *D*, $D^{'}$, $D^{"}$ sunt funcție de parametri de definiție ai suprafeței *F*, precum şi de poziția punctului *S*. Prin urmare, aceşti coeficienți au valori bine determinate în punctul *S* considerat, astfel încât din compararea relațiilor (8.82) şi (8.91) se obține:

$$\rho = \rho_n \cos\psi \qquad 8.92$$

relație care reprezintă ***teorema lui Meusnier***. De remarcat că secțiunea oarecare considerată, cât şi secțiunea normală au aceeaşi tangentă în punctul *S*.

Mărimea $1/\rho_g$: $\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\rho}\sin\psi$ 8.93

se numeşte ***curbură geodezică***.

Revenind la figura 18, se poate aplica teorema Meusnier în punctul *S,* deoarece atât secțiunea normală perpendiculară pe secțiunea meridiană (denumită *secțiunea primului vertical*), cât şi secțiunea înclinată a paralelului punctului *S*, au aceeaşi tangentă. Se obține astfel legătura dintre raza de curbură a primului vertical, notată ***N***, şi raza de curbură a paralelului *r*:

$$r = N \cdot \cos B \qquad 8.94$$

Prin urmare:

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \qquad 8.95$$

Se observă că raza de curbură a primului vertical are o variație de la ecuator spre pol:

$$N_{0^0} = a \qquad N_{90^0} = \frac{a}{\left(1 - e^2\right)^{1/2}} = c \qquad 8.96$$

valorile exacte putând fi extrase din tabele, în funcție de latitudinea geodezică *B* a punctului considerat.

Raportul dintre razele de curbură ale secțiunilor normale principale fiind:

$$N / M = V^2 = 1 + \eta^2 \qquad 8.97$$

rezultă: $N \geq M$, motiv pentru care raza de curbură a primului vertical se mai numeşte şi ***marea normală.***

8.6.1 Raza de curbură a unei secțiuni normale în funcție de azimut

Pe elipsoidul de rotație, unde $F = D = 0$, relația (8.91) devine:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{D\, dB^2 + D^{"} dL^2}{ds^2} \qquad 8.98$$

sau:

$$\frac{1}{\rho_n} = M\left(\frac{dB}{ds}\right)^2 + r \cdot \cos B\left(\frac{dL}{ds}\right)^2 \qquad 8.99$$

Deoarece:

$$dB = \frac{ds_m}{M} \qquad dL = \frac{ds_p}{r} \qquad 8.100$$

Se obține:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{M}\left(\frac{ds_m}{ds}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{ds_\rho}{ds}\right) \qquad 8.101$$

Considerând şi relațiile (8.65) se obține ***formula Euler***:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N} \qquad 8.102$$

în care mărimea curburii unei secțiuni normale este exprimată funcție de azimutul său şi, în cazul elipsoidului de rotație, de curburile secțiunii meridianului şi respectiv primului vertical. Din infinitatea secțiunilor normale care trec prin punctul ***S***, două au razele de curbură minimă şi respectiv maximă, fiind denumite *secțiuni normale principale*, iar razele lor de curbură, *raze principale de curbură.*

Pozițiile secțiunilor normale principale pot fi deduse din relația (8.102) prin deducerea condițiilor de minim, respectiv maxim:

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \sin 2A\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right) = 0 \qquad 8.103$$

Valorile extreme se obțin prin urmare pentru:

- $A = 0^g$ − secțiunea meridiană → $\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{M}$ → $\rho_A = M$

- $A = 100^g$ − secțiunea primului vertical → $\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{M}$ → $\rho_A = N$

În acest context, $\frac{1}{N}$ devine curbura minimă, iar $\frac{1}{M}$, curbura maximă. Acestea sunt secțiunile normale principale în cazul elipsoidului de rotație de referință. Rezultă că aceste secțiuni sunt perpendiculare între ele. Din ecuația (8.103) mai rezultă o soluție pentru maxim (minim) şi anume ***M*** = ***N***, situație întâlnită pentru $B = 90^0$, adică la pol. În concluzie:

$$M \le \rho_n \le N \qquad 8.104$$

8.7 Raza medie Gauss

Raza de curbură a unei secțiuni normale oarecare, de azimut ***A***, situată pe suprafața elipsoidului de rotație, rezultă dintr-o transformare simplă a relației (8.102):

$$\rho_n = \rho_A = \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A} \qquad 8.105$$

Media aritmetică a razelor de curbură ale secțiunilor normale care trec printr-un punct situat pe elipsoid atunci când numărul acestor secțiuni tinde către infinit, se numeşte ***rază medie de curbură*** sau ***rază medie Gauss***, notată ***R***:

$$R = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{\frac{NM}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta A}} \qquad 8.106$$

Expresia (8.106) poate fi înlocuită prin:

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}\,dA = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}}\frac{1}{\cos^2 A}}{1+\left(\sqrt{\frac{M}{N}}tgA\right)^2}\,dA \qquad 8.107$$

Dacă se introduce schimbarea de variabile: $\sqrt{\frac{M}{N}}\,tgA = t$, 8.108

şi ca urmare: $\sqrt{\frac{M}{N}}\frac{1}{\cos^2 A}dA = dt$, 8.109

cu corespondența dintre limitele celor două variabile A şi respectiv t:

$$A = 0; \qquad t = 0; \qquad 8.110$$

$$A = \frac{\pi}{2}; \qquad t = \infty,$$

expresia (8.107) poate fi scrisă şi sub forma:

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \qquad 8.111$$

Prin integrare rezultă în continuare:

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\ arctg\ t\Big|_0^\infty = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sqrt{MN} \qquad \mathbf{8}.112$$

Deci, raza medie Gauss se poate calcula cu relația $R = \sqrt{MN}$, unde M reprezintă raza de curbură a elipsei meridiane, iar N, raza de curbură a primului vertical.

Considerând relațiile (8.41) şi (8.95) rezultă:

$$R = \frac{a\,(1-e^2)^{1/2}}{W^2} = \frac{c}{V^2} \qquad 8.113$$

Raza medie de curbură variază cu latitudinea geodezică ***B***:

$$R_{0^0} = b \qquad R_{90^0} = \frac{a}{\left(1-e^2\right)^{1/2}} = c, \qquad 8.114$$

putând fi extrasă din tabele în funcție de aceasta.

Expresia:

$$K = \frac{1}{MN} = \frac{1}{R^2}, \qquad 8.115$$

este denumită ***curbură totală*** sau ***curbură Gauss***, iar expresia:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{M+N}{2R^2} \qquad 8.116$$

reprezintă ***curbura medie.***

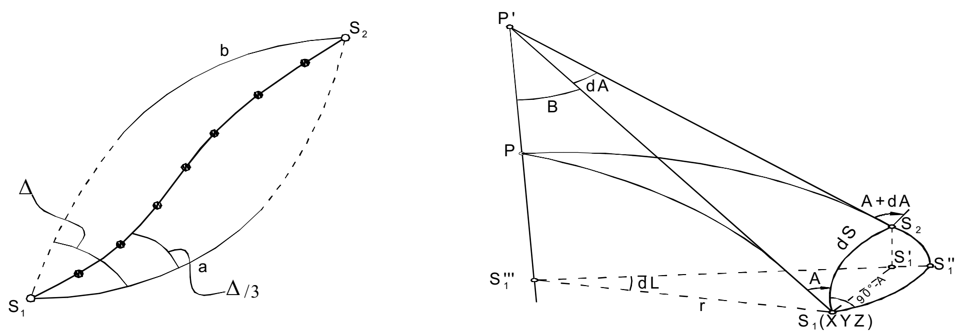
8.8 Linia geodezică

Curba astfel construită încât în fiecare din punctele sale, planul osculator (t, n_c) să conțină normala n_s, la suprafață, se numeşte ***linie geodezică***.

Planul osculator fiind format de tangenta *t* şi normala principală n_c la curbă (fig.8.5), rezultă că în oricare din punctele liniei geodezice normala la suprafaţă coincide cu normala principală la curbă şi în consecinţă, curbura geodezică $1/\rho_g$ este nulă $(\psi = 0)$.

Meridianele şi ecuatorul, de pe elipsoidul de rotaţie, şi toate cercurile mari de pe sferă, sunt linii geodezice. Această calitate nu o au paralelele, care nu conţin niciodată normala la suprafaţă. În planul de proiecţie liniile geodezice sunt linii drepte. Liniile geodezice nu au un echivalent în cadrul operaţiilor geodezice de teren, ci intervin doar în procesele de calcul.

Între două puncte S_1 şi S_2 situate pe suprafaţa elipsoidului de referinţă se poate duce numai o singură linie geodezică (fig.22). În acest mod, chiar în cazul unor vize foarte lungi, prin trecere de la secţiunile normale la liniile geodezice corespondente se va dispune de figuri continue şi închise. Linia geodezică este curba de lungime minimă care se poate duce prin două puncte situate pe suprafaţa elipsoidului de referinţă. Într-adevăr, deoarece normalele n_c şi n_s coincid în ambele puncte considerate, iar $\psi = 0$, razele de curbură ale liniei geodezice calculate în aceste puncte [de exemplu cu formula Meusnier (8.92)] vor lua valorile maxime posibile.



a *b*

Fig. 22 Linia geodezică

8.8.1 Ecuaţiile diferenţiale şi în termeni finiţi ale liniei geodezice

Fie o suprafaţă *F* oarecare, definită sub formă implicită:

$$F(X,Y,Z)=0 \quad 8.117$$

iar linia geodezică definită sub formă parametrică:

$$X = X(s), \quad Y = Y(s), \quad Z = Z(s), \qquad 8.118$$

în funcție de lungimea arcului s, într-un punct curent de coordonate $X, Y, Z.$

În acest punct, ecuația normalei la suprafață este:

$$\frac{a - X}{\frac{\partial F}{\partial X}} = \frac{b - Y}{\frac{\partial F}{\partial Y}} = \frac{c - Z}{\frac{\partial F}{\partial Z}}, \qquad 8.119$$

unde cu a, b, c s-au notat coordonatele unui punct situat pe această normală. Deoarece normala la suprafață coincide, în cazul liniilor geodezice, cu normala principală la curbă, de ecuație:

$$\frac{a - X}{\frac{d^2X}{ds^2}} = \frac{b - Y}{\frac{d^2Y}{ds^2}} = \frac{c - Z}{\frac{d^2Z}{ds^2}}, \qquad 8.120$$

rezultă următoarele ecuații diferențiale ale liniilor geodezice pe suprafața oarecare F :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial X}}{\frac{d^2X}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{\frac{d^2Y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial Z}}{\frac{d^2Z}{ds^2}} \qquad 8.121$$

În cazul elipsoidului de referință, definit de ecuația (8.18):

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 = 0$$

scrisă sub forma:

$$X^2 + Y^2 + f(Z) = 0, \qquad 8.122$$

se obține: $$\frac{\partial F}{\partial X} = 2X; \qquad \frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y; \qquad \frac{\partial F}{\partial Z} = f'(Z) \qquad 8.123$$

astfel încât ecuațiile diferențiale ale liniilor geodezice vor fi:

$$\frac{2X}{\frac{d^2X}{ds^2}} = \frac{2Y}{\frac{d^2Y}{ds^2}} = \frac{f'(Z)}{\frac{d^2Z}{ds^2}} \qquad 8.124$$

De aici rezultă: $$Y\frac{d^2X}{ds^2} - X\frac{d^2Y}{ds^2} = 0, \qquad 8.125$$

şi prin integrare: $$Y\,dX - X\,dY = C\,ds, \qquad 8.126$$

unde C este o constantă de integrare.

Fie elementul de linie geodezică ds cuprins între punctele $S_1(X, Y, Z)$ şi $S_2(X + dX; Y + dY; Z + dZ)$ din (figura 4.6, b), de azimut geodezic A.

În triunghiul $P^{'}S_1^{'''}S_1$ se poate scrie:

$$P^{'}S_1 = \frac{r}{\sin B} \qquad 8.127$$

Elementul de arc $S_1S_1^{''}$ poate fi exprimat în două moduri:

$$S_1S_1^{''} = r\,dL = P^{'}S_1\;dA,$$

din care se deduce şi prin considerarea formulei (8127), *relația diferențială Clairaut a liniei geodezice:*

$$dA = dL \sin B \qquad 8.128$$

Revenind la formulele cunoscute:

$$\frac{dx}{dB} = \frac{dr}{dB} = -\frac{a(1-e^2)\sin B}{W^3} = -M \sin B;$$
$$\frac{dL}{dB} = \frac{M}{r} tgA, \qquad 8.129$$

se poate transforma relația (8.128) după cum urmează:

$$dA = \sin B \frac{M}{r} tgA\; dB;$$
$$dA = -\frac{dr}{r} tgA;$$
$$\frac{\cos A}{\sin A} dA + \frac{dr}{r} = 0. \qquad 8.130$$

Integrând rezultă: $\ln \sin A + \ln r = \ln c$, 8.131

adică: $r \sin A =$ constant, 8.132

care reprezintă *ecuația în termeni finiți a liniei geodezice (teorema lui Clairaut* 1735*).*

8.9 Calculul coordonatelor geodezice *b* şi *l* pe elipsoidul de referință

Scopul final al calculelor efectuate pe elipsoidul de referință este determinarea coordonatelor geodezice, latitudinea B şi longitudinea L ale punctelor din rețelele geodezice de sprijin. Operațiile de prelucrare riguroasă a determinărilor astronomo - geodezice reclamă calculul coordonatelor geodezice în mai multe etape:

200calculul coordonatelor provizorii, necesare în etapa preliminară prelucrării riguroase

201calculul coordonatelor finale după terminarea compensării propriu - zise.

Se poate aprecia prin urmare că acest gen de calcule ocupă un volum deosebit de important, motiv pentru care sunt cunoscute în literatura de specialitate şi sub denumirea *de rezolvări ale problemelor geodezice de bază*.

Prima problemă geodezică de bază, denumită de asemenea şi *problema geodezică directă*, constă în determinarea coordonatelor geodezice B_2, L_2 ale punctului S_2 (fig. 23 a) şi a azimutului geodezic A_2 (denumit şi azimut geodezic invers) în funcție de coordonatele B_1, L_1 ale punctului S_1, azimutul geodezic A_1 (denumit şi azimut geodezic direct) şi lungimea liniei geodezice s dintre punctele S_1 şi S_2.

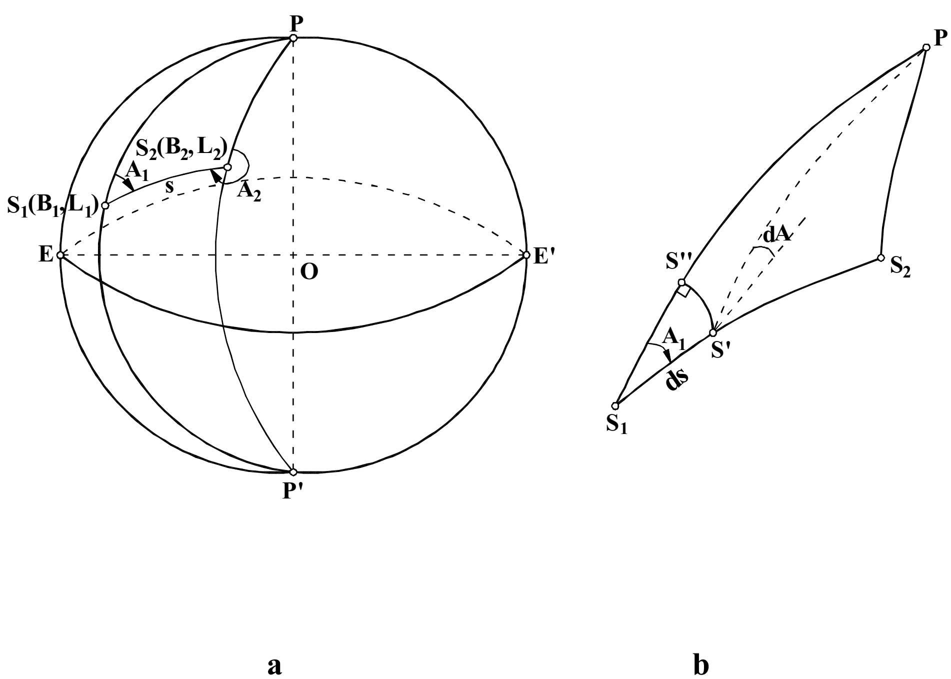


Fig.23 Problemele geodezice de bază

Utilizarea succesivă a problemei geodezice directe este cunoscută şi sub denumirea de transport de coordonate.

Cea de-a doua problemă geodezică de bază, denumită şi *problemă geodezică inversă*, constă în determinarea lungimii liniei geodezice s şi a azimutelor geodezice direct A_1 şi invers A_2, atunci când se cunosc coordonatele geodezice ale punctelor S_1 şi S_2.

Se cunosc mai multe procedee de rezolvare a problemelor geodezice de bază justificate de necesitatea continuă de micşorare a volumului de calcul, de sporire a exactității rezultatelor finale chiar în condițiile unor distanțe geodezice mari, influențate de asemenea şi de mijloacele de calcul avute la dispoziție.

Există mai multe criterii de clasificare a metodelor şi procedeelor de calcul a coordonatelor geodezice pe elipsoidul de referință, în funcție de elementul considerat ca principal în cadrul acestor calcule. Unul dintre criteriile de clasificare curent folosite, consideră drept element principal lungimea liniei geodezice s. Din acest punct de vedere se pot distinge: metode de rezolvare pentru distanțe geodezice mici $(s < 60\ km)$, medii $(60 \leq s < 600\ km)$ şi mari $(s \geq 600\ km)$.

Un alt aspect care trebuie avut în vedere la rezolvările efective se referă la precizia de calcul a coordonatelor geodezice, distingându-se metode exacte şi metode aproximative. Pe măsură ce distanțele geodezice cresc, exactitatea în calcule are semnificații deosebite. Ca şi în alte calcule geodezice, şi în cadrul problemelor geodezice de bază, se urmăreşte ca erorile de calcul să fie de circa 10 ori mai mici decât erorile medii care caracterizează operațiile de teren. Astfel, în triangulația geodezică de ordinul I este necesar ca aproximația de calcul pentru coordonatele geodezice B şi L să fie de $\pm 0'',0001$, pentru azimutele geodezice A de $\pm 0^{cc},001$, iar pentru distanțele geodezice s de $\pm 0,001$ m.

CAP.9. PROIECTAREA ŞI MATERIALIZAREA PE TEREN A REȚELELOR GEODEZICE

Toate operațiile care au ca scop ridicarea unei suprafețe topografice, necesită: măsurători de distanțe, unghiuri orizontale şi verticale, care duc la determinarea poziției unui număr de puncte necesare la definirea liniilor care delimitează suprafețele ce trebuie ridicate.

În ridicările planimetrice trebuie să se țină seama de următoarele principii:

a) toate punctele care servesc pentru determinarea ulterioară a altor puncte, trebuie să fie marcate în prealabil în teren;

b) toate distanțele de care avem nevoie se pot măsura în mod direct sau indirect;

c) toate unghiurile orizontale şi verticale se măsoară în mod direct;

d) în ceea ce priveşte succesiunea lucrărilor există principiul ca determinarea punctelor de detaliu să se facă pe baza unei rețele de puncte determinate anterior, numită **rețea de sprijin** *sau* **osatură.**

Rețeaua geodezică este privită ca mulțimea punctelor de pe suprafața terestră pentru care se cunosc coordonatele într-un sistem unitar de referință.

Exemple de rețele :

1. rețea de triangulație;
2. rețea de trilaterație;
3. rețea de nivelment;
4. rețea poligonometrică;
5. rețea gravimetrică.

9.1 Rețeaua de triangulație

Triangulația este o metodă de determinare a coordonatelor ***B*, *L*** pe elipsoidul de referință sau a coordonatelor ***X*, *Y*** în planul de proiecție pentru o rețea materializată pe suprafața terestră. Pentru determinarea celei de-a treia coordonate ***H*** (cota), se utilizează nivelmentul trigonometric sau geometric. Poziția în spațiu a oricărui punct din rețeaua de triangulație este definită în mod curent în raport cu două suprafețe distincte de referință:

- pentru determinări plane (***X, Y, B, L***) → elipsoid de referință;

- pentru cote (***H***) → geoidul sau cvasigeoidul, funcție de sistemul de altitudini adoptat oficial.

9.2 Rețeaua nivelmentului de stat

Rețeaua nivelmentului de stat constituie **baza altimetrică** a tuturor determinărilor geodezice, fotogrametrice, cartografice şi cadastrale. Punctele rețelei de nivelment nu coincid cu punctele rețelei de triangulație, acestea fiind proiectate şi realizate separat.

În rețelele de triangulație, de exemplu, altitudinile punctelor au o precizie mai mică de determinare decât coordonatele plane, iar într-o rețea de nivelment se urmăreşte precizia maximă în determinarea cotelor, urmând ca ***X*** şi ***Y*** să fie folosite doar pentru o posibilă identificare a punctelor.

9.3 Rrețeaua gravimetrică

Rețeaua gravimetrică este constituită din puncte la care se determină şi mărimea accelerației gravitaționale ***g***. Pentru acest scop se foloseşte aparatură specifică (gravimetrul), care funcționează pe principiul unei „sonde în miniatură" şi care prelevează probe prin forări la nivelul scoarței terestre în punctele caracteristice.

9.4 Rețeaua poligonometrică

Rețeaua poligonometrică constituie un ansamblu de rețele care au la bază cea mai simplă formă geometrică (triunghiul), în care se fac măsurători complete unghiulare, cât şi o bază de pornire şi una de închidere.

9.5 Proiectarea rețelelor de triangulație. rețele de sprijin

După destinație, rețelele de sprijin se împart în:

1. *Rețeaua geodezică de stat*
2. *Rețeaua de triangulație locală*
3. *Rețeaua de ridicare*

9.5.1 Rețeaua geodezică de stat

Rețeaua geodezică de stat este constituită din puncte de triangulație geodezică de patru ordine şi din puncte de poligonometrie. Această rețea se prezintă sub forma unei rețele compacte de triunghiuri combinate cu patrulatere cu ambele diagonale observate, având scopul ştiințific principal de stabilire a formei şi dimensiunilor elipsoidului pământesc. Pe lângă acest scop ştiințific, valabil întotdeauna, ea ajută evoluția tehnică, astfel încât:

a) serveşte ca osatură a hărții României la scară mică;

b) serveşte ca bază de pornire pentru executarea planurilor cadastrale la scară medie;

c) stă la baza reţelelor de sprijin locale şi de ridicare pentru planuri la scări mari pentru toate lucrările de urbanism, drumuri, căi ferate, căi navigabile, baraje, canale de irigații, etc.;
d) serveşte la calculul orientării tunelurilor şi galeriilor.

Rețeaua de triangulație a României, conform instrucțiunilor din 1962, are patru ordine, realizând o densitate medie de 1 punct / 20 km˛.

a) Rețeaua de ordinul I are punctele dispuse în vârfurile unor triunghiuri, pe cât posibil echilaterale, asigurând o lungime a laturilor în medie de 25 km în regiunile de munte şi 20 km în regiunile de şes, densitatea obținută fiind de 1 punct / 500 km˛. În interiorul fiecărui triunghi de ordinul I se introduc punctele de ordinul II, în mod obişnuit trei puncte, laturile triunghiurilor de ordinul II fiind circa ″ din cele ale triunghiului de ordinul I.

b) Rețeaua de ordinul II are punctele dispuse în vârfurile unor triunghiuri cu laturile de 13 km şi asigură o densitate de 1 punct / 150 km˛.

c) Rețeaua de ordinul III se obține prin îndesirea punctelor în aşa fel încât în interiorul fiecărui triunghi de ordinul II să avem circa trei puncte de ordinul III. În cazul rețelei de triangulație de ordinul III, laturile triunghiurilor sunt de 8 km şi asigură o densitate de 1 punct / 50 km˛. Coordonatele acestor puncte se determină legându-se de puncte de ordinul II sau de ordinul II şi I.

d) Rețeaua de ordinul IV se obține introducând în interiorul triunghiurilor de ordinul III, punctele de ordinul IV astfel încât distanța între acestea să fie de circa 4 km iar densitatea lor de 1 punct / 20 km˛. Densitatea de 1 punct / 20 km˛ este cu totul insuficientă pentru a putea ridica suprafețele topografice. Pentru a ne putea apropia cât mai mult de punctele de detaliu şi a putea face ridicarea suprafețelor cât mai fidel, se impune mărirea numărului de puncte. Pentru aceasta se realizează rețele de triangulație locală şi rețele de ridicare.

9.5.2 Rețeaua de triangulație locală

Pe suprafețe topografice care nu depăşesc câteva sute de km˛, unde nu există rețea geodezică de stat, sau aceasta nu este folosibilă din punct de vedere al densității, se realizează o triangulație locală. Prin metoda triangulației locale se determină coordonatele unui număr de puncte prin intermediul rețelei de triunghiuri ale căror vârfuri sunt materializate în teren. Distanța dintre puncte este cuprinsă între 0,5 şi 3 km. Forma rețelei de triangulație este funcție de forma suprafeței pe care o avem de ridicat, putând avea după caz rețea de triunghiuri formând un poligon cu punct central, patrulater cu vize pe ambele diagonale, lanț de triunghiuri, lanț de patrulatere sau o combinație între acestea. În cazul suprafețelor cu un contur circular se alcătuieşte o rețea în formă de poligon cu punct central (fig.24), în care se măsoară toate unghiurile şi o bază ($\overline{AB}$ =B_1); pe baza acestor elemente măsurate, care vor fi compensate, se vor calcula orientările laturilor şi coordonatele punctelor.

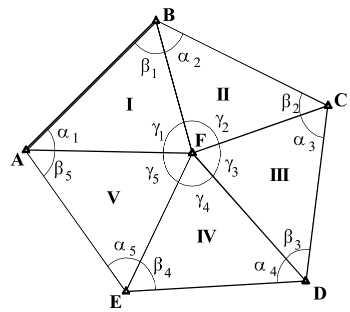
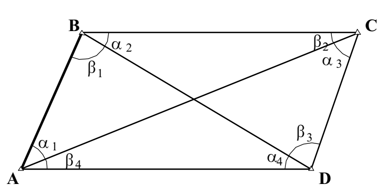


Fig.24 Poligon cu punct central

În cazul în care suprafața pe care o avem de ridicat este mult mai lungă decât lată, se va folosi patrulaterul cu ambele diagonale vizate (fig.25), lanțul de triunghiuri (fig.26) sau o combinație dintre acestea.



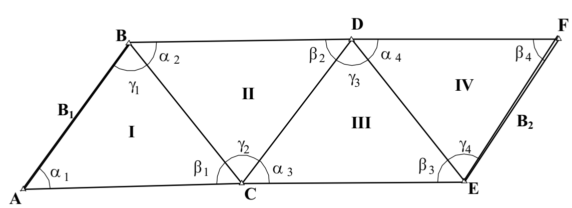


Fig.25 Patrulater cu diagonalele vizate; *Fig. 26 Lanț de triunghiuri*

Şi în aceste forme de rețele se vor măsura toate unghiurile, măsurarea unei singure baze nemaifiind suficientă, deoarece nu se poate face închiderea tot pe baza de pornire.

Pentru aceasta se va mai măsura cel puțin o bază de închidere (B_2). Dacă lanțul de triunghiuri este foarte lung, se obişnuieşte ca după fiecare 10 - 15 triunghiuri să fie măsurată o bază de închidere.

O triangulație locală, indiferent de forma acesteia, necesită următoarele operații principale :

a) **Operații preliminarii** care constau din*:*

- întocmirea proiectului rețelei pe o hartă topografică;
- recunoaşterea terenului pe care urmează să fie executată această triangulație locală;
- definitivarea proiectului de triangulație în conformitate cu situația din teren;
- marcarea şi semnalizarea punctelor rețelei de triangulație.

b) Efectuarea măsurătorilor care constă din:

- măsurarea tuturor unghiurilor;
- măsurarea unei baze sau a unor baze de triangulație;
- determinarea orientării bazei de pornire sau a unei laturi din rețeaua de triangulație, orientare care se poate determina prin metode astronomice sau magnetice.

c) Calculul triangulației care constă din:

- compensarea elementelor măsurate;
- calculul laturilor rețelei de triangulație;
- calculul orientării laturilor;
- calculul coordonatelor punctelor de triangulație.

9.5.3 Rețeaua de ridicare

Prin punctele rețelei geodezice de stat şi din triangulațiile locale, se ajunge la o densitate a acestora mult prea mică pentru a constitui o rețea de sprijin pentru ridicarea detaliilor în vederea întocmirii de planuri la scări mari (1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500). De asemenea, prin rețelele locale de triangulație se ajunge la puncte situate la o distanță de 0,5 - 3 km, mult prea îndepărtate între ele pentru a putea face ridicarea detaliilor. Pentru a ridica punctele de detaliu, trebuie să creăm în teren puncte de sprijin situate la o distanță de 100 - 250 m. Mărirea numărului de puncte prin metoda triangulației nu este potrivită, deoarece s-ar produce cheltuieli şi muncă inutilă pe de o parte, iar pe de altă parte, în majoritatea cazurilor, nici natura terenului nu ar permite acest lucru datorită acoperirii cu diferite detalii şi a reliefului acestuia.

Prin rețeaua de ridicare se înțelege rețeaua creată în scopul asigurării numărului de puncte necesare ridicărilor topografice; ea este alcătuită din puncte de: intersecție înainte, înapoi, laterală şi drumuire care se sprijină în determinarea lor pe puncte din rețelele determinate anterior. Densitatea rețelei de ridicare se stabileşte în raport cu scopul lucrărilor şi scara de redactare a planurilor topografice, conform instrucțiunilor tehnice de lucru.

9.6 Determinarea de puncte noi prin metoda intersecțiilor

Metoda intersecțiilor se bazează pe puncte din rețeaua geodezică sau locală. Pentru determinarea punctelor noi se măsoară în teren numai unghiuri.

Intersecțiile pot fi: înainte, înapoi şi laterale.

a) Cazul general al intersecției înainte Constă în aceea că în teren se dispune de două puncte staționabile P_1 şi P_2 de coordonate cunoscute şi se cere să fie determinate coordonatele unui alt punct staționabil, de exemplu P_0; între punctele vechi şi punctul nou există vizibilitate. Pentru rezolvarea acestei probleme se vor măsura în teren unghiurile **α, β** şi **γ** *(fig.27).*

Punctele P_1 şi P_2, având coordonatele cunoscute, rezultă că se poate calcula distanța d_{12}, orientarea θ_{12} şi ca urmare din calcule rezultă $d_{10}, d_{20}, \theta_{10}$ şi θ_{20}, obținându-se coordonatele punctului P_0 la intersecția celor două direcții de viză spre punctul P_0 (din P_1 şi P_2).

$$X_0 = X_1 + d_{10}\cos\theta_{10} = X_2 + d_{20}\cos\theta_{20}$$
$$Y_0 = Y_1 + d_{10}\sin\theta_{10} = Y_2 + d_{20}\sin\theta_{20}$$

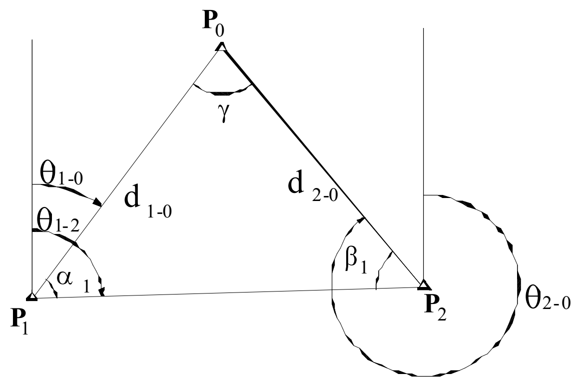


Fig. 27 Intersecția înainte

b) **Cazul general al intersecției înapoi**

Constă în aceea că în teren dispunem de trei puncte nestaționabile P_1, P_2 şi P_3, de coordonate cunoscute şi se cere să fie determinate coordonatele unui punct P_0 staționabil din care se văd cele trei puncte cunoscute. Pentru rezolvarea problemei (*fig. 28)* se face stație cu teodolitul în punctul P_0 şi se măsoară unghiurile orizontale **α** şi **β**. Prin calcularea unghiurilor u şi v care nu pot fi măsurate, deoarece ***P₁*** şi ***P₃*** sunt nestaționabile, se ajunge în situația a două intersecții înainte din care se pot calcula coordonatele punctului P_0.

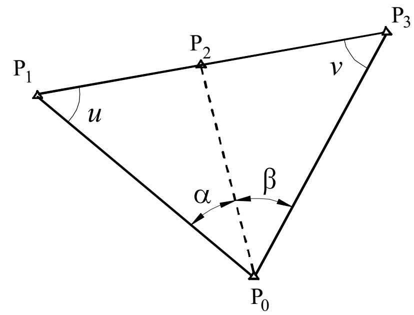


Fig.28 Intersecția înapoi

c) **Cazul general al intersecției laterale**

Constă în aceea că în teren dispunem de două puncte de coordonate cunoscute P_1 staționabil şi P_2 nestaționabil. Pentru a determina coordonatele unui punct nou P_0 staționabil (fig.29), se măsoară în teren α şi γ. Unghiul din punctul P_2 se calculează din : β = [200 – (α + γ)]. La această intersecție nu se poate face compensarea de unghiuri ca în cazul intersecțiilor înainte, restul calculului fiind identic cu cel de la intersecția înainte.

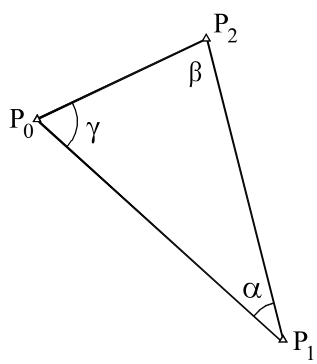


Fig. 29 Intersecția laterală

d) **Problema Hansen** constă în aceea că în teren dispunem de două puncte de coordonate cunoscute P_1 şi P_2, ambele nestaționabile şi urmează să determinăm coordonatele unui punct P_0 staționabil, din care sunt vizibile cele două puncte vechi. Pentru a putea rezolva problema în teren se alege un punct ajutător staționabil, din care avem vizibilitate atât spre punctele vechi, cât şi spre punctul nou P_0. Pentru a rezolva problema (fig. 30) se face stație în P_0 şi în punctul ajutător ales **A**, măsurându-se unghiurile α, β, γ. Se calculează unghiurile $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, *u* şi *v*, iar problema se descompune în două intersecții simple.

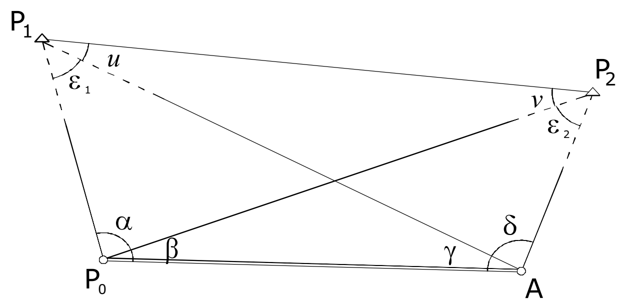


Fig. 30 Problema Hansen

9.7 Îndesirea rețelelor topo - geodezice prin drumuiri

Pentru a ne apropia şi mai mult de punctele de detaliu, mărirea numărului punctelor ale căror coordonate le cunoaştem se face cu ajutorul drumuirilor planimetrice. Această metodă constă în aceea că un grup de puncte noi 101, 102, 103..., pe care le situăm astfel încât să constituie o linie poligonală, pornind dintr-un punct de coordonate cunoscute şi sfârşind într-un alt punct de coordonate cunoscute, aşa cum este indicat în figura (31).

Se măsoară în teren toate unghiurile dintre laturile liniei poligonale, cât şi lungimea laturilor acestei linii. Pentru a putea orienta această linie poligonală în cadrul triangulației existente, în punctul de pornire şi închidere se mai dă câte o viză spre un punct de coordonate cunoscute **P** şi **R** care pot fi staționabile sau nestaționabile.

Drumuirea poate fi definită ca o combinare a unor metode polare care sunt puse una la capătul celeilalte.

Drumuirile planimetrice se pot clasifica în funcție de ordinul lor sau după forma traseului.

După ordinul lor, drumuirile sunt primare şi secundare.

În drumuirea primară, atât punctul de pornire cât şi cel de închidere sunt puncte de triangulație sau de intersecție.

În drumuirea secundară unul din punctele A şi B, sau amândouă sunt puncte de drumuire primară.

După forma traseului, drumuirea poate fi deschisă sau închisă. Drumuirea deschisă constă în aceea că se porneşte dintr-un punct de coordonate cunoscute A şi se face închiderea pe un alt punct de coordonate cunoscute B. În general, atât punctul A cât şi B sunt staționabile.

Dacă punctul de pornire al drumuirii se confundă cu punctul de închidere (A ≡ B), avem de-a face cu o drumuire închisă.

Indiferent de ordinul sau forma drumuirii, pe baza elementelor măsurate, unghiuri şi laturi, se pot calcula coordonatele punctelor noi 101, 102..., .

Determinarea punctelor de drumuire nu mai este aşa de precisă ca cele de triangulație şi intersecție, deoarece în acest caz pe lângă măsurarea unghiurilor dintre laturi, trebuie să măsurăm şi toate laturile drumuirii, operație prin care sursele de erori se vor înmulți.

Odată cu determinarea punctelor de drumuire, numărul punctelor din rețeaua de sprijin este suficient pentru ca, sprijinindu-ne pe acestea, să putem trece la determinarea punctelor de detaliu.

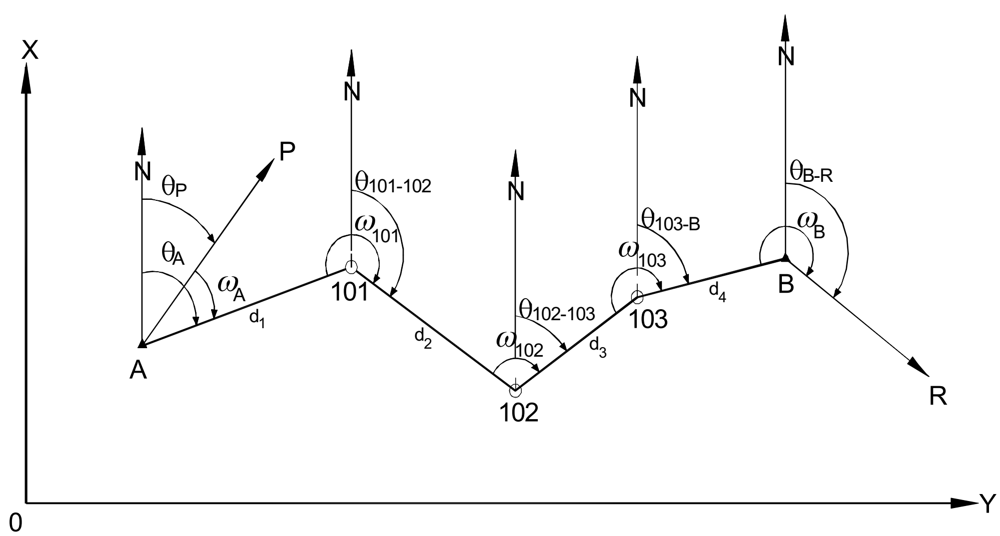


Fig. 31 Drumuire planimetrică

9.8 Clasificarea rețelelor geodezice

Clasificarea rețelelor geodezice poate fi făcută după mai multe criterii după cum urmează:

9.8.1 Clasificarea rețelelor geodezice după numărul elementelor fixe din rețea:

a) Rețea geodezică liberă

Prin rețea geodezică liberă se înțelege o rețea în care intervin numai măsurătorile corespondente necesare determinării geometrice a rețelei. Se consideră că astfel de rețele au un anumit „defect”, reflectat de faptul că măsurătorile geodezice propriu - zise nu pot încadra rețeaua considerată într-un anumit sistem de coordonate.

b) Rețea geodezică fără constrângeri

O astfel de rețea geodezică cuprinde, în afara măsurătorilor care determină geometria rețelei, un număr limită, strict necesar şi suficient, de elemente pentru încadrarea rețelei considerate în sistemul de coordonate adoptat.

c) Rețea geodezică constrânsă

Aceasta este o rețea geodezică în care există un număr suplimentar de elemente, în raport de cele strict necesare şi suficiente, pentru determinarea poziționării rețelei în sistemul de coordonate adoptat. Aceste elemente determină gradele de libertate ale rețelei, care sunt eliminate în procesul de compensare prin introducerea unor constrângeri (condiții) de natură geometrică sau analitică.

9.8.2 Clasificarea după formă

Rețelele naționale de triangulație au fost create în mod diferit în decursul vremii fiind îmbunătățite continuu şi din punct de vedere al formei utilizate.

a) Rețea formată din lanțuri de triangulație

Acestea erau constituite din triunghiuri, patrulatere geodezice şi uneori poligoane cu puncte centrale, fiind dispuse în lungul meridianelor şi paralelelor, la distanțe de circa 200 km, la intersecția lor existând puncte ***Laplace***.

Pentru România au existat trei lanțuri primordiale în lungul meridianelor şi două lanțuri dispuse în lungul paralelelor, care făceau parte din lanțuri internaționale, fiind sprijinite pe 9 baze geodezice.În interiorul poligoanelor formate de lanțurile primordiale de ordinul I s-a creat rețeaua de triangulație complementară de ordinul I, de îndesire, care era ulterior compensată ca o triangulație constrânsă, pe elemente fixe ale lanțurilor primordiale, anterior şi independent compensate.

b) Rețea compactă de triangulație sau rețea de suprafață

Aceasta acoperă integral teritoriul considerat, fără a se mai crea golurile existente în rețelele formate din lanțuri de triangulație.

Compensarea rețelelor compacte este efectuată ***în bloc*** sau prin metode riguroase de compensare ***pe grupe*** (care furnizează rezultatele egale cu cele de la compensarea în bloc) fiind astfel bazate pe un bogat material informațional, reprezentat de totalitatea măsurătorilor existente pe întregul teritoriu.

Actuala rețea de triangulație a țării noastre este o rețea compactă. Afirmația poate fi extinsă şi asupra rețelei de nivelment care, deşi este creată sub *formă de poligoane*, asigură acoperirea întregii suprafețe a țării în mod uniform.

9.8.3 Clasificarea după destinație

Destinația rețelelor geodezice condiționează forma şi structura acestora, existând o legătură reciprocă între criteriile după care se pot clasifica rețelele geodezice.

a) Rețea geodezică internațională

Este creată pe teritoriul mai multor state, pe baza unor convenții şi colaborări internaționale. Pe lângă scopurile ştiințifice, de determinare a formei şi dimensiunilor Pământului, rețelele internaționale sunt utilizate în scopuri cartografice, militare, economice, etc.. Actualele rețele internaționale sunt de formă compactă, cu structură foarte complexă, cuprinzând în general toate categoriile de măsurători.

Astfel, în figura 32 se prezintă rețeaua de triangulație vest - europeană specificând şi faptul că unele țări din Europa de est au creat o rețea de triangulație similară. În această rețea s-au determinat şi coordonatele punctelor

rețelei de triangulație de ordin superior ale țării noastre.

Fig.32 Rețeaua de triangulație vest – europeană

b) Rețea geodezică de stat

Rețeaua geodezică de stat, creată separat pentru triangulație şi respectiv pentru nivelment, constituie principala rețea de sprijin pentru toate lucrările topografice - fotogrametrice, precum şi pentru lucrările geodezice de importanță locală, fiind împărțită pe ordine: I, II, III şi IV.Rețelele de ordin I (uneori şi cele de ordin II) sunt denumite *rețele de ordin superior* (de triangulație şi respectiv de nivelment). Aceste rețele au fost create de către *Direcția topografică militară* (DTM) începând cu anul 1956.

Fig. 8.6. Rețeaua de triangulație de ord. I a R.S. România.

Fig. 33 Rețeaua de triangulație de ordinul I a României

Rețeaua de triangulație de stat a fost completată cu o *rețea de îndesire* de ordinul V, ale cărei puncte au fost determinate nu numai prin metoda triangulației ci şi prin metodele trilaterației, poligonometriei, prin intersecții înainte, înapoi sau combinate. În mod similar, rețeaua de nivelment de stat a fost, de asemenea, îndesită şi completată prin numeroase lucrări de nivelment tehnic, în localități, etc.. Aceste ample lucrări de creare a rețelelor geodezice de planimetrie şi de nivelment s-au desfăşurat sub coordonarea unor instituții naționale de specialitate dintre care un rol deosebit revine *Direcției topografice militare* (DTM) şi *Institutului de geodezie, fotogrammetrie, cartografie şi organizarea teritoriului* (IGFCOT).

În cadrul IGFCOT în anul 1975 a luat ființă *Banca de date şi informații topografice,* care stochează şi pune la dispoziția tuturor solicitanților coordonate şi alte informații utile pentru puncte planimetrice şi repere de nivelment din rețelele noastre geodezice.

Rețeaua gravimetrică de ordin I (fig. 5.35) a fost creată de *Academia României* şi *Comitetul Geologic* în perioada 1956 - 1957.

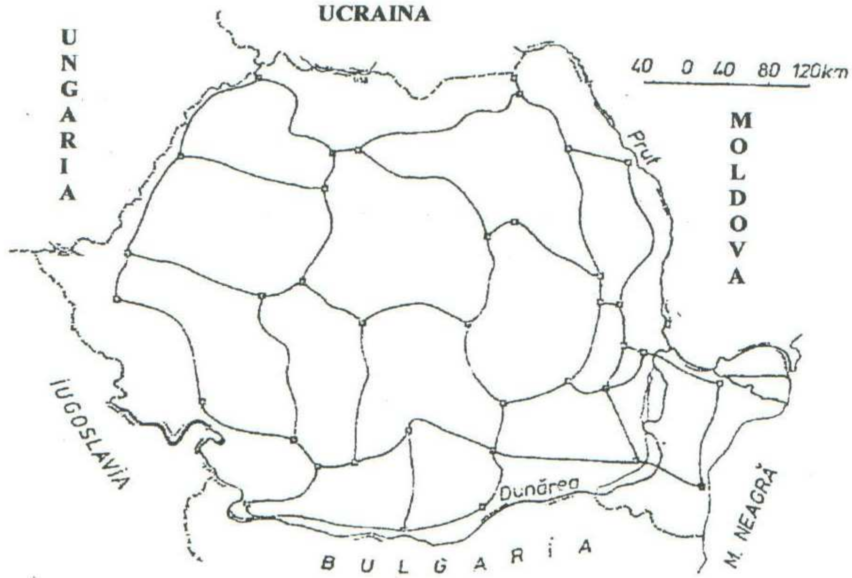


Fig. 34 Rețeaua de nivelment de ordinul I a României

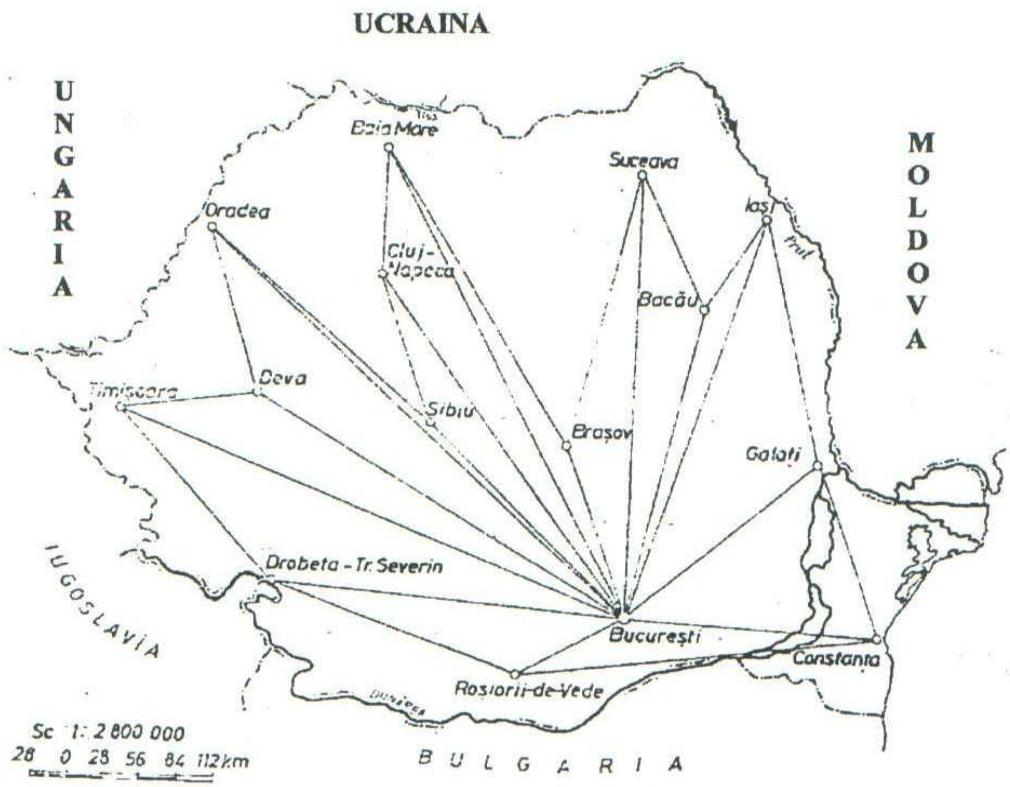


Fig.35 Rețeaua gravimetrică de ordinul I a României

c) Rețea geodezică locală

Pentru lucrări inginereşti de amploare, se creează rețele geodezice locale. Uneori precizia interioară a unor astfel de rețele este mai ridicată, în comparaţie cu precizia din rețeaua geodezică de stat. De aceea, în mod obişnuit, rețelele geodezice locale *nu se constrâng*, ci se realizează doar o *încadrare* în rețelele geodezice de stat corespondente.

9.8.4 Clasificarea după numărul de dimensiuni ale spațiului în care este amplasată rețeaua geodezică

a) Rețea geodezică unidimensională

În această categorie de rețele geodezice se pot încadra rețelele de nivelment, deoarece punctele care constituie aceste rețele au doar *una* dintre coordonate
(altitudinea) determinată omogen, într-un sistem de coordonate unitar de referință.
Celelalte coordonate ataşate punctelor respective au un rol de identificare, fiind determinate aproximativ.

b) Rețea geodezică bidimensională

În aceste rețele punctele au determinate două coordonate într-un sistem unitar de referință: *X*, *Y* în planul de proiecție sau *B, L* pe elipsoidul de referință. Aceste rețele se mai numesc şi *rețele planimetrice*. Cealaltă coordonată (altitudinea) este determinată separat, într-un sistem de coordonate unidimensional.

c) Rețea geodezică tridimensională

În aceste rețele toate cele trei coordonate care descriu poziția punctului într-un sistem cartezian de referință sunt determinate omogen şi unitar.

d) Rețea geodezică în spațiul cu patru dimensiuni

Această denumire este atribuită rețelelor geodezice care sunt determinate în mod repetat, la anumite intervale de timp. Cele trei coordonate care definesc poziția spațială a unui punct din rețea nu sunt determinate întotdeauna omogen şi unitar.
Timpul constituie cea de-a patra coordonată.

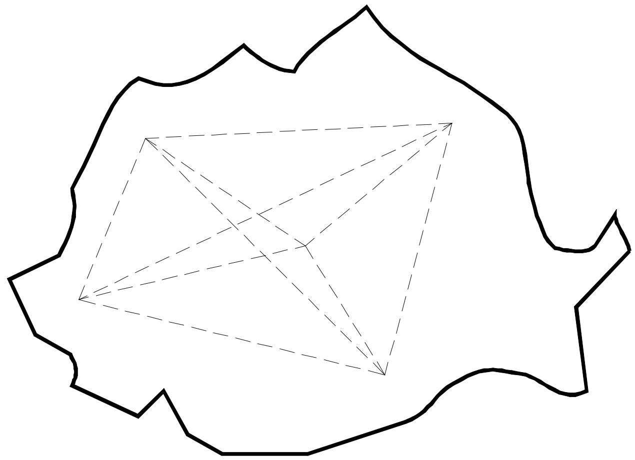


Fig. 36 Rețeaua națională GPS

CAP.10. ELABORAREA PROIECTULUI REȚELELOR GEODEZICE

Elaborarea proiectului de construcție a unei rețele geodezice este dependentă de natura, destinația şi caracteristicile semnificative structurale ale rețelei geodezice considerate. La noi în țară rețelele geodezice de stat (triangulație şi respectiv nivelment) sunt realizate într-o densitate convenabilă pentru marea majoritate a lucrărilor topografice - fotogrametrice, cartografice sau cadastrale.

10.1 Principii de elaborare a proiectului rețelelor geodezice

► Proiectul rețelelor geodezice de stat se execută separat pe ordine, de la complex către simplu. Privind desfăşurarea în timp a lucrărilor de elaborare a acestor proiecte se observă că între lucrările pentru rețeaua de ordinul I şi cele pentru ordinul IV există uneori perioade de câteva decenii.

► Rețelele geodezice de stat se construiesc după ***principiul omogenității***, adică se urmăreşte asigurarea unei precizii de determinare în general uniformă pentru toate punctele geodezice din rețea. Principiul omogenității este realizat în primul rând prin faptul că, construcția rețelelor geodezice de stat se desfăşoară succesiv, de la superior spre inferior, după ce ciclul complet - proiectare, măsurare, prelucrare - este încheiat la ordinele imediat superioare. În acest fel o rețea geodezică de stat, de un anumit ordin, se sprijină pe rețele geodezice deja construite, precizia în poziție a punctelor sale fiind condiționată de cea a punctelor pe care este construită. Această condiționare nu trebuie confundată cu o acumulare a tuturor erorilor posibile care se produc în cazul celor două categorii de rețele, deoarece rețeaua de ordin superior este deja geometrizată prin prelucrarea observațiilor proprii.

Propagarea erorilor în rețelele geodezice depinde în mare măsură de extinderea rețelei de ansamblu, precum şi de mărimea elementelor de structură (lungimea laturilor în cazul rețelelor planimetrice, respectiv a liniilor sau poligoanelor în rețelele de nivelment sau gravimetrice). De aceea este posibilă obținerea unei precizii de poziție a punctelor geodezice de ordin inferior similare cu cea a punctelor de ordin superior chiar prin utilizarea unor observații geodezice de precizie mai mică.

Omogenitatea este realizată prin faptul că deşi laturile rețelelor de triangulație descresc ($D^{IV} < D^{II}$), cresc erorile de măsurare $s_u^{IV} > s_u^{II}$, astfel încât eroarea de poziție s_t a punctelor geodezice din întreaga rețea de triangulație de stat oscilează în jurul unei valori medii (la noi în țară $s_t \approx \pm$ *15 cm*).

Atunci când se apreciază că precizia de determinare a poziției punctelor din rețeaua de stat nu este suficientă, se construiesc *rețele geodezice locale*, care deşi se compun din figuri geodezice cu laturi scurte se determină după metodele şi cu aparatura folosite la ordinul superior, rezultând erori de măsurare mici şi prin urmare erori de poziție inferioare celor din triangulația de stat.

► La executarea proiectului de triangulație trebuie să se respecte prescripțiile instrucțiunilor în vigoare. Conformația figurilor elementare care compun rețeaua trebuie să se apropie de cazurile optime şi în nici un caz să nu depăşească toleranțele menționate, urmând să se aleagă varianta de proiectare cea mai puțin costisitoare.

În afara instrucțiunilor elaborate de DTM pentru rețelele geodezice de stat (triangulație 1962 şi respectiv nivelment 1965) şi a instrucțiunilor IGFCOT 1979 pentru rețeaua de nivelment geometric, există instrucțiuni care reglementează lucrările de construcție a rețelelor geodezice de sprijin în localități (1961) şi respectiv, în cadrul lucrărilor hidroenergetice (1976), etc.

► Poziția unui anumit punct geodezic depinde în primul rând de poziția punctelor de acelaşi ordin şi de ordin superior cu care este în legătură directă. În acelaşi timp amplasarea fiecărui punct trebuie să permită o dezvoltare fără prea mari dificultăți a rețelei de ordin inferior, deoarece rețeaua geodezică nu trebuie privită ca un scop în sine, ci ca un mijloc important de construire a unei vaste rețele de puncte geodezice - topografice - fotogrametrice, bine conformată în ansamblul său.

► În rețeaua de triangulație de stat s-a urmărit şi realizat o densitate cât mai uniformă de puncte geodezice pe km^2 de teritoriu. Rețeaua compactă de ordinul I a țării noastre, care cuprinde circa 300 de puncte, este îndesită în mod succesiv cu rețele de ordinul II, III şi IV, astfel încât întreaga rețea de stat are o densitate de cel puțin un punct la 20 km^2, ceea ce corespunde la circa 5 puncte geodezice pe o foaie de hartă la scara 1: 25 000.

Rețeaua de îndesire de ordinul V, precum şi lucrările geodezice din rețelele geodezice cu caracter local au condus la existența unui număr de peste 150.000 puncte geodezice înregistrate în *Banca de date şi informații topografice a IGFCOT*.

► Rețelele de triangulație din localități sunt, în general, compacte, fiind construite sub următoarele forme :

- *rețele principale*, compuse din figuri geodezice în care unghiurile sunt mai mari de 36ş, iar lungimea unei laturi este cuprinsă între 3 şi 7 km;
- *rețele secundare*, care îndesesc rețelele principale, având laturi cuprinse între 1 şi 3 km.

► Fiecare punct de triangulație are altitudinea sa determinată în sistemul de nivelment de stat. Aceste determinări se realizează fie prin *nivelment geometric* (când condițiile permit), fie prin *nivelment trigonometric* ceea ce constituie de fapt cazul general. Instrucțiunile în vigoare impun ca pe o foaie de hartă la scara 1: 25 000 să existe cel puțin un punct cotat prin nivelment geometric (în mod excepțional pentru regiuni muntoase se admite un punct pentru două foi de hartă la scara 1: 25 000).

Proiectul determinării altitudinilor punctelor de triangulație de ordinul I, II, III, IV se realizează separat de proiectul determinărilor planimetrice.

► În rețeaua de nivelment de stat densitatea se referă la depărtarea maximă admisibilă între reperele de nivelment de anumite tipuri.

Astfel, reperele fundamentale de tipul I sunt amplasate în lungul liniilor de nivelment de ordinul I la distanțe cuprinse între 100 şi 150 km, reperele de tipul II la distanțe de 30 - 50 km, în lungul liniilor de ordinul I şi II, reperele de tipul III la distanțe de 5 - 7 km, iar mărcile de nivelment la distanțe de 2 - 4 km, în lungul tuturor liniilor de nivelment. În intravilan densitatea este mai mare şi anume la circa 300 m este amplasată o marcă sau un reper de nivelment. *Banca de date şi informații topografice a IGFCOT* stochează datele necesare pentru circa 200.000 puncte geodezice cotate, din rețeaua de nivelment de stat, din rețelele de nivelment cu caracter local, precum şi din întreaga rețea planimetrică. Utilizatorul este informat asupra modalității de determinare a altitudinii, precum şi asupra preciziei sale.

► În ceea ce priveşte *rețeaua gravimetrică* se poate menționa faptul că aceasta nu a fost proiectată şi realizată numai pentru scopuri geodezice. Ca urmare, în situații specifice, cum au fost lucrările gravimetrice pentru rețeaua de nivelment de ordin superior, determinările gravimetrice s-au executat cu o densitate mai mare.

► Prin instrucțiunile în vigoare este prevăzut ca legăturile între punctele de triangulație să fie realizate prin vize reciproce, în rețele compacte.

Aceleaşi instrucțiuni impun ca fiecare punct al rețelelor de ordinele III şi IV să aibă cel puțin trei legături de determinare la ordinele imediat superioare, la care se adaugă legăturile cu punctele de triangulație de acelaşi ordin sau ordin inferior.

Rețelele de nivelment şi rețelele gravimetrice se proiectează sub forma unor poligoane, astfel că legăturile dintre repere se stabilesc după aceleaşi principii:

„de la superior la inferior" şi respectiv „în interiorul ordinului".

La ordinul IV şi în rețelele locale se acceptă şi linii de nivelment sprijinite la ambele capete pe repere din rețeaua constituită de celelalte ordine.

► Rețelele geodezice trebuie astfel proiectate încât să asigure un volum cât mai mic de cheltuieli, concomitent cu respectarea preciziei necesare în poziționarea punctelor rețelei. Din acest punct de vedere se pot semnala următoarele:

- punctele de triangulație sunt astfel amplasate încât să rezulte necesități minime ale înălțimilor semnalelor geodezice care urmează a fi construite în aceste puncte;
- liniile de nivelment se amplasează în lungul căilor de comunicații, astfel încât să rezulte pante mici între reperele de nivelment şi acces simplu, atât la determinarea propriu-zisă, cât şi ulterior în exploatare.

10.2 Documentația necesară întocmirii proiectului rețelelor geodezice

Întocmirea proiectului triangulației constă în stabilirea pe o hartă, la o anumită scară, a poziției punctelor geodezice, în aşa fel încât figurile geometrice formate, să îndeplinească condițiile impuse ordinului respectiv de triangulație. Poziția punctelor va fi astfel aleasă încât să ocupe poziții dominante din teren, să asigure vizibilitatea între ele cu ajutorul unor construcții cât mai mici şi să realizeze o conformație cât mai riguroasă a figurilor geometrice.

Pentru proiectarea oricărei rețele de triangulație, se desfăşoară la început o *documentare*, pe baza căreia se strâng informațiile, datele şi materialele necesare proiectării cum ar fi:

- hărți editate la orice scară;
- descrieri topografice şi date existente cu privire la rețelele geodezice executate anterior (triangulație, poligonometrie, nivelment, baze şi determinări astronomice), dări de seamă asupra acestor lucrări, scheme, cataloage de coordonate existente, descrieri ale mărcilor şi reperilor de nivelment, crochiuri, date şi informații privind bornarea punctelor existente, carnete de observații, etc. ;
- date informative asupra condițiilor fizico - geografice din regiunea de lucru ca: relief, rețeaua hidrografică, păduri şi esența lor, date meteorologice (lunile cele mai ploioase, cantitatea de apă medie pe m^2, când încep ninsorile, situația anuală a vânturilor şi intensitatea lor, ceața, temperaturile care se înregistrează în decursul anului) etc. ;
- date de natură economică: localități, posibilități de angajare a forței de muncă şi a mijloacelor de transport, rețeaua de căi de comunicații, legături telefonice, posibilități de aprovizionare cu hrană, materiale de construcții, de cazare etc. ;Înainte de întocmirea proiectului este necesar să se execute o *recunoaştere prealabilă* a zonei în scopul culegerii unor informații suplimentare şi a confirmării celor existente.

Proiectarea se face pe ordine de *triangulație*, începând cu ordinul I şi cu grija deosebită ca la ordinele inferioare să se realizeze legături sigure la ordinul superior.

Ordinele I şi II se proiectează pe hărți la scara 1: 200.000, iar ordinele III şi IV pe hărți la scara 1: 100.000.

După proiectarea rețelei de triangulație se face o analiză din care să rezulte :
- lungimea maximă şi minimă a laturilor, pe ordine de triangu lație;
- valoarea minimă a unghiurilor din figurile formate, pe ordine de triangulație;
- valoarea ponderii;
- dacă legăturile între puncte sunt făcute prin rețea de triunghiuri, patrulatere cu diagonale observate şi sisteme centrale, toate vizele fiind reciproce;
- numărul total de puncte pe ordine de triangulație şi densitatea realizată;
- perioadele cele mai favorabile pentru observații;
- excepțiile de la condițiile teoretice impuse fiecărui ordin de triangulație;
- cantitatea totală de materiale de construcții;
- de unde se vor procura materialele necesare şi unde se vor constitui depozite în zonă;
- alte date privind posibilitățile de hrănire, cazare, forță de muncă, date meteorologice , etc..

În urma proiectării trebuie să se întocmească următoarele documente:
- proiectul rețelei triangulației de ordinul I şi II, pe hărți la scara 1: 200.000, iar al rețelei de ordinul III şi IV la scara 1: 100.000;
- o schiță pentru ordinul I, la scara 1: 200.000;
- o schiță pentru ordinul I şi II, la scara 1:200.000;
- o schiță pentru ordinul III şi IV, la scara 1:100.000;
- proiectul observațiilor zenitale, la scara 1:100.000, cu traseul liniilor de nivelment proiectate şi punctele ce trebuie radiate pentru a primi cotă prin nivelment geometric;
- profilele vizibilității între punctele de ordinul I şi II şi calculele pentru determinarea vizibilității pe direcțiile care au necesitat acest lucru.

10.2.1 Piese scrise

Piesele scrise intră în alcătuirea oricărui proiect şi cuprind toate elementele descriptive, de calcul şi de interpretare necesare elaborării şi finalizării lucrării respective.

10.2.1.1 Note de calcul

Acestea se referă la diferite operațiuni efectuate la elaborarea proiectului: calcule de estimare „a priori” a propagării erorilor în rețeaua geodezică, calculul înălțimilor semnalelor prevăzute a fi construite în rețea, calcule specifice metodei de lucru folosite etc.

10.2.1.2 Devizul estimativ

Pe baza volumului de lucrări proiectate, se întocmeşte devizul estimativ, folosind indicatorul de norme de deviz pentru lucrările topografice - geodezice şi catalogul de preţuri în vigoare, defalcând lucrările ce urmează a se efectua pe articole de deviz.

10.2.1.3 Memoriul justificativ

Memoriul justificativ este o piesă în care se sintetizează studiile anterioare menţionate, în scopul clarificării destinaţiei lucrărilor proiectate, a soluţiilor concrete de realizare (metodele de lucru şi aparatura ce se vor folosi). Se precizează calculul estimativ al volumului de lucrări şi costul acestora, data începerii şi termenul de predare al lucrării.

10.2.1.4 Planificarea şi organizarea lucrărilor

Acestea constau în eşalonarea pe operatori şi în timp a lucrărilor proiectate. Se vor stabili: sediul central, zona de lucru pentru fiecare operator, planul de aprovizionare cu materiale, termenele de definitivare şi predare a fiecărei categorii de lucrări, etc..

10.2.2 Piese desenate

O piesă importantă a fiecărui proiect de reţea geodezică este schiţa acesteia, care se desenează pe o hartă a cărei scară se stabileşte în funcţie de ordinul reţelei şi de mărimea suprafeţei pe care se vor desfăşura lucrările respective (tabelul 10.1).

Punctele reţelei de triangulaţie de ordinul I - IV au denumiri asemănătoare cu cele ale localităţilor, a unor cursuri de apă, formelor de relief apropiate, astfel încât însuşi numele unui punct geodezic să poată fi un indiciu pentru identificarea sa în viitor.

Reperele şi mărcile de nivelment se numerotează separat pe linii de nivelment, având ca indicative: tipul reperului sau mărcii şi după caz, numărul corespunzător.

Pentru a se utiliza cât mai eficient, proiectul reţelei geodezice este desenat în culori diferite: negru pentru ordinul I, albastru pentru ordinul II, roşu pentru ordinul III, verde pentru ordinul IV. Cu aceste culori se vor nota: amplasamentul punctelor geodezice, denumirea lor şi legăturile între puncte.

Tot ca piese desenate se mai pot menţiona:

- diferite schiţe de detaliu privind amplasarea punctelor geodezice;
- profile pe direcţia vizelor proiectate, utile pentru studiul vizibilităţii şi calculul înălţimilor semnalelor geodezice;
- schiţe cu dispunerea elipselor erorilor.

Tabelul 10.1

Ordinul rețelei geodezice	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
Scara proiectului	1:500.000 1:200.000	1:200.000 1:100.000	1:100.000 1:50.000	1:50.000 1:25.000	1:25.000 1:10.000

10.3 Determinarea vizibilității între punctele rețelei de triangulație

La proiectarea rețelelor de triangulație intervine necesitatea studierii vizibilității între punctele geodezice, astfel încât se poate afirma că situația concretă din teren condiționează respectarea prescripțiilor de proiectare anterior menționate, cu privire la conformația optimă a figurilor geometrice folosite în rețelele de triangulație.

Vizibilitatea între punctele de triangulație este condiționată de sfericitatea Pământului, refracția atmosferică şi obstacolele aflate pe traseul razei vizuale (relief, vegetație, construcții, etc.). Deoarece asemenea obstacole pot avea o influență defavorabilă asupra măsurătorilor unghiulare, creând fenomene de refracție, instrucțiunile în vigoare prevăd ca razele vizuale să treacă deasupra obstacolelor la următoarele înălțimi minime totale □: pentru ordinul I, □ > 4 m; pentru ordinul II, □ > 2 m; iar pentru celelalte ordine, □ > 0,5 m.

În figura 37 s-au considerat două puncte de triangulație P_1 şi P_2 între care este necesar să se asigure, prin proiect, vizibilitatea reciprocă.

Se consideră cunoscute (eventual de pe hartă) cotele acestor puncte notate H_1 şi respectiv H_2, precum şi cota H_p a unui punct intermediar P, considerat ca obstacol pe traseu. Cota obstacolului trebuie calculată prin luarea în considerație a înălțimii vegetației, construcțiilor, etc.. În cazul în care în punctele P_1 şi P_2 sunt construite semnale geodezice, în H_1 şi H_2 se includ şi înălțimile acestora. De asemenea se presupun cunoscute distanțele D_1 şi D_2.

Cu ζ^0 s-a notat unghiul zenital în punctul P_1. Datorită refracției atmosferice, raza de vizare va avea o anumită curbură de care se ține seama la calculul diferenței de nivel între punctele situate la capetele ei. Cu R s-a notat raza sferei medii *Gauss*, putându-se considera în calculele referitoare la stabilirea vizibilității între punctele geodezice, pentru țara noastră $R \approx 6.378\ km$.

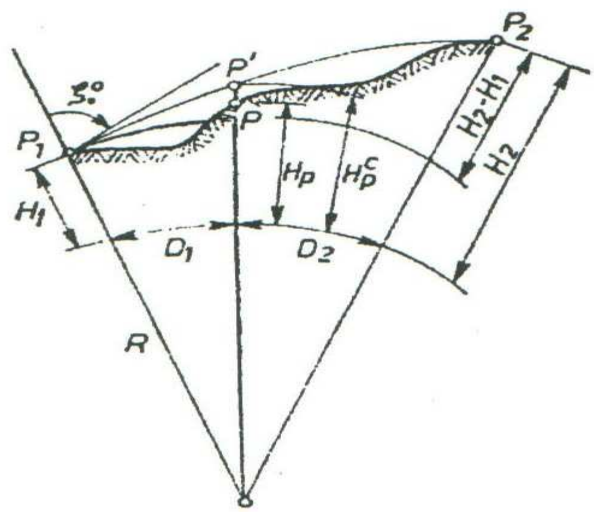


Fig. 37 Calculul vizibilității între punctele P_1 şi P_2

În cadrul nivelmentului trigonometric geodezic este demonstrat că formula aproximativă de calcul a diferenței de nivel între punctele P_1 şi P_2 este :

$$H_2 - H_1 = (D_1 + D_2)ctg\zeta^\circ + (1-k)\frac{(D_1 + D_2)^2}{2R} \qquad 10.1$$

Coeficientul de refracție ***k*** are, în general, o valoare variabilă: pentru calculul vizibilității se acceptă însă o valoare constantă, care pentru țara noastră este k = 0,14. Dacă în termenul doi din membrul drept al relației (10.1) se exprimă distanțele D_1 şi D_2 în km, se obține o valoare constantă: $1-k/2R \cdot 10^{-6} \approx 0{,}0683$, folosită în calculele ulterioare.

Altitudinea calculată H^c_p a unui punct P' situat pe raza vizuală, deasupra punctului P, se poate obține prin particularizarea formulei (6.1), pentru $D_2 = 0$:

$$H_p^c - H_1 = D_1 \cdot ctg\zeta^0 + 0{,}0683\,(D_1)^2_{km} \qquad 10.2$$

Din formula (10.1) se deduce :

$$ctg\zeta^0 = \frac{H_2 - H_1}{D_1 + D_2} - (1-k)\frac{D_1 + D_2}{2R}$$

astfel încât expresia (10.2) devine :

$$H_p^c = H_1 + \frac{D_1}{D_1 + D_2}(H_2 - H_1) - 0{,}0683\,(D_1)_{km} \cdot (D_2)_{km} \qquad 10.3$$

Condiția de vizibilitate între punctele P_1 şi P_2, cu considerarea obstacolului P, este :

$$H_p^c - H_p \geq \varepsilon \qquad \mathit{10}.4$$

În cazul nerespectării condiției (10.4) trebuie construite semnale geodezice de înălțimi corespunzătoare. Atunci când condițiile de vizibilitate nu se pot asigura decât cu semnale geodezice mai înalte de 35 – 40 m (care sunt instabile şi costisitoare), se va căuta o altă variantă de proiectare.

Observații:

1. În cazul în care pe traseul considerat există mai multe obstacole se va studia vizibilitatea pentru fiecare caz în parte, adoptându-se ca soluții definitive valorile maxime ale înălțimilor semnalelor geodezice necesare.

2. În multe cazuri (atunci când nu apar obstacole evidente în lungul razei de vizare) este suficient să se determine vizibilitatea numai la mijlocul traseului, considerând prin urmare $D_1 = D_2 = D/2$, astfel încât relația (10.3) devine :

$$H_p^c = H_1 + \frac{h}{2} - 0,0171 \ D_{km}^2 \qquad 10.5$$

unde $h = H_2 – H_1$, iar D reprezintă distanța totală P_1P_2.

3. Atunci când rezultă diferențe mari între înălțimile semnalelor geodezice necesare în punctele P_1 şi P_2 (l_1 şi respectiv l_2), este necesar să se procedeze la rectificarea acestora (figura 38) calculându-se noi valori l_1 şi l_2 sensibil apropiate, care să permită vizibilitatea între puncte în condiții corespunzătoare.

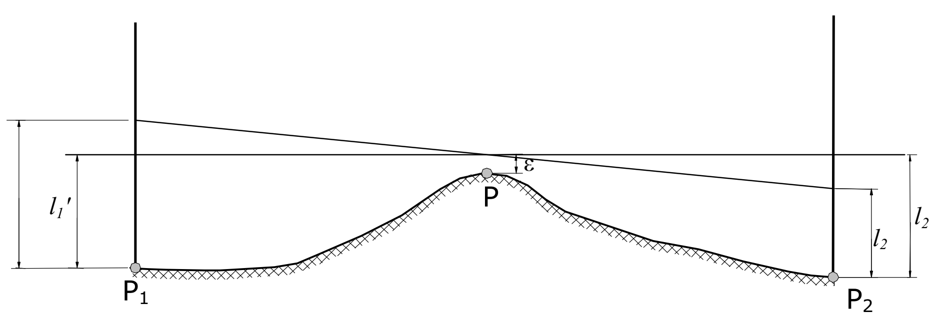


Fig. 38 Rectificarea înălțimilor semnalelor geodezice

Din figura 38 se obține :

$$\frac{l_1 - l_1'}{l_2' - l_2} = \frac{D_1}{D_2}, \text{ adică: } \quad l_2' = l_2 + \left(l_1 - l_1'\right)\frac{D_2}{D_1} \qquad 10.6$$

Micşorând înălțimea semnalului în punctul P_1 cu (l_1 - l'_1), se obține o nouă înălțime a semnalului în punctul P_2 după formula (10.6).

4. Este de semnalat că soluțiile recomandate mai sus se bazează pe cunoaşterea, de pe hartă, a cotelor punctelor geodezice, inclusiv a cotei obstacolului, ceea ce conferă un caracter aproximativ rezultatelor care se obțin. De aceea este bine să se ia unele precauții suplimentare (încă de la proiectare), urmând ca înălțimea necesară a semnelor geodezice să fie stabilită cu exactitate în cadrul operațiunilor de recunoaştere a terenului.

CAP. 11. UNITĂȚI DE MĂSURĂ UTILIZATE ÎN GEODEZIE

11.1 Sistemul internațional de unități

Pentru unificarea unităților de măsură utilizate în diferitele domenii ale fizicii, în 20 mai 1875, 17 țări au creat Convenția Metrului (în 1997 Convenția număra 48 de state printre care şi România).

Reprezentanții țărilor membre ale Convenției Metrului se întrunesc periodic (de regulă la patru ani) în **Conferința Generală de Măsuri şi Greutăți** (CGPM – Conférence Générale de Poids et Mesures) care adoptă rezoluții privind unitățile de măsură. De asemenea, CGPM numeşte Comitetul Internațional de Măsuri şi Greutăți (CIPM – Comité International de Poids et Mesures), format în prezent din 18 persoane reprezentând diferite state membre ale Convenției Metrului. Principala misiune a CIPM constă în asigurarea unificării la nivel mondial a unităților de măsură, acționând direct, sau prin propuneri supuse CGPM. De asemenea, sub autoritatea CIPM se află Biroul Internațional de Măsuri şi Greutăți (BIPM – Bureau International de Poids et mesures), un ansamblu de laboratoare de cercetări în domeniul metrologiei, având sediul în Sèvres –Paris, susținut financiar de țările membre ale Convenției Metrului.

Sistemul Internațional de Unități (SI), utilizat în aproape toate țările lumii, a fost adoptat de CGPM la întrunirea din anul 1960 şi a cunoscut mai multe modificări ulterioare, mai ales în definiția unităților de măsură, pentru a răspunde progreselor tehnologice şi necesității eliminării unor posibilități de interpretare.

Unitățile SI sunt împărțite în două clase:

1.Unitățile de bază (Tabelul 11.1), în număr de şapte, considerate independente din punct de vedere dimensional;

2. Unitățile derivate (Tabelul 11.2), formate prin combinarea unităților de bază, conform relațiilor algebrice care leagă mărimile respective.

Unele unități derivate (Tabelul 11.3) au denumiri şi simboluri proprii, care pot fi utilizate în locul celor formate prin combinarea denumirilor şi simbolurilor unităților de bază. Pentru scrierea unităților SI se folosesc simboluri (tabelele 11..1, 11..2, 11.3). Pentru formarea multiplilor şi submultiplilor zecimali ai unităților SI se folosesc prefixe SI (Tabelul 11.4). În utilizarea denumirilor, simbolurilor şi prefixelor unităților de măsură trebuie respectate mai multe reguli specifice:

∗Simbolurile unităților nu sunt urmate de punct (nu sunt prescurtări);

∗Denumirile unităţilor se scriu cu litere latine mici, chiar dacă provin din nume proprii (newton, pascal, watt, hertz, kelvin, joule, amper etc.);

∗Simbolurile se scriu cu litere latine drepte mici, dacă nu derivă dintr-un nume propriu (**m** - metru, **s** - secundă, **cd** - candelă, **rad** - radian, **t** - tonă etc.);

∗Prima (sau unica) literă a unui simbol se scrie cu litere latine drepte mari, dacă derivă dintr-un nume propriu (**K** - kelvin, **A** - amper, **V** - volt, **W** - watt, **Wb** - weber, **N** - newton, **J** - joule, **Pa** - pascal, **T** - tesla etc.);

∗Pentru „pătrat" şi "cub" se utilizează cifrele ^{2}şi respectiv,^{3} "ridicate" (de exemplu, se scrie km^2 şi nu kmp);

∗Produsul a două unităţi se notează folosind semnul " ˙ " (de exemplu, pentru amper oră se scrie $A \cdot h$ şi nu Ah);

∗Raportul a două unităţi se notează folosind semnul "/" sau puteri negative de exemplu**, m/s^2** sau $m \cdot s^{-2}$);

∗Simbolul unităţii se separă printr-un spaţiu de numărul de dinaintea sa (de exemplu, 1,324 m şi nu 1,324m).

Unităţile SI de bază *Tabelul 11.1.*

Mărimea de bază	**Numele unităţii**	**Simbolul**	**Definiţia unităţii**
Lungime	metru	m	Lungimea traseului parcurs de lumină în vid în 1/299792458 dintr-o secundă
Masă	kilogram	kg	Masa prototipului internaţional sub forma unui cilindru din platină-iridium, păstrat în laboratoarele BIPM
Timp	secundă	s	Durata necesară producerii a 9192631770 perioade a radiaţiei corespunzătoare trecerii între două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133
Curent electric	amper	A	Intensitatea unui curent care, menţinut între doi conductori paraleli cu distanţa de 1 m între ei, produce o forţă de $2 \cdot 10^{-7}$ newton pe metru
Temperatură termodinamică	kelvin	K	1/273,17 din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei
Cantitate de substanţă	mol	mol	Cantitatea de materie conţinând atâtea entităţi elementare (atomi, molecule, ioni, electroni etc.), câţi atomi sunt în 0,012 kg.de carbon 12
Intensitate luminoasă	candelă	cd	Intensitatea luminoasă, într-o direcţie dată, a unei surse care emite o radiaţie monocromatică cu frecvenţa de $540 \cdot 10^{12}$ hertzi şi a cărei intensitate energetică în această direcţie este de 1/683 waţi pe steradian

Unități şi derivate (exemple) *Tabelul 11.2.*

Mărimea derivată	Numele unității	Simbolul
arie	metru pătrat	m^2
volum	metru cub	m^3
viteză	metru pe secundă	m/s
accelerație	metru pe secundă la pătrat	m/s^2

Unități şi derivate, având denumiri şi simboluri proprii (exemple) *Tabelul 11.3.*

Mărimea derivată	Numele unității	Simbolul	Expresia în unități SI de bază
unghi plan	radian	rad	$m \cdot m^{-1}$
unghi solid	steradian	sr	$m^2 \cdot m^{-2}$
frecvență	hertz	Hz	s^{-1}
forță	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
presiune, tensiune mecanică	pascal	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energie, lucru mecanic, cantitate de căldură	joule	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Putere, flux energetic	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$

Prefixe pentru multiplii şi submultiplii unităților SI *Tabelul 11.4.*

Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n

10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

11.2 Unități de măsură în afara sistemului internațional

În activitatea practică se utilizează unități care nu fac parte din SI, dar sunt larg răspândite şi au un rol deosebit de important. O parte dintre aceste unități sunt prezentate în tabelul A.5, fiind incluse cel mai des în lucrările topografice şi geodezice. Unitățile **ar** şi **hectar**, folosite pentru a exprima aria terenurilor, se numără printre cele nerecomandate în documentele CGPM, ca şi **mila marină** şi **nodul**, care sunt încă utilizate în navigația maritimă şi aeriană ca unități de lungime şi, respectiv viteză.

În lucrările topografice şi geodezice se măsoară şi se utilizează frecvent mărimi unghiulare. Marea majoritate a instrumentelor folosite în acest scop, folosesc gradele centesimale (cercul are 400 de grade, unghiul drept are 100 de grade, gradul are 100 de minute, minutul are 100 de secunde). Încă nu există o normă oficială privind simbolurile gradului centesimal şi ai submultiplilor săi. În mai multe publicații tehnice ca simbol al gradului centesimal se utilizează **gon** cu submultiplul **mgon** (1 miligon = 10^{-3} gon = 10 secunde centesimale).

Unități folosite împreună cu SI *Tabelul 11.5.*

Denumirea	**Simbolul**	**Echivalența în unități SI**
minut	min	1min = 60 s
oră	h	1h = 60 min = 3600 s
zi	d	1 d = 24 h = 86 400 s
grad	^{0}	$1^{0} = (\pi/180)$ rad
minut	’	$1' = (1/60)^{0} = (\pi/10\,800)$ rad
secundă	”	$1'' (1/60)' = (\pi/648\,000)$ rad
litru	l sau L	$1L = 1\ dm^{3} = 10^{-3}\ m^{3}$
Milă marină		1milă marină = 1 852 m
nod		1 nod = 1milă marină pe oră = (1 852/3 60 0) m/s

angström	Å	1 Å = 0,1 nm = 10^{-10} m
ar	a	1 a = 1 dam^2 = 10^2 m^2
hectar	ha	1 ha = 1 hm^2 = 10^4 m^2

11.3 Unități de măsură utilizate în trecut pe teritoriul româniei

Pe teritoriul actual al României s-au folosit în decursul timpului unități de măsură diverse pentru exprimarea lungimilor şi ariilor, situație întâlnită, de altfel, în marea majoritate a țărilor europene. Unele dintre aceste unități, de exemplu **stânjenul**, au valori diferite în funcție de timp şi de aria geografică.

De asemenea, nu a existat o tratare uniformă a multiplilor şi submultiplilor. De exemplu, **palma** un submultiplu al stânjenului, a fost subîmpărțită, în diferite zone geografice şi în diferite momente istorice, în 8, în 10 sau în 12 degete.

a. Unități de lungime

Principalele unități de măsură, utilizate în lucrările topo-geodezice şi cadastrale pentru exprimarea lungimilor au fost:

∗**În Țara Românească (Muntenia):**

- **Stânjenul Şerban – Vodă**, introdus de Principele Şerban –Vodă Cantacuzino în anul 1681 sau 1684. Inițial, stânjenul era divizat în **8 palme,** palma în **8, 10**, sau **12 degete**, degetul în **10 linii**. După 1836 şi până la introducerea sistemului metric, inginerii hotarnici au adoptat ca subdiviziuni ale stânjenului Şerban-Vodă, 10 palme, 100 de degete, 1000 de linii.
- **Stânjenul Constantin – Vodă,** introdus de Principele Constantin Brâncoveanu în anul 1700 era divizat în **8 palme,** palma în **8** sau în **10** degete, degetul în **10** linii. A cunoscut o utilizare relativ limită.

∗**În Moldova:**

- **Stânjenul moldovenesc** (sau stânjenul gospod), introdus după anul 1700. Era divizat în 8 palme, palma în **8 palmace**, palmacul în **12 linii**.

∗**În Transilvania şi Bucovina** s-au utilizat unități austriece:

- **Stânjenul austriac** (sau **klafter**) era divizat în **6 picioare** (sau **fuse**), piciorul în **12 țoli** (zoll), țolul în **12 linii**, linia în **12 scrupule**.

∗**În Dobrogea** s-au utilizat unități turceşti:

- **Arşinul mimarilor** (sau **stânjenul turcesc**) era divizat în **24 parmace**, parmacul în **12 haturi**, hatul în **12 nohtale**.

În tabelul 11.6 este prezentată echivalența în metri a unităților de lungime amintite mai sus.

Unități de lungime utilizate pe teritoriul României *Tabelul 11.6*

Provincia	**Unitatea**	**Echivalența (metri)**	**Multipli şi submultipli**
Țara Românească	stânjen Şerban - Vodă	1,9665	palmă = 1/10 stânjeni
			deget = 1/10palme
			linie = 1/10degete
			prăjină = 3stânjeni
	stânjen Constantin – Vodă	2,020	palmă = 1/8 stânjeni
			deget = 1/8 palme
			linie = 1/10 degete
			prăjină = 3 stânjeni
Moldova	stânjen gospod	2,230	palmă = 1/8 stânjeni
			palmac = 1/8 palme
			linie = 1/12 palmace
			prăjină = stânjeni
Transilvania şi Bucovina	stânjen austriac	1,896484	picior = 1/6 stânjeni
			țol = 1/12 picioare
			linie = 1/12 țoli
			scrupul = 1/12 linii
			prăjină(ruth) = 10 picioare
			milă austriacă = 4000 stânjen
Dobrogea	stânjen turcesc (arşinul mimarilor)	0,758	parmac = 1/24 stânjeni
			hat = 1/12 parmace
			nohtală = 1/12 haturi
	arşin (cotul bazarului)	0,680	rup = 1/8 arşini
			ghirahă = 1/2 rupi

b. Unități de arie

Unitățile de arie utilizate în trecut pe teritoriul României sunt, de regulă, derivate din unitățile de lungime adoptate în perioadele şi provinciile respective.

∗**În Țara Românească (Muntenia):**

- **Pogonul,** este unitatea de arie corespunzătoare unui dreptunghi cu lungimea de 24 prăjini (72 stânjeni) şi cu lățimea de 6 prăjini (18 stânjeni), adică 1296 de stânjeni pătrați.
- **Prăjina pogonească**, este unitatea de arie corespunzătoare unui dreptunghi cu lungimea de 6 prăjini (18 stânjeni) şi cu lățimea de 1 prăjină (3 stânjeni), adică 54 stânjeni pătrați, respectiv 1/24 pogoane.

∗**În Moldova:**

- **Falca** (sau **falcea**), este unitatea de arie corespunzătoare unui dreptunghi cu lungimea de 80 prăjini (240 stânjeni) şi cu lățimea de 4 prăjini (12 stânjeni), adică 2880 stânjeni pătrați.
- **Prăjina fălcească**, este unitatea de arie corespunzătoare unui pătrat cu latura de 2 prăjini (6 stânjeni), adică 36 stânjeni pătrați, respectiv 1/80 fălci.

∗**În Transilvania şi Bucovina:**

Iugărul (sau **jugărul**), este unitatea de arie corespunzătoare unui pătrat cu latura de 24 prăjini (40 stânjeni), adică 1600 stânjeni pătrați.

∗**În Dobrogea:**

Donumul, este unitatea de arie corespunzătoare unui pătrat cu latura de 40 stânjeni, adică 1600 stânjeni pătrați.

Unități de arie utilizate pe teritoriul României *Tabelul 11.7*

Provincia	**Unitatea**	**Echivalența**	**Submultipli**
Țara Românească	pogon	5011,790	prăjină pogonească = 1/24 pogoane
			stânjen pătrat = 1/1296 pogoane
Moldova	falcă	14321,952	prăjină fălcească = 1/80 fălci
			stânjen pătrat=1/2880 fălci
Transilvania şi Bucovina	iugăr	5754,618	stânjen pătrat = 1/1600 iugăre
Dobrogea	donum	919,302	stânjen pătrat = 1/1600 donumi

CAP. 12. BIBLIOGRAFIE

1) *** Manualul inginerului geodez, vol I, II, III, Ed. Tehnică, Bucureşti , 1972-1974;
2) ***Colectiv Facultatea de Geodezie Bucureşti**,** Măsurători terestre-Fundamente*,* Editura Matrix ROM, Bucureşti, 2002
3) Ghiţău Dumitru–Geodezie. Triangulaţie, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972;
4) Ghiţău Dumitru–Geodezie şi gravimetrie geodezică, Ed: Didactică
5) Ghiţău, Dumitru-*Geodezie şi gravimetrie geodezică.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983;
6) Grecea Carmen- Introducere în geodezia satelitară, Ed. Mirton, Timişoara, 1999;
7) Grecea Carmen. Geodezie, Ed. Mirton, Timişoara, 2005

.

CUPRINS